COMPOSITIO MATHEMATICA

MOHAMMED EL AMRANI

La forme hermitienne canonique sur la partie invariante de la cohomologie de la fibre de Milnor d'une singularité isolée de polynôme quasi-homogène

Compositio Mathematica, tome 83, n^{o} 1 (1992), p. 107-125

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1992__83_1_107_0>

Compositio Mathematica **83**: 107–125, 1992.

La forme hermitienne canonique sur la partie invariante de la cohomologie de la fibre de Milnor d'une singularité isolée de polynôme quasi-homogène

MOHAMMED EL AMRANI
Université d'Angers, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 2, Boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex, France

Received 12 June 1990; accepted in revised form 10 June 1991

Introduction

Dans [B3], Barlet calcule les coefficients associés aux termes singuliers, i.e. non C^∞ du développement asymptotique en $s = 0$ des fonctions de type $F_\varphi(s) = \int_{P=s} \varphi$ où $P \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ est homogène à singularité isolée, $s \in D = \{s \in \mathbb{C};\ |s| < 1\}$ et les φ sont des (n, n)-formes C^∞ à support compact convenablement choisies. Les coefficients associés aux termes singuliers en $s^k \bar{s}^{k'} \log(s\bar{s})$, qui nous occupent ici, sont donnés en termes d'intégrales de périodes sur le diviseur à l'infini de l'hypersurface projective complétant la fibre de Milnor de la singularité considérée. L'objet du présent travail est précisément l'extension des résultats de [B3] au cas d'un polynôme quasi-homogène à singularité isolée. La première difficulté provient du fait que la compactification naturelle de la fibre de Milnor se réalise dans un espace projectif tordu qui est toujours singulier. De plus, la compactification $\mathbf{V}$ de $\{P = 1\}$, ainsi que sa trace à l'infini $\mathbf{H}$, ne sont plus nécessairement lisses, mais néanmoins munies d'une structure de V-variétés au sens de Steenbrink [St] i.e. une structure d'espaces analytiques à singularités quotients. En exploitant alors la structure locale explicite des V-variétés $\mathbf{V}$ et $\mathbf{H}$, on construit un complexe de formes "quasi-C^∞" adéquat. En utilisant ensuite des résultats de Grothendieck [G] sur les G-faisceaux et la cohomologie G-équivariante, on établit la dégenérescence de la suite spectrale:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{V}, \underline{H}^q_{\mathbf{H}}(\underline{\mathbb{C}}_{\mathbf{V}})) \Rightarrow H^n_{\mathbf{H}}(\mathbf{V}, \underline{\mathbb{C}}_{\mathbf{V}}).$$

Ces préalables mis en place, on résout notre problème après avoir obtenu, dans le cadre des V-variétés considérées, l'analogue de la suite exacte de Leray [L]

$$\cdots \to H^p(\mathbf{V}, \mathbb{C}) \to H^p(\mathbf{V} \backslash \mathbf{H}, \mathbb{C}) \to H^{p-1}(\mathbf{H}, \mathbb{C}) \to H^{p+1}(\mathbf{V}, \mathbb{C}) \to \cdots$$

Dans la seconde partie de ce travail on s'appuie sur les travaux de Dimca [D1] et Dimiev [D2] pour donner une condition nécessaire et suffisante sur les poids de P pour que **V** et **H** soient lisses, puis on indique comment le résultat principal de [B3] s'étend de façon simple.

1. Description des développements asymptotiques

DEFINITION 1. Un polynôme en $x_0, \dots, x_n$ est dit quasi-homogène (q.h.) de type $(q_0, \dots, q_n) \in (\mathbf{N}^*)^{n+1}$ et de degré δ s'il s'écrit comme combinaison linéaire de monômes $x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$ avec $\sum_{i=0}^{n} q_i \alpha_i = \delta$.

REMARQUES. (a) Pour un tel polynôme P on a clairement:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad P(\lambda_0^{q_0} x_0, \dots, \lambda_n^{q_n} x_n) = \lambda^{\delta} P(x_0, \dots, x_n).$$

De plus, si $d = \mathrm{pgcd}(q_0, \dots, q_n)$, alors d divise δ et P est q.h. de type $\left(\frac{q_0}{d}, \dots, \frac{q_n}{d}\right)$ et de degré $\frac{\delta}{d}$.

On pourra donc toujours supposer que les poids sont premiers entre eux dans leur ensemble. On dira alors que le type est réduit.

(b) Le type, même réduit, n'est pas déterminé par la donnée du polynôme et de son degré; en effet $x_0 x_1 + x_2^3 + x_3^4$ est q.h. de types (6, 6, 4, 3) et (5, 7, 4, 3) (entre autres) et degré 12. On a cependant le:

LEMME 1. *Soit P q.h. de type $(q_0, \dots, q_n)$ et de degré δ, admettant un point critique isolé en* 0. *Alors il existe un unique $(p_0, \dots, p_n)$ tel que:*

$$P \text{ soit q.h. de type } (p_0, \dots, p_n) \text{ et } p_i \geqslant \frac{\delta}{2} \qquad i = 0, \dots, n.$$

Preuve. cf. Prop. p. 300 de [S].

REMARQUES. L'hypothèse singularité isolée est essentielle. En effet, $x_0^3 + x_1^4 + x_2 x_3 x_4$ est q.h. de degré 12 pour les types (4, 3, 5, 5, 2) et (4, 3, 6, 5, 1) (entre autres).

LEMME 2. *Pour P q.h. de type $(q_0, \dots, q_n)$ et de degré δ, on a*

$$\sum_{i=0}^{n} q_i x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = \delta \cdot P.$$

Preuve. Evidente car immédiate pour un monôme.

Dans toute la suite P désignera un polynôme q.h. de type $(q_0, \ldots, q_n)$ et de degré δ, admettant un point critique isolé en 0, et ω la forme:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i x_i \, \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\check{x}_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

LEMME 3. *Si m est un autre polynôme q.h. de type $(q_0, \ldots, q_n)$ et de degré Δ, on a:*

$$\mathrm{d}(m\omega) = \frac{\Delta + q}{\delta} \cdot \frac{\mathrm{d}P}{P} \wedge m\omega \quad \textit{où } q = \sum_{i=0}^{n} q_i.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(m\omega) &= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial m}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) \wedge \omega + m \, \mathrm{d}\omega \\ &= \Delta \cdot m \, \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n + q \cdot m \, \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Et

$$\mathrm{d}P \wedge \omega = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) \wedge \omega = \delta \cdot \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

REMARQUES. (a) Dans la pratique, m sera un élément d'une base monômiale de l'algèbre locale artinienne $\mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}/J(P)$ où $J(P)$ est l'idéal jacobien de P.

(b) Pour que $m\omega$ représente une classe dans $H^n(P^{-1}(s), \mathbb{C})$ invariante par la monodromie il faut que

$$\Delta + q \equiv 0[\delta].$$

(c) Si $(m_k)_k$ est une base de $\mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}/J(P)$, avec m_k q.h. de type $(q_0, \ldots, q_n)$ et de degré d_k, alors $(P^{-(d_k + q/\delta)} m_k \omega)_k$ est une base horizontale multiforme du fibré de Gauss-Manin. On sait alors que (cf. [B2]: thm 1 bis, p. 119) le $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$-module des développements asymptotiques est engendré par 1 et les germes en 0 des intégrales:

$$F_{k,k'}(s) = \int_{P=s} \rho m_k \omega \wedge \overline{m_{k'} \omega}$$

où ρ est C^∞ à support compact dans $\mathbb{C}^{n+1}$ valant 1 près de 0.

Par ailleurs les sections horizontales multiformes décrites plus haut pour lesquelles $d_k + q \equiv 0[\delta]$ sont uniformes et représentent donc des vecteurs propres pour la valeur propre 1 de la monodromie. Ce sont de telles sections qui nous occuperont dans ce travail.

PROPOSITION 1. *Si m et m' sont q.h. de type $(q_0, \ldots, q_n)$ et de degrés respectifs d et d' tels que $d + q \equiv 0[\delta]$ et $d' + q \equiv 0[\delta]$, alors:*

$$F(s) = \int_{P=s} \rho m\omega \wedge \overline{m'\omega}$$

admet un unique terme non C^∞ dans son développement asymptotique en $s = 0$ et il est du type:

$$A(m, m')s^{(d+q/\delta}\bar{s}^{(d'+q)/\delta}\,\mathrm{Log}(s\bar{s}).$$

Preuve. Soit $|s|^{2r}s^l\bar{s}^{l'}(\mathrm{Log}\, s\bar{s})^j$ un terme singulier dans ce développement et considérons la transformée de Mellin $M(z)$ de $s^{l'}\bar{s}^l F(s)$:

$$M(z) = \int_{\mathbb{C}} |s|^{2z}s^{l'}\bar{s}^l F(s)\,\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\bar{s}.$$

Les calculs qui vont suivre seront valables pour $\mathrm{Re}\, z \gg 0$; Fubini donne:

$$M(z) = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \rho|P|^{2z}P^{l'}\bar{P}^l m\omega \wedge \overline{m'\omega} \wedge \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}\bar{P}$$

$$= (-1)^n \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \rho|P|^{2z}P^{l'}\bar{P}^l\,\mathrm{d}P \wedge m\omega \wedge \overline{\mathrm{d}P \wedge m'\omega}.$$

Et le lemme 3 pour m donne:

$$M(z) = (-1)^n \frac{\delta}{\mathrm{d} + q} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \rho|P|^{2z}P^{l'+1}\bar{P}^l\,\mathrm{d}(m\omega) \wedge \overline{\mathrm{d}P \wedge m'\omega}$$

$$= (-1)^n \frac{\delta}{\mathrm{d} + q} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \rho|P|^{2z}P^{l'+1}\bar{P}^l\,\mathrm{d}[m\omega \wedge \overline{\mathrm{d}P \wedge m'\omega}].$$

Par Stokes, on a:

$$M(z) = (-1)^{n+1} \frac{\delta}{\mathrm{d} + q} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathrm{d}(\rho|P|^{2z}P^{l'+1}\bar{P}^l) \wedge \mathrm{m}\omega \wedge \overline{\mathrm{d}P \wedge m'\omega}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{\delta}{\mathrm{d} + q} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} |P|^{2z}P^{l'+1}\bar{P}^l\,\mathrm{d}\rho \wedge m\omega \wedge \overline{\mathrm{d}P \wedge m'\omega}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{\delta}{\mathrm{d} + q}(z + l' + 1) \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \rho|P|^{2z}P^{l'}\bar{P}^l\,\mathrm{d}P \wedge m\omega \wedge \overline{\mathrm{d}P \wedge m'\omega}.$$

Ainsi:

$$\frac{\delta}{\mathrm{d}+q}\left(z+l'+1+\frac{\mathrm{d}+q}{\delta}\right)M(z)$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{\delta}{\mathrm{d}+q}\int_{\mathbb{C}^{n+1}}|P|^{2z}P^{l'+1}\bar{P}^{l}\,\mathrm{d}\rho\wedge m\omega\wedge\overline{\mathrm{d}P\wedge m'\omega}.$$

Or $d\rho \equiv 0$ au voisinage de 0 et P submersive en dehors de 0 permet de montrer à travers une partition de l'unité que le terme de droite est la transformée de Mellin d'une fonction C^∞ en $s = 0$, donc ne possède que des pôles simples et aux entiers $\leqslant 0$. Par ailleurs le terme $|s|^{2r}s^l\bar{s}^{l'}(\mathrm{Log}(s\bar{s}))^j$ de F aura une contribution méromorphe dans $M(z)$ du type $[1/(z+r+l+l'+1)^{j+1}]$. Ceci montre déjà que $j \leqslant 1$.

Et si $j = 0$, alors

$$r+l+l'+1\in\mathbf{N}\Rightarrow r\in\mathbf{Z}\Rightarrow r=0.$$

Et si $j = 1$, alors

$$r+l+l'+1=l'+1+\frac{\mathrm{d}+q}{\delta}\Rightarrow r+l=\frac{\mathrm{d}+q}{\delta}\Rightarrow r\in\mathbf{Z}\Rightarrow r=0$$

et

$$l=\frac{\mathrm{d}+q}{\delta}.$$

On montre que $l' = (d'+q)/\delta$ en dirigeant le calcul sur m'.

REMARQUE. Si $d+q \not\equiv 0[\delta]$ ou $d'+q \not\equiv 0[\delta]$ alors $F(s)$ est C^∞ près de 0. En effet:

LEMME 4. *Si m et m' sont q.h. de type $(q_0,\dots,q_n)$ et de degrés d et d' respectivement, alors $F(s)=\int_{P=s}\rho m\omega\wedge\overline{m'\omega}$ vérifie:*

$$F(\lambda^\delta\cdot s)=\lambda^{d+q}\bar{\lambda}^{d'+q}F(s)\ \textit{modulo}\ C^\infty_{\mathbb{C},0}.$$

Preuve. Fixons $\lambda\in\mathbb{C}^*$ et faisons le changement de variables $x_i=\lambda^{q_i}y_i$, $i=0,\dots,n$ dans l'intégrale. La quasi-homogénéité de degré q de ω donne:

$$F(s)=\lambda^{d+q}\bar{\lambda}^{d'+q}\int_{\lambda^\delta\cdot P=s}\rho_\lambda m\omega\wedge\overline{m'\omega}$$

où $\rho_\lambda(y_0, \ldots, y_n) = \rho(\lambda^{q_0} y_0, \ldots, \lambda^{q_n} y_n)$. D'où:

$$F(\lambda^\delta \cdot s) - \lambda^{d+q}\bar{\lambda}^{d'+q} F(s) = \lambda^{d+q}\bar{\lambda}^{d'+q} \int_{P=s} (\rho_\lambda - \rho) m\omega \wedge \overline{m'\omega},$$

avec un terme de droite C^∞ en $s = 0$ car $\rho_\lambda - \rho$ est nulle près de 0 et P est submersive en dehors de 0.

2. Compactifications et modèles locaux explicites

Notons $\operatorname{diag}(a_0, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale $(n \times 1) \times (n+1)$ (a_{ij}) avec $a_{ii} = a_i$, $i = 0, \ldots, n$. Notons $e(\alpha)$ le complexe $\exp(2i\pi\alpha)$. Désignons par G le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$ formé des éléments du type:

$$\operatorname{diag}\left(e\left(\frac{\beta_0}{q_0}\right), \ldots, e\left(\frac{\beta_n}{q_n}\right)\right), \qquad \beta_i = 0, \ldots, q_i - 1.$$

DEFINITION 2. On appelle espace projectif tordu de type $Q_n = (q_0, \ldots, q_n)$, noté $\mathbf{P}(Q_n)$, le quotient $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})/G$. Il y a une autre description de $\mathbf{P}(Q_n)$ qui nous sera utile:

Soit $\sim$ la relation d'equivalence dans $(\mathbb{C}^{n+1})^* : (x'_0, \ldots, x'_n) \sim (x_0, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* tq\colon x'_i = \lambda^{q_i} x_i\, i = 0, \ldots, n$.

Il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^{n+1})^* & \xrightarrow{p} & \mathbf{P}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{P}^n/G \\ \varphi \downarrow & & & & \downarrow \wr\psi \\ (\mathbb{C}^{n+1})^* & & \xrightarrow{r} & & (\mathbb{C}^{n+1})^*/\sim \end{array}$$

où p, π, r sont les projections naturelles, $\varphi(x_0, \ldots, x_n) = (x_0^{q_0}, \ldots, x_n^{q_n})$, et $\psi(\text{classe}[x_0, \ldots, x_n]) = \text{classe}(x_0^{q_0}, \ldots, x_n^{q_n})$; il est assez immédiat de vérifier que ψ est bien définie et que c'est un isomorphisme.

Il y a un autre espace projectif qui nous intéressera, c'est $\mathbf{P}(Q_{n+1})$ où $Q_{n+1} = (q_0, \ldots, q_n, 1)$. On notera encore $r\colon (\mathbb{C}^{n+2})^* \to (\mathbb{C}^{n+2})^*/\sim$ la projection naturelle correspondante. Pour $i = 0, \ldots, n+1$ fixé, soit r_i la composée de r avec l'injection:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \to & \mathbb{C}^{n+2} \\ (\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) & \mapsto & (\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \end{array}$$

Appelons M_i l'image $r_i(\mathbb{C}^{n+1})$. Un examen rapide de $\sim$ montre que $M_i = \mathbb{C}^{n+1}/G_i$, où G_i le sous-groupe cyclique de $GL(n+1, \mathbb{C})$ engendré par $\gamma_i = \operatorname{diag}\left(e\left(\frac{q_0}{q_i}\right), \ldots, e\left(\frac{q_{i-1}}{q_i}\right), e\left(\frac{q_{i+1}}{q_i}\right), \ldots, e\left(\frac{q_{n+1}}{q_i}\right)\right)$ (en convenant que $q_{n+1} = 1$). En conclusion $G_{n+1} = \mathbf{1}$ et $M_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}$. D'où:

LEMME 5. $\mathbf{P}(Q_{n+1})$ *réalise une compactification de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *par l'adjonction d'un "hyperplan à l'infini" noté* $\mathbf{P}^\infty(Q_{n+1})$ *isomorphe à* $\mathbf{P}(Q_n)$.

Posons $P'(x_0, \ldots, x_{n+1}) = P(x_0, \ldots, x_n) - x_{n+1}^\delta$, et pour $i = 0, \ldots, n+1$:

$$P_i'(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) = P'(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}).$$

Soient $\mathbf{V} = \{P' = 0\} \subset \mathbf{P}(Q_{n+1})$ et $\mathscr{H} = V \cap \mathbf{P}^\infty(Q_{n+1})$,

$$U_i = \{P_i' = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad i = 0, \ldots, n+1,$$

$$K_i = U_i \cap \{\xi_{n+1} = 0\}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Alors U_i et K_i sont stables par G_i, d'où:

$$V_i := r_i(U_i) = U_i/G_i, \quad i = 0, \ldots, n+1;$$

$$H_i := r_i(K_i) = K_i/G_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

$(V_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ et $(H_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ constituent des recouvrements ouverts de $\mathbf{V}$ et $\mathscr{H}$ respectivement. On a donc le:

LEMME 6. $\mathbf{V}$ *réalise une compactification de l'hypersurface de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *donnée par* $P = 1$, *par l'adjonction de* $\mathscr{H}$ *à l'infini.*

Le fait important pour la suite est que les U_i et K_i sont lisses. En effet:

$$\frac{\partial P_i'}{\partial \xi_k} = 0,\ k \neq i \text{ et } P_i' = 0 \Rightarrow \xi_{n+1} = P = 0 \text{ (et donc } i \neq n+1)$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial x_k} = 0, \qquad k \neq i.$$

Mais Euler $\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x_i} = 0$, aussi, par hypothèse de singularité isolée on aurait dans $\mathbb{C}^{n+1}$ $(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) = 0$. Ce qui est absurde.

DÉFINITION 3. Une V-variété de dimension n est un espace analytique localement isomorphe au quotient d'une variété lisse de dimension n par l'action d'un groupe fini d'automorphismes.

Nous avons ainsi prouvé la:

PROPOSITION 2. $\mathbf{P}(Q_{n+1})$, $\mathbf{P}(Q_n)$, $\mathbf{V}$ *et* $\mathscr{H}$ *sont des V-variétés de dimensions* $n+1$, n, n, $n-1$ *respectivement.*

REMARQUE: On aurait pu espérer une description plus simple de $\mathbf{V}$ et $\mathscr{H}$, c'est-à-dire avoir des modèles globaux à travers $\pi\colon \mathbf{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}(Q_{n+1})$, comme c'est le cas pour $\mathbf{P}(Q_{n+1})$ et $\mathbf{P}(Q_n)$. Ceci n'est pas possible, comme le montre l'exemple suivant: $P(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1 + x_1^2 + x_2^3$, où avec les notations précédentes, on a:

$$\mathbf{V} = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{P}(3, 6, 4, 1);\ P(x_0, x_1, x_2) = x_3^{12}\}$$

$$\pi^{-1}\mathbf{V} = \mathscr{U} = \{[y_0, y, y_2, y_3] \in \mathbf{P}^3(\mathbb{C});\ y_0^6 y_1^6 + y_1^{12} + y_2^{12} = y_3^{12}\}$$

$\mathscr{U}$ est stable par G, $\mathbf{V} = \mathscr{U}/G$, mais $\mathscr{U}$ se trouve singulier au point $[1, 0, 0, 0]$ de $\mathbf{P}^3(\mathbb{C})$.

3. Résultats de Leray pour le couple ($\mathbf{V}$, $\mathscr{H}$)

On a $V_{i,j} := V_i \cap V_j = V_{j,i} = r_i(U_{i,j}) = r_j(U_{j,i})$ où

$$U_{i,j} = \{(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \in U_i,\ \xi_j \neq 0\}, \qquad i \neq j.$$

Pour $S_i^a = \{z \in \mathbb{C}^*;\ (z/|z|)^{q_i} \neq 2a - 1\}$, $a = 0, 1$, soit

$$U_{i,j}^a = \{(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \in U_i,\ \xi_j \in S_i^a\}$$

et $V_{i,j}^a = r_i(U_{i,j}^a)$.

Alors $U_{i,j}^a$ est stable par G_i et on a:

$$U_{i,j} = U_{i,j}^0 \cup U_{i,j}^1$$

$$V_{i,j} = V_{i,j}^0 \cup V_{i,j}^1 \quad \text{et} \quad V_{i,j}^a = U_{i,j}^a / G_i,\ a = 0, 1.$$

Notons $\tilde{\lambda}_{j,i}^a$ le morphisme:

$$U_{i,j}^a \to \mathbb{C}^{n+1}$$

$$(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \to (\xi_j^{-q_0/q_j}\xi_0, \ldots, \xi_j^{-(q_{i-1}/q_j)}\xi_{i-1}, \xi_j^{-(q_i/q_j)}, \xi_j^{-(q_{i+1}/q_j)}\xi_{i+1}, \ldots,$$
$$\xi_j^{-(q_{j-1}/q_j)}\xi_{j-1}, \xi_j^{-(q_{j+1}/q_j)}\xi_{j+1}, \ldots, \xi_j^{-(q_{n+1}/q_j)}\xi_{n+1})$$

où $\xi_j^{-(1/q_j)}$ est définie par une détermination du log sur S_i^a. Le morphisme $\tilde{\lambda}_{j,i}^a$ est à valeurs dans $U_{j,i}^a$ car:

$$P'_j(\tilde{\lambda}^a_{j,i}(\xi_0,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_{n+1})) = \xi_j^{-(\delta/q_j)} P'_i(\xi_0,\dots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\dots,\xi_{n+1})$$

et

$$\left(\frac{\xi_j^{-(q_i/q_j)}}{|\xi_j^{-(q_i/q_j)}|}\right)^{q_j} = \left(\frac{\xi_j}{|\xi_j|}\right)^{-q_i} \neq \frac{1}{2a-1} = 2a-1, \qquad a = 0, 1.$$

$\tilde{\lambda}^a_{j,i}$ est équivariante sous les actions de G_i et G_j. En fait il est facile de vérifier que sur chaque composante connexe de $U^a_{i,j}$ on a: $\tilde{\lambda}^a_{j,i}\circ\gamma_i = \gamma_j^k\circ\tilde{\lambda}^a_{j,i}$ où $k\in\mathbf{N}$. $\tilde{\lambda}^a_{j,i}$ est clairement un isomorphisme d'inverse $\tilde{\lambda}^a_{i,j}$ (avec le bon choix de log). Il s'ensuit des isomorphismes: $\lambda^a_{j,i}\colon V^a_{i,j}\xrightarrow{\sim} V^a_{j,i}$ tels que $(\lambda^a_{j,i})^{-1} = \lambda^a_{i,j}$. Par ailleurs pour $U^{0,1}_{i,j} = U^0_{i,j}\cap U^1_{i,j}$ on a $U^{0,1}_{i,j} = A_{i,j}\cup B_{i,j}$ où $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ correspondent aux "secteurs" A et B de $S_i^{0,1} = S_i^0\cap S_i^1$, avec

$$A = \left\{z\in\mathbb{C}^*;\ 0 < \text{“}\arg z\text{”} < \frac{\pi}{q_i}\right\}$$

et

$$B = S_i^{0,1}\backslash A.$$

On peut choisir les déterminations du log sur S_i^0 et S_i^1 de façon que les $\xi_j^{-(1/q_j)}$ correspondantes coïncident sur B et s'échangent par la multiplication par $e(-1/q_j)$ sur A. Il s'ensuit un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
U^{0,1}_{i,j} \arrow[r, "\tilde{\lambda}^0_{j,i}"] \arrow[d, "\tilde{\lambda}^1_{j,i}"'] & U^{0,1}_{j,i} \arrow[dl, "\gamma"] \\
U^{0,1}_{j,i} &
\end{tikzcd}$$

où

$$\gamma|_{\tilde{\lambda}^0_{j,i}(B_{i,j})} = \mathbf{1}\in G_j$$

$$\gamma|_{\tilde{\lambda}^0_{j,i}(A_{i,j})} = \gamma_j\in G_j$$

En conséquence les $\lambda^a_{j,i}\colon V^a_{i,j}\to V^a_{j,i}$, $a = 0, 1$ se recollent et définissent des isomorphismes $\lambda_{j,i}\colon V_{i,j}\to V_{j,i}$ vérifiant:

- $\lambda_{j,i}\circ\lambda_{i,j} = \mathbf{1}_{V_{i,j}}$
- $\lambda_{i,k}\circ\lambda_{k,j}\circ\lambda_{j,i} = \mathbf{1}_{V_{i,j,k}}$ où $V_{i,j,k} = V_i\cap V_j\cap V_k$

Cette dernière propriété découle du fait que pour un bon choix des déterminations du log on a:

$$\tilde{\lambda}^a_{i,k}\circ\tilde{\lambda}^a_{k,j}\circ\tilde{\lambda}^a_{j,i} = \mathbf{1}_{U^a_{i,j,k}} \qquad a = 0, 1,$$

où

$$U^a_{i,j,k} = \left\{(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) \in U_{i,j} \cap U_{i,k};\ \left(\frac{\xi_k}{|\xi_k|}\right)^{q_j} \neq (2a-1)\left(\frac{\xi_j}{|\xi_j|}\right)^{q_k}\right\}$$

Soit maintenant $i = 0, \ldots, n+1$, $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet_i$ l'un des complexes de faisceaux sur U_i, $\mathscr{E}^\bullet_{U_i}$, $\Omega^\bullet_{U_i}$, $\mathscr{E}^\bullet_{U_i}(\log K_i)$, $\Omega^\bullet_{U_i}(\log K_i)$, $\mathscr{E}^\bullet_{U_i}(*K_i)$ et $\Omega^\bullet_{U_i}(*K_i)$. Sur V_i nous définissons les complexes de faisceaux:

$$W \to \tilde{\mathscr{F}}^\bullet_i(W) := \mathscr{F}^{\bullet G_i}_i(r_i^{-1}(W)) = \{\varphi \in \mathscr{F}^\bullet_i(r_i^{-1}(W)),\ \gamma_i^*(\varphi) = \varphi\}.$$

Les $\lambda_{j,i}$: $V_{i,j} \to V_{j,i}$ permettent de définir des isomorphismes $\theta_{j,i}: \tilde{\mathscr{F}}^\bullet_i|_{V_{i,j}} \to \tilde{\mathscr{F}}^\bullet_j|_{V_{j,i}}$ tels que:

$$\theta_{i,j} \circ \theta_{j,i} = \mathbf{1}_{\tilde{\mathscr{F}}^\bullet_i|V_{i,j}}$$

$$\theta_{i,k} \circ \theta_{k,j} \circ \theta_{j,i} = \mathbf{1}_{\tilde{\mathscr{F}}^\bullet_i|V_{i,j,k}}$$

Ceci est clair: $\theta_{j,i}$ agit sur une section φ au travers de $\tilde{\lambda}^a_{i,j}$ $((\lambda^a_{i,j})^*: \mathscr{F}^\bullet_i|_{U^a_{i,j}} \to (\lambda^a_{i,j})_*(\mathscr{F}^\bullet_j|_{U^a_{j,i}}))$ par équivariance de ce dernier et invariance de φ. Ces faits permettent alors de définir des complexes de faisceaux par recollement des $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet_i$.

DEFINITION 4. Nous noterons $\mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}$, $\Omega^\bullet_{\mathbf{V}}$, $\mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(\log \mathscr{H})$, $\Omega^\bullet_{\mathbf{V}}(\log \mathscr{H})$, $\mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H})$, $\Omega^\bullet_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H})$ les complexes de faisceaux sur $\mathbf{V}$ obtenus par recollement des $\tilde{\mathscr{E}}^\bullet_{U_i}$, $\tilde{\Omega}^\bullet_{U_i}$, $\tilde{\mathscr{E}}^\bullet_{U_i}(\log K_i)$, $\tilde{\Omega}^\bullet_{U_i}(\log K_i)$, $\tilde{\mathscr{E}}^\bullet_{U_i}(*K_i)$, $\tilde{\Omega}^\bullet_{U_i}(*K_i)$, respectivement.

PROPOSITION 3. *Les flèches naturelles suivantes sont des quasi-isomorphismes:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{\mathbf{V}} & \to & \Omega^\bullet_{\mathbf{V}} \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^\bullet_{\mathbf{V}}(\log \mathscr{H}) & \to & \Omega^\bullet_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H}) & \to & Rj_*(\Omega^\bullet_{\mathbf{V}\setminus\mathscr{H}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(\log \mathscr{H}) & \to & \mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H}) & \to & Rj_*(\mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}\setminus\mathscr{H}}) = j_*(\mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}\setminus\mathscr{H}}) \end{array}$$

où $j: \mathscr{H} \hookrightarrow \mathbf{V}$ est l'inclusion.

Preuve. Nous ne ferons la démonstration que pour l'une des flèches du triangle; pour les autres flèches, les arguments sont semblables (cf. aussi la démonstration du corollaire suivant).

La question est d'ordre local. On peut donc remplacer $\mathbf{V}$ par V_i: Soit donc $\varphi_x \in \mathscr{E}^0_{V_i\,x}$, $d\varphi_x = 0$. Soit W voisinage ouvert de x et $\varphi \in \mathscr{E}^0_{V_i}(W)$ telle que:

$(\varphi)_x = \phi_x$ et $\mathrm{d}\varphi = 0$. φ est donc localement constante sur $r_i^{-1}(W)$, et par conséquent constante puisqu'invariante par G_i.

Soit $p \geqslant 1$, $\varphi_x \in \mathscr{E}^p_{V_{i,x}}$, $\mathrm{d}\varphi_x = 0$. Soit W voisinage ouvert de x, $\varphi \in \mathscr{E}^p_{V_i}(W)$ tels que: $(\varphi)_x = \varphi_x$ et $\mathrm{d}\varphi = 0$. Par ouverture de r_i, on peut supposer que l'une des composantes connexes A_1, de $r_i^{-1}(W)$, est un voisinage ouvert contractile de l'un des points de la fibre $r_i^{-1}(x)$, les autres composantes étant les $A_l = \gamma_i^{l-1}(A_1)$, $l \geqslant 2$. Le lemme de Poincaré appliqué à A_1 donne $\psi_1 \in \mathscr{E}^{p-1}_{U_i}(A_1)$ telle que $\mathrm{d}\psi_1 = \varphi|_{A_1}$. Alors $\psi_l := (\gamma_i^{1-l})^*(\psi_i)$ vérifie $\mathrm{d}\psi_l = \varphi|_{A_l}$, par invariance de φ.

Si $\psi \in \mathscr{E}^{p-1}_{U_i}(r_i^{-1}(W))$ est définie par $\psi|_{A_l} = \psi_l$ on a $\mathrm{d}\psi = \varphi$, $\psi \in \mathscr{E}^{p-1}_{V_i}(W)$ et $\mathrm{d}(\psi)_x = (\varphi)_x = \varphi_x$.

COROLLAIRE 1.

$$\underline{H}^k_{\mathscr{H}}(\underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}}) = \begin{cases} 0 & si\ k \neq 2 \\ \underline{\mathbb{C}}_{\mathscr{H}} & si\ k = 2. \end{cases}$$

Preuve. Le triangle:

$$\begin{tikzcd} R\underline{\Gamma}_{\mathscr{H}}(\underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}}) \arrow[rr] & & \underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}} \\ & Rj_*(\underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}}) \arrow[ul, "+1"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

montre qu'il suffit de prouver que:

$$R^k j_*(\underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0, 1 \\ \underline{\mathbb{C}}_{\mathscr{H}} & \text{si } k = 1 \\ \underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}} & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Or $\underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}} \to \mathscr{E}^{\bullet}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}}$ est un quasi-isomorphisme, et $\mathscr{E}^{\bullet}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}}$ est fin par lissité de $\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}$. Ainsi $Rj_*(\underline{\mathbb{C}}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}}) = Rj_*(\mathscr{E}^{\bullet}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}}) = j_*(\mathscr{E}^{\bullet}_{\mathrm{V}\setminus\mathscr{H}})$. Soit $x \in \mathscr{H}$, $\varphi_x \in j_*(\mathscr{E}^p_{V_i\setminus\mathscr{H}})_x$, $\mathrm{d}\varphi_x = 0$. Soit W voisinage de x dans V_i, $\varphi \in \mathscr{E}^p_{V_i}(W\setminus\mathscr{H})$ tels que: $(\varphi)_x = \varphi_x$ et $\mathrm{d}\varphi = 0$. On peut supposer que les composantes connexes $(A_l)_{l\geqslant 1}$ de $r_i^{-1}(W)$ sont telles que: A_1 et $A_1 \cap K_i$ contractiles et $A_l = \gamma_i^{l-1}(A_1)$, $l \geqslant 2$. Si $p \geqslant 2$, il existe $\psi_1 \in \mathscr{E}^{p-1}_{U_i}(A_1\setminus K_i)$ telle que $\mathrm{d}\psi_1 = \varphi|_{A_1\setminus K_i}$. Et pour ψ définie par: $\psi|_{A_l\setminus K_i} = (\gamma_i^{1-l})^*(\psi_1)$, $l \geqslant 2$, on a: $\psi \in \mathscr{E}^{p-1}_{V_i}(W\setminus\mathscr{H})$ et $\mathrm{d}\psi = \varphi$, d'où $(\psi)_x \in j_*(\mathscr{E}^{p-1}_{V_i\setminus\mathscr{H}})_x$ et $\mathrm{d}(\psi)_x = \varphi_x$.

Si $p = 0$, φ est localement constante or $A_1 \setminus K_i$ est connexe, donc φ est constante par invariance.

Par ailleurs $(\mathrm{d}\xi_{n+1}/\xi_{n+1})$ est invariante par G_i et définit alors un morphisme:

$$\rho: \mathbb{C} \to H^1(W\setminus\mathscr{H}, \mathbb{C})$$

$$c \to c\left[\frac{\mathrm{d}\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}}\bigg|_{W\setminus\mathscr{H}}\right]$$

pour tout ouvert $W \subset V_i$.

Il suffit de montrer que c'est un isomorphisme pour W convenable. Prenons W tel que: $r_i^{-1}(W) = \amalg_{l \geq 1} A_l$, $A_l = \gamma_i^{l-1}(A_1)$, A_1 contractile, $A_1 \cap K_i$ connexe. Si $\rho(c) = 0$, il existe $\psi \in \mathscr{E}^0_{V_i}(W \backslash \mathscr{H})$, $\mathrm{d}\psi = c(\mathrm{d}\xi_{n+1}/\xi_{n+1})$. Or $c[\mathrm{d}\xi_{n+1}/\xi_{n+1}] = 0$ dans $H^1(A_1 \backslash K_i, \mathbb{C})$ et donc $c = 0$.

Si $\alpha = [\varphi]$ est la classe dans $H^1(W \backslash \mathscr{H}, \mathbb{C})$ d'une forme $\varphi \in \mathscr{E}^1_{V_i}(W \backslash \mathscr{H})$, $\varphi|_{A_1 \backslash K_i}$ représente une classe dans $H^1(A_1 \backslash K_i, \mathbb{C})$. Ainsi, il existe $\psi_1 \in \mathscr{E}^0_{U_i}(A_1 \backslash K_i)$, $c \in \mathbb{C}$ tq:

$$\varphi|_{A_1 \backslash K_i} = c \frac{\mathrm{d}\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} + \mathrm{d}\psi_1.$$

Et pour ψ définie par: $\psi|_{A_l \backslash K_i} = (\gamma_i^{1-l})^*(\psi_1)$ on a:

$$\psi \in \mathscr{E}^0_{V_i}(W \backslash \mathscr{H}) \text{ et } \varphi = c \frac{\mathrm{d}\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} + \mathrm{d}\psi \Rightarrow \alpha = \rho(c).$$

COROLLAIRE 2. *On a la longue suite exacte de Leray:*

$$\cdots \to H^p(\mathbf{V}, \mathbb{C}) \to H^p(\mathbf{V} \backslash \mathscr{H}) \xrightarrow{\text{Res}} H^{p-1}(\mathscr{H}, \mathbb{C}) \to H^{p+1}(\mathbf{V}, \mathbb{C}) \to \cdots$$

De plus:

$$H^p(\mathbf{V} \backslash \mathscr{H}, \mathbb{C}) = H^p(\Gamma(\mathbf{V}, \mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H}))) = H^p(\Gamma(\mathbf{V}, \mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(\log \mathscr{H}))).$$

Preuve. La première assertion découle de la dégénérescence de la suite spectrale:

$$E_2^{a,b} = H^a(\mathbf{V}, \underline{H}^b_{\mathscr{H}}(\underline{\mathbb{C}}_{\mathbf{V}})) \Rightarrow H^{a+b}_{\mathscr{H}}(\mathbf{V}, \underline{\mathbb{C}}_{\mathbf{V}}).$$

La deuxième assertion vient de ce que les deux complexes $\mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H})$ et $\mathscr{E}^\bullet_{\mathbf{V}}(\log \mathscr{H})$ sont des résolutions de $Rj_*(\underline{\mathbb{C}}_{\mathbf{V} \backslash \mathscr{H}})$, qui sont fines, car une partition de l'unité dans $\mathscr{E}^0_{\mathbf{V}}$ est évidemment constructible (par compacité de $\mathbf{V}$) en se ramenant à des manipulations locales.

REMARQUE. Les résultats du corollaire 2 sont obtenus par Danilov et Khovanskii ([D-K], p. 289) dans le cadre plus général des variétés toriques.

4. Résultat principal

Soit $\Delta = \mathrm{ppcm}(q_0, \ldots, q_n)$, et posons, pour tout $R > 0$:

$$B(0, R) = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1};\ \sum_{j=0}^{n} |x_j|^{2\Delta/q_j} < R^{2\Delta}\right\}.$$

THÉORÈME 1. *Soient m et m′ deux polynômes q.h. de type* $(q_0, \ldots, q_n)$ *de degrés respectifs* $k\delta - q$, $k'\delta - q$ *avec* k, k' *dans* $\mathbf{N}^*$. *Alors le coefficient de* $s^k\bar{s}^{k'}\log(s\bar{s})$ *dans le développement asymptotique en* $s = 0$ *de l'intégrale*

$$F(s) = \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{(P=s)\cap B(0,1)} m\omega \wedge \overline{m'\omega}$$

vaut

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^{n-1}\delta}\operatorname{Trace}(\operatorname{Res}[m\omega] \cup \overline{\operatorname{Res}[m'\omega]})$$

où $\cup: H^{n-1}(\mathscr{H}, \mathbb{C}) \times H^{n-1}(\mathscr{H}, \mathbb{C}) \to H^{2n-2}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ *est le cup-produit et* $\operatorname{Trace}: H^{2n-2}(\mathscr{H}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *est l'intégration sur* $\mathscr{H}$.

Preuve. Nous pouvons nous restreindre à $s > 0$. Le changement de variables $x_j = s^{q_j/\delta}\cdot y_j$ dans l'intégrale donne:

$$F(s) = \frac{s^{k+k'}}{(2i\pi)^n}\int_{(P=1)\cap B(0,s^{-1/\delta})} m\omega \wedge \overline{m'\omega}.$$

Or $T(x_0, \ldots, x_{n+1}) = |x_{n+1}|^2(\Sigma_{j=0}^n |x_j|^{2\Delta/q_j})^{-1/\Delta}$ est bien définie sur $\mathbf{V}$, comme on le voit immédiatement.

Alors $T_\varepsilon := \{$classe de $(x_0, \ldots, x_{n+1})$; $T(x_0, \ldots, x_{n+1}) \leqslant \varepsilon^2\}$, on a:

$$F(s) = \frac{s^{k+k'}}{(2i\pi)^n}\int_{\mathbf{V}\setminus T_{\Delta 1/\delta}} m\omega \wedge \overline{m'\omega}$$

et on se ramène ainsi à chercher le terme en $\log\varepsilon^2$ "dans" l'intégrale:

$$\frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\mathbf{V}\setminus T_\varepsilon} m\omega \wedge \overline{m'\omega}.$$

Il est évident que $m\omega|_{\mathbf{V}}$ et $m'\omega|_{\mathbf{V}}$ sont dans $\Gamma(\mathbf{V}, \Omega^n_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H}))$ et $d(m\omega|_{\mathbf{V}}) = d(m'\omega|_{\mathbf{V}}) = 0$. Elles définissent donc des classes $[m\omega]$ *et* $[m'\omega]$ dans $H^n(\mathbf{V}\setminus\mathscr{H}, \mathbb{C})$. Le corollaire 2 de la proposition 3, fournit:

θ, θ' dans $\Gamma(\mathbf{V}, \mathscr{E}^n_{\mathbf{V}}(\log\mathscr{H}))$; η, η' dans $\Gamma(\mathbf{V}, \mathscr{E}^{n-1}_{\mathbf{V}}(*\mathscr{H}))$

telles que:

$$m\omega = \theta + d\eta \quad \text{et} \quad m'\omega = \theta' + d\eta'.$$

Ainsi

$$m\omega \wedge \overline{m'\omega} = \theta \wedge \bar{\theta}' + \mathrm{d}((-1)^n \theta \wedge \bar{\eta}' + \eta \wedge (\bar{\theta}' + \mathrm{d}\bar{\eta}')) = \theta \wedge \bar{\theta}' + \mathrm{d}\varphi.$$

Soit $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in A}$ une partition de l'unité dans $\mathscr{E}^0_{\mathbf{V}}$ (cf. preuve du corollaire 2 de la proposition 3) subordonnée a un recouvrement fini $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ plus fin que le recouvrement (V_i) de $\mathbf{V}$. Si $\chi\colon A \to \{0, \ldots, n+1\}$ est une fonction de raffinement, nous noterons simplement i l'image $\chi(\alpha)$. Alors:

$$m\omega \wedge \overline{m'\omega} = \sum_{\alpha\in A} \sigma_\alpha \theta \wedge \bar{\theta}' + \sum_{\alpha\in A} \mathrm{d}(\sigma_\alpha \varphi)$$

d'où

$$\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbf{V}\setminus T_\varepsilon} m\omega \wedge \overline{m'\omega} = \sum_{\alpha\in A} I_\alpha(\varepsilon) + \sum_{\alpha\in A} J_\alpha(\varepsilon)$$

avec, d'une part:

$$\begin{aligned} I_\alpha(\varepsilon) &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbf{V}\setminus T_\varepsilon} \sigma_\alpha \theta \wedge \bar{\theta}' = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{V_i\setminus T_\varepsilon} \sigma_\alpha \theta \wedge \bar{\theta}' \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n |G_i|} \cdot \int_{U_i\setminus T_{i,\varepsilon}} \sigma_\alpha \theta_i \wedge \bar{\theta}'_i \end{aligned}$$

où $\theta_i = r_i^*(\theta|_{V_i})$, $\theta'_i = r_i^*(\theta'|_{V_i})$, $T_{i,\varepsilon} = \{T_i \leqslant \varepsilon^2\}$

et

$$T_i(\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n+1}) = |\xi_{n+1}|^2 \cdot \left(1 + \sum_{j\neq i} |\xi_j|^{2(\Delta/q_j)}\right)^{-1/\Delta};$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} J_\alpha(\varepsilon) &= \frac{1}{(2\mathrm{i}\pi)^n} \int_{\mathbf{V}\setminus T_\varepsilon} \mathrm{d}(\sigma_\alpha \varphi) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{V_i\setminus T_\varepsilon} \mathrm{d}(\sigma_\alpha \varphi) \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n |G_i|} \cdot \int_{U_i\setminus T_{i,\varepsilon}} \mathrm{d}(\sigma_\alpha \varphi_i) = \frac{\pm 1}{(2i\pi)^n |G_i|} \int_{\partial T_{i,\varepsilon}} \sigma_\alpha \varphi_i \end{aligned}$$

où $\varphi_i = r_i^*(\varphi | V_i)$.

$$\theta_i = \rho_i \wedge \frac{\mathrm{d}\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} + \psi_i,\ \theta'_i = \rho'_i \wedge \frac{\mathrm{d}\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} + \psi'_i$$

avec ρ_i, ρ'_i, ψ_i et $\psi'_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{E}^\bullet_{U_i})$.

Dans [B3], les propositions 2 et 3 permettent d'affirmer que le coefficient en $\log \varepsilon^2$ vaut:

0 pour les $J_\alpha(\varepsilon)$

et

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^{n-1}|G_i|}\int_{K_i} \sigma_\alpha \rho_i \wedge \overline{\rho'_i} \qquad \text{pour les } I_\alpha(\varepsilon).$$

Comme les $\rho_i|_{K_i}$ $\rho'_i|_{K_i}$ sont invariants per G_i on conclut en remarquant que:

$$\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\rho_i \wedge \overline{\rho'_i})|_{K_i} = \operatorname{res}(\theta) \wedge \overline{\operatorname{res}(\theta')}$$

où $\operatorname{res}: \mathscr{E}^\bullet_V(\log \mathscr{H})|_{\mathscr{H}} \to \mathscr{E}^\bullet_{\mathscr{H}}[-1]$ est l'application "résidu de Leray", dont la définition et les propriétés se décrivent comme dans le cas lisse.

5. Caractérisation des cas q.h. lisses et résultats correspondants

(a) *Caractérisation des cas tordus lisses*

DÉFINITION. Si pour Q_n réduit les q_i sont premiers entre eux n à n, on dit que Q_n est normalisé.

Partant de $Q_n = (q_0, \ldots, q_n)$ réduit et utilisant les techniques de [De], on sait fabriquer $Q'_n = (q'_0, \ldots, q'_n)$ normalisé et tel que $\mathbf{P}(Q'_n)$ est isomorphe à $\mathbf{P}(Q_n)$. Soit donc Q_n normalisé, et notons $\mathbf{P}_{\text{sing}}(Q_n)$ le lieu singulier de l'espace analytique complexe normal $\mathbf{P}(Q_n)$. Dimca et Dimiev donnent dans [D1] une description précise de cet ensemble analytique, à savoir:

PROPOSITION (4 [D1], p. 236).

$$\mathbf{P}_{\text{sing}}(Q_n) = \{z \in \mathbf{P}(q_0, \ldots, q_n);\ \operatorname{pgcd}\{q_i,\ i \in I(z)\} > 1\}$$

où $I(z) = \{j \in [0, n];\ z_j \neq 0\}$

A présent, soit X un sous-schéma de $\mathbf{P}(Q_n)$ défini par une équation $P = 0$ où $P \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ est q.h. de type Q_n, et soit $C(X)$ le quasi-cône affine au-dessus de X.

DEFINITION. *On dira que X est quasi-lisse (relativement au plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}(Q_n)$) si $C(X)$ est lisse en dehors du sommet.*

LEMME 7. *Soit $f \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ q.h. de type Q_n et de degré δ, admettant une* *singularité isolée à l'origine. Alors l'hypersurface d'équation*

$$f(z_0, \ldots, z_n) - z_{n+1}^{\delta} = 0$$

dans $\mathbf{P}(Q_{n+1})$ *est quasi-lisse.*

Preuve. Il s'agit de vérifier que l'hypersurface d'équation

$$f(z_0, \ldots, z_n) - z_{n+1}^{\delta} = 0$$

dans $\mathbb{C}^{n+2}$ n'admet que l'origine comme point singulier. Mais ceci résulte du fait que f ne dépend pas de z_{n+1} et admet l'origine comme unique point singulier.

DÉFINITION. Soit $\mathbf{V}$ une hypersurface quasi-lisse de $\mathbf{P}$ qui ne soit contenue dans aucun hyperplan H_i: $z_i = 0$, et telle que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{V} \geqslant 2$. On dira que $\mathbf{V}$ est en position générale relativement à $\mathbf{P}_{\text{sing}}$ si:

$$\operatorname{codim}_{\mathbf{V}}(\mathbf{V} \cap \mathbf{P}_{\text{sing}}) \geqslant 2.$$

Cela étant, à tout nombre premier p, associons les entiers suivants:

$$m(p) = \operatorname{card}\{i \in [0, i];\ p | q_i\}$$

$$k(p) = 1 \text{ si } p | \delta \text{ et } = 0 \text{ sinon}$$

$$q(p) = m - m(p) + k(p)$$

PROPOSITION 5. *Le lieu singulier* $\mathbf{P}_{\text{sing}}$ *de tout projectif tordu* $\mathbf{P}$ *de type normalisé* $(q_0, \ldots, q_n, 1)$ *est strictement contenu dans* $\mathbf{P}^{\infty}$. *De plus si* $\mathbf{V}$ *est une hypersurface quasi-lisse de* $\mathbf{P}$, *en position générale par rapport à* $\mathbf{P}_{\text{sing}}$ *et si* $\mathbf{H}$ *est sa trace sur* $\mathbf{P}^{\infty}$, *alors* $\mathbf{V}_{\text{sing}}$ *est contenu dans* H.

Preuve. Un point z de $\mathbf{P}(Q_{n+1})$ est singulier ssi $\operatorname{pgcd}\{q_i; i \in I(z)\} > 1$. Il est donc clair qu'une condition nécessaire pour que z soit singulier est que $z_{n+1} = 0$. La première inclusion annoncée est donc établie, et le fait qu'elle soit stricte résulte de la normalité de $\mathbf{P}$. La seconde assertion découle de la première et de la Prop. 8 de [D2].

LEMME 8. *Pour* Q_n *normalisé on a:* $\mathbf{P}_{\text{sing}}(Q_n) \cong \mathbf{P}_{\text{sing}}^{\infty}(Q_{n+1})$.

Preuve. Les espaces analytiques $\mathbf{P}(Q_n)$ et $\mathbf{P}^{\infty}(Q_{n+1})$ sont isomorphes.

PROPOSITION 6. *Soit* $f \in [z_0, \ldots, z_n]$ *q.h. de type normalisé* Q_n, *de degré* δ *et admettant une singularité isolée en* 0. *Soit* $\mathbf{V}$ *l'hypersurface de* $\mathbf{P}(Q_{n+1})$ *donnée par* $f(z_0, \ldots, z_n) - z_{n+1}^{\delta} = 0$. *Alors une condition nécessaire et suffisante pour que la trace* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{V}$ *sur* $\mathbf{P}^{\infty}(Q_{n+1})$ *soit en position générale par rapport à* $\mathbf{P}_{\text{sing}}(Q_n)$ *est qu'il n'existe pas de nombre premier* p *tel que l'on ait* $m(p) = n - 1$ *et* $k(p) = 0\, (n \geqslant 2)$.

Preuve. La condition est suffisante puisque $m(p) = n - 1$ et $k(p) = 0 \Rightarrow q_H(p) = 1$. Elle est également nécessaire. En effet, supposons d'abord que p divise δ, on obtient alors $q_H(p) = n + 1 - m(p)$, or $m(p) \leqslant n - 1$ vu que Q_n est normalisé. Si maintenant on suppose $m(p) \leqslant n - 2$, on a clairement $q_H(p) \geqslant 3$.

REMARQUE. Dans $\mathbf{P}(2, 2, 3, 1)$ l'hypersurface quasi-lisse $\mathbf{H}$ donnée par:

$$(z_0^4 + z_1^4)z_3 + (z_0^3 + z_1^3)z_2 + z_2^3 + z_3^9 = 0$$

n'est pas en position générale par rapport à $\mathbf{P}_{\mathrm{sing}}(2, 2, 3, 1)$. Cependant on sait d'après Dimca (cf. [D1], Prop. 8) que si $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{H} \geqslant 3$, alors $\mathbf{H}$ est en position générale par rapport au lieu singulier de l'ambiant, ou alors $\mathbf{H}$ est isomorphe à un espace projectif tordu.

PROPOSITION 7. *Si Q_n est normalisé et $\mathbf{H}$ en position générale par rapport à $\mathbf{P}_{\mathrm{sing}}(Q_n)$, alors*

$$\mathbf{V}_{\mathrm{sing}} \cong \mathbf{H}_{\mathrm{sing}}.$$

Preuve. Compte tenu du lemme 8, on a:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\mathrm{sing}} &\cong \mathbf{H} \cap \mathbf{P}_{\mathrm{sing}}(Q_n) \cong \mathbf{H} \cap \mathbf{P}^{\infty}_{\mathrm{sing}}(Q_{n+1}) \\ &\cong \mathbf{V} \cap \mathbf{P}^{\infty}(Q_{n+1}) \cap \mathbf{P}^{\infty}_{\mathrm{sing}}(Q_{n+1}) \cong \mathbf{V} \cap \mathbf{P}^{\infty}_{\mathrm{sing}}(Q_{n+1}) \cong \mathbf{V}_{\mathrm{sing}}.\end{aligned}$$

Nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante sur les poids $q_0, \ldots, q_n$ pour que l'hypersurface $\mathbf{H}$ de $\mathbf{P}(Q_n)$ soit lisse.

PROPOSITION 8. *Soit $\mathbf{H}$ une hypersurface quasi-lisse de $\mathbf{P}(Q_n)$, d'équation $P = 0$ et en position générale par rapport à $\mathbf{P}_{\mathrm{sing}}(Q_n)$. Alors $\mathbf{H}$ est lisse si et seulement si son quasi-cône est défini dans $\mathbb{C}^{n+1}$ par une équation de la forme $B + C = 0$, où B est un polynôme de Brieskorn-Pham en toutes les variables de poids > 1 et où C est un polynôme tel que $P = B + C$ soit q.h. de type Q_n avec* $\mathrm{pgcd}(q_i, q_j) = 1\ \forall i \neq j$, *admettant un point critique isolé à l'origine.*

Preuve. La condition est suffisante. En effet, le type Q_n est alors manifestement normalisé et le lieu singulier de $\mathbf{P}(Q_n)$ est exclusivement constitué des points bases $\sigma_j = (0, \ldots, 0, z_j, 0, \ldots, 0)$ avec $z_j \neq 0$ et $q_j > 1$. Comme $\mathbf{H}$ est supposé en position générale par rapport à $\mathbf{P}_{\mathrm{sing}}(Q_n)$, on a $\mathbf{H}_{\mathrm{sing}} = \mathbf{H} \cap \mathbf{P}_{\mathrm{sing}}(Q_n)$, et comme par hypothése le monôme $z_j^{\alpha_j}$ ($\alpha_j \geqslant 2$) figure effectivement dans B on aura σ_j dans $\mathbf{H}$ seulement si z_j est non nul, ce qui prouve bien que $\mathbf{H}_{\mathrm{sing}}$ est vide. Montrons maintenant que la condition annoncée est nécessaire. Sachant que $\mathbf{P}_{\mathrm{sing}}(Q_n) = \cup_p \mathbf{P}[p]$ où $\mathbf{P}[p] = \{z \in \mathbf{P}(Q_n);\ p \mid q_i\ \forall i \in I\{z)\}$, et quitte à renuméroter les coordonnées on peut supposer: $\mathbf{P}[p] = \{z \in \mathbf{P}(Q_n);\ p \mid q_i\ \ \forall i \in [0, k]$ et $z_{k+1} = \cdots = z_n = 0\}$. L'hypothèse de lissité signifie ici que la trace de $\mathbf{H}$ sur toute composante irréductible $\mathbf{P}[p]$ de $\mathbf{P}_{\text{sing}}(Q_n)$ est vide, ce qui implique l'une ou l'autre des deux conditions suivantes:

(i) Le polynôme complexe $P(z_0, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$ n'admet pas de racine.
(ii) Les racines de $P(z_0, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$ ne définissent pas de point de $\mathbf{H}$, i.e. la seule racine possible est 0.

La condition (i) étant absurde, on voit que l'hypothèse de lissité implique la seconde condition qui n'est évidemment remplie que si et seulement si, d'une part $k = 0$, i.e. $\mathrm{pgcd}(q_i, q_j) = 1$ $\forall i \neq j$ dans $[0, n]$, et d'autre par le monôme $z_0^{\alpha_0}(\alpha_0 \geqslant 2)$ apparaît effectivement dans l'équation de $\mathbf{H}$. Ceci achève la preuve de la proposition.

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses de la proposition* 7, $\mathbf{V}$ *est également lisse.*

Preuve. Conséquence immédiate de la proposition 6 dont les hypothèses sont ici vérifiées.

COROLLAIRE 2. *Si* $P = Q + \lambda z_n^{\alpha}$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$ *avec* $Q \in [z_0, \ldots, z_{n-1}]$ $(n \geqslant 2)$ *homogène de degré* δ, *admettant une singularité isolée en* 0, *et tel que a divise* δ, *alors* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{H}$ *sont lisses.*

Preuve. Les hypothèses de la proposition sont vérifiées puisque P est alors q.h. de type $(1, \ldots, 1, \delta/a)$ et admet une singularité isolée à l'origine.

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses de la proposition 8 et supposons $\mathbf{H}$ lisse. On sait alors que $\mathbf{V}$ est aussi lisse, et que tous les poids de P divisent le degré δ. Dans ces conditions on peut voir facilement que si l'on considère:

$$B(0, R) = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1};\ \left(\sum_{j=0}^{n} |z_j|^{2\delta/q_j} \right)^{1/\delta} < R^2 \right\}$$

$$\omega = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j q_j \, dz_0 \wedge \cdots \wedge d\check{z}_i \wedge \cdots \wedge dz_n$$

m un polynôme q.h. de type Q_n, de degré δ alors pour s voisin de 0, la fonction

$$F(s) = \int_{(P=s) \cap B(0,1)} mw \wedge \overline{m\omega}$$

admet un développement asymptotique de la forme:

$$F(s) = A(m, m)|s|^{2k} \log(s\bar{s}) + \mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$$

où la constante $A(m, m)$ est exactement celle fournie par le résultat central de [B3]. La démonstration est une adaptation assez immédiate de la version homogène.

REMARQUE. La résultat ci-dessus permet de "calculer" un grand nombre d'exemples. Entre autres:

$$z_0^2 + z_0 z_1^3 + z_0 z_2^3 + \varepsilon z_1^3 z_2^3 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{C}$$

$$z_0^6 + z_1^3 + z_2^2 + \lambda z_0^2 z_1^2 \quad (4\lambda^3 + 27 \neq 0)$$

ainsi que tous les exemples de la forme: $P(z_0, \ldots, z_n) + \lambda z_{n+1}^a$ ($\lambda \in \mathbb{C}, a > 1$) où P est homogène avec une singularité isolée en 0, de degré divisible par a.

References

[B1] D. Barlet: Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration dans les fibres, *Inv. Math.* 68 (1982) pp. 129—174.

[B2] D. Barlet: La forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée, *Inv. Math.* 81 (1985) pp. 115–153.

[B3] D. Barlet. Le calcul de la forme hermitienne canonique pour un polynôme homogène à singularité isolée, *Journal für die reine und angewandte mathematic, Band 362* (1985) pp. 179–196.

[Ca] H. Cartan. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, dans "Algebraic Geometry and Topology", *Princeton Mathematical Series* 12, Princeton (1957) pp. 90–102.

[C] C. Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections, *Am. J. Maths*, vol. 77 (1955) pp. 778–782.

[D1] A. Dimca. Singularities and coverings of weighted complete intersection, *Journal für die reine un angewandte mathematic, Band 362* (1986) pp. 184–193.

[D2] A. Dimca and S. Dimiev. On analytic coverings of weighted projective spaces, *Bull. London Math. Soc.* 17 (1985) pp. 234–238.

[De] C. Delorme: Espaces projectifs anisotropes, *Bull. Soc. Math. France* 103 (1975) pp. 203–223.

[Do] I. Dolgachev. Weighted projective spaces, *Lecture Notes in Math.* 956 (1982).

[D-K] V. I. Danilov and A. G. Khovanskii, Newton polyhedra and an algorithm for computing Hodge-Deligne numbers, *Mathematics of the USSR-IZVESTIA* (1987) pp. 279–298.

[G] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* 9 (1957) pp. 119–221.

[L] J. Leray, Problème de Cauchy III, *Bull. Soc. Math. France* 87 (1959) pp. 81–180.

[M] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, *Annals of Math. Studies* 61 Princeton (1968).

[M-O] J. Milnor and P. Orlik, Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials, *Topology* 9 (1970) pp. 385–393.

[P] D. Prill, Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups, *Duke Math. J.* 34 (1967) pp. 375–386.

[S] K. Saito: Einfach-elliptische singularitaten, *Inv. Math.* 23 (1974) pp. 289–325.

[Sa] I. Satakė, On a generalization of the notion of manifold, *Proc. N.A.S. of U.S.A.* vol. 42 (1956) pp. 359–363.

[St] J. Steenbrink, Intersection form for quasi-homogeneous singularities, *Compositio Mathematica*, vol. 34 Fasc. 2 (1977) pp. 211–223.