COMPOSITIO MATHEMATICA

TERESA MONTEIRO FERNANDES

Formulation des valeurs au bord pour les systèmes réguliers

Compositio Mathematica, tome 81, nº 2 (1992), p. 121-142
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1992__81_2_121_0>

Compositio Mathematica **81**: 121–142, 1992.

Formulation des valeurs au bord pour les systemes reguliers

TERESA MONTEIRO FERNANDES

Dept°. de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Rua Ernesto Vasconcelos, Bloco C1, 3° Andar, 1700 Lisboa, Portugal

Received 22 February 1990; accepted 15 March 1991

Introduction

Dans ce travail nous nous proposons d'obtenir une formulation générale des problèmes aux limites pour les hyperfonctions solutions des systèmes réguliers le long du bord d'un ouvert. Cette classe de systèmes a été introduite par M. Kashiwara (cf. [K2]). Nos resultats sont issus de l'étude des notions (apparemment distinctes) formulées précédemment par Kashiwara-Oshima ([K-O]) vers 1977, par Schapira ([S1]) et Komatsu ([Ko]) vers 1970, dans le cas non caractéristique, et aussi par Oshima ([O1], [O2]) vers 1983 (qui a obtenu des constructions explicites, en supposant que les exposants caractéristiques ne diffèrent pas d'un entier).

Afin de formuler la valeur au bord pour ces systèmes, Kashiwara et Oshima considèrent d'abord le cas d'une seule équation $Pu=0$ et ils introduisent la notion d'opérateur régulier le long d'une hypersurface auquel on associe son polynôme caractéristique dond les racines sont par définition les exposants caractéristiques de l'opérateur. La valeur au bord d'une solution d'un opérateur régulier de long de $Y = \{x_1 = 0\}$ est alors donnée sous l'hypothèse que les exposants caractéristiques soient des racines simples ne différant pas d'un entier. L'équation $Pu = 0$ est microlocalement isomorphe au système

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1\right) u_1 = \cdots = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda m\right) u_m = 0,$$

où les λ_j dèsignent les exposants caractéristiques, dond on sait qu'une solution hyperfonction définie pour $x_1 > 0$ s'écrit sous la forme

$$u_i = \phi_j(x_2, \ldots, x_n) x_{1+}^{\lambda_i}, \ (i = 1 \ldots m).$$

On trouve $\phi_1, \ldots, \phi_m$ comme valeur au bord de u.

Notre point de départ a été l'exposé de Schapira à l'X en 1986 (exp 13) où il a obtenu un nouveau morphisme, cette fois non seulement pour les solutions mais aussi pour les groupes de cohomologie de degré supérieur. L'hypothèse de Schapira est plus faible que celle de singularité régulière, permettant donc de formuler un morphisme valeur au bord pour les systèmes fuchsiens définis par Laurent – T. Monteiro Fernandes dans [L-M.F.].

La question se posait de preciser le lien entre cette nouvelle construction et les précédentes.

Précisions la situation géometrique:

Considérons une variété analytique réelle M, Ω un ouvert de M, $N = \delta\Omega$ où $\delta\Omega$ désigne le bord de Ω.

Afin d'étudier les hyperfonctions solutions d'un système d'équations définies dans Ω et ses valeurs au bord le long de N, la méthode classique, que nous suivrons, est de complexifier M par la variété analytique complexe X, de façon que N est complexifiée par $Y \subset X$ et considérer le système differentiel complexifié (vu comme un module cohérent sur le faisceau des opérateurs différentieles holomorphes d'ordre fini sur X).

L'étude des notions de valeur au bord déjà formulées en chaque cas, nous a alors amené à les voir comme des cas particuliers d'un morphisme canonique entre le complexe des solutions hyperfonctions du système $\mathfrak{m}$ et le complexe des solutions hyperfonctions du système $\Psi_Y(\mathfrak{m})$ (sur Y) des cycles proches de $\mathfrak{m}$ le long de Y (voir Définition 4.2.2). Le système $\Psi_Y(\mathfrak{m})$ a été défini par Kashiwara et vérifie le théorème de comparaison fondamental

$$\Psi_Y(\mathrm{Sol}(\mathfrak{m})) \approx \mathrm{Sol}(\Psi_Y(\mathfrak{m})$$

où le terme de gauche désigne le foncteur des cycles-proches géométrique appliqué au complexe des solutions holomorphes de $\mathfrak{m}$.

Par exemple, si on considere l'opérateur $(tD_t - \alpha)^p$, $p \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, et une solution

$$u = \sum_{0 \leqslant j \leqslant p-1} a_j(x) t_+^\alpha \frac{\log t_+^j}{j!}$$

on trouve comme valeur au bord la suite $(C_j a_j(x))$, $C_j = p-1-j!$.

Remarquons que lorsque Y est non caracteristique, les valeurs au bord sont solutions du système induit sur Y, lequel est alors isomorphe à $\Psi_Y(\mathfrak{m})$. Nous montrons aussi que la notion de Oshima est plus faible que la notre, les deux coïncidant lorsque les exposants sont simples.

Cependant la relation avec la notion de [K-O] obtenue en utilisant les opérateurs microdifférentiels n'est pas établie dans cet article, où nous restons dans le cadre différentiel.

Signalons aussi que, très proche de ces problèmes, un autre reste en ouvert, i.e., la relation de la valeur au bord ici construite avec les coefficients des dévéloppements assymptotiques de Kashiwara-Kawai ([K-K]), voir aussi Proposition 4.3.5 de ce travail. Nous conjecturons qu'il y a égalité.

Nous remercions P. Schapira qui nous a posé ce problème et M. Kashiwara et C. Sabbah pour les utiles discussions que nous avons eues.

Ce travail a été en partie réalisé au long de plusieurs séjours à l'Université de Paris-Nord, à l'Université de Paris-Sud et à l'École Polytechnique de Paris. Ces déplacements ont aussi été possibles grâce à des subventions attribuées par la Fondation Gulbenkian et l'INIC (Portugal).

Liste des Notations

X: Une variété réelle ou complexe.

$T_Y X$: Où Y est une sous-variété de X, le fibré normal à Y.

$D^b(X)$: La sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens sur X, formée des complexes à cohomologie bornée.

$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$: Un multi-indice dans $\mathbb{N}^n$.

$D_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$: Dérivation partielle par rapport à la variable x.

$\mathcal{O}_X$: Le faisceau des fonctions holomorphes sur X.

$\mathcal{D}_X$: Le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes d'ordre fini sur X.

Ω_X: Le faisceau des formes différentielles de degré maximum sur X.

$\Gamma_S(F)$, où S est un sous-ensemble localement fermé de X: $i_* i^! F$ où $i: S \to X$ désigne l'inclusion.

$\mathbb{R}\Gamma_S(\;)$: Le foncteur dérivé à droite de Γ_S.

$\Gamma_{[Y]}(\mathcal{F})$, où Y est un ensemble analytique de X: $\varinjlim \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^m, \mathcal{F})$, ou $\mathcal{J}$ est l'idéal de definition de Y.

$\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\;)$: Le foncteur dérivé à droite de $\Gamma_{[Y]}(\;)$.

$\mathcal{O}r_M$, où M est une variété réelle: le faisceau des orientations de M, i.e., $\mathbb{R}\Gamma_M(Z_X)[\dim M]$, où X est un complexifié de M.

$\mathcal{O}r_{N|M}$, où N est une sous-variété de M: le faisceau des orientations relatives de N, i.e., $\mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{Z}_M)[d]$, où d est la codimension de N.

B_M: Le faisceau des hyperfonctions sur M, i.e., $\mathbb{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[\dim M] \otimes \mathcal{O}r_M$, où X est un complexifié de M.

$B_{Y|X}$, où Y est une sous-variété de la variété complexe X: $\mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)[d]$, où d est la codimension de Y.

$B^\infty_{Y|X}$: $\mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)[d]$.

$\mathcal{D}_{X\to Y}$: $B_{Y|YXX} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X$, où Y s'identifie au graphe de l'inclusion $Y \to X$.

$\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$: $B_{Y|YXX} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_Y$.

$\mathbb{Z}_S$, où S est un localement fermé de X: le faisceau sur X porté par S dont la restriction à S est le faisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$.

$\mathcal{H}om_R(A,B)$, où A et B sont des faisceaux de R-modules à gauche et R est un faisceau d'anneaux: le faisceau des R-homomorphismes de A dans B.

$\mathbb{R}\mathscr{H}om_R(\,,\,)$: le foncteur dérivé à droite de $\mathscr{H}om_{R(\,,\,)}$.

$A \underset{R}{\otimes} B$, où A (resp. B) est un faisceau de R-modules à gauche (resp. à droite): le produit tensoriel de A par B sur R.

$\overset{L}{\otimes}$: Le foncteur dérivé à gauche de $\otimes$.

1. Valeur au bord topologique ([S2])

1.1. Dans ce paragraphe nous rappelons la construction du morphisme naturel de valeur au bord dû à Schapira dans le cadre de la Théorie des faisceaux.

Soit donc X une variété réelle, Ω un ouvert de X, $\delta\Omega$ son bord, $\bar{\Omega}$ son adhérence. On dit que Ω est localement cohomologiquement trivial (en abrégé: l.c.t.) si pour tout $x \in \delta\Omega$ on a $\mathbb{R}\Gamma_{\bar{\Omega}}(\mathbb{Z}_X)_x = 0$, $\mathbb{R}_{\Omega}(\mathbb{Z}_X)_x = \mathbb{Z}$. C'est le cas lorsque la paire $\Omega \to X$ est localement homéomorphe à un ouvert convexe d'un espace affine.

Soit M une sous-variété fermée de X de codimension n, N une sous-variété fermeé de M de codimension d, Ω un ouvert l.c.t. de M avec $N \subset \bar{\Omega}$.

Soit $\mathscr{F}$ un objet de $D^b(X)$. Construisons avec [S2] un morphisme naturel

$$\mathbb{R}\Gamma_{\Omega}(\mathscr{F}) \to \mathbb{R}\Gamma_N(\mathscr{F}) \underset{\mathbb{Z}_M}{\otimes} \mathscr{O}r_{N|M}[d] \tag{1.1.1}$$

Si S est localement fermé dans X et $\mathscr{F} \in D^b(X)$ alors

$$\mathbb{R}\Gamma_S(\mathscr{F}) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}_X}(\mathbb{Z}_S, \mathscr{F}).$$

On a un morphisme naturel

$$\mathbb{Z}_{\bar{\Omega}} \to \mathbb{Z}_N$$

et donc en appliquant $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}_X}(.\,, \mathbb{Z}_M)$ on en déduit un morphisme

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}_X}(\mathbb{Z}_N, \mathbb{Z}_M) \simeq \mathscr{O}r_{N|M}[-d] \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}_X}(\mathbb{Z}_{\bar{\Omega}}, \mathbb{Z}_M) \simeq \mathbb{Z}_{\Omega}$$

(le dernier isomorphisme résulte de l'hypothèse que Ω est l.c.t.).

Enfin appliquons $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathbb{Z}_X}(\cdot, \mathscr{F})$. On obtient le morphisme cherché.

DEFINITION 1.1.1. Le morphisme (1.1.1) est dit 'valeur au bord topologique'.

1.2. APPLICATION AUX SYSTEMES FUCHSIENS LE LONG D'UNE SOUS VARIETE

Le morphisme (1.1.1) permet de définir un morphisme de valeur au bord dans le cadre des systèmes fuchsiens le long d'une sous-variété ([L-M.F.]). Rappelons la caractérization de ces systèmes:

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, Y une sous-variété lisse de X de codimension d. Notons $V_Y^{\bullet}(\mathscr{D}_X)$ (où simplement $V^{\bullet}(\mathscr{D}_X)$ s'il *n'y* a pas de confusion à craindre) la filtration sur l'anneau des opérateurs différentiels $\mathscr{D}_X$ relative à Y (cf. [K2]). Rappelons que si I est l'idéal de définition de Y, $V_Y^{\bullet}(\mathscr{D}_X)$ est définie par

$$V_Y^k(\mathrm{D}_X) = \{P \in \mathscr{D}_X,\ P(I^j) \subset I^{j+k} \text{ pour tout } j \text{ tel que } j,\ j+k \geqslant 0\}.$$

Soit $\mathrm{gr}_V^k(\mathscr{D}_X) = \dfrac{V^k(\mathscr{D}_X)}{V^{k+1}(\mathscr{D}_X)}$. Soit $\tau\colon T_YX \to Y$ la projection. On vérifie facilement que $\mathrm{gr}_V^k(\mathscr{D}_X)$ est isomorphe à $\tau_* \mathscr{D}_{T_YX}[k]$, où $\mathscr{D}_{T_YX}[k]$ désigne le faisceau des opérateurs différentiels sur T_YX homogènes de degré k.

L'anneau $\mathrm{gr}_V^0(\mathscr{D}_X)$ est localement muni d'un élément distingué, l'opérateur d'Euler θ, qui opère par l'identité sur I/I^2. On notera encore θ un de ses representants dans $V^0(\mathscr{D}_X)$.

Soit $\mathfrak{m}$ un $\mathscr{D}_X$-module cohérent. Une filtration $\mathfrak{m} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{m}^j$ est appellée V-bonne si elle satisfait:

(i) $V^k(\mathscr{D}_X)\mathfrak{m}^j \subset \mathfrak{m}^{j+k}$ pour tout j et k,
(ii) $V^k(\mathscr{D}_X)\mathfrak{m}^j = \mathfrak{m}^{j+k}$ si $j \gg 0$ et $k \geqslant 0$ ou si $j \ll 0$ et $k \leqslant 0$,
(iii) $\mathfrak{m}^j$ est un $V^0(\mathscr{D}_X)$-module cohérent.

Notons $\mathscr{D}_X(\cdot)$ la filtration de $\mathscr{D}_X$ par l'ordre habituel.

Un système $\mathfrak{m}$ est fuchsien le long de Y s'il existe un système de coordonnées locales sur X $(y_1, \ldots, y_q, t_1 \cdots t_d)$ tel que $Y = \{t_1 = \cdots = t_d = 0\}$ et tel que pour toute section u de $\mathfrak{m}$ il existe un opérateur $P \in V^0(\mathscr{D}_X)$ satisfaisant $Pu = 0$ et P s'écrivant sous la forme

$$P(y, t, D_y, D_t) = \sum_{\substack{|\beta| - |\alpha| = 0 \\ |\beta| \leqslant m}} p_{\alpha\beta}(y) t^{\alpha} D_t^{\beta} + Q(y, t, D_y, D_t) \tag{1.2.1}$$

avec $Q \in V^1(\mathscr{D}_X) \cap \mathscr{D}_X(m)$ et pour tout $\tau \in \mathbb{C}^d - \{0\}$, $\Sigma_{|\beta| = m}\, p_{\alpha\beta}(y) \tau^{\alpha} \bar{\tau}^{\beta} \neq 0$.

Soit $i\colon Y \to X$ l'inclusion de Y dans X. Pour un complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à cohomologie cohérente et bornée nous noterons $\mathbb{D}_X(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \mathscr{D}_X)[n]$, et $\mathfrak{m}_Y = \mathscr{O}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X}^L \mathfrak{m}$ le complexe induit sur Y ([S.K.K.], [S4]).

Lorsque $\mathfrak{m}$ est fuchsien la condition d'ellipticité de Laurent-Shapira [L-S], est satisfaite et donc le complexe induit par $\mathbb{D}_X(\mathfrak{m})$ sur Y est à cohomologie cohérente et on définit $i^!\mathfrak{m} = \mathbb{D}_Y(\mathbb{D}_X(\mathfrak{m})_Y)$.

Rappelons que si $\mathfrak{m}$ est un $\mathscr{D}_X$-module cohérent on peut définir un isomorphisme naturel $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}, \mathscr{O}_Y)[-d] \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, B_{Y|X})|_Y$ de la manière suivante.

Posons

$$\mathfrak{n} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{m}, \mathcal{D}_X).$$

Alors

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}, \mathcal{O}_Y)[-d) \simeq \mathfrak{n}_Y \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{L}{\otimes}} \mathcal{O}_Y \simeq \mathfrak{n} \underset{\mathcal{D}_X}{\overset{L}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{L}{\otimes}} \mathcal{O}_Y$$
$$\simeq \mathfrak{n} \underset{\mathcal{D}_X}{\overset{L}{\otimes}} B_{Y|X} \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{m}, B_{Y|X}).$$

Du morphisme $B_{Y|X} \to B^{\infty}_{Y|X}$ on déduit le morphisme

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}, \mathcal{O}_Y)[-d] \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{m}, B^{\infty}_{Y|X}) \tag{1.2.2}$$

THEOREME 1.2.1 ([L-M.F.]). *Soit* $\mathfrak{m}$ *un système fuchsien le long de Y. Alors le morphisme* (1.2.2) *est un isomorphisme.*

Soit maintenant M une variété analytique réelle de complexifié X, N une sous-variété lisse de M, de complexifié $Y \subset X$ et soit Ω un ouvert l.c.t. de M avec $N \subset \bar{\Omega}$.

Soit $\mathfrak{m}$ un système fuchsien le long de Y.

Alors on peut définir avec Schapira ([S2], [S3]) un morphisme naturel

(1.2.3) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{m}, \Gamma_\Omega(B_M))|_N \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}, B_N)$, de la manière suivante:

Considerons le morphisme donné par le théorème 1.1.1 en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{m}, \mathcal{O}_X)$.

On a d'une part

$$\mathbb{R}\Gamma_\Omega(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{m}, \mathcal{O}_X)) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathfrak{m}, \Gamma_\Omega(B_M)) \otimes \mathcal{O}r_M^{\otimes -1}[-n] \text{ et d'autre part}$$

$$\mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathfrak{m}, \mathcal{O}_X)) \otimes \mathcal{O}r_{N|M}[d] \simeq \mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathfrak{m}, \mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)) \otimes \mathcal{O}r_{N|M}[d]$$
$$\simeq \mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathfrak{m}, B^{\infty}_{Y|X}) \otimes \mathcal{O}r_{N|M} \simeq \mathbb{R}\Gamma_N(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}, \mathcal{O}_Y)[-d] \otimes \mathcal{O}r_{N|M}$$
$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}, B_N) \otimes \mathcal{O}r_M^{\otimes -1} \otimes \mathcal{O}r_{N|M}[-n] \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}, B_N) \otimes \mathcal{O}r_M^{\otimes -1}[-n]$$

DEFINITION 1.2.2. Le morphisme (1.2.3) est dit valeur au bord suivant Schapira.

2. Le morphisme valeur au bord suivant T. Oshima ([O1], [O2])

2.1. Soit X une variété analytique complexe complexifiée d'une variété analytique réelle M, $Y \subset X$ une hypersurface lisse complexifiée de l'hypersurface N de M. Soit $(y, t) = (y_1, \ldots, y_n, t)$ des coordonnées de M que l'on prolonge à X, $t = 0$ une équation de Y et soit P un opérateur d'ordre m, s'écrivant

$$P(y, t, D_y, D_t) = b(tD_t) + tQ(y, t, D_y, tD_t) \tag{2.1.1}$$

avec l'ordre de Q inférieur ou égal à l'ordre de P et $b(tD_t) = \Sigma_{0 \leqslant j \leqslant m} a_j (tD_t)^j$, $a_m \neq 0$.

La condition (2.1.1) exprime que P est régulier le long de Y au sens de [K-O]. En particulier le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$ est fuchsien le long de Y.

M_+ désignera le demiespace de M défini par $t > 0$.

On appelle polynôme caractéristique de P le polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$. Ses racines sont appelleés exposants caractéristiques de P (cf. [G-B]).

Fixons $\alpha \in \mathbb{C}$ un exposant caractéristique de P. On fait l'hypothèse suivante:

$$\text{pour } m = 1, 2, \ldots, b(\alpha - m) \neq 0. \tag{2.1.2}$$

Si F est un faisceau, nous utiliserons la notation abusive $u \in F$, pour désigner un germe u de F.

Soit u une solution de P appartenant à $\Gamma_{M_+}(B_M)$. On définit la valeur au bord de u par rapport à α de la manière suivante:

On note P_α l'opérateur $t^{-\alpha} P t^\alpha = P(y, t, D_y, tD_t + \alpha)$ qui est encore régulier le long de Y. De plus P_α s'écrit sous la forme tQ_α d'après l'hypothèse (2.1.1) et puisque $b(\alpha) = 0$.

THEOREME 2.1.1 (cf. [O1], Th. 3.1). *Sous l'hypothèse* 2.1.2 *le morphisme de restriction* $\Gamma_{\bar{M}_+}(B_M), \to \Gamma_{M_+}(B_M)$ *induit un isomorphisme de* $\{u \in \Gamma_{\bar{M}_+}(B_M), P_\alpha u = 0\}$ *dans* $\{v \in \Gamma_{M_+}(B_M), P_\alpha u = 0\}$.

Soit donc $u_\alpha = t^{-\alpha} u$. Alors $P_\alpha u_\alpha = 0$ et d'après le théorème précédent il existe un unique prolongement $\tilde{u}_\alpha$ de u_α dont le support soit contenu dans $\bar{M}_+$ et tel que $P_\alpha \tilde{u}_\alpha = 0$.

On peut donc écrire $Q_\alpha \tilde{u}_\alpha = \phi_\alpha(x) \otimes \delta(t)$ où $\phi_\alpha(x) \in B_N$ et ϕ_α est la valeur au bord de u par rapport à α.

Cette construction est, nous semble-t-il, une interprétation du morphisme valeur au bord défini précédemment dans [K-O] et permet d'obtenir des calculs explicites.

3. Comparaison entre les valeurs au bord d'après Schapira et d'après Oshima

3.1. Precisions le morphisme (1.2.3) dans la même situation géometrique qu'à la Section 2 ($\Omega = M_+$ et $N = \delta\Omega$) et supposons que le $\mathscr{D}_X$-module $\mathfrak{m}$ soit défini par un opérateur P, i.e., $\mathfrak{m} = \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$, s'écrivant.

$$P(y, t, D_y, D_t) = b(tD_t) + tQ(y, t, D_y, tD_t) \tag{3.1.1}$$

avec l'ordre de Q inférieur ou égal au degré de $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ où

$$b(s) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant m \\ a_m \neq 0}} a_j s^j$$

est son polynôme caractéristique.

Remarquons que si le polynôme $b(s)$ n'admet pas de racine entière strictement négative on a $i^! \mathfrak{m} = 0$ (car $\mathbb{D}_X(\mathfrak{m})_Y = 0$, cf. [L-S]).

THEOREME 3.1.1. *Supposons $b(-1) = 0$, et que $b(i) \neq 0$ pour $i = -2, -3, \ldots$ Soit $u \in \Gamma_{M_+}(B_M)$ telle que $Pu = 0$. Alors il existe $\tilde{u} \in \Gamma_{\bar{M}_+}(B_M)$ tel que $\tilde{u}|_{M_+} = u$ et $v \in B_N$ tel que $P\tilde{u} = v(x)\delta(t)$; v est uniquement determiné par u et est la valeur au bord de u suivant le morphisme* (1.2.3).

DEMONSTRATION. Puisque la question est locale, on peut identifier $\mathbb{Z}_N$ à $Or_{N|M}$.

Notons $\mathfrak{n} = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \mathscr{D}_X)\,[1] \simeq \dfrac{\mathscr{D}_X}{P\mathscr{D}_X}$.

On a

$$\mathbb{R}\Gamma_{M^+}(\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \mathscr{O}_X))[n] \simeq \mathbb{R}\Gamma_{M^+}\left(\mathfrak{n} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{O}_X\right)[n-1] \simeq \mathfrak{n} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \Gamma_{M^+}(B_M)[-1].$$

Le morphisme (1.2.3) s'identifie alors au morphisme naturel φ

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{n} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \Gamma_{M^+}(B_M)[-1] & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{n} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \Gamma_N(B_M) \\
& & \uparrow \\
& & \mathfrak{n} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_Y}{\otimes}} B_N
\end{array}$$

où φ s'obtient de $\mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_{M_+}[+1]$, c'est à dire, du morphisme

$$\begin{array}{ccc}
0 & & \\
\downarrow & & \\
\mathbb{Z}_{M_+} & \to & 0 \\
\text{QIS} \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z}_{\bar{M}_+} & \to & \mathbb{Z}_N \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \to & \mathbb{Z}_N
\end{array}$$

associé à la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}_{M_+} \to \mathbb{Z}_{\bar{M}_+} \to \mathbb{Z}_N \to 0$.

Soit maintenant $\mathscr{L}$ le complexe de $\mathscr{D}_X$-modules à droite

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_X & \xrightarrow{P} & \mathscr{D}_X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{degré} -1 & & \text{degré } 0 \end{array}$$

Alors $\mathfrak{n}$ est quasi-isomorphe à $\mathscr{L}$ et φ se déduit encore de

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \Gamma_{M_+}(B_M) & \underset{\text{QIS}}{\longleftarrow} & \mathscr{L} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} (\Gamma_N(B_M) \to \Gamma_{\bar{M}_+}(B_M)) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \\ \mathscr{L} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} B_N & \underset{\text{QIS}}{\longleftarrow} & \mathscr{L} \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \Gamma_N(B_M) \end{array}$$

Le complexe (de $\mathscr{D}_Y$-modules à droite) $\mathscr{L} \otimes^L_{\mathscr{D}_X} \mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ est égal à $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y} \xrightarrow{P} \mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ où P opère à gauche. On peut le calculer grâce au lemme suivant:

LEMME 3.1.2. *Soit $s: \mathscr{D}_Y \to \mathscr{D}_{X \leftarrow Y}$ le monomorphisme $\mathscr{D}_Y$-linéaire à droite défini par*:

si $P \in \mathscr{D}_Y$, $\qquad s(P) = \delta(t)P.$

Alors on a un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{X \leftarrow Y} & \xrightarrow{P} & \mathscr{D}_{X \leftarrow Y} \\ s\uparrow & & \uparrow s \\ \mathscr{D}_Y & \underset{\substack{\text{fléche} \\ \text{nulle}}}{\longrightarrow} & \mathscr{D}_Y \end{array} \tag{3.1.2}$$

Donc $\mathfrak{n} \otimes^L_{\mathscr{D}_X} \mathscr{D}_{X \leftarrow Y} \simeq \mathscr{D}_Y \oplus \mathscr{D}_Y[-1]$.

DEMONSTRATION. Remarquons d'abord que $P \in \mathscr{D}_X t$ puisque $b(-1) = 0$ et donc le morphisme (3.1.2) est bien un morphisme de complexes. D'autre part le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{D}_{X \leftarrow Y} \simeq \mathscr{D}_X / \mathscr{D}_X t$ est muni de la filtration

$$V^m(\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}) = \frac{V^m(\mathscr{D}_X)}{V^m(\mathscr{D}_X) \cap \mathscr{D}_X t} = \frac{V^m(\mathscr{D}_X)}{V^{m-1}(\mathscr{D}_X)t}; \text{ par suite}$$

$$\operatorname{gr}^m_V(\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}) \simeq \frac{V^m(\mathscr{D}_X)}{V^{m+1}(\mathscr{D}_X) + V^{m-1}(\mathscr{D}_X)t} \text{ et pour } m > 0, \text{ on a } V^m(\mathscr{D}_{X \leftarrow Y}) = 0.$$

Soit $\theta = D_t t$. Alors P opère sur $\mathrm{gr}_V^m(\mathscr{D}_{X\leftarrow Y})$ (à gauche) par $b(\theta-1)$.

Notons L_θ (resp. R_θ) l'action à gauche (resp. à droite) par θ et $\mathrm{ad}_\theta = L_\theta - R_\theta$. Alors, puisque R_θ s'anule sur $\mathrm{gr}_V^m(\mathscr{D}_{X\leftarrow Y})$ on a $b(\theta-1) = b(L_\theta - 1) = b(\mathrm{ad}_\theta + R_\theta - 1) = b(m-1)$.

Soit $V(\mathscr{D}_Y)$ la filtration induite dans $\mathscr{D}_Y$ par s. Pour démontrer le lemme il suffit de démontrer que

P: coker $s \to$ coker s est bijectif et ce morphisme étant strictement filtré il suffit donc de démontrer que pour tout m

P: $\mathrm{gr}^m(\mathrm{coker}\, s) \to \mathrm{gr}^m(\mathrm{coker}\, s)$ est bijectif, oú l'on munit coker s de la filtration quotient.

Pour tout $m \leqslant 0$ on a un isomorphisme $\mathscr{D}_Y$-linéaire à droite

$$\mathscr{D}_Y \to \mathrm{gr}_V^m(\mathscr{D}_{X\leftarrow Y})$$

$$Q \to \delta_{(t)}^{(-m)} Q$$

Par suite $\mathrm{gr}_V^0(\mathrm{coker}\, s) = 0$. On se ramène donc à démontrer que si $m \leqslant -1$ alors $b(-1+m) \neq 0$ ce qui découle de l'hypothèse faite sur P. □

Le morphisme φ est donc donné par

$\mathscr{L} \otimes_{\mathscr{D}_X}^{L} \Gamma_{M_+}(B_M) \to B_N \oplus B_N[-1]$ que l'on explicitera à l'aide du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \to & \Gamma_{M_+}(B_M) & \xrightarrow{P} & \Gamma_{M_+}(B_M) \\
\text{QIS}\uparrow & & \uparrow \varphi_0 & & \uparrow \varphi_1 \\
B_N & \xrightarrow[\alpha_1]{} & \Gamma_{\bar{M}_+}(B_M) \oplus B_N & \xrightarrow[\alpha_0]{} & \Gamma_{\bar{M}_+}(B_M) \\
\text{Id}\downarrow & & \downarrow \psi_0 & & \downarrow \\
B_N & \xrightarrow[0]{} & B_N & \xrightarrow[0]{} & 0
\end{array}$$

Ici ψ_i, φ_i et α_i sont donnés par:

$$\varphi_0(u, v) = u|_{M_+}, \qquad \varphi_1(u) = u|_{M_+},$$

$$\alpha_0(u, v) = Pu - v\delta(t), \qquad \alpha_1(v) = (v\delta(t), 0),$$

$$\psi_0(u, v) = v.$$

Soit encore β_1 le morphisme $B_N \to \Gamma_N(B_M)$ *donné par*

$v \to v\delta(t)$.

Maintenant interpretons le diagramme ci-dessus.

Soit $u \in \Gamma_{M_+}(B_M)$ telle que $Pu=0$. Alors il existe $\tilde{u} \in \Gamma_{\bar{M}_+}(B_M)$, $\tilde{u}$ prolongeant u et $v \in B_N$ telles que $P\tilde{u} = v(x)\delta(t)$. De plus si $\tilde{u}$ verifie la même condition que $\tilde{u}, \tilde{u} - \tilde{u}' \in \beta_1(B_N)$. Alors v est uniquement déterminé (par u) et c'est la valeur au bord de u suivant le morphisme (1.2.3) comme on voulait démontrer. □

On est maintenant en mesure de comparer les deux notions de valeur au bord obtenues respectivement dans Section 1 et Section 2.

THEOREME 3.1.3. *Soit P un opérateur régulier le long de Y et soit α un exposant caractéristique de P satisfaisant l'hypothèse* (2.1.2). *Soit $u \in \Gamma_{M_+}(B_M)$ une solution de P. Alors la valeur au bord de u par rapport à α (au sens de Oshima) coïncide avec la valeur au bord de la solution $t^{-\alpha-1}$ u de $\mathfrak{m} = \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P_{\alpha+1}$ (au sens de Schapira).*

DEMONSTRATION. D'après le théorème 3.1.1 il existe un unique $v(x) \in B_N$ et un $u' \in \Gamma_{\bar{M}_+}(B_M)$ tel que $P_{\alpha+1}u' = \delta(t)v(x)$ et $u'|_{M_+} = t^{-\alpha-1}u$.

Puisque $P_{\alpha+1} = t^{-1}P_\alpha t = Q_\alpha t$ nous avons $P_{\alpha+1}u' = Q_\alpha(tu')$ et $P_\alpha(tu') = tP_{\alpha+1}u' = 0$. Par suite $\tilde{u}_\alpha = tu'$ et $\phi_\alpha(u) = v(x)$. □

REMARQUE. Schapira ([S1]) et Komatsu (Ko]) ont donné une formulation pour les problèmes aux limites dans le cas non caractéristique: Si $Q = D_t^m + \Sigma_{j=0}^{m-1} A_j(t, x, D_x)D_t^j$ est un opérateur de type Weierstrass par rapport à l'hypersurface $N = \{t=0\}$ et u est solution de Q alors u admet un unique prolongement $\tilde{u}$ à support dans $\bar{M}_+$ tel que $Q\tilde{u} = \Sigma_{0 \leqslant j \leqslant m-1}\, a_j(x) \otimes \delta^{(j)}(t)$ et la suite $(a_0(x), \ldots, a_{m-1}(x)) \in B_N^m$ est au sens de [S1], [Ko], la valeur au bord de u et est solution du système induit par Q sur Y. Dans ce cas l'opérateur t^mQ est régulier le long de Y et ses exposants caractéristiques sont $0, 1, \ldots, m-1$. Ils ne satisfont donc pas l'hypothèse (2.1.2). Cependant, la notion de valeur au bord que nous donnerons au paragraphe suivant permettra de retrouver celle-ci (voir Proposition 4.2.4).

4. Valeur au bord pour les systèmes réguliers

Dans ce paragraphe nous allons montrer comment, à partir des notions de Schapira et Oshima, il est naturel de définir une valeur au bord générale pour un système régulier $\mathfrak{m}$ le long du bord Y en utilisant le complexe de cycles proches $\Psi_Y(\mathfrak{m})$. Ce complexe a été introduit par Kashiwara dans [K2] et on en trouvera une exposition détaillée dans [Sa], [Sai 1], [Sai 2], [Me].

Plus précisément:

(1) On ne fera pas de restriction sur la multiplicité des exposants caractéristiques.

(2) La valeur au bord sera définie comme un morphisme de complexes et non seulement pour la cohomologie de degré zéro.

(3) On retrouvera la notion de Oshima lorsque les racines sont simples et celle de [S1], [Ko] dans le cas non caracteristique.

4.1. RAPPELS. Soit X une variété analytique complexe et Y une sous-variété lisse de X. Notons comme dans Section 1, $V^{\cdot}(\mathscr{D}_X)$ la filtration de $\mathscr{D}_X$ par rapport à Y et pour $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{gr}_V^k(\mathscr{D}_X) = \frac{V^k(\mathscr{D}_x)}{V^{k+1}(\mathscr{D}_X)}.$$

Rappelons que un système $\mathfrak{m}$ est régulier le long de Y (cf. [K2]) si et seulement si il existe un polynôme $b(s) \in \mathbb{C}[s]$

$$b(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_0, \quad (a_m \neq 0)$$

et un sous $\mathcal{O}_X$—module cohérent $\mathfrak{m}_0$ qui satisfait:

(i) $\mathfrak{m} = \mathscr{D}_X \mathfrak{m}_0$,
(ii) $b(\theta)\mathfrak{m}_0 \subset [\mathscr{D}_X(m) \cap V^1(\mathscr{D}_X)]\mathfrak{m}_0$.

En particulier $\mathfrak{m}$ est fuchsien le long de Y. De plus $\mathfrak{m}$ est spécialisable par rapport à Y c'est à dire, pour toute filtration V-bonne $U^{\cdot}(\mathfrak{m})$ il existe un polynôme non nul $b \in \mathbb{C}[s]$ avec

$$b(\theta - k)U^k(\mathfrak{m}) \subset U^{k+1}(\mathfrak{m}) \tag{4.1.1}$$

(on dit aussi que b est un polynôme de Bernstein-Sato ou une b-fonction de la filtration $U^{\cdot}(\mathfrak{m})$).

Fixons sur $\mathbb{C}$ un ordre total $\leqslant$ tel que $u \leqslant v$ implique $u+m \leqslant v+m$ pour tout $m \in \mathbb{C}$, et que $m \geqslant 0$ si $m \in \mathbb{N}$; on sait alors que si $\mathfrak{m}$ est spécialisable il existe une unique filtration $V^{\cdot}(\mathfrak{m})$ qui soit V-bonne et admettant une b-fonction dont les zéros soient contenus dans $G = \{\alpha \in \mathbb{C},\ -1 < \alpha \leqslant 0\}$ ([K2], [Me]). Soit u une section locale de $\mathfrak{m}$. On appelle polynôme de Bernstein-Sato de u le polynôme minimal $b_u \in \mathbb{C}[s]$ avec coefficient dominant égal à 1, tel que l'on ait $b_u(\theta)u \in V^1(\mathscr{D}_X)u$ et on appelera ordre de u l'ensemble des zéros de b_u.

Il existe alors un ensemble fini $A \subset G$ tel que l'ordre de u soit contenu dans $A + \mathbb{Z}$ pour tout $u \in \mathfrak{m}$.

On définit localement sur X la filtration canonique par l'ordre relatif à Y indéxée par $\mathbb{C}$:

$$V^{\alpha}(\mathfrak{m}) = \{u \in \mathfrak{m},\ \text{ordre } u \subset \{s \in \mathbb{C}, s \geqslant \alpha\}\}.$$

Alors $V^{\bullet}(\mathfrak{m})$ est de type fini sur $V^{\bullet}(\mathscr{D}_X)$ c'est à dire qu'il existe $(u_j)_{j=1\dots p}$, $u_j \in V^{\alpha_j}(\mathfrak{m})$ tel que, pour tout α, $V^{\alpha}(\mathfrak{m}) = \Sigma_{k_j+\alpha_j \geqslant \alpha, k_j \in \mathbb{Z}} V^{k_j}(\mathscr{D}_X) u_j$.

On note aussi $V^{>\alpha}(\mathfrak{m}) = \bigcup_{\beta > \alpha} V^{\beta}(\mathfrak{m})$ et $\mathrm{gr}_V^{\alpha}(\mathfrak{m}) = \dfrac{V^{\alpha}(\mathfrak{m})}{V^{>\alpha}(\mathfrak{m})}$. Par suite pour $N \gg 0$, $(\theta - \alpha)^N V^{\alpha}(m) \subset V^{>\alpha}(\mathfrak{m})$.

Supposons maintenant que Y est une hypersurface définie par une équation $t = 0$. Alors on a $\mathrm{gr}_V^0(\mathscr{D}_X) \simeq \mathscr{D}_Y[\theta]$.

LEMME 4.1.1 (cf. [Me], [Sai 2]). *Le complexe $i^!\mathfrak{m}$ est naturellement quasi-isomorphe au complexe*

$$0 \to \mathrm{gr}^0(\mathfrak{m}) \xrightarrow{D_t} \mathrm{gr}^{-1}(\mathfrak{m}) \to 0$$

où $\mathrm{gr}^0(\mathfrak{m})$ *est situé en degré zéro.*

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $-1 < \alpha \leqslant 0$ et soit $p \in \mathbb{N}$. Introduisons les $\mathscr{D}_X$-modules réguliers

$$\mathfrak{n}_{\alpha p} = \bigoplus_{0 \leqslant j \leqslant p} \mathscr{O}_X[t^{-1}] t^{-\alpha} \frac{(\log t)^j}{j!}.$$

Notons $e_{\alpha j} = t^{-\alpha} \dfrac{(\log t)^j}{j!}$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a:

(i) $\mathfrak{n}_{0,p} \simeq \mathscr{O}_X[t^{-1}]^{p+1}$ en tant que $\mathscr{O}_X$-modules,
(ii) $(tD_t) e_{\alpha p} = e_{\alpha p-1} - \alpha e_{\alpha p}$,
(iii) Si $-1 < \alpha < 0$, $\mathfrak{n}_{\alpha p} = \mathscr{D}_X e_{\alpha p}$.

Si $\mathfrak{m}$ est un $\mathscr{D}_X$-module on notera $\mathfrak{m}_{\alpha p} = \mathfrak{m} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathfrak{n}_{\alpha p}$ muni de la structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche pour laquelle si v est un champ de vecteurs, l'action de v est donnée par $v(m \otimes n) = v(m) \otimes n + m \otimes v(n)$ pour tout $m \in \mathfrak{m}$ et $n \in \mathfrak{n}$ (cf. [K1]).

On a la décomposition en somme directe de $\mathscr{O}_X[t^{-1}]$-modules libres $\mathfrak{m}_{\alpha p} = \oplus_{0 \leqslant k \leqslant p} \mathfrak{m}[t^{-1}] \otimes e_{\alpha k}$, où $\mathfrak{m}[t^{-1}]$ désigne le localisé de $\mathfrak{m}$ le long de Y (cf. [K1]).

Si $\mathfrak{m}$ est régulier le long de Y, $\mathfrak{m}_{\alpha p}$ l'est aussi.

Si $k \leqslant l$ on des inclusions $\mathfrak{n}_{\alpha k} \to \mathfrak{n}_{\alpha l}$ d'où l'on déduit des monomorphismes

$$\mathfrak{m}_{\alpha k} \to \mathfrak{m}_{\alpha l}$$

et donc les morphismes $i^!\mathfrak{m}_{\alpha k} \to i^!\mathfrak{m}_{\alpha l}$. La famille $\{i^!\mathfrak{m}_{\alpha p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ munie de ces morphismes définit un système inductif.

PROPOSITION 4.1.2 ([Me]). *Supposons* $-1 < \alpha \leqslant 0$. *Alors dans la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents,* $\varinjlim_{p \in \mathbb{N}} i^!\mathfrak{m}_{\alpha p}(*)$ *est representé par* $\mathrm{gr}_V^{\alpha}(\mathfrak{m})$. *Plus précisemment*:

(i) *Pour p assez grand on a un isomorphisme naturel* $\mathrm{gr}_V^{\alpha}(\mathfrak{m}) \to \mathscr{H}^0(i^!\mathfrak{m}_{\alpha p})$.

(ii) *Pour tout p, il existe $q \geqslant p$ tel que le morphisme* $\mathscr{H}^1(i^!\mathfrak{m}_{\alpha p}) \to \mathscr{H}^1(i^!\mathfrak{m}_{\alpha p})$ *soit nul.*

(*) *On trouvera les notions de* $\varinjlim$ *et* $\varprojlim$ *dans une catégorie dans* [SGA4].

4.2. DEFINITION DU MORPHISME VALEUR AU BORD. Soit X une variété analytique complexe complexifiée d'une variété analytique réelle M et soit Y une hypersurface de X complexifiée d'une hypersurface N de M. Soit t une fonction $X \to \mathbb{C}$ réelle sur M définissant Y et telle que $M_+ = M \cap \{t > 0\}$.

LEMME 4.2.1. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathbb{R}\Gamma_{M_+}\left(\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, B_M) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{n}_{\alpha p}, \mathscr{O}_X)\right) \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}_{\alpha,p}, \Gamma_{M_+}(B_M)).$$

DEMONSTRATION. Considérons le morphisme naturel

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \mathscr{O}_X) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{n}_{\alpha p}, \mathscr{O}_X) \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}_{\alpha p}, \mathscr{O}_X). \tag{*}$$

Puisque $\mathfrak{n}_{\alpha p}/\mathfrak{n}_{\alpha p-1} \simeq \mathfrak{n}_{\alpha 0}$ en raisonnant par récurrence on se ramène à démontrer le lemme pour $p = 0$.

Si on se place sur $X - Y$, pour $p = 0$ le morphisme (*) est un isomorphisme puisque localement sur $X - Y$, $\mathfrak{n}_{\alpha 0} \simeq \mathscr{O}_X[t^{-1}]$, isomorphisme $\mathscr{D}_X$-linéaire par rapport à l'automorphisme $\mathscr{D}_{X|X-Y} \to \mathscr{D}_{X|X-Y}$, qui à P associe $t^{-\alpha}Pt^{\alpha}$. Il reste à appliquer $\mathbb{R}\Gamma_{M^+}$ aux deux membres. □

Construisons maintenant pour $-1 < \alpha \leqslant 0$, un morphisme naturel

$$\beta_\alpha\colon \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \Gamma_{M^+}(B_M))|_Y \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathrm{gr}_V^{\alpha}(\mathfrak{m}), B_N).$$

Si $k \geqslant k'$ on a un monomorphisme $\mathfrak{n}_{\alpha k'} \to \mathfrak{n}_{\alpha k}$. Fixons $h(t)$ une détermination de $\log t$ sur un ouvert U contenant M_+ tel que $U \cap Y = \phi$. Soit $e^{-\alpha h(t)}$ la détermination de $t^{-\alpha}$ correspondante et soit $s_{\alpha k} \in \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{n}_{\alpha k}, \mathscr{O}_X)|_U$ défini par $s_{\alpha k}(e_{\alpha j}) = h(t)^j \dfrac{e^{-\alpha h(t)}}{j!}$ pour $j \leqslant k$. Il est clair que le morphisme

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{n}_{\alpha k}, \mathscr{O}_X)|_U \to \mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{n}_{\alpha k'}, \mathscr{O}_X)|_U \quad \text{pour } k \geqslant k'$$

envoie $s_{\alpha k}$ dans $s_{\alpha k'}$.

Soit

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, B_M)|_U \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, B_M) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{n}_{\alpha k}, \mathscr{O}_X)|_U$$

le morphisme associé au produit tensoriel par $s_{\alpha k}$ et notons φ_k le morphisme obtenu en appliquant $\mathbb{R}\Gamma_{M^+}$ aux deux membres, puis le Lemme 4.2.1:

$$\varphi_k\colon \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \Gamma_{M^+}(B_M)) \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}_{\alpha k}, \Gamma_{M^+}(B_M)) \tag{4.2.1}$$

Enfin soit

$$g_{kk'}\colon \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}_{\alpha k}, \Gamma_{M^+}(B_M)) \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}_{\alpha k'}, \Gamma_{M^+}(B_M))$$

le morphisme associé à l'inclusion $\mathfrak{m}_{\alpha k'} \to \mathfrak{m}_{\alpha k}$.

Alors pour $k \geqslant k'$ on a

$$\varphi_{k'} \cdot g_{kk'} = \varphi_k$$

et on en déduit un morphisme:

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \Gamma_{M^+}(B_M)) \to \varprojlim_{k} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}_{\alpha k}, \Gamma_{M^+}(B_M)). \tag{4.2.2}$$

Or d'après la Proposition 4.1.2, $\varprojlim_k \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}_{\alpha k}, B_N)$ est representé par $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathrm{gr}^\alpha(\mathfrak{m}), B_N)$. En combinant (4.2.2) avec les morphismes

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}_{\alpha k}, \Gamma_{M^+}(B_M)) \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(i^!\mathfrak{m}_{\alpha k}, B_N)$$

(cf. (1.2.3)) on conclut la demonstration. □

REMARQUE. Les morphismes β_α dépendent du choix de la détermination $h(t)$ de $\log t$.

Nous sommes maintenant en mesure de définit la valeur au bord générale.

Rappellons que si $\mathfrak{m}$ est un $\mathscr{D}_X$-module spécialisable le long de Y on lui associe le $\mathscr{D}_Y$-module des cycles proches

$$\Psi_Y(\mathfrak{m}) = \bigoplus_{-1<\alpha\leqslant 0} \mathrm{gr}^\alpha(\mathfrak{m})$$

et le complexe des cycles évanescents $\Phi_Y(\mathfrak{m}) = \oplus_{-1\leqslant\alpha<0}\,\mathrm{gr}^\alpha(\mathfrak{m})$ (voir [K2], [Me]).

Alors on a un triangle distingué

$$i^!\mathfrak{m} \longrightarrow \Psi_Y(\mathfrak{m}) \xrightarrow[-\partial t]{} \Phi_Y(\mathfrak{m}) \xrightarrow{+1}$$

qui correspond, via le foncteur $DR^Y(\cdot) = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\mathscr{O}_Y, \cdot)$, au triangle cycles proches-évanescents géométrique (cf. [SGA7])

$$i^*F \to \Psi_Y(F) \to \Phi_Y(F) \xrightarrow{+1}$$

où $F = DR^X(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_{X,\mathfrak{m}})$.

DEFINITION 4.2.2. Soit $\bigoplus_{-1<\alpha\leqslant 0} \beta_\alpha = \beta$

$$\beta\colon \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \Gamma_{M^+}(B_M))|_Y \to \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_Y}(\Psi_Y(\mathfrak{m}), B_N). \tag{4.2.3}$$

On appelle β le morphisme valeur au bord de $\mathfrak{m}$.

REMARQUE. Dans le cas où Y est non caractéristique pour $\mathfrak{m}$, on a bien $\Psi_Y(\mathfrak{m}) \simeq \mathfrak{m}_Y$ et le morphisme β coincide avec celui de [S1], [Ko]. En effet on a la proposition suivante:

PROPOSITION 4.2.3. *Soit*

$$Q(x, t, D_x, D_t) = D_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t, x, D_x) D_t^j$$

où les opérateurs A_j sont d'ordre au plus $m-j$ et $[t, A_j] = 0, j = 0, \dots, m-1$. Alors la valeur au bord de [S1], [Ko] *d'une solution u de $Qu = 0$, définie dans M_+, est égale à $\beta(u)$, u vue comme solution de $t^m Q$.*

DEMONSTRATION. Il est facile de vérifier que le localisé du système défini par $t^m Q$ est défini par l'opérateur $Qt^m = D_t^m t^m + Rt^m$ où

$$R = \sum_{j=0}^{m-1} A_j(t, x, D_x) D_t^j$$

lequel admet comme polynome caractéristique $b(\theta) = (\theta + 1)\cdots(\theta + m)$ et donc comme exposants caracteristiques $\alpha_1 = -1, \dots, \alpha_m = -m$. Dans ce cas β se réduit à β_0 et $\Psi_Y(\mathfrak{m}) \approx \mathscr{D}_Y^m$, et il faut calculer $\beta_0(t^{-m}u)$. On suit la démonstration du Théorème 3.1.1, ce qui nous amène à démontrer le lemme suivant:

LEMME 4.2.4. *Soit $s\colon \mathscr{D}_Y^m \to \mathscr{D}_{X\leftarrow Y}$ le morphisme $\mathscr{D}_Y$-linéaire à droite défini par*

$$s((P_i)) = \sum_{i=1}^{m} \delta(t)^{(-1+i)} P_i.$$

Alors on a un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} & \xrightarrow{\;Qt^m\;} & \mathscr{D}_{X\leftarrow Y} \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ \mathscr{D}_Y^m & \xrightarrow[\text{fléche nulle}]{} & \mathscr{D}_Y^m \end{array}$$

DEMONSTRATION. On a bien $Qt^m s=0$. On peut adapter la preuve du Lemme 3.1.2, en nous ramenant donc à montrer que pour tout $l \geqslant 0$, $P\colon \mathrm{gr}^{-l}(\operatorname{coker} s) \to \mathrm{gr}^{-l}(\operatorname{coker} s)$ est bijectif. Or $\mathrm{gr}^{-l}(\operatorname{coker} s)=0$ pour $l=0,\ldots, m-1$ et pour $l \geqslant m$ on a $b(-m-1) \neq 0$. □

CONCLUSION DE LA PROPOSITION 4.2.3. $\beta_0(t^{-m}u)$ est donc l'unique suite $(v_1(x),\ldots,v_m(x)) \in B_N^m$ tel qu'il existe un prolongement u' de $t^{-m}u$ à support dans M_+, vérifiant $Qt^m u' = \Sigma_{i=1}^m \delta(t)^{(-1+i)} v_i(x)$. Mais alors $t^m u'$ est le prolongement de u utilisé par [S1], [Ko]. □

4.3. LE MORPHISME β DANS LE CAS D'UN OPERATEUR

Soit P un opérateur régulier le long de Y, s'écrivant sous la forme

$$P(y, t, D_y, D_t) = \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant m \\ a_m \neq 0}} a_j (tD_t)^j + tQ \quad \text{avec}$$

$Q \in V^1(\mathscr{D}_X) \cap \mathscr{D}_X(m)$; notons $b(s) = \Sigma_{0 \leqslant j \leqslant m} a_j s^j \in \mathbb{C}[s]$, $\mathfrak{m} = \mathscr{D}/\mathscr{D}P$.

Supposons $b(-1)=0$, p étant la multiplicité de cette racine.

(4.3.1). Supposons aussi que pour $i \in \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, \ldots\}$, $i \neq -1$, on ait $b(i) \neq 0$. Puisque

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}, \Gamma_{M^+}(B_M)) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathfrak{m}[t^{-1}], \Gamma_{M^+}(B_M))$$

pour tout $\mathscr{D}_X$-module cohérent, on peut sans perte de généralité supposer $\mathscr{D}/\mathscr{D}P$ localisé et donc pour tout $j \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $b(j) \neq 0$.

Notons $P(s) = t^{-s} P t^s \in V^0(\mathscr{D}_X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]$ et donc $P(0) = P$.

Ainsi si $u \in \Gamma_{M^+}(B_M)$ est solution de $Pu=0$, pour tout $s \in \mathbb{C}$, u satisfait $P(s)t^{-s}u = 0$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on en déduit un système d'équations

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k-j} P(s) t^{-s} (\log t)^j u = 0$$

On pose

$$P_{kj} = (-1)^{j+k} \frac{k!}{(k-j)!} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k-j} P(s)|_{s=0} \quad \text{si } k \geqslant j$$

et $P_{kj} = 0$ si $k < j$.

Soit u le générateur de $\mathfrak{m} = \mathscr{D}_X/\mathscr{D}_X P$ défini par la classe de 1 modulo $\mathscr{D}_X P$ et soit $u_0 = u \otimes e_{00}, \ldots, u_k = u \otimes e_{0,k}$ (u_i est donc un élément de $\mathfrak{m}_{0,k}$ pour $i \leqslant k$). Alors $\Sigma_{0 \leqslant j \leqslant i} P_{ij} u_j = 0$ pour $j, i \leqslant k$.

Notons P_k la matrice triangulaire inférieure de type $(k+1, k+1)$ dont la composante (i,j) est l'opérateur P_{ij}. Si on note $\tilde{u}_k = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}$ on a $P_k \tilde{u}_k = 0$ et on en déduit un morphisme $\mathscr{D}_X$-linéaire

$$\mathscr{D}_X^{k+1}/\mathscr{D}_X^{k+1} P_k \xrightarrow{H_k} \mathfrak{m}_{0,k}.$$

LEMME 4.3.1. *Pour tout $k \geqslant 0$ le morphisme H_k est un isomorphisme.*

DEMONSTRATION. On a pour tout $l \geqslant 0$ une suite exacte de $\mathscr{D}_X$-modules $0 \to \mathfrak{m}_{0,l-1} \to \mathfrak{m}_{0,l} \to \mathfrak{m}[t^{-1}] \to 0$. Notons $\tilde{\mathfrak{m}}_l$ le $\mathscr{D}_X$-module $\mathscr{D}_X^{l+1}/\mathscr{D}_X^{l+1} P_l$. Il est clair que $\mathfrak{m}_{0,0} \simeq \mathfrak{m}[t^{-1}] \simeq \mathfrak{m}$ et que $\mathfrak{m} \simeq \tilde{\mathfrak{m}}_0$. Il reste à raisonner par récurrence sur l. □

THEOREME 4.3.2. *Supposons satisfaite l'hypothèse* (4.3.1).

Soit $u \in \Gamma_{M^+}(B_M)$ une solution de $Pu = 0$ et soit

$$\bar{u}_k = \begin{bmatrix} u \\ u \log t \\ \vdots \\ u \dfrac{(\log t)^k}{k!} \end{bmatrix}.$$

Alors $\bar{u}_k$ est la solution de $\mathfrak{m}_{0,k}$ image de u par φ_k et $\beta_0(u)$ est l'unique suite $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{p-1}) \in B_N^p$ tel qu'il existe un prolongement $\bar{u}_k'$ de $\bar{u}_k$ à support dans $\bar{M}_+$ vérifiant pour $k \geqslant p-1$ l'égalité $P_k \bar{u}_k' = \omega\delta(t)$.

COROLLAIRE 4.3.3. *La valeur au bord suivant Oshima est un cas particulier de β, lorsque les exposants caracteristiques sont simples.*

DEMONSTRATION. Observons d'abord que d'après l'hypothèse $\mathrm{gr}^0(\mathfrak{m}) \simeq \mathscr{D}_Y^p$. La première assertion du théorème est évidente.

Puisque $\mathfrak{m}_{0,k}$ est isomorphe à

$$\mathrm{Coker}(\mathscr{D}_X^{k+1} \xrightarrow{P_k} \mathscr{D}_X^{k+1}),$$

pour expliciter le morphisme β_0 on peut raisonner comme nous avons fait dans 3.1 (voir Th. 3.1.1), en remplaçant partout l'opérateur P par la matrice P_k.

Nous sommes donc ramenés à démontrer l'analogue du Lemme 3.1.2 d'où l'on déduira aussitôt le théorème.

LEMME 4.3.4. *Soit $k \geqslant p-1$ et notons $\alpha_k: \mathscr{D}_Y^p \to \mathscr{D}_{Y \leftarrow X}^{k+1}$ le morphisme*

$$(Q_1, \ldots, Q_p) \to (0, \ldots, 0, Q_1, \ldots, Q_p) \quad et \quad \alpha_k': \mathscr{D}_Y^p \to \mathscr{D}_Y^{k+1}$$

le monomorphisme

$$(Q_1, \dots, Q_p) \to (Q_1, \dots, Q_p, 0, \dots, 0).$$

Alors:

(i) *Le morphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}^{k+1}_{X\leftarrow Y} & \xrightarrow{P_k} & \mathscr{D}^{k+1}_{X\leftarrow Y} \\ {\scriptstyle\alpha_k}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\alpha'_k} \\ \mathscr{D}^{p}_{Y} & \xrightarrow[\text{nulle}]{\text{flêche}} & \mathscr{D}^{p}_{Y} \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

(ii) *Le monomorphisme* $\mathscr{D}^{k+1}_{X\leftarrow Y} \to \mathscr{D}^{k+2}_{X\leftarrow Y}$ *qui à* $(Q_1, \dots, Q_{k+1})$ *associe* $(0, Q_1, \dots, Q_{k+1})$ *induit un morphisme naturel* coker $P_k \to$ coker P_{k+1} *et l'image de* coker P_k *dans* coker P_{k+p} *est nulle.*

DEMONSTRATION. Montrons d'abord (i): Munissons $\mathscr{D}^{k+1}_{X\leftarrow Y}$ de la filtration

$$V^m(\mathscr{D}^{k+1}_{X\leftarrow Y}) \underset{\text{déf}}{=} V^m(\mathscr{D}_{X\leftarrow Y}) \times V^m(\mathscr{D}_{X\leftarrow Y}) \times \cdots \times V^m(\mathscr{D}_{X\leftarrow Y})$$

où

$$V^m(\mathscr{D}_{X\leftarrow Y}) = \frac{V^m(\mathscr{D}_X)}{V^{m-1}(\mathscr{D}_X)t}$$

conforme au Lemme 3.1.2 et munissons $\mathscr{D}^p_Y$ de la filtration induite par α_k (resp. par α'_k). Ainsi nous sommes ramenés à démontrer que

$$P_k = P_k^{(m)}: \mathrm{gr}^m(\mathrm{coker}\ \alpha_k) \to \mathrm{gr}^m(\mathrm{coker}\ \alpha'_k)$$

est bijectif pour $m \leqslant 0$. Or $P_k^{(m)}$ opère sur $\mathrm{gr}^m(\mathrm{coker}\ \alpha_k)$ par $b_k(m-1)$ où $b_k(s)$ est la matrice triangulaire $(k+1, k+1)$ dont la i, j-composante est le polynôme

$$\begin{cases} b_{kij}(s) = (-1)^{i+j} \dfrac{i!}{(i-j)!} \left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^{i-j} b(s) & \text{si } j \leqslant i \\ b_{kij}(s) = 0 \quad \text{si } i < j. \end{cases}$$

Le déterminant de $b_k(s)$ est égale à $b(s)^{k+1}$. Il en résulte que $P_k^{(m)}$ est bijectif pour $m \neq 0$. Il reste à analyser le cas $m=0$. La matrice $b_k(-1)$ a la forme

$$
\begin{array}{r c}
\begin{array}{r} p \text{ lignes}\left\{ \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \right. \\[2ex] p+1\text{-ligne}\rightarrow \\[2ex] k-p\text{lignes}\left\{ \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \right. \end{array}
&
\left[
\begin{array}{ccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\[2ex]
(-1)^{p+1}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^p b\right)(-1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\[2ex]
* & (-1)^{p+1+k+1}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^p b\right)(-1) & \mathbf{0}
\end{array}
\right] \\
& \underbrace{\hphantom{(-1)^{p+1}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^p b\right)(-1)}}_{p \text{ colonnes}} \quad \underbrace{\hphantom{(-1)^{p+1+k+1}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^p b\right)(-1)}}_{p+1 \text{ colonne}} \quad \underbrace{\hphantom{\mathbf{0}\quad}}_{k-p \text{ colonnes}}
\end{array}
$$

et comme par hypothèse $\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^p b\right)(-1) \neq 0$ on en déduit que $b_k(-1)$ opère bijectivement de

$$\operatorname{gr}^0(\operatorname{coker} \alpha_k) \simeq \mathscr{D}_Y^{k+1-p} \times \underbrace{0 \times \cdots \times 0}_{\substack{p \\ \text{fois}}} \text{ sur } \operatorname{gr}^0(\operatorname{coker} \alpha'_k) \simeq \underbrace{0 \times \cdots \times 0}_{\substack{p \\ \text{fois}}} \times \mathscr{D}_Y^{k+1-p}$$

Ceci achève la preuve de (i).

Pour démontrer (ii) remarquons que le morphisme $\operatorname{coker} P_k \to \operatorname{coker} P_{k+1}$ induit d'après (i) un morphisme $\mathscr{D}_Y^p \xrightarrow{h} \mathscr{D}_Y^p$ et par la définition de α'_k, si

$$(Q_1, \ldots, Q_p) \in \mathscr{D}_Y^p,\ h(Q_1, \ldots, Q_p) = (0, Q_1, \ldots, Q_{p-1}) \in \mathscr{D}_Y^p.$$

La matrice de h est donc une matrice scalaire nilpotente. □

PROPOSITION 4.3.5. *Soit*

$$\mathbf{P}(t, D_t) = (tD_t - \alpha)^p,\ p \geqslant 1,\ \alpha \in \mathbb{C},\ u = \Sigma_{j \leqslant p-1}\, a_j(x) t^\alpha \log t^j$$

une solution de P *définie dans* M_+. *Alors* $\beta(u) = (C_i a_i(x))_{i=0,\ldots,p-1}$, *avec* $C_i = (p-i-1)!\, i!$.

DEMONSTRATION. On se ramène d'abord à $-1 < \alpha \leqslant 0$ et en tensorisant par $\mathrm{n}_{\alpha 0}$ à $P = (tD_t + 1)^p$ et $\alpha = -1$. Appliquons le Théorème 4.3.2 à cette situation. Soit

$$\tilde{u} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant p-1} a_j(x) t_+^{-1} \log t_+^j$$

le prolongement de u à support dans $\bar{M}_+$.

Il faut calculer pour $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant p-1$

$$(A) \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \frac{p!}{(p-i+j)!} (tD_t+1)^{p-i+j} \tilde{u} \log t^j$$

$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \frac{p!}{(p-i+j)!} (tD_t+1)^{p-i+j} \left(\sum_{l=0}^{p-1} a_l(x) t_+^{-1} \log t_+^{j+l} \right).$$

Il suffit d'appliquer les formules

$$\begin{cases} (D_t t)^r t_+^{-1} \log t_+^s = \dfrac{s!}{(s-r)!} t_+^{-1} \log t_+^{s-r}, & s \geqslant r \\ \qquad\qquad = 0, & r > s+1 \\ (D_t t)^{s+1} t_+^{-1} \log t_+^s = s!\, \delta(t). & \end{cases}$$

$$\begin{cases} p! \displaystyle\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \left(\frac{1}{p-i+j} \right) = p!\beta(p-m, m+1) = (p-i-1)!\, i! \\ (\beta \text{ désigne la fonction beta) et} \\ p! \displaystyle\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \binom{j+l}{l-p+i} \equiv 0, \quad \text{pour tout } l,\ p-i \leqslant l \leqslant p-1. \end{cases}$$

□

REMARQUE. Dans la situation générale nous conjecturons que notre valeur au bord d'une solution d'un système régulier coïncide avec les coefficients de son dévéloppement asymptotique défini par Kashiwara et Kawai dans [K-K] dans le cadre de la deuxième microlocalisation.

Bibliographie

[G-B] C. Goulaouic et M.S. Baoundi: Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, *Comm. Pure Appl. Math.* 26 (1973), 455–475.

[K1] Kashiwara, M.: On the holonomic systems of linear differential equations II, *Inventiones Math.* 49 (1978), 121–135.

[K2] Kashiwara, M.: Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, *Springer Lecture Notes in Math.* n° 1016 (1983).

[K-K] Kashiwara, M., Kawai, T.: Second microlocalisation and asymptotic expansions, *Lecture Notes in Physics*, Springer, 126 (1980), 21–56.

[K-O] Kashiwara, M. et Oshima, T.: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, *Ann. of Math.* 106 (1977), 154–200.

[Ko] Komatsu, H.: Boundary values for solutions of elliptic equations, *Proc. Int. Conf. Func. Anal. Rel. Topics* (1970) 107–121, University of Tokyo.

[L-M.F.] Laurent, Y. et Monteiro Fernandes, T.: Systèmes différentiels fuchsiens le long d'une sous-variété, Publ. RIMS, Kyoto University Vol. 24 (1988), 397–431.

[L-S] Laurent, Y. et Schapira, P.: Images inverses des modules différentiels, *Compositio Mathematica* 61 (1987), 229–251.

[O1] Oshima, T.: A definition of boundary values of solutions of partial differential equations with regular singularities, Publ. RIMS, Kyoto University, 19 (1983), 1203–1230.

[O2] Oshima, T.: Boundary value problems for systems of linear partial differential equations with regular singularities, *Adv. Stud. in Pure Math.* 4 (1984), 391–432.

[S1] Schapira, P.: Problème de Dirichlet et solutions hyperfonctions des equations elliptiques, *Bull. UMI* (4), 3 (1969), 369–372.

[S2] Schapira, P.: Front d'onde analytique au bord II, Sem EDP, École polytechnique, Exp. 13 (1986).

[S3] Schapira, P.: Microfunctions for boundary value problems, *Algebraic Analysis*, Vol. II (in honour of M. Sato) (1988), 809–819.

[S4] Schapira, P.: Microdifferential systems in the complex domain, *Grundlehren der mathmatischen Wissenchaften*, 269, Springer-Verlag.

[Sa] Sabbah, C.: Cycles évanescents et $\mathscr{D}_X$-modules (d'après M. Kashiwara et B. Malgrange), *Conférence de la Rabida*, 1984, vol. 3, Hermann, Paris (1987), 53–98.

[Me] Mebkhout, Z.: Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents, ch. III, §4, Hermann, Paris, 1989.

[Sai1] Saito, M.: On the structure of Brieskorn lattice, preprint.

[Sai2] Saito, M.: Modules de Hodge polarisable, Publ. of RIMS, Kyoto University, 24 (1988), 849–995.

[S-K-K] Sato, M., Kashiwara, M., et Kawai, T.: Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Lecture Notes in Math.* 287, Springer-Verlag, 1973, 265–529.

[S.G.A.4] Grothendieck, A. et Verdier, J.L.: Exposé I, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *Springer Lecture Notes in Maths.* 269, 1963/64.

[S.G.A.7] Deligne, P.: Exposé XIV, *Springer Lecture Notes in Math.* 340, 1967/69.