COMPOSITIO MATHEMATICA

SINNOU DAVID

Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes

Compositio Mathematica, tome 78, nº 2 (1991), p. 121-160
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1991__78_2_121_0>

Compositio Mathematica **78**: 121–160, 1991.

Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes

SINNOU DAVID

Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

Received 24 January 1989; accepted in revised form 10 May 1990

1. Introduction

Les méthodes de transcendance permettent de minorer le degré d'un point de torsion d'une variété abélienne en fonction de son ordre. Si les résultats obtenus (citons par exemple les travaux de Masser (voir [Ma3]) et de Cohen (voir [Co])) sont plus faibles que ceux obtenus par des méthodes algébriques (voir Serre [Se]), ils présentent pour l'instant l'avantage d'être effectifs. C'est ce que nous précisons ici, dans le cadre du résultat suivant dû à Masser:

THEOREME 1.1 (Masser). *Soient A une variété abélienne de dimension $g \geqslant 1$ définie sur un corps de nombres k, e un point de torsion non nul de A d'ordre $n(e)$ et $d(e)$ le degré sur k du corps de définition de e. Il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de A et k telle que*:

$$d(e) \geqslant c \frac{n(e)^{1/g}}{\log n(e)}.$$

Nous explicitons la dépendance en la variété abélienne A de cette constante c. Dans le cas où A est simple, on obtient avec les notations précédentes:

THEOREME 1.2. *Pour tout entier $g > 0$, il existe une constante $c_1 = c_1(g) > 0$ telle que pour tout entier $\delta \geqslant 2$, tout réel $h \geqslant 1$, tout corps de nombres k de degré $\leqslant \delta$ sur $\mathbf{Q}$ et toute variété abélienne A définie sur k et de hauteur de Faltings $h(A_{/k}) \leqslant h$, de dimension g, simple, principalement polarisée, tout point de torsion e non nul de A vérifie la relation*:

$$d(e) \geqslant c_1(g) h^{-3/2} \frac{\delta^{-3/2}}{\log \delta} \frac{n(e)^{1/g}}{\log n(e)}.$$

On notera que si A est une courbe elliptique, $h(A_{/k})$ est comparable à la hauteur d'un de ses modèles de Weierstrass. Paula Cohen a obtenu dans ce cas:

$$d(e) \geqslant c_2 \frac{h^{-3/2}}{\log h} \frac{\delta^{-3/2}}{\log \delta} \frac{n(e)}{\log n(e)}$$

où c_2 est une constante universelle. Notons toutefois que dans le cas des courbes elliptiques, Serre a récemment obtenu un résultat totalement effectif, généralisant ses résultats antérieurs (cas où la courbe E est définie sur $\mathbf{Q}$).

On donnera au §5 la démonstration du théorème 1.2, qui s'inspire largement des travaux de Masser ([Ma1, Ma2, Ma3]). Elle repose sur des estimations, précisées au §3 de la croissance des fonctions thêta raffinant les estimations de Masser (voir [Ma2]) et sur des propriétés modulaires des fonctions thêta, qui permettent de rendre effectifs les travaux de Shimura (voir [Sh]) décrites au §4. Ce résultat est en fait le point clef, qui permet plus généralement de rendre effective la méthode de Baker (ou de Gel'fond) dans les groupes algébriques commutatifs (nous obtenons par exemple dans [Dav2], une version effective des minorations de formes linéaires de logarithmes données dans [P-W]). Enfin, en appendice (§6), on rappelle quelques relations classiques vérifiées par les fonctions thêta ainsi que des lemmes fréquemments utilisés dans le texte. On trouvera dans [Dav1] un résumé des résultats exposés ici.

Je voudrais enfin remercier Masser dont la relecture attentive du manuscrit a conduit à de nombreuses améliorations de ce texte, et, en particulier à un raffinement du résultat final (comparer avec [Dav1]).

2. Réduction du problème

Soient k un corps de nombres plongé dans le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ sa clôture algébrique dans $\mathbf{C}$ et g un entier $\geqslant 1$. On note S_g l'espace de Siegel formé par les matrices $g \times g$ symétriques, de partie imaginaire définie positive. On notera par une apostrophe la transposée d'une matrice, et tous les vecteurs considérés seront des vecteurs lignes. Soit $\tau \in S_g$; posons $\Lambda = \mathbf{Z}^g + \mathbf{Z}^g \tau$. L'espace analytique $\mathbf{C}^g/\Lambda$ se plonge dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$ via l'application $z \mapsto \Theta_\tau(z)$ dont les coordonnées sont les fonctions thêta

$$\theta_m(\tau, 2z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}(n+m_1)\tau(n+m_1)' + (n+m_1).(2z+m_2)'\right)\right), \tag{1}$$

où $m = (m_1, m_2)$ parcourt un système de représentants $\mathscr{X}_2 = \mathscr{T}_2^2$ de $(\frac{1}{2}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g)^2$ (sauf lorsque cela sera explicitement mentionné, on choisira dans ce texte m_1 et m_2 ayant toutes leurs composantes dans $[0, 1[$). L'image de ce plongement est une variété abélienne $A(\tau)$ admettant une polarisation principale associée à la forme de Riemann H, où $H(z, w) = z(\Im m\, \tau)^{-1}\bar{w}'$. Par ailleurs, le groupe modulaire $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ agit sur S_g. On note $\mathscr{F}_g$ le domaine fondamental pour cette action décrit dans [Ig], p. 194. On désigne d'autre part par h la hauteur de Weil logarithmique et absolue, sur $\mathbf{P}^N(\bar{\mathbf{Q}})$.

DEFINITION 2.1. *Soit τ un élément de $\mathscr{F}_g$ tel que $\Theta_\tau(0) \in \mathbf{P}^N(\bar{\mathbf{Q}})$, on note $h(\tau)$, ou $h(A(\tau))$, la hauteur du point $\Theta_\tau(0)$ de $\mathbf{P}^N(\bar{\mathbf{Q}})$.*

Nous démontrerons en fait le résultat suivant, en utilisant la hauteur naïve introduite ci-dessus:

THEOREME 2.2. *Pour tout entier $g > 0$, il existe une constante $c_3 = c_3(g) > 0$ telle que pour tout entier $\delta \geqslant 2$, tout réel $h \geqslant 1$, tout corps de nombres k de degré $\leqslant \delta$ sur $\mathbf{Q}$ et tout élément τ de $\mathscr{F}_g$ tel que la variété abélienne $A(\tau)$ soit simple et définie sur k et de hauteur $h(A(\tau)) \leqslant h$, tout point de torsion e non nul de $A(\tau)$ vérifie la relation*:

$$d(e) \geqslant c_3(g) h^{-3/2} \frac{\delta^{-3/2}}{\log \delta} \frac{n(e)^{1/g}}{\log n(e)}.$$

Montrons tout d'abord comment le théorème 1.2 peut se déduire du théorème 2.2: soit A une variété abélienne principalement polarisée, définie sur un corps de nombre k. Quitte à faire une extension de degré finie de k (le degré ne dépendant que de g), on peut supposer que A est semi-stable, munie d'une structure de niveau d'ordre 24. Si n est un entier positif, nous noterons A_n le groupe des points de n-torsion de A, et $k(A_n)$ la plus petite extension de k sur laquelle tous les points de A_n sont rationnels. La hauteur de Faltings de A sur le corps $k(A_{24})$ étant plus petite que la hauteur de Faltings de A sur k, le théorème 1.2 est vrai sur k s'il est vrai sur $k(A_{24})$ (quitte à modifier la constante c_1). Si l'on note $M_{g,1,24}$ le schéma de modules de variétés abéliennes de dimension g, principalement polarisées et munies d'une structure de niveau d'ordre 24, et $\mathscr{A} \xrightarrow{F} M_{g,1,24}$ le schéma abélien universel, il existe un unique point x de $M_{g,1,24}$ et un isomorphisme φ défini sur $k(A_{24})$, compatible avec les structures de niveau liant A à la fibre $\mathscr{A}_x$. Le théorème 1.1 de [M-B], où la proposition 1-12 de [De] assure alors que la hauteur de Faltings de A sur $k(A_{24})$ est comparable à la hauteur modulaire de x. Pour finir, remarquons que $M_{g,1,24}$ est un revêtement de degré fini de $M_{g,1,1}$. Le point x que nous avons introduit ci-dessus est au dessus d'un élément τ de $\mathscr{F}_g$ dont la hauteur naïve que nous avons introduite ci-dessus est majorée par $c_4 h(x)$ (on notera ψ l'isomorphisme entre $\mathscr{A}_x$ et $A(\tau)$ obtenu par oubli de structure de niveau). De plus, la variété $A(\tau)$ est définie sur $k(A_{24})$. On a alors un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{A}_x \\ & & \downarrow \psi \\ & & A(\tau) \end{array} .$$

On en déduit que l'ordre de l'image de e dans $A(\tau)$ est $n(\psi \circ \varphi(e)) = n(e)$ (les deux flèches sont des isomorphismes), et

$$d(e) = [k(e)\colon k] \geqslant [k(A_{24}, \psi \circ \varphi(e))\colon k(A_{24})] \geqslant \frac{d(e)}{24^{4g^2}}$$

(en effet, il est facile de voir que $[k(A_{24})\colon k] \leqslant 24^{4g^2}$, car les éléments du groupe de galois agissent comme des automorphismes du $\mathbf{Z}$-module A_{24}). Ces remarques montrent que le théorème 2.2 entraine le théorème 1.2.

Nous fixerons pour la suite, sauf lorsque ce sera explicitement mentionné, un élément τ vérifiant les hypothèses du théorème 2.2. On notera également $i=\sqrt{-1}$, et pour tout point P de $A(\tau)$, on posera: $r(P)=\inf\{H(z,z),\ z\in\mathbf{C}^g,\ \Theta_\tau(z)=P\}$.

3. Croissance des fonctions thêta

3.1. *Notations et résultats*

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, “constante” signifiera “nombre réel >0 ne dépendant que de g”. On notera $\|\,.\,\|$ la norme du sup sur l'espace des matrices, $g \times g$ muni de sa base canonique. *Dans les 2 paragraphes suivants, on notera M un majorant de* $\|\mathfrak{Im}\,\tau\|$. On trouvera au §6 une majoration de M, due à Masser (lemme 6.3) cruciale pour toute la suite. De plus, nous noterons $e(.)$ la fonction:

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C}$$
$$z \longmapsto \exp(2i\pi z).$$

On notera également avec un indice i la i-ième composante des vecteurs considérés; ainsi, m_{1_i} désigne la i-ième composante de la caractéristique m_1.

THEOREME 3.1. *Il existe une constante $c_5=c_5(g)>0$, telle que la propriété suivante soit satisfaîte: pour tout élément τ de $\mathscr{F}_g$ et tout $z\in\mathbf{C}^g$, on a*:

$$|\log(\max\{|\theta_m(\tau, 2z)|,\ m\in\mathscr{Z}_2\}) - 4\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)| \leqslant c_5 \|\mathfrak{Im}\,\tau\|. \tag{2}$$

Notons $\mathscr{T}_4$ le système de représentants de $\frac{1}{4}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$ dont tous les éléments sont dans $[0,1[$, et posons $Q(z)=2\pi z y^{-1} {}^t z'$. On a alors:

$$4\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z) + \mathfrak{Re}\, Q(z) = 2\pi H(z,z).$$

En posant:

$$f_m(z) = e^{Q(z)}\theta_{(m,0)}(4\tau, 4z),$$

on a le corollaire:

COROLLAIRE 3.2. *Il existe une constante* $c_6 = c_6(g) > 0$, *telle que sous les hypothèses du théorème* 3.1, *on ait*:

$$|\log(\max\{|\theta_{(m,0)}(4\tau, 4z)|, m \in \mathcal{T}_4\}) - 4\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)| \leqslant c_6 \|\mathfrak{Im}\, \tau\|.$$

$$|\log(\max\{|f_m(z)|, m \in \mathcal{T}_4\}) - 2\pi H(z, z)| \leqslant c_6 \|\mathfrak{Im}\, \tau\|.$$

Ce corollaire constitue une réponse à une question de Masser (conjecture p. 126 de [Ma2]). Il généralise les résultats de Cohen ([Co]), Faisant et Philibert ([F-P]) pour les courbes elliptiques (on déduit facilement dans ce cas l'estimation ci-dessus de leurs minorations sur les valeurs des fonctions σ de Weierstrass).

Notons que dans le cas où la variété abélienne $A(\tau)$ est définie sur un corps de nombres k de degré sur $\mathbf{Q} \leqslant \delta$ et vérifie $h(A(\tau)) \leqslant h$, le lemme matriciel de Masser (lemme 6.3) permet de majorer $\|\mathfrak{Im}\, \tau\|$ par $c_{44}\delta h$.

La démonstration de ce théorème se fera en deux étapes: la majoration se déduira par un calcul direct sur la série thêta, grâce à des résultats classiques de réduction des matrices, rappelés en appendice; la minoration, plus difficile, sera d'abord prouvée pour certaines variétés abéliennes, un procédé de descente permettant d'en déduire le cas général.

3.2. *Majorations analytiques*

LEMME 3.3. *Soit* r *un entier* > 0 *et* $\tau = x + iy$ *un élément de* $\mathcal{F}_g$. *Notons*

$$F_1(r) = \left\{z,\ z \in \mathbf{R}^g,\ |z_i| \leqslant \frac{1}{2r},\ 1 \leqslant i \leqslant g\right\},$$

et

$$F(r) = \left\{z \in \mathbf{R}^g,\ |z_i| \leqslant \frac{g+1}{4r} \cdot y_i\right\},$$

où $y_i = y_{i,i}$ *est le* i-ième *terme diagonal de* $y = \mathfrak{Im}\, \tau$. *Pour tout* $z \in \mathbf{R}^g$, *il existe un élément* n *de* $\frac{1}{r}\mathbf{Z}^g$ *tel que* $zy^{-1} + n$ *appartienne à* $F_1(r)$ *et* $z + ny$ *appartienne à* $F(r)$.

DEMONSTRATION. Pour tout $z \in \mathbf{R}^g$ on peut trouver $n \in \frac{1}{r}\mathbf{Z}^g$ tel que $z+n$ ait toutes ses composantes majorées en module par $\frac{1}{2r}$. Soit alors n tel que $zy^{-1}+n$ vérifie cette propriété, de sorte que $z+ny$ est dans l'image par y de $F_1(r)$. En utilisant les majorations $|y_{i,j}| \leqslant \frac{1}{2}y_i$ (voir les propriétés (S.3) b) de l'appendice) pour $1 \leqslant i < j \leqslant g$, on vérifie que cette image est contenue dans $F(r)$, et le lemme est établi.

Soient $z \in \mathbf{C}^g$, $(m_1, m_2) \in \mathscr{Z}_2$ et $m \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}^g$. Posons de plus $z_0 = z - m\tau$. En vertu de la relation (32) de l'appendice,

$$|\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, 2z)| = |e(-2m\tau m' - 2m.(2z_0)')e(-2m.m_2')\theta_{(m_1+2m,m_2)}(\tau, 2z_0)|.$$

Par ailleurs,

$$\mathfrak{Im}(-2m\tau m' - 2m.(2z_0)') = -2mym' - 4m.\mathfrak{Im}\, z_0'.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z) - H(\mathfrak{Im}\, z_0, \mathfrak{Im}\, z_0) \\ &\quad = (\mathfrak{Im}\, z_0 + my)y^{-1}(\mathfrak{Im}\, z_0 + my)' - \mathfrak{Im}\, z_0 y^{-1}\mathfrak{Im}\, z_0' \\ &\quad = 2m(\mathfrak{Im}\, z_0)' + mym'. \end{aligned} \tag{3}$$

Par ailleurs nous avons (relation (31)):

$$\theta_{(m_1+2m,m_2)}(\tau, 2z_0) = \theta_{(m_1,m_2)}(\tau, 2z_0).$$

D'où la relation:

$$\begin{aligned} |\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, 2z)| = \exp(4\pi((&H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z) \\ &- H(\mathfrak{Im}\, z_0, \mathfrak{Im}\, z_0)))|\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, 2z_0)|. \end{aligned} \tag{4}$$

On peut par ailleurs, grâce au lemme 3.3 appliqué avec $r=2$, choisir m tel que $\mathfrak{Im}\, z_0 \in F(2)$, on a donc:

$$\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant g,\ |(\mathfrak{Im}\, z_0)y^{-1}|_i \leqslant \frac{1}{4}$$

Nous avons donc les majorations suivantes:

$$H(\mathfrak{Im}\, z_0, \mathfrak{Im}\, z_0) \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{Im}\, z_0)y^{-1}(\mathfrak{Im}\, z_0)' \leqslant g\frac{1}{4}\frac{g+1}{8}\, y_g \leqslant c_7 M, \tag{5}$$

en tenant compte des inégalités $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_g$ (voir les propriétés (S.3) b) de l'appendice), et de l'hypothèse $\|\mathfrak{Im}\,\tau\| \leqslant M$. Pour tout $(m_1, m_2) \in \mathscr{X}_2$, et tout z_0 tel que $\mathfrak{Im}\, z_0 \in F(2)$, nous avons:

$$\begin{aligned} &|\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, 2z_0)| \\ &= \left|\sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}(n+m_1)\tau(n+m_1)' + (n+m_1).(2z_0+m_2)'\right)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp(-\pi(n+m_1)y(n+m_1)' + 2\pi|(n+m_1).(2\mathfrak{Im}\, z_0)'|). \end{aligned} \tag{6}$$

En tenant compte du lemme 6.1, cette expression est majorée par:

$$\prod_{i=1}^{i=g}\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left[\pi\left(|n + m_{1_i}|y_i\left(-c_0|n + m_{1_i}| + \frac{g+1}{2}\right)\right)\right]\right),$$

Majorons chacun des facteurs:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left[\pi\left(|n + m_{1_i}|y_i\left(-c_0|n + m_{1_i}| + \frac{g+1}{2}\right)\right)\right].$$

Pour $|n| \geqslant \frac{3}{2} + \frac{g+1}{2c_0}$, cette série est, du fait des inégalités $y_i \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $0 \leqslant m_{1_i} \leqslant \frac{1}{2}$, majorée par la série:

$$S_i = \sum_{|n| \geqslant 3/2 + (g+1)/2c_0} \exp\left(-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}c_0|n + m_{1_i}|\right) \quad (\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant g),$$

qui est convergente. Soit $c_8 = \max\{S_i, 1 \leqslant i \leqslant g\}$, le maximum de ces sommes. Par ailleurs, pour $|n| < \frac{3}{2} + \frac{g+1}{2c_0}$, nous avons:

$$\pi c_0 y_i |n + m_{1_i}|\left(-|n + m_{1_i}| + \frac{g+1}{2c_0}\right) \leqslant \pi y_i \frac{(g+1)^2}{16c_0} \leqslant c_9 M$$

(en tenant compte de l'hypothèse $\|y\| \leqslant M$). En conclusion, nous avons obtenu l'inégalité suivante, valable pour tout z tel que $\mathfrak{Im}\, z \in F(2)$:

$$|\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, 2z_0)| \leqslant \prod_{i=1}^{i=g} [c_8 + c_{10}\exp(c_9 M)]. \tag{7}$$

En mettant ensemble les majorations (4) et (7), on en déduit que pour tout $z \in \mathbf{C}^g$ et tout $m=(m_1, m_2) \in \mathscr{Z}_2$:

$$\log(|\theta_m(\tau, 2z)|) \leqslant c_{11}M + 4\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z). \tag{8}$$

La relation (8) démontre la première partie du théorème 3.1.

Enfin, nous aurons besoin du lemme:

LEMME 3.4. *Pour tout élément* $m=(m_1, m_2)$ *de* $\mathbf{R}^{2g}$, *on a*:

$$|\theta_m(\tau, 0)| \leqslant c_{12}.$$

DEMONSTRATION. Soit $m=(m_1, m_2)$ un élément de $\mathbf{R}^{2g}$, on a:

$$\begin{aligned}|\theta_m(\tau, 0)| &= \left|\sum_{n\in\mathbf{Z}^g} \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}(n+m_1)\tau(n+m_1)' + (n+m_1).m_2'\right)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbf{Z}^g} \exp(-\pi((n+m_1)y(n+m_1)')).\end{aligned}$$

Cette expression est majorée par (voir le lemme 6.1):

$$\prod_{i=1}^{i=g}\left[\sum_{n\in\mathbf{Z}} \exp(-\pi((n+m_{1_i})^2(c_0 y_i)))\right].$$

Du fait des inégalités $y_i \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, chacune de ces séries est majorée par la série:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \exp\left(-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}c_0\left(|n| - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

qui est convergente. On en déduit l'existence d'une constante c_{12} telle que:

$$|\theta_m(\tau, 0)| \leqslant c_{12}.$$ CQFD

3.3. *Minorations analytiques*

Fixons un élément $\tau = x + iy$ de $\mathscr{F}_g$.

PROPOSITION 3.5. *Il existe une constante absolue c_{13} telle que si r est un entier $\geqslant 2\dfrac{g+1}{c_0}$, on ait pour tout $z \in \mathbf{C}^g$:*

$$\max\left\{|\theta_{(m,0)}(r\tau,\ 2rz)|,\ m \in \frac{1}{r}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g\right\} \geqslant \exp(-c_{13}rM).\exp(4\pi r H(\mathfrak{Im}\ z,\ \mathfrak{Im}\ z)).$$

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme:

LEMME 3.6. *Pour tout entier $r \geqslant 2\dfrac{g+1}{c_0}$ et tout élément z_0 de $\mathbf{C}^g$ tel que $\mathfrak{Im}\, z_0 \in F(2r)$, on a:*

$$|\theta_{(0,0)}(r\tau,\ 2rz_0)| \geqslant \frac{1}{2}.$$

DEMONSTRATION. On se place dans les hypothèses du lemme. On a:

$$\theta_{(0,0)}(r\tau,\ 2rz_0) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} e\left(\frac{r}{2}n\tau n' + 2rn.z_0'\right).$$

Or, en vertu du lemme 6.1,

$$\left|e\left(\frac{r}{2}n\tau n' + 2rn.z_0'\right)\right| \leqslant \exp\left(2\pi\left(-\frac{c_0}{2}r\sum_{i=1}^{i=g} n_i^2 y_i + \sum_{i=1}^{i=g}\frac{g+1}{4}y_i|n_i|\right)\right).$$

D'où:

$$|\theta_{(0,0)}(r\tau,\ 2rz_0)| \geqslant 1 - \sum_{n \in \mathbf{Z}^g\setminus\{0\}} \exp\left(2\pi\sum_{i=1}^{i=g} y_i\left(-\frac{c_0 r}{2}n_i^2 + \frac{g+1}{4}|n_i|\right)\right);$$

c'est-à-dire,

$$|\theta_{(0,0)}(r\tau,\ 2rz_0)| \geqslant 1 - \left[\left(\prod_{i=1}^{i=g}\left[\sum_{n\in\mathbf{Z}} \exp\left(2\pi y_i\left(-\frac{c_0 r}{2}n^2 + \frac{g+1}{4}|n|\right)\right)\right]\right) - 1\right].$$

En supposant $r \geqslant 2\dfrac{g+1}{c_0}$, on a:

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ \frac{c_0 r}{2}n^2 - \frac{g+1}{4}|n| \geqslant \frac{c_0 r}{4}|n|,$$

d'où:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \exp\left(-2\pi y_i\left(\frac{c_0 r}{2}n^2 - \frac{g+1}{4}|n|\right)\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbf{Z}} \exp\left(-2\pi y_i \frac{c_0 r}{4}|n|\right).$$

En tenant compte des inégalités: $y_i \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, on déduit:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \exp\left(-2\pi y_i\left(\frac{c_0 r}{2}n^2 - \frac{g+1}{4}|n|\right)\right) \leqslant \frac{1+\exp\left(-\pi\frac{c_0 r}{4}\sqrt{3}\right)}{1-\exp\left(-\pi\frac{c_0 r}{4}\sqrt{3}\right)}.$$

En conclusion,

$$|\theta_{(0,0)}(r\tau, 2rz)| \geqslant 2 - \left(\frac{1+\exp\left(-\pi\frac{c_0 r}{4}\sqrt{3}\right)}{1-\exp\left(-\pi\frac{c_0 r}{4}\sqrt{3}\right)}\right)^g.$$

Comme $r \geqslant 2\frac{g+1}{c_0}$, on a:

$$\left(\frac{1+\exp\left(-\pi\frac{c_0 r}{4}\sqrt{3}\right)}{1-\exp\left(-\pi\frac{c_0 r}{4}\sqrt{3}\right)}\right)^g \leqslant \frac{3}{2}.$$

(pour r assez grand, l'inégalité ci-dessus est évidente, c'est en fait tout ce dont nous avons besoin. Toutefois, le fait que celle-ci soit vraie sitôt que $r \geqslant 2\frac{g+1}{c_0}$, permet de conserver l'effectivité en g dans toutes ces estimations analytiques et même si on le souhaite, de donner des bornes *explicites*). En conclusion, nous avons établi que

$$\forall z_0,\ \mathscr{F}m\ z_0 \in F(2r),\ |\theta_{(0,0)}(r\tau, 2rz_0)| \geqslant 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \qquad \text{CQFD.}$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de la proposition 3.5: Soit $z \in \mathbf{C}^g$. D'après le lemme 3.3, il existe un élément m de $\frac{1}{r}\mathbf{Z}^g$ tel que si

$z_0 = z + \frac{m}{2}\tau$, on a: $(\mathfrak{Im}\, z_0).y^{-1} \in F_1(2r)$ (et $\mathfrak{Im}\, z_0 \in F(2r)$). On a alors (voir la relation (33) de l'appendice):

$$\theta_{(m,0)}(r\tau,\, 2rz) = \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}rm\tau m' + 2rm.z'\right)\right)\theta_{(0,0)}(r\tau,\, 2rz + rm\tau),$$

d'où, en vertu du lemme 3.6,

$$|\theta_{(m,0)}(r\tau,\, 2rz)| \geqslant \frac{1}{2}\left|\exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}rm\tau m' + 2rm.z'\right)\right)\right|.$$

Le module de

$$\exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}rm\tau m' + 2rm.z'\right)\right)$$

est

$$\exp\left(-2\pi\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{2}rm\tau m' + 2rm.z'\right)\right).$$

Or,

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{2}rm\tau m' + 2rm.z'\right) = \frac{1}{2}rmym' + 2rm\mathfrak{Im}\, z_0' - 2rmy\frac{1}{2}m'$$

$$= -\frac{1}{2}rmym' + 2rm.\mathfrak{Im}\, z_0';$$

ce qui donne, en vertu de la relation (3) $\left(\text{où } m \text{ est remplacé par } -\frac{m}{2}\right)$,

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{2}rm\tau m' + 2rm.z'\right) = -2rH(\mathfrak{Im}\, z,\, \mathfrak{Im}\, z) + 2rH(\mathfrak{Im}\, z_0,\, \mathfrak{Im}\, z_0),$$

donc,

$$|\theta_{(m,0)}(r\tau,\, 2rz)| \geqslant \frac{1}{2}\exp(4\pi rH(\mathfrak{Im}\, z,\, \mathfrak{Im}\, z) - 4\pi rH(\mathfrak{Im}\, z_0,\, \mathfrak{Im}\, z_0)).$$

Mais rappelons que,

$$H(\mathfrak{Im}\, z_0, \mathfrak{Im}\, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{Im}\, z_0) y^{-1} \mathfrak{Im}\, z_0'.$$

En reprenant les arguments qui ont conduit à la relation (5), on déduit qu'il existe un constante c_{14} telle que:

$$\frac{1}{2}\exp(-4\pi r H(\mathfrak{Im}\, z_0, \mathfrak{Im}\, z_0)) \geqslant \exp\left(-c_{14}\frac{M}{r}\right)$$

et, par conséquent:

$$|\theta_{(m,0)}(r\tau, 2rz)| \geqslant \exp\left(-c_{14}\frac{M}{r}\right)\exp(4\pi r H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)). \qquad \text{CQFD.}$$

3.4. *Descente finale*

Soit k le plus petit entier tel que $2^k \geqslant 2\dfrac{g+1}{c_0}$. Soit n un entier compris entre 0 et 1. Notons P_n la propriété suivante:

$$\exists c_n > 0,\ \forall z \in \mathbf{C}^g,\ \forall \tau \in \mathscr{F}_g,$$
$$\max\left\{|\theta_m(2^n\tau, 2^{n+1}z)|,\ m \in \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g \times \mathscr{T}_2\right\}$$
$$\geqslant \exp(-c_n M + 2^{n+2}\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)).$$

La propriété P_k étant un corollaire de la proposition 3.5, il suffit de procéder par récurrence descendante pour passer de $2^k\tau$ à τ. Soit $n+1$ un entier $1 \leqslant n+1 \leqslant k$; nous allons supposer par hypothèse de récurrence, que P_{n+1} est vraie et nous allons vérifier P_n. Supposons que pour tout nombre réel $c_n' > 0$, il existe un élément z de $\mathbf{C}^g$ et un élément τ de $\mathscr{F}_g$ tel que:

$$\max\left\{|(\theta_m(2^n\tau, 2^{n+1}z))|,\ m \in \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g \times \mathscr{T}_2\right\}$$
$$< \exp(-c_n' M + 2^{n+2}\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)). \qquad (9)$$

Fixons un élément z de $\mathbf{C}^g$ et un élément τ de $\mathscr{F}_g$ tels que la relation (9) soit vérifiée, et posons $w = \frac{z}{2}$. Soit alors (m_1, m_2) qui réalise le maximum

$$\max\left\{|\theta_m(2^{n+1}\tau, 2^{n+2}w)|, m \in \frac{1}{2^{n+2}}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g \times \mathscr{T}_2\right\}.$$

Appliquons le théorème 6.2 avec $z_1 = z_2 = 2^{n+1}w$ et $m_\alpha = m_\beta = (m_1, m_2)$:

$$(\theta_m(2^{n+1}\tau, 2^{n+2}w))^2$$
$$= \frac{1}{2^g} \sum_{a_2 \in 1/2\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g} e(-2m_1 . a_2')\theta_{[2m_1, m_2 + a_2]}(2^n\tau, 2^{n+2}w)\theta_{[0,a_2]}(2^n\tau, 0).$$

On obtient alors, grâce au lemme 3.4, la relation (31) et la relation (9):

$$|(\theta_m(2^{n+1}\tau, 2^{n+2}w))^2| < c_{12} \exp(-c_n' M + 2^{n+2}\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)).$$

Ceci, rajouté à l'hypothèse de récurrence, nous donne:

$$\exp\left(-c_{n+1}M + 2^{n+3}\pi H\left(\mathfrak{Im}\frac{z}{2}, \mathfrak{Im}\frac{z}{2}\right)\right)$$
$$< c_{15} \exp\left(-\frac{1}{2}c_n' M + 2^{n+1}\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)\right),$$

mais, cette inégalité est fausse pour c_n' assez grand $(M \geqslant 1)$. En conclusion, il existe c_n tel que

$$\max\left\{|\theta_m(2^n\tau, 2^{n+1}z)|, m \in \frac{1}{2^{n+1}}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g \times \mathscr{T}_2\right\}$$
$$\geqslant \exp(-c_n M + 2^{n+2}\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z));$$

i.e. P_n est vraie, ce qui achève la récurrence. Ainsi,

$$\max\{|\theta_m(\tau, 2z)|, m \in \mathscr{Z}_2\} \geqslant \exp(-c_5 M + 4\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)).$$

Cette inégalité prouve la deuxième partie du théorème 3.1 qui est donc entièrement démontré.

Nous allons maintenant en déduire le corollaire 3.2:
Supposons que pour tout nombre réel positif c, il existe $z \in \mathbf{C}^g$ et τ de $\mathscr{F}_g$ tels que:

$$|\max|\{\theta_{(m,0)}(4\tau, 4z)|, m \in \mathscr{T}_4\}| < \exp(-cM + 4\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)).$$

Comme précédemment, fixons un élément z de $\mathbf{C}^g$ et une élément τ de $\mathscr{F}_g$ qui vérifient l'inégalité ci-dessus. Soit (m_1, m_2) qui réalise le maximum de $\{|\theta_m(\tau, 2z)|\}$ on a alors, en vertu de la relation (35):

$$|\theta_m(\tau, 2z)| = \left| \sum_{q \in \mathbf{Z}^g/2\mathbf{Z}^g} e\left(\frac{1}{2}(q + m_1)m_2'\right) \theta_{[1/2(q+m_1),0]}(4\tau, 4z) \right|;$$

ce qui donne grâce à notre hypothèse:

$$|\theta_m(\tau, 2z)| \leqslant c_{16} \exp(-cM + 4\pi H(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, z)).$$

Cette dernière inégalité contredit le théorème 3.1 pour c assez grand. Ceci achève de prouver la minoration du corollaire 3.2. Pour vérifier la majoration, il suffit d'inverser la relation 35 comme dans [Ig], p. 171:

$$\theta_{(m_1/r,0)}(r^2\tau, r^2 z) = \frac{1}{r^g} \sum_{m_2} e(-m_1 m_2')\theta_{(m)}(\tau, rz).$$

La vérification est alors immédiate.

4. Formes modulaires et dérivées des fonctions thêta

4.1. *Notations et résultats*

Lorsque $P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i \in I} a_i z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$ est un polynôme à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$, on notera $h(P)$ la hauteur de Weil du point projectif $(1, a_i, i \in I)$. Suivant Shimura [Sh], nous construisons maintenant une base "algébrique" de l'espace tangent à l'origine de la variété abélienne $A(\tau)$. Puisque l'application Θ_τ est un plongement, le rang de la matrice:

$$\left(\theta_m(\tau, 0), \frac{\partial \theta_m(\tau, 0)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \theta_m(\tau, 0)}{\partial z_g}; m \in \mathscr{Z}_2\right)$$

est $g+1$. Comme pour toutes les fonctions thêta paires, les g derniers termes de la matrice ci-dessus sont nuls, les seuls $g+1$ mineurs de rang maximal sont ceux qui contiennent au plus une fonction thêta paire. De même, si toutes les fonctions thêta considérées dans le mineur étaient impaires, la première colonne serait nulle. Les mineurs de rang $g+1$ sont donc constitués à partir d'une fonction thêta paire et de g fonctions thêta impaires exactement. Nous pouvons donc extraire d'un tel mineur une matrice carrée inversible $M(\tau)$ de la forme:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\theta_1(\tau, 0)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_1(\tau, 0)}{\partial z_g} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\theta_g(\tau, 0)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_g(\tau, 0)}{\partial z_g} \end{pmatrix}.$$

(éliminer la première ligne et la première colonne).

Choisissons également un élément $\alpha = \alpha(\tau)$ dans $\mathscr{Z}_2$ tel que $|\theta_\alpha(\tau, 0)|$ réalise le maximum de $\{|\theta_m(\tau, 0)|,\ m \in \mathscr{Z}_2\}$. Nous utiliserons la base suivante de l'espace des dérivations:

$$(\delta_1, \ldots, \delta_g) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_g}\right)\theta_\alpha(\tau, 0)M(\tau)^{-1}. \tag{10}$$

Fixons une fonction thêta θ_0. On peut alors définir $N = 4^g - 1$ fonctions abéliennes $f_1, \ldots, f_N$ en divisant toutes les fonctions thêta par θ_0. Pour un entier positif $T \geqslant 0$, notons par ailleurs $\mathscr{D}[T]$ l'ensemble des monômes différentiels d'ordre au plus T en les δ_i (i.e. l'ensemble des $\Delta = \delta_1^{t_1} \circ \cdots \circ \delta_g^{t_g}$, où les t_i sont des entiers positifs ou nuls tels que $\Sigma_i t_i \leqslant T$). Dans ces conditions, nous avons le théorème suivant:

THEOREME 4.1. *Il existe des constantes c_{17}, c_{18} et c_{19} ne dépendant que de g telles que pour tout nombre réel h, $h \geqslant 1$, tout entier rationnel δ, $\delta \geqslant 1$, toute variété abélienne $A(\tau)$ définie sur un corps de nombres K de degré sur $\mathbf{Q} \leqslant \delta$, de hauteur $h(A(\tau)) \leqslant h$, tout polynôme P à coefficients dans K en les fonctions abéliennes définies ci-dessus de degré L et de hauteur $h(P)$, et tout monôme différentiel Δ de $\mathscr{D}[T]$, la fonction $\Delta(P)$ s'exprime comme un polynôme en les $f_1, \ldots, f_N$ de degré au plus $L + T$ et de hauteur*

$$h(\Delta P) \leqslant h(P) + c_{17}Th + c_{18}(L + T)\log(L + T).$$

De plus, les coefficients de $\Delta(P)$ se trouvent dans une extension $\mathscr{K}$ de K, de degré sur $K \leqslant c_{19}$.

Le théorème 4.1 est une conséquence facile du:

THEOREME 4.2. *Il existe une constante $c_{20} = c_{20}(g) > 0$ vérifiant la propriété suivante: soient h un nombre réel $\geqslant 1$, δ un entier rationnel $\geqslant 1$ et τ un élément de $\mathscr{F}_g$ tel que la variété abélienne $A(\tau)$ soit définie sur un corps de nombres K de degré $\leqslant \delta$ sur $\mathbf{Q}$ et vérifie $h(A(\tau)) \leqslant h$. Soient par ailleurs n et m des éléments de $\mathscr{Z}_2$, et i un* *entier compris entre 1 et g. Il existe une famille de nombres algébriques* $\{\alpha_{\alpha,\beta}=a_{\alpha,\beta}(n,m,i,\tau);\ (\alpha,\beta)\in\mathscr{Z}_2\}$, *telle que pour tout élément z de* $\mathbf{C}^g$, *on ait*:

$$\begin{aligned}\theta_n(\tau,\ 2z).\delta_i\theta_m(\tau,\ 2z) - \theta_m(\tau,\ 2z).\delta_i\theta_n(\tau,\ 2z)\\ = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{Z}_2^2} a_{\alpha,\beta}\theta_\alpha(\tau,\ 2z).\theta_\beta(\tau,\ 2z).\end{aligned} \tag{11}$$

De plus, les $a_{\alpha,\beta}$ *engendrent une extension* K_1 *de* K, *telle que* $[K_1:K]\leqslant c_{20}$ *et l'on a*: $h(a_{\alpha,\beta})\leqslant c_{20}h$.

Le théorème 4.1 est l'analogue du lemme 2 de [Bak] pour les courbes elliptiques. Dans ce cas, on estime la taille des dérivées successives de la fonction $\wp$ en fonction de g_2 et g_3 directement, grâce à l'équation différentielle vérifiée par $\wp$. On généralise immédiatement aux polynômes par récurrence. Pour alléger le texte, nous nous placerons dans tout ce qui suit dans le cas $g>1$.

4.2. *Résultats préliminaires*

Soit e un entier pair $\geqslant 1$. Notons suivant Igusa (voir [Ig], p. 178), $\Gamma_g(e,2e)$ le sous-groupe de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ formé des éléments $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ tels que $\sigma\equiv I_{2g} \bmod e$ (où I_{2g} est la matrice identité de dimension $2g$) et tels que les termes diagonaux de β et γ soient $\equiv 0 \bmod 2e$. Soient σ un élément de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ et τ un élément de S_g, nous noterons $\sigma.\tau$ la matrice $(\alpha\tau+\beta)(\gamma\tau+\delta)^{-1}$. Nous dirons qu'une application holomorphe f de S_g dans $\mathbf{C}$ est une forme modulaire de poids k et de niveau $\Gamma(e,2e)$ si l'on a: $f(\sigma.\tau)=\det(\gamma\tau+\delta)^k f(\tau)$ pour tout élément (σ,τ) de $\Gamma(e,2e)\times S_g$ (rappelons que $g>1$); on dira de même que f est une fonction modulaire si elle vérifie la même relation et si elle est seulement méromorphe. Si M est une matrice carrée, nous noterons M_0, le vecteur ligne formé des termes diagonaux de M. Nous rappelons ici quelques propriétés modulaires des fonctions thêta. On trouvera dans [Ig] pp. 85 et 176, une démonstration de l'énoncé classique qui suit:

LEMME 4.3. *Soient* $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *un élément de* $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ *et* (m_1,m_2) *un élément de* $\mathbf{Q}^{2g}$, *on a*:

$$\begin{aligned}&\theta_{(m_1\delta'-m_2\gamma'+1/2(\gamma\delta')_0,\ -m_1\beta'+m_2\alpha'+1/2(\alpha\beta')_0)}(\sigma.\tau,\ z(\gamma\tau+\delta)^{-1})\\ &\quad=\zeta_\sigma \det(\gamma\tau+\delta)^{1/2}e(\tfrac{1}{2}z(\gamma\tau+\delta)^{-1}\gamma z')\times\\ &\qquad\times\exp(-i\pi m_1\delta'\beta m_1'+2i\pi m_1\beta'\gamma m_2'-i\pi m_2\gamma'\alpha m_2')\times\\ &\qquad\times e(\tfrac{1}{2}(m_1\delta'-m_2\gamma')((\alpha\beta')_0)')\theta_{(m_1,m_2)}(\tau,z),\end{aligned} \tag{12}$$

où ζ_σ *est une racine* 8-ième *de l'unité, ne dépendant que de* σ.

REMARQUE. Comme S_g est connexe simplement connexe et que $\gamma\tau+\delta$ est inversible, les racines carrées:

$$\det(\gamma\tau + \delta)^{1/2}$$

définissent deux fonctions holomorphes de τ. Il suffit donc de choisir l'une d'elles pour donner un sens à la formule du lemme.

LEMME 4.4. *Reprenons les hypothèses du lemme* 4.3. *Si de plus* $\sigma \equiv I_{2g} \bmod 4$, *alors, dans l'équation fonctionnelle ci-dessus, on a*: $\zeta_\sigma = \pm 1$.

Voir [Mum3], p. 197.

On peut alors choisir la racine carrée de sorte que $\zeta_\sigma = 1$. C'est ce que nous ferons dans toute la suite du texte. Supposons maintenant que m_1 et m_2 soient des éléments de $\frac{1}{2\kappa}\mathbf{Z}^g$ pour un entier $\kappa > 0$ et que σ appartienne à $\Gamma(4\kappa^2, 8\kappa^2)$.

Revenons à l'équation fonctionnelle et posons $z = 0$; en vertu des relations (30) à (34) de l'appendice, on a:

$$\begin{aligned}&\theta_{(m_1\delta' - m_2\gamma' + 1/2(\gamma\delta')_0, -m_1\beta' + m_2\alpha' + 1/2(\alpha\beta')_0)}(\sigma \cdot \tau, 0)\\ &\qquad = e(-m_1\delta'.(m_1\beta')')\theta_{(m_1\delta', m_2\alpha')}(\sigma.\tau, 0)\end{aligned}$$

(en effet, $\frac{1}{2}(\alpha\beta')_0 \in \mathbf{Z}^g$ et $\frac{1}{2}(\alpha\beta')_0 \equiv 0 \bmod 2\kappa^2 m_2\gamma'$, $m_1\beta' \in \mathbf{Z}^g$). Mais $\beta \equiv 0 \bmod 4\kappa^2$ donc $m_1\delta'.(m_2\beta')'$ est entier, donc

$$e(-m_1\delta'.(m_1\beta')') = 1.$$

De plus, $m_1\delta' \equiv m_1 \bmod 2\kappa$ et $m_2\alpha' \equiv m_2 \bmod 2\kappa$, d'où:

$$\theta_{(m_1\delta' - m_2\gamma' + 1/2(\gamma\delta')_0, -m_1\beta' + m_2\alpha' 1/2(\alpha\beta')_0)}(\sigma.\tau, 0) = \theta_{(m_1, m_2)}(\sigma.\tau, 0).$$

Etudions maintenant:

$$\exp(-i\pi m_1\delta'\beta m_1' + 2i\pi m_1\beta'\gamma m_2' - i\pi m_2\gamma'\alpha m_2').$$

- Comme $\delta'\beta$ est une matrice symétique (cela résulte de la définition de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$), que $\delta'\beta \equiv 0 \bmod 4\kappa^2$ et que les termes diagonaux de $\delta'\beta$ sont des multiples de $8\kappa^2$, $m_1\delta'\beta m_1'$ est un entier pair. On en déduit donc que $\exp(-i\pi m_1\delta'\beta m_1') = 1$
- On vérifie de même que $\exp(-i\pi m_2\gamma'\alpha m_2') = 1$
- $m_1\beta'\gamma m_2' \equiv 0 \bmod 4\kappa^2$, d'où $\exp(2i\pi m_1\beta'\gamma m_2') = 1$

Enfin, comme $(\alpha\beta')_0 \equiv 0 \bmod 4\kappa^2$, il est clair que $e(\frac{1}{2}(m_1\delta' - m_2\gamma')((\alpha\beta')_0)') = 1$.

En conclusion, on a:

LEMME 4.5. *Pour tout* τ *élément de* S_g, tout entier $\kappa > 0$, *tout* σ *élément de* $\Gamma(4\kappa^2, 8\kappa^2)$ *et tout* m *élément de* $\frac{1}{2\kappa}\mathbf{Z}^{2g}$, *on a*:

$$\theta_m(\sigma.\tau, 0) = \det(\gamma\tau + \delta)^{\frac{1}{2}}\theta_m(\tau, 0).$$

Rappelons enfin le théorème de comparaison des hauteurs de Weil et Néron–Tate dû à Manin–Zarhin:

LEMME 4.6. *Il existe des constantes positives* c_{21} *et* c_{22} *ne dépendant que de* g *telles que si l'on note* h *la hauteur de Weil liée au plongement projectif* Θ_τ, *et* q *la hauteur de Néron–Tate associée, et si la variété abélienne* $A(\tau)$ *est définie sur* $\bar{\mathbf{Q}}$, *on a*:

$$|h - q| \leqslant c_{21}h(A(\tau)) + c_{22}.$$

DEMONSTRATION. C'est essentiellement le théorème 3.2 de [M-Z]. Vérifions que nous sommes bien dans les conditions d'application de ce théorème. Nous utilisons ici les notations de [Mum1]. Soit L le fibré symétrique inversible et ample sur $A(\tau)$ associé à la forme de Riemann H c'est-à-dire au diviseur Θ correspondant à la fonction thêta de Riemann $\theta_{0,0}(\tau, z)$. Remarquons que le plongement que nous avons fixé au paragraphe 4.1 est associé à $L^{\otimes 4}$. L étant symétrique, il est clair que $L^{\otimes 4}$ est totalement symétrique. De plus, le noyau de l'application de $A(\tau)$ vers sa duale $A(\tau)^0$ associée à $L^{\otimes 4}$ est l'ensemble des points de 4-torsion $A(\tau)_4$ de $A(\tau)$ (voir [Mum1] prop. 4, p. 310). Le groupe $\mathscr{H}(L^{\otimes 4})$, formé des P de $A(\tau)$ tels que $T_P^*(L^{\otimes 4})$ est isomorphe à $L^{\otimes 4}$, est alors $A(\tau)_4$ et le groupe $\mathscr{G}(L^{\otimes 4})$ formé des couples (x, φ) où P est un point de $\mathscr{H}(L^{\otimes 4})$ et, φ un isomorphisme de $L^{\otimes 4}$ vers $T_P^*(L^{\otimes 4})$, agit naturellement sur $\Gamma(A(\tau), L^{\otimes 4})$. Les fonctions $(\theta_{(m,0)}(4\tau, 4z))_{m\in\mathscr{T}_4}$ peuvent être vues comme les éléments d'une base de $\Gamma(A(\tau), L^{\otimes 4})$. Soient x un nombre complexe non nul, P un point de 4-torsion de $A(\tau)$ et $a = \alpha\tau + \beta$ un élément de $\mathbf{C}^g$ relevant P. Considérons l'action sur $\Gamma(A(\tau), L^{\otimes 4})$ définie par:

$$f_{(x,P)}: \theta_{(m,0)}(4\tau, 4z) \mapsto x.e(\alpha.\beta')\theta_{(m+\alpha,0)}(4\tau, 4z).$$

L'application $f_{(x,P)}$ est un endomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par les $\theta_{(m,0)}(4\tau, 4z)$ et peut donc être identifié de façon naturelle à un élément de $\mathscr{End}_{\mathbf{C}}(\Gamma(A(\tau), L^{\otimes 4}))$. Comme P est un point de 4-torsion de $A(\tau)$, un calcul de facteur d'automorphie montre que $f_{x,P}$ provient en fait d'un automorphisme de $L^{\otimes 4}$ et que de plus l'action de $f_{x,P}$ sur $L^{\otimes 4}$ est celle d'un élément au dessus de P de $\mathscr{G}(L^{\otimes 4})$ (voir par exemple [Mum2], p. 83 pour un tel calcul). Le plongement projectif de $A(\tau)$:

$$\mathbf{C}^g \to \mathbf{P}^{4^g-1}$$

$$z \mapsto (\theta_{(m,0)}(4\tau, 4z))_{m \in \mathscr{T}_4}$$

vérifie par conséquent les hypothèses dans lesquelles se placent Manin et Zarhin. Par ailleurs, la relation (35) nous assure de l'existence d'une constante $c_{23} = c_{23}(g)$ telle que lorsque $A(\tau)$ est définie sur $\bar{\mathbf{Q}}$:

$$h(A(\tau)) \geqslant c_{23} h((\theta_{(m,0)}(4\tau, 0))_{m \in \mathscr{T}_4}).$$

Le théorème 3.2 de [M-Z] permet de conclure.

4.3. *Propriétés modulaires du "crochet de dérivation"*

PROPOSITION 4.7. *Soient κ un entier $\geqslant 2$, p et q deux éléments de $\frac{1}{\kappa}\mathbf{Z}^g$. Pour tout τ de S_g, on pose $z_0 = p\tau + q$, qui est donc un point de $\mathbf{C}^g$ qui se projette sur un point de torsion d'ordre κ de $\mathbf{C}^g/\Lambda$, m, n des éléments de $\mathscr{Z}_2$ et λ un élément de $\mathscr{Z}_2$ tel que $\theta_\lambda(\tau, 2z_0) \neq 0$. La fonction $f_{p,q}(\tau)$ de τ définie par:*

$$\begin{aligned} f_{p,q}(\tau) &= \frac{[\theta_n(\tau, 2z)\delta_i\theta_m(\tau, 2z) - \theta_m(\tau, 2z)\delta_i\theta_n(\tau, 2z)]_{z=z_0}}{\theta_\lambda^2(\tau, 2z_0)} \\ &= \frac{\theta_n^2(\tau, 2z_0)}{\theta_\lambda^2(\tau, 2z_0)}\delta_i\left(\frac{\theta_m(\tau, 2z)}{\theta_n(\tau, 2z)}\right)_{z=z_0} \end{aligned} \tag{13}$$

est une fonction modulaire de poids 0 et de niveau $\Gamma(4\kappa^2, 8\kappa^2)$. Par abus de notation, nous écrirons par la suite f_{z_0} au lieu de $f_{p,q}$.

DEMONSTRATION. Nous aurons besoin du lemme:

LEMME 4.8. *Soient σ un élément de $\Gamma(4\kappa^2, 8\kappa^2)$ et n un élément de $\frac{1}{2\kappa}\mathbf{Z}^{2g}$. On a:*

$$\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant g,\ \delta_i(\sigma.\tau)(\theta_n(\sigma.\tau, 2z))_{z=0} = \det(\gamma\tau + \delta)^{1/2}\delta_i(\tau)(\theta_n(\tau, 2z))_{z=0}$$

En effet, les dérivations δ_i dépendent de τ. La notation $\delta_i(\sigma.\tau)$ signifie que l'on prend la même matrice de définition évaluée en $\sigma.\tau$. Les calculs ci-dessous montrent que cette notation est justifiée.

DEMONSTRATION. Posons $L(\tau)=[\delta_1\theta_n(\tau,\ 2z),\ldots,\delta_g\theta_n(\tau,\ 2z)]_{z=0}$. Nous allons étudier directement:

$$\begin{aligned} L(\sigma.\tau) &= [\delta_1\theta_n(\sigma.\tau,\ 2z),\ldots,\delta_g\theta_n(\sigma.\tau, 2z)]_{z=0} \\ &= \left[\frac{\partial\theta_n(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial\theta_n(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_g}\right]_{z=0}[2i\pi P(\sigma.\tau)']^{-1}, \end{aligned}$$

où on a posé:

$$P(\tau) = \frac{1}{2i\pi\theta_\alpha(\tau, 0)}M(\tau).$$

Calculons maintenant $P(\sigma.\tau)$:

$$P(\sigma.\tau) = \frac{1}{2i\pi\theta_\alpha(\sigma.\tau, 0)}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\theta_1(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_1(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_g} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\theta_g(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_g(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_g} \end{bmatrix}_{z=0}$$

Notons qu'à priori la caractéristique α qui intervient dans la définition de $P(\tau)$ dépend de τ et donc de $\sigma.\tau$. Le lemme 4.5, nous permet toutefois de choisir le même α pour τ et $\sigma.\tau$ et donc de justifier l'égalité ci-dessus.

Il s'agit maintenant de calculer:

$$\left(\frac{\partial\theta_i(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_j}\right)_{z=0}.$$

écrivons $2z=2z(\gamma\tau+\delta).(\gamma\tau+\delta)^{-1}$. L'équation fonctionnelle (relation (12)) donne alors:

$$\theta_i(\sigma.\tau,\ 2z(\gamma\tau+\delta)(\gamma\tau+\delta)^{-1}) = \det(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\theta_i(\tau,\ 2z(\gamma\tau+\delta))e(z\gamma z'),$$

ce qui donne:

$$\left(\frac{\partial\theta_i(\sigma.\tau,\ 2z)}{\partial z_j}\right)_{z=0} = \det(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\left(\frac{\partial\theta_i(\tau,\ 2z(\gamma\tau+\delta))}{\partial z_j}\right)_{z=0},$$

d'où,

$$\left[\frac{\partial\theta_i(\sigma\tau,\ 2z)}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial\theta_i(\sigma\tau,\ 2z)}{\partial z_g}\right]_{z=0} = \det(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\left[\frac{\partial\theta_i(\tau,\ 0)}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial\theta_i(\tau,\ 0)}{\partial z_g}\right](\gamma\tau+\delta).$$

En conclusion:

$$P(\sigma.\tau)=\frac{\det(\gamma.\tau+\delta)^{1/2}}{2i\pi\det^{1/2}(\gamma\tau+\delta)\theta_\alpha(\tau,0)}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\theta_1(\tau,2z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_1(\tau,2z)}{\partial z_g}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\theta_g(\tau,2z)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_g(\tau,2z)}{\partial z_g}\end{bmatrix}_{z=0}\times$$

$$\times(\gamma\tau+\delta)=P(\tau)(\gamma\tau+\delta).$$

De même,

$$\left[\frac{\partial\theta_n(\sigma.\tau,2z)}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial\theta_n(\sigma.\tau,2z)}{\partial z_g}\right]_{z=0}$$

$$=\det(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\left[\frac{\partial\theta_n(\tau,2z)}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial\theta_n(\tau,2z)}{\partial z_g}\right]_{z=0}\quad(\gamma\tau+\delta).$$

Les deux égalités précédentes donnent donc: $L(\sigma.\tau)=\det(\gamma\tau+\delta)^{1/2}L(\tau)$, c'est-à-dire:

$$\forall i,\ 1\leqslant i\leqslant g\quad \delta_i(\theta_n(\sigma.\tau,2z))_{z=0}=\det(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\delta_i(\theta_n(\tau,2z))_{z=0}.\qquad\text{CQFD.}$$

Revenons à la démonstration de la proposition 4.7. Soit σ un élément de $\Gamma(4\kappa^2,8\kappa^2)$, i.e. $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$. Ecrivons $z_0=p\tau+q$ avec $p,q\in\frac{1}{\kappa}\mathbf{Z}^g$; avant de calculer $f_{z_0}(\sigma.\tau)$, nous allons simplifier l'expression $f_{z_0}(\tau)$: nous avons (cf. relation (32), appendice):

$$\theta_\lambda(\tau,2z_0)=e(-2p\tau p'-4p.q')e(-2p.\lambda_2')\theta_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,0),$$

$$\theta_n(\tau,2z_0)=e(-2p\tau p'-4p.q')e(-2p.n_2')\theta_{(n_1+2p,n_2+2q)}(\tau,0),$$

ainsi que:

$$\delta_i(\theta_{(m_1,m_2)}(\tau,2z))_{z=z_0}$$
$$=e(-2p.m_2')\delta_i(e(-2p\tau p'-2p.(2z+2q)')\theta_{(m_1+2p,m_2+2q)}(\tau,2z))_{z=0};$$

c'est-à-dire:

$$\delta_i(\theta_{(m_1,m_2)}(\tau,2z))_{z=z_0}$$
$$=e(-2p\tau p'-4p.q')e(-2p.m_2')\delta_i(\theta_{(m_1+2p,m_2+2q)}(\tau,2z))_{z=0}+$$
$$+e(-2p.m_2')\theta_{(m_1+2p,m_2+2q)}(\tau,0)\delta_i(e(-2p\tau p'-2p.(2z+2q)'))_{z=0}.$$

D'où,

$$f_{z_0}(\tau)=\frac{e(-2p.(m_2+n_2-2\lambda_2)')}{\theta^2_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,0)}\,\theta_{(n_1+2p,n_2+2q)}(\tau,0)\delta_i(\theta_{(m_1+2p,m_2+2q)}(\tau,2z))_{z=0}-$$
$$-\frac{e(-2p.(m_2+n_2-2\lambda_2)')}{\theta^2_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,0)}\,\theta_{(m_1+2p,m_2+2q)}(\tau,0)\delta_i(\theta_{(n_1+2p,n_2+2q)}(\tau,2z))_{z=0}$$

Ce calcul permet donc de se ramener, moyennant une modification des "caractéristiques" à des dérivations en $z=0$.

–D'après le lemme 4.5, les $\theta_n(\tau,0)$ où n est un élément de $\frac{1}{\kappa}\mathbf{Z}^{2g}$ sont des formes modulaires de poids $\frac{1}{2}$ et de niveau $\Gamma(4\kappa^2,8\kappa^2)$:

—Le lemme 4.8 permet d'affirmer que les $\delta_i(\theta_n(\tau,2z))_{z=0}$ sont des fonctions modulaires de poids $\frac{1}{2}$ et de niveau $\Gamma(4\kappa^2,8\kappa^2)$.

La proposition 4.7 est donc entièrement démontrée.

Nous allons pouvoir en déduire des propriétés d'algébricité du "crochet de dérivation". L'idée, que l'on trouve déjà chez Masser (voir par exemple dans [Ma2] la démonstration du lemme matriciel dont l'énoncé est rappelé ici (lemme 6.3)), repose sur le principe suivant:

PROPOSITION 4.9. *Soient g, e, et η des entiers rationnels $\geqslant 1$. Soit également f une forme modulaire de poids η et de niveau $\Gamma(4e^2,8e^2)$, sur $\mathcal{S}_g$ dont le développement de Fourier a des coefficients dans un corps de nombres K. Il existe une constante $c_{24}=c_{24}(f)$ telle que la propriété suivante soit vérifiée: soit h un nombre réel $\geqslant 1$, et τ un point de de $\mathcal{F}_g$ tel que $A(\tau)$ soit défini sur un corps de nombres k et vérifie $h(A(\tau))\leqslant h$. Soit enfin α un élément de $\mathcal{X}_2$ tel que $\theta_\alpha(\tau,0)\neq 0$. Le nombre $\dfrac{f(\tau)}{\theta_\alpha(\tau,0)^{2\eta}}$ est alors algébrique de degré $\leqslant c_{24}$ sur le compositum de k et de K et de hauteur $\leqslant c_{24}h$.*

DEMONSTRATION. Nous aurons besoin du résultat classique suivant, dont on pourra trouver une démonstration dans [Ig] p. 224:

LEMME 4.10. *Si e est un entier pair, l'anneau gradué des formes modulaires de niveau $\Gamma(e^2,2e^2)$ est la normalisation de l'anneau $\mathbf{C}[\theta_n(\tau,0)\theta_m(\tau,0)]_{m,n\in\mathcal{X}_e}$ (où l'on note $\mathcal{X}_e$ un système de représentants de $\frac{1}{e}\mathbf{Z}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$).*

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 4.9: soit f une forme modulaire vérifiant les hypothèses de la proposition 4.9. La fonction de τ, $\tau\mapsto f(\tau)$ se trouve donc (voir le lemme 4.10) dans la clôture intégrale de l'anneau $\mathbf{C}[\theta_m(\tau,0)\theta_n(\tau,0)]_{(m,n\in\mathcal{X}_{2e})}$. Notons ζ_{4e^2} une racine primitive $(4e^2)$-ième de l'unité.

Remarquons maintenant que les développements de Fourier des produits $\theta_m(\tau, 0)\theta_n(\tau, 0)$ se trouvent dans l'anneau des séries de Laurent à coefficients dans $\mathbf{Q}[\zeta_{4e^2}]$ en les $\exp\left(\frac{i\pi\tau_{i,j}}{4e^2}\right)$. Par hypothèse, tous les coefficients du développement de Fourier de f sont dans le corps K; on en déduit que f se trouve en fait dans la clôture intégrale de l'anneau $K[\zeta_{4e^2}][\theta_m(\tau, 0)\theta_n(\tau, 0)]_{(m,n\in\mathscr{Z}_{2e})}$. Dans ces conditions, on peut choisir un polynôme (dépendant de f) unitaire $P = \Sigma_{i=0}^{D} a_i f^i$ de degré D tel que les produits $a_i f^i$ soient des formes modulaires de poids ηD, en $f(\tau)$ dont les coefficients a_i sont des polynômes homogènes en les $\theta_m(\tau, 0)\theta_n(\tau, 0)$ à coefficients dans $K[\zeta_{4e^2}]$, qui s'annule identiquement sur S_g (voir [Ig], p. 113). Le coefficient a_i est un polynôme homogène de degré $(D-i)\eta$ en les $\theta_m(\tau, 0)\theta_n(\tau, 0)$. Par division par $(\theta_\alpha^2(\tau, 0))^{\eta D}$, on en conclut que $\frac{f(\tau)}{(\theta_\alpha^2(\tau, 0))^\eta}$ est zéro d'un polynôme dont les coefficients sont des fractions rationnelles à coefficients dans K, en les $\frac{\theta_m(\tau, 0)\theta_n(\tau, 0)}{\theta_\alpha^2(\tau, 0)}$. Spécialisons en un point τ de $\mathscr{F}_g$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4.9: il existe une constante $c_{25}(g, e)$, telle que les nombres $\frac{\theta_m(\tau, 0)\theta_n(\tau, 0)}{\theta_\alpha^2(\tau, 0)}$ soient algébriques de degré $\leqslant c_{25}$ sur k et de hauteur $\leqslant c_{25}h$. Le *nombre* $\frac{f(\tau)}{\theta_\alpha^2(\tau, 0)^\eta}$ est donc solution d'une équation polynômiale de degré D, dont les coefficients sont des polynômes homogènes à coefficients dans $K[\zeta_{4e^2}]$, en les $\frac{\theta_m(\tau, 0)\theta_n(\tau, 0)}{\theta_\alpha^2(\tau, 0)}$. D'où l'existence d'une constante $c_{26} = c_{26}(f)$ telle que $f(\tau)$ soit algébrique de degré $\leqslant c_{26}$ sur le compositum de k et de K et de hauteur $\leqslant c_{26}h$. Ceci achève la preuve de la proposition 4.9.

REMARQUE. Il est possible de raffiner ces arguments pour se débarrasser des racines de l'unité, mais nous n'en aurons pas besoin pour ce qui suit.

PROPOSITION 4.11. *Soit τ un élément de $\mathscr{F}_g$ vérifiant les hypothèses du théorème* 4.2. *Il existe des constantes c_{27} et c_{28} qui ne dépendent que de g et de κ telles que si $z_0 \in \frac{1}{\kappa}\mathbf{Z}^g$ et $\lambda \in \mathscr{Z}_2$ tel que $\theta_\lambda(\tau, 2z_0) \neq 0$, le nombre*

$$\frac{[\theta_n(\tau, 2z)\delta_i\theta_m(\tau, 2z) - \theta_m(\tau, 2z)\delta_i\theta_n(\tau, 2z)]_{z=z_0}}{\theta_\lambda^2(\tau, 2z_0)}$$

soit algébrique de degré $\leqslant c_{27}$ sur k et de hauteur $\leqslant c_{28}h$.

DEMONSTRATION. Nous allons tout d'abord montrer que la fonction f_{z_0}, (voir relation (13)) dont ce nombre est la valeur en τ, est un quotient de deux formes modulaires de niveau $\Gamma(4\kappa^2, 8\kappa^2)$:

- Posons $Q(\tau)=\theta_\alpha(\tau,0)P(\tau)$ (rappelons que α est un élément de $\mathscr{Z}_2$ tel que $|\theta_\alpha(\tau,0)|$ soit maximal), et que $P(\tau)$ est défini p. 14 et soit:

$$g(\tau) = \theta^2_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,\ 0)\det Q(\tau)f_{z_0}(\tau).$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned} g(\tau) = e(-2p.(m_2+n_2-2\lambda_2)')\det Q(\tau) \times \\ \times\ \theta_{(n_1+2p,n_2+2q)}(\tau,0)\delta_i(\theta_{(m_1+2p,m_2+2q)}(\tau,2z))_{z=0} \\ -\ e(-2p.(m_2+n_2-2\lambda_2)')\det Q(\tau) \times \\ \times\ \theta_{(m_1+2p,m_2+2q)}(\tau,0)\delta_i(\theta_{(n_1+2p,n_2+2q)}(\tau,2z))_{z=0} \end{aligned}$$

$g(\tau)$ est ainsi une fonction holomorphe de τ.
- $g(\tau)$ est une forme modulaire: en vertu du lemme 4.8 et du lemme 4.5, il suffit de vérifier que $\det Q(\tau)$ est une forme modulaire; mais, ceci est contenu dans la démonstration du lemme 4.8.
- $f_{z_0}(\tau)$ est donc quotient des deux formes modulaires:

$$g(\tau) \quad \text{et} \quad \theta^2_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,0)\det Q(\tau).$$

De plus, $\det Q(\tau)$, $\theta^2_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,0)$, $g(\tau)$ et $\theta_m(\tau,0)\theta_n(\tau,0)$ se trouvent dans l'anneau des séries de Laurent à coefficients dans $\mathbf{Q}[\zeta_{4\kappa^2}]$ en les $\exp(i\pi\tau_{i,j}/4\kappa^2)$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 4.9 aux formes modulaires $g(\tau)$ et $\det(Q(\tau))\theta^2_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,0)$: on en déduit l'existence de constantes $c_{27}=c_{27}(g,\kappa)$ et $c_{28}=c_{28}(g,\kappa)$ telles que $f_{z_0}(\tau)$ soit algébrique de degré $\leqslant c_{27}\delta$ et de hauteur $\leqslant c_{28}h$. Pour se débarrasser de la dépendance en les fonctions $g(\tau)$, $\det(Q(\tau))$ et $\theta^2_{(\lambda_1+2p,\lambda_2+2q)}(\tau,0)$ des constantes ci-dessus, il suffit de remarquer qu'il *n'y* a qu'un nombre fini de telles fonctions (choix de la matrice $P(\tau)$ définissant les dérivations de Shimura, du point z_0, des éléments m, n, λ de $\mathscr{Z}_2$ et de l'indice i de la dérivation choisie). Ce nombre fini est uniquement fonction de g et de κ. En prenant le maximum des constantes c_{24} fournies par ces différents choix, on vérifie bien que les constantes c_{27} et c_{28} ci-dessus ne dépendent que de g et de κ. CQFD.

PROPOSITION 4.12. *Soient m et n des éléments de $\mathscr{Z}_2$ et i un entier compris entre 1 et g. Pour tout α et β éléments de $\mathscr{Z}_2$, il existe des nombres complexes $a_{\alpha,\beta}(m,n,i)=a_{\alpha,\beta}$ tels que:*

$$\theta_n(\tau,\ 2z)\delta_i\theta_m(\tau,\ 2z)-\theta_m(\tau,\ 2z)\delta_i\theta_n(\tau,\ 2z) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{Z}_2} a_{\alpha,\beta}\theta_\alpha(\tau,\ 2z)\theta_\beta(\tau,\ 2z)$$

DEMONSTRATION. La fonction:

$$h(z)\colon z \mapsto \theta_n(\tau, 2z)\delta_i\theta_m(\tau, 2z) - \theta_m(\tau, 2z)\delta_i\theta_n(\tau, 2z)$$

vérifie: pour tout ζ_1, ζ_2 éléments de $\mathbf{Z}^g$,

$$h(z + \zeta_1\tau + \zeta_2) = e(-4\zeta_1\tau\zeta_1' - 2\zeta_1.4z')h(z). \tag{14}$$

En effet:

- $\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, 2(z + \zeta_1\tau + \zeta_2))$
$$= e(-\tfrac{1}{2}2\zeta_1\tau 2\zeta_1' - 4\zeta_1.z')e(2m_1.\zeta_2' - 2m_2.\zeta_1')\theta_{m_1,m_2}(\tau, 2z)$$
  (voir relation (34) de l'appendice). Comme m_1, m_2 sont des éléments de $\mathscr{T}_2$,
$$e(2m_1.\zeta_2' - 2m_2.\zeta_1') = 1.$$
  On a donc:
$$\theta_m(\tau, 2(z + \zeta_1\tau + \zeta_2)) = e(-2\zeta_1\tau\zeta_1' - 4\zeta_1.z')\theta_m(\tau, 2z).$$
- On en déduit:
$$\delta_i\theta_m(\tau, 2(z+\zeta_1\tau+\zeta_2)) = \delta_i(e(-2\zeta_1\tau\zeta_1' - 4\zeta_1.z'))\theta_m(\tau, 2z) + \\ + e(-2\zeta_1\tau\zeta_1' - 4\zeta_1.z')\delta_i(\theta_m(\tau, 2z)).$$
- Les termes en $\delta_i(e(-2\zeta_1\tau\zeta_1' - 4\zeta_1.z'))$ se simplifient alors deux-à-deux et on obtient:
$$h(z+\zeta_1\tau+\zeta_2) = \theta_n(\tau, 2(z+\zeta_1\tau+\zeta_2))e(-2\zeta_1\tau\zeta_1' - 4\zeta_1.z')\delta_i(\theta_m(\tau, 2z)) \\ -\theta_m(\tau, 2(z+\zeta_1\tau+\zeta_2)e(-2\zeta_1\tau\zeta_1' - 4\zeta_1.z')\delta_i(\theta_n(\tau, 2z)).$$
  Ce qui donne comme annoncé:
$$h(z+\zeta_1\tau+\zeta_2) \\ = e(-2\zeta_1\tau\zeta_1' - 4\zeta_1.z')^2[\theta_n(\tau, 2z)\delta_i\theta_m(\tau, 2z) - \theta_m(\tau, 2z)\delta_i\theta_n(\tau, 2z)].$$

Par ailleurs, on sait que l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^g$ ayant le même facteur d'automorphie que $h(z)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{E}$ de dimension 8^g (voir par exemple [Ro], p. 91). Calculons maintenant le facteur d'automorphie de $\theta_\gamma(2\tau, 4z)$ ($\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathscr{Z}^4$, où l'on note $\mathscr{Z}_4 = \mathscr{T}_4 \times \mathscr{T}_4$, un système de représentants de $\frac{1}{4}\mathbf{Z}^{2g}/\mathbf{Z}^{2g}$): soient ζ_1 et ζ_2 des éléments de $\mathbf{Z}^g$, on a

$$\theta_\gamma(2\tau, 4(z + \zeta_1\tau + \zeta_2) = e(-4\zeta_1\tau\zeta_1' + 2\zeta_1.4z')e(-2\zeta_1.\gamma_2')\theta_\gamma(2\tau, 4z)$$

(voir relation (34) de l'appendice). Ainsi, pour tout élément (γ_1, γ_2) de $\mathscr{Z}_4$ tel que $2\gamma_2 \in \mathbf{Z}^g$, $\theta_\gamma(2\tau, 4z)$ est un élément de $\mathscr{E}$. Or, il y a 8^g telles fonctions thêta, et ces dernières sont linéairement indépendantes, en effet:

- Supposons que l'on ait une relation de liaison:

$$\sum_{(\gamma_1,\gamma_2)} a_{(\gamma_1,\gamma_2)}\theta_{(\gamma_1,\gamma_2)}(2\tau, 4z) = 0.$$

On en déduit que chacun des coefficients de Fourier de cette fonction est identiquement nul. Or, les coefficients de Fourier $c(l)$, $l \in \mathbf{Z}^g$ non nuls de la fonction:

$$z \mapsto \theta_{(\gamma_1,\gamma_2)}(2\tau, 4z)$$

correspondent aux éléments n de $\mathbf{Z}^g$ tels que $l \equiv 4\gamma_1 \bmod 4$ (voir la relation (1)).

- On peut donc décomposer la relation de liaison ci-dessus en 4^g relations de liaisons:

$$\forall \gamma_1 \in \mathscr{T}_4, \quad \sum_{\gamma_2 \in \mathscr{T}_2} a_{(\gamma_1,\gamma_2)}\theta_{(\gamma_1,\gamma_2)}(2\tau, 4z) = 0.$$

C'est-à-dire, par définition,

$$\sum_{\gamma_2 \in \mathscr{T}_2} \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} a_{(\gamma_1,\gamma_2)} e(-(n+\gamma_1)\tau(n+\gamma_1)' + (n+\gamma_1).(4z+\gamma_2)') = 0;$$

c'est-à-dire:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^g} e(-(n+\gamma_1)\tau(n+\gamma_1)' + (n+\gamma_1).4z') \sum_{\gamma_2 \in \mathscr{T}_2} a_{(\gamma_1,\gamma_2)} e((n+\gamma_1).\gamma_2') = 0$$

Ce qui donne, par unicité du développement de Fourier,

$$\forall n, n \in \mathbf{Z}^g, \quad \sum_{\gamma_2 \in \mathscr{T}_2} a_{(\gamma_1,\gamma_2)} e((n+\gamma_1).\gamma_2') = 0.$$

- Des caractères distincts de $\mathbf{Z}^g$ dans le cercle unité étant linéairement indépendants, c'est en particulier le cas pour les caractères:

$$\Xi_{\gamma_2}: n \mapsto e(n.\gamma_2').$$

Les nombres $a_{(\gamma_1,\gamma_2)}$ sont donc tous nuls, nous avons bien établi que les fonctions $\theta_\gamma(\tau, 2z)$ où γ_1 décrit $\mathscr{T}_4$ et γ_2 décrit $\mathscr{T}_2$ forment une base de $\mathscr{E}$.

En conclusion, h est de la forme:

$$\sum_{\gamma\in\mathscr{T}_4\times\mathscr{T}_2} a_{(\gamma_1,\gamma_2)}\theta_{(\gamma_1,\gamma_2)}(2\tau, 4z).$$

Soit μ un élément de $\mathbf{Q}^{2g}$. Les formules de transformations (cf. théorème 6.2 de l'appendice):

$$\theta_\gamma(2\tau, 4z)\theta_\mu(2\tau, 0)$$

$$= \sum_{a_2\in\mathscr{T}_2} e(-2\gamma_1 . a_2')\theta_{[\gamma_1+\mu_1,(\gamma_2+\mu_2)/2+a_2]}(\tau, 2z)\theta_{[\gamma_1-\mu_1,(\gamma_2-\mu_2)/2+a_2]}(\tau, 2z). \tag{15}$$

De plus, on sait que $\gamma_2\in\mathscr{T}_2$. Pour que $\theta_{[\gamma_1+\mu_1,(\gamma_2+\mu_2)/2+a_2]}(\tau, 2z)$ ainsi que $\theta_{[\gamma_1-\mu_1,(\gamma_2-\mu_2)/2+a_2]}(\tau, 2z)$ aient leurs caractéristiques dans $\frac{1}{2}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$, il suffit de choisir $\mu_2=\gamma_2$ et $\mu_1 \equiv \gamma_1 \bmod \frac{1}{2}\mathbf{Z}^g$. De plus, on a (voir relation (32):

$$\theta_{(\mu_1,\mu_2)}(2\tau, 0)=\theta_{(\mu_1,0)}(2\tau, \mu_2)=e(\gamma_1\tau\gamma_1'+\gamma_1 . \mu_2').\theta_{(\mu_1-\gamma_1,0)}(2\tau, \mu_2+\gamma_1 2\tau).$$

Or, on a le lemme:

LEMME 4.13. *Soit* (τ, z) *un point de* $S_g\times\mathbf{C}^g$; *il existe un élément* m_1 *de* $\mathscr{T}_2$ *tel que*:

$$\theta_{(m_1,0)}(2\tau, z)\neq 0.$$

DEMONSTRATION. Voir [Ig], p. 168. Pour chaque $\gamma\in\mathscr{T}_4\times\mathscr{T}_2$, il existe donc un élément ν de $\mathscr{T}_2$ tel que $\theta_{(\nu,0)}(2\tau, \gamma_2+\gamma_1 2\tau)$ soit non nul. Posons alors: $(\mu_1, \mu_2)=(\gamma_1+\nu, \gamma_2)$. Pour ce choix de μ, $\theta_\mu(2\tau, 0)$ est donc non nul et de plus, dans le membre de droite de l'equation (15), les fonctions thêta qui interviennent ont toutes leurs caractéristiques dans $\mathscr{Z}_2$. Par division par $\theta_\mu(2\tau, 0)$ on peut donc écrire $\theta_\gamma(2\tau, 4z)$ comme une combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions $(\theta_m(\tau, 2z)\theta_n(\tau, 2z))_{(m,n)\in\mathscr{Z}_2\times\mathscr{Z}_2}$. En conclusion, $h(z)$ est bien de la forme:

$$\sum_{\alpha,\beta\in\mathscr{Z}_2} \alpha_{\alpha,\beta}\theta_\alpha(\tau, 2z)\theta_\beta(\tau, 2z).$$ CQFD.

REMARQUE. On aurait pu démontrer plus directement cette proposition en notant que le plongement projectif de $A(\tau)$ défini par les demi-caractéristiques est projectivement normal (voir [Mum1], théorème 1, p. 338). En effet, cela entraîne précisément que l'application naturelle du carré symétrique du $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par les $\theta_\alpha(\tau, 2z)$ $(\alpha\in\mathscr{Z}_2)$ dans $\mathscr{E}$ est surjective.

Nous allons déduire des propriétés modulaires de la matrice $P(\tau)$ une estimation de la taille de ses coefficients:

LEMME 4.14. *Il existe une constante c_{29}, telle que les coefficients des matrices $P(\tau)$ et $P(\tau)^{-1}$ soient majorés par*: $\exp(c_{29}\delta h)$.

DEMONSTRATION. Il suffit pour établir le lemme ci-dessus, de majorer les coefficients de $P(\tau)$ ainsi que le déterminant de $P(\tau)$:

- Nous devons estimer la valeur de $\partial\theta_m(\tau,0)/\partial z_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant g$ et $(m_1, m_2) \in \mathscr{Z}_2$. Cette estimation peut se faire par un calcul direct sur la série thêta:

$$\left|\sum_{n\in\mathbf{Z}^g} 2n_i \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}(n+m_1)\tau(n+m_1)' + (n+m_1).m_2'\right)\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{n\in\mathbf{Z}^g} 2|n_i| \exp\left(-2\pi c_0\left(\sum_{j=1}^{g}(n_j+m_{1_j})^2 y_j\right)\right).$$

$$\leqslant \sum_{n\in\mathbf{Z}^g} 2|n_i| \exp\left(-2\pi c_0 \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{j=1}^{j=g}\left(|n_j| - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right).$$

(Voir le lemme 6.1 de l'appendice). Or, cette série est convergente. Soit c_{30} sa somme. c_{30} est alors un majorant des coefficients de $M(\tau)$. Le théorème 3.1, nous assure par ailleurs que $|\theta_\alpha(\tau,0)| \geqslant \exp(-c_5\delta h)$. En conclusion, il existe bien une constante c_{29} ne dépendant que de g telle que les coefficients de $P(\tau) = \dfrac{1}{2i\pi\theta_\alpha(\tau,0)} M(\tau)$ soient majorés par $\exp(c_{29}\delta h)$. Ce qui achève de prouver la première partie du lemme.

- Pour avoir une majoration du même type pour $P(\tau)^{-1}$, il ne reste plus qu'a minorer le déterminant de $P(\tau)$. Or, par définition de $P(\tau)$, $\det P(\tau)$ est une fonction modulaire de poids 1, quotient de formes modulaires dont le développement en série de Laurent est à coefficients entiers. La proposition 4.9 permet de conclure que $\dfrac{\det P(\tau)}{(\theta_\alpha(\tau,0))^2}$ est un nombre algébrique de degré au plus $c_{31}\delta$ et de hauteur au plus $c_{32}h$ (là encore, on remarque qu'il n'y a qu'un nombre fini uniquement fonction de g de choix pour $P(\tau)$). Par ailleurs (voir le théorème 3.1), $|\theta_\alpha(\tau,0)| \geqslant \exp(-c_5\delta h)$. En conclusion, il existe une constante c_{29} telle que:

$$\det P(\tau) \geqslant \exp(-c_{29}\delta h).$$

Ceci achève de démontrer le lemme 4.14.

4.4. *Démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2*

Nous nous placerons dans ce § dans les hypothèses du théorème 4.2. Fixons $\kappa = 1 + 2^g.2^{2g}g!$ et soient $z_0 \in \frac{1}{\kappa}\Lambda$ et $\lambda \in \mathscr{Z}_2$ tels que $\theta_\lambda(\tau, 2z_0) \neq 0$. La proposition 4.11 nous assure alors que

$$\frac{[\theta_n(\tau, 2z)\delta_i\theta_m(\tau, 2z) - \theta_m(\tau, 2z)\delta_i\theta_n(\tau, 2z)]_{z=z_0}}{\theta_\lambda^2(\tau, 2z_0)}$$

est algébrique de degré $\leqslant c'_{27}$ sur k et de hauteur $\leqslant c'_{28}h$ (*où* c'_{27} et c'_{28} ne dépendent plus que de g). Puisque $(\theta_\alpha(\tau, 2z_0))_{\alpha\in\mathscr{Z}_2}$ est un point de torsion de $A(\tau)$, la même assertion vaut pour

$$\frac{\theta_\alpha(\tau, 2z_0)\theta_\beta(\tau, 2z_0)}{\theta_\lambda^2(\tau, 2z_0)}$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathscr{Z}_2 \times \mathscr{Z}_2$ en vertu du théorème 4.6. En faisant varier z_0 dans $\frac{1}{\kappa}\Lambda$, on obtient un système de $(1 + 2^g.2^{2g}g!)^{2g}$ équations en 2^{4g} inconnues en écrivant:

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\theta_\alpha(\tau, 2z_0)\theta_\beta(\tau, 2z_0)}{\theta_\lambda^2(\tau, 2z_0)} = \frac{[\theta_n(\tau, 2z)\delta_i\theta_m(\tau, 2z) - \theta_m(\tau, 2z)\delta_i\theta_n(\tau, 2z)]_{z=z_0}}{\theta_\lambda^2(\tau, 2z_0)}$$

dont on sait qu'il est résoluble en vertu de la proposition 4.12. En extrayant un mineur principal on trouve donc des solutions $a_{\alpha,\beta}$ algébriques de degré $\leqslant c_{33}$ sur k et de hauteur $\leqslant c_{34}h$ (où c_{33} et c_{34} ne dépendent que de g). Il reste à vérifier que le polynôme $\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\theta_\alpha(\tau, 2z_0)\theta_\beta(\tau, 2z_0)$ ainsi trouvé est égal à la fonction $h(z)$. Pour cela, nous allons utiliser théorème 6.4: en faisant la différence entre le polynôme en les $\theta_\alpha(\tau, 2z)$ fourni par la proposition 4.12 et le polynôme que nous venons juste de construire, nous obtenons un polynôme homogène P de degré 2 en les $\theta_\alpha(\tau, 2z)$ qui s'annule en tous les points $z_0 \in \frac{1}{\kappa}\Lambda^g$. On en déduit alors que si P n'est pas identiquement nul, il existe une sous-variété abélienne B de A, distincte de A telle que l'inégalité (36) du théorème 6.4 soit satisfaite:

$$(1 + 2^g.2^{2g}g!)^{2\operatorname{codim}(B)}\deg(B).2^{\dim(B)} \leqslant \deg(A)4^{\dim(A)} = 4^g.2^{2g}g!.$$

Or, cette inégalité est toujours fausse, ce qui implique que P est identiquement nul sur $A(\tau)$. Le théorème 4.2 est alors entièrement démontré.

(Notons que le plongement projectif avec lequel nous travaillons fait de $A(\tau)$ une variété projectivement normale).

REMARQUE. Notons que dans le cas particulier où nous l'avons utilisé ci-dessus, le lemme de zéros est bien connu des géomètres (qui obtiennent d'ailleurs des résultats plus précis): il dit qu'une hypersurface coupant la variété abélienne A mais ne la contenant pas, ne peut contenir tous les points de N-torsion de A (ou tous les points de N-torsion de A avec une multiplicité donnée) pour N assez grand (ou avec une multiplicité assez grande). On pourra par exemple consulter [M-B], p. 122, lemme 3-2-3.

Nous allons maintenant en déduire le théorème 4.1. Soit P un polynôme en les fonctions abéliennes de degré L et de hauteur $h(P)$ dont tous les coefficients sont des éléments d'un corps de nombres K de degré sur $\mathbf{Q} \leqslant \delta$ sur lequel $A(\tau)$ est définie et Δ un élément de $\mathscr{D}[T-1]$. Posons $\mathscr{K} = K(a_{\alpha,\beta}(n, m, i, \tau),\ n,\ m \in \mathscr{Z}_2,\ 1 \leqslant i \leqslant g)$. Par construction des $a_{\alpha,\beta}(n, m, i, \tau)$, il existe une constante c_{19} telle que le degré sur $\mathbf{Q}$ de $\mathscr{K} \leqslant c_{19}\delta$. Nous allons faire une démonstration par récurrence sur l'ordre de dérivation. Supposons donc que pour tout polynôme en les fonctions abéliennes de degré L et de hauteur $h(P)$ et tout élément Δ de $\mathscr{D}[T-1]$, $\Delta(P)$ soit un polynôme en les fonctions abéliennes de degré au plus $L+T-1$, de hauteur

$$h(\Delta(P)) \leqslant h(P) + c_{17}Th + c_{18}(L+T)\log(L+T)$$

et dont tous les coefficients sont dans $\mathscr{K}$. Soit i un entier $1 \leqslant i \leqslant g$. Le théorème 4.2 donne immédiatement que $\delta_i\Delta(P)$ est un polynôme en les fonctions abéliennes de degré au plus $L+T$ dont les coefficients sont des éléments de $\mathscr{K}$. Les estimations classiques pour la hauteur d'une combinaison linéaire de nombres algébriques (voir par exemple [M-Z], p. 170) ainsi que les estimations du théorème 4.2 nous donnent alors: $h(\delta_i\Delta(P)) \leqslant h(\Delta(P)) + \log(L+T-1) + c_{34}h + 3g\log 4$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient:

$$\begin{aligned} h(\delta_i\Delta(P)) \leqslant{} & h(P) + c_{17}Th + c_{18}(L+T)\log(L+T) \\ & + \log(L+T-1) + c_{34}h + 3g\log 4. \end{aligned}$$

Pour avoir:

$$h(\delta_i\Delta(P)) \leqslant h(P) + c_{17}(T+1)h + c_{18}(L+T+1)\log(L+T+1),$$

il suffit que l'on ait:

$$\begin{aligned} & c_{17}Th + c_{18}(L+T)\log(L+T) + \log(L+T-1) + c_{34}h + 3g\log 4 \\ & \quad \leqslant c_{17}(T+1)h + c_{18}(L+T+1)\log(L+T+1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$0 \leqslant (c_{17} - c_{34})h + c_{18} \log(L + T + 1) - 3g \log 4.$$

Pour $c_{17} \geqslant c_{34}$ et $c_{18} \geqslant \frac{3g \log 4}{\log 2} = 6g$, l'hypothèse de récurrence est vraie au rang T et ceci achève de prouver le théorème 4.1.

5. Démonstration du résultat principal

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.2.

5.1. *Construction de la fonction auxiliaire*

Soit donc τ un élément de $\mathscr{F}_g$ tel que la variété $A(\tau)$ soit simple, définie sur un corps de nombres k de degré sur $\mathbf{Q} \leqslant \delta$ et vérifie $h(A(\tau)) \leqslant h$. Soit e un point de torsion de $A(\tau)$; notons $k(e)$ la plus petite extension de k sur laquelle e est rationnel. Nous noterons D le degré de $k(e)$ sur k (i.e. $[k(e):\mathbf{Q}] = \delta D$) et n l'ordre de e; on peut supposer sans perte de généralité que δ et D sont $\geqslant 2$. On pose, avec les notations du paragraphe 2, $r(e) = \inf\{H(z,z); \Theta_\tau(z) = e\}$. Nous utiliserons sur $\mathbf{C}^g$ la norme euclidienne N induite par la forme de Riemann H. Soit C un nombre réel assez grand.

Montrons tout d'abord qu'il y a "beaucoup" de multiples de e "près" de l'origine (principe des tiroirs). Soit $x_1, \ldots, x_{2g}$ la base du réseau des périodes Λ, donnée par les g premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbf{C}^g$ et par les g vecteurs lignes constituant la matrice τ. Considérons alors la flèche:

$$[0, 1[^g \times [0, 1[^g \to \mathbf{C}^g$$

$$(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{g} a_i x_i + \sum_{i=1}^{g} b_i x_{g+i}.$$

A tout point P de $A(\tau)(\mathbf{C})$ on peut alors associer par relèvement un unique couple (a, b). Le principe des tiroirs permet alors d'affirmer qu'il existe un ensemble Γ de multiples de e de cardinal au moins $C^{-(6g+1)}\delta^{-g/2}h^{-g/2}n$ tel que pout tout couple (P, Q) d'éléments de Γ, les points (a, b) correspondants vérifient $|a(P)_i - a(Q)_i| < C^{-3}$ et $|b(P)_i - b(Q)_i| < C^{-3}(\delta h)^{-1/2}$ pour tout i compris entre 1 et g. On en déduit:

$$r(P - Q) \leqslant C^{-4};$$

(notons que la norme de partie réelle de τ est majorée par $\frac{1}{2}$ et que la norme de y^{-1} est majorée uniformément en fonction de g). On en déduit donc que si $n \geqslant C^{6g+1}(\delta h)^{g/2}$ (ce que l'on peut supposer sans perte de généralité), on peut trouver un ensemble Γ de multiples de e, de cardinal au moins $nC^{-(6g+1)}(\delta h)^{-g/2}$ vérifiant

$$\forall P \in \Gamma,\ r(P) \leqslant C^{-4}.$$

Posons alors

$$\Gamma^{(g)} = \left\{ \sum_{i=1}^{i=g} P_i \right\}$$

où la somme est étendue aux éléments P_i de Γ. Soient $\theta_0, \ldots, \theta_g$, $g+1$ fonctions thêta "homogènement algébriquement indépendantes" sur la variété $A(\tau)$. Pour alléger les notations, nous poserons $\theta_i(z) = \theta_i(\tau, 2z)$ et $\theta^{\underline{\lambda}}(z) = \theta_0^{\lambda_0}(z) \cdots \theta_g^{\lambda_g}(z)$ pour tout $g+1$-uplet de nombres entiers $\underline{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_g)$. En vertu du lemme 4.6, le point e est de hauteur $\leqslant c_{35}h$ (nous avons fixé $h \geqslant 1$). On peut donc choisir une base $\mathscr{B}$ sur $\mathbf{Q}$ du corps $k(e)$ formée de nombres algébriques de degré $\leqslant \delta D$ et de hauteur

$$\max\{h(\beta),\ \beta \in \mathscr{B}\} \leqslant c_{36}\delta D h. \tag{16}$$

En effet, celle-ci peut être choisie composée de monômes de degré $\leqslant \delta D$ en les coordonnées de P et en les coordonnées de l'origine (les coordonnées de l'origine de $A(\tau)$ engendrent le corps de définition k; voir par exemple [Ma2], p. 114). Fixons les paramètres suivants:

$$\begin{gathered} L_w = [C^{6g}.h^{2g}.\delta^{2g+1}.D^{2g+1}] \qquad S_w = [C^{-g+4}.h^2.\delta.D] \\ T = \left[C^3.h.\frac{\delta}{\log \delta} \cdot \frac{D}{\log D} \right] \qquad L = [C^3.h.\delta.D] \\ N = [C^2.h^{1/2}.\delta^{1/2}D^{1/2}] \qquad U = [C^4.h^2.\delta^2.D^2] \qquad r = 2g.C^{-2} \qquad R = er \end{gathered} \tag{17}$$

On peut, sans perte de généralité supposer que $h \geqslant C^g$, ce qui assure $S_w \neq 0$. Les hypothèses, δ, D, $\geqslant 2$, assurent par ailleurs que $\log \delta$, $\log D$ sont bien définis. Posons:

$$\varphi_\lambda = \beta\theta^{\underline{\lambda}_1}.(z).\theta^{\underline{\lambda}_2}(N\underline{z}) \qquad \left(\beta \in \mathscr{B},\ |\underline{\lambda}_1| = |\underline{\lambda}_2| = L,\ \lambda = (\beta,\ \lambda_1,\ \lambda_2);\ |\lambda| = \sum_{i=0}^{g} \lambda_i \right). \tag{18}$$

Nous pouvons maintenant construire la fonction auxiliaire. Comme toujours, son existence est assurée par un lemme de Siegel (principe des tiroirs). Nous utiliserons ici un théorème de Waldschmidt (pour une démonstration, voir [W] théorème 3-1, *p.* 101), dont nous rappelons l'énoncé ci dessous:

THEOREME 5.1. *Soint L et g deux entiers positifs, S, U, R et r des nombres réels positifs, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ des fonctions continues sur la boule $B(O, R)$ de $\mathbf{C}^g$, de centre 0 et de rayon R, analytiques à l'intérieur de la boule. Supposons que*:

$$3 \leqslant U, \quad S \leqslant U, \quad e \leqslant \frac{R}{r} \leqslant e^U, \quad \sum_{\lambda=1}^{L} |\varphi_\lambda|_R \leqslant e^U. \tag{19}$$

et:

$$(8U)^{g+1} \leqslant LS\left(\log\frac{R}{r}\right)^g \tag{20}$$

où l'on a posé:

$$|f|_l = \max\{|f(z)|, z \in B(0, l)\}.$$

Il existe alors des entiers rationnels $p_1, \ldots, p_L$, vérifiant

$$0 < \max\{|p_\lambda|, 1 \leqslant \lambda \leqslant L\} \leqslant e^S$$

et tels que la fonction:

$$F = \sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda \varphi_\lambda$$

vérifie l'inégalité:

$$|F|_r \leqslant e^{-U}. \tag{21}$$

Il reste à vérifier que nous sommes dans les conditions d'application du théorème 5.1:

- Les conditions

$$3 \leqslant U,\ S \leqslant U,\ e \leqslant \frac{R}{r} \leqslant e^U \quad \text{et} \quad (8U)^{g+1} \leqslant L_w S_w\left(\log\frac{R}{r}\right)^g$$

  sont clairement satisfaîtes.

- Il suffit donc de vérifier que

$$\sum_{\lambda} |\varphi_{\lambda}|_R \leqslant e^U.$$

Mais,

$$\log |\varphi_{\lambda}|_R \leqslant c_{36}(\delta^2 D^2 h + Lc_5 \delta h + LN^2 R^2),$$

en tenant compte du théorème 3.1. La valeur choisie pour U permet donc d'établir l'inégalité voulue.

En conclusion, le théorème 5.1 assure l'existence de nombres entiers rationnels p_{λ} avec

$$0 < \max\{|p_{\lambda}|, \lambda\} \leqslant e^{S_w} \tag{22}$$

tels que la fonction $F = \Sigma_{\lambda} p_{\lambda}\varphi_{\lambda}$ vérifie la relation:

$$|F|_r \leqslant e^{-U}.$$

5.2. *Extrapolation*

Soit maintenant Δ un monôme différentiel d'ordre au plus

$$T, \ \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1} \circ \cdots \circ \left(\frac{\partial}{\partial z_g}\right)^{t_g}, \ \sum_i t_i \leqslant T.$$

Les relations de Cauchy donnent:

$$|\Delta F|_{1/2r} \leqslant c_{37} T! \left(\frac{2}{r}\right)^T |F|_r \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}U\right).$$

Nous allons en déduire (inégalité de la taille) que ΔF s'annule en tous les points de la forme (Q, NQ) où Q décrit $\Gamma^{(g)}$. Par construction de $\Gamma^{(g)}$, on peut trouver pour tout point Q de $\Gamma^{(g)}$, un point $\underline{u}$ de $\mathbf{C}^g$ de norme $N(\underline{u}) \leqslant \frac{1}{2}r$, tel que $\Theta_{\tau}(\underline{u}) = Q$. Pour pouvoir utiliser l'inégalité de la taille, nous devons passer aux dérivations algébriques, construite au paragraphe 4. Soit donc Δ_0, un opérateur différentiel $\Delta_0 = (\delta_1)^{t_1} \circ \cdots \circ (\delta_g)^{t_g}$ algébrique de longueur $\leqslant T$ (i.e. $\Sigma_{i=1}^g t_i \leqslant T$). Notons encore A un majorant de la somme des coefficients de la matrice de passage entre la base $\dfrac{\partial}{\partial z_1} \cdots \dfrac{\partial}{\partial z_g}$ et la base $\delta_1 \cdots \delta_g$ de l'espace tangent à l'origine $T_{A(\tau)}$ de $A(\tau)$. Le lemme 3-1 de [P-W] nous donne alors:

$$|\Delta_0 F|_{1/2r} \leqslant A^T \exp\left(-\frac{1}{2}U\right).$$

Or, le lemme 4.14 du paragraphe 4 nous donne: $A \leqslant \exp(c_{29}\delta h)$. D'où,

$$|\Delta_0 F|_{1/2r} \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4}U\right). \tag{23}$$

Notons maintenant $\Delta_0 = (\delta_1)^{t_1} \circ \cdots \circ (\delta_g)^{t_g}$ un monôme différentiel algébrique de longueur minimale tel que $\Delta_0(F(\underline{u})) \neq 0$. Si $|\Delta_0| \geqslant T$, on a terminé. Dans le cas contraire, choisissons θ_m et θ_n, deux fonctions thêta réalisant respectivement le maximum des $|\theta_m(\underline{u})|$ et des $|\theta_n(N\underline{u})|$ (m, n décrivant $\mathscr{Z}_2$) et posons $f = \dfrac{F}{(\theta_m(z))^L(\theta_n(Nz))^L}$. On a alors:

$$\Delta_0 f(\underline{u}) = \frac{\Delta_0 F(\underline{u})}{\theta_m(z)^L . \theta_n(Nz)^L}.$$

Les minorations des fonctions thêta données par le théorème 3.1 permettent donc de conclure que:

$$|\Delta_0 f(\underline{u})| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}U\right). \tag{24}$$

Il ne reste plus qu'à estimer la hauteur de ce nombre algébrique: les relations (16), (18), (22) et le théorème 4.1 nous donnent:

$$h(\Delta_0(f(\underline{u}))) \leqslant c_{38}(S_w + \delta Dh + T\log T + T\log N + Th + (T+L)h). \tag{25}$$

Par ailleurs, son degré est $\leqslant c_{39}\delta D$; l'inégalité de la taille donne donc:

$$\log(\Delta_0(f(\underline{u}))) \geqslant -\frac{U}{\sqrt{C}}. \tag{26}$$

Cette inégalité contredit la relation (24), donc $\Delta_0 f(\underline{u}) = 0$ sitôt que la longueur de $\Delta_0 \leqslant T$ et $\Theta_\tau(\underline{u}) \in \Gamma^{(g)}$.

5.3. *Lemme de zéros et conclusion*

On peut voir la fonction F comme un polynôme de degré au plus L en les fonctions abéliennes de la variété produit $A(\tau)\times A(\tau)$. F s'annule sur tous les points de la forme (Q, NQ) où Q décrit $\Gamma^{(g)}$, à l'ordre T le long de la sous-variété H de $A(\tau)\times A(\tau)$ définie par la relation $z_2 = Nz_1$. Toutefois, contrairement à ce qui se passe dans [Be], il est plus facile de se ramener tout d'abord, à l'aide des formules de multiplications par N, à une fonction G sur $A(\tau)$, de degré $\leqslant c_{40}LN^2$, qui s'annule sur $\Gamma^{(g)}$, à l'ordre T. Par ailleurs, il est facile de voir que G n'est pas identiquement nulle sur $A(\tau)$: si tel était le cas, on en déduirait que la fonction F s'annule identiquement sur H (donc le long de H à tout ordre). On peut alors appliquer le lemme de zéros (théorème 6.4) avec toute valeur de T. Il existe donc un sous-groupe propre B de $A(\tau)\times A(\tau)$ tel que:

$$\binom{T + \operatorname{codim}_{T_H}(T_B \cap T_H)}{\operatorname{codim}_{T_H}(T_B \cap T_H)}.\deg(B)L^{\dim(B)} \\ \leqslant c_{41}\deg(A(\tau)).(2L)^{2\dim(A(\tau))}. \tag{27}$$

Pour que cette inégalité soit satisfaîte ($\forall T$), il faut alors que B contienne H. Comme $A(\tau)$ est simple, $B = H$. On en déduit:

$$\deg(H) \leqslant c_{41}L^{2g},$$

c'est-à-dire,

$$N^2 \leqslant c_{42}L,$$

ce qui est incompatible avec le choix des paramètres.

Le lemme de zéros de [Ph] (voir théorème 6.4; notons que le lemme de Masser et Wüstholz [Ma-Wu], "Main theorem" permet également de conclure), assure donc l'existence d'un sous-groupe algébrique propre B de $A(\tau)$ tel que l'inégalité suivante soit satisfaite:

$$\binom{T + \operatorname{codim}(B)}{\operatorname{codim}(B)}.\operatorname{card}\left(\frac{\Gamma + B}{B}\right).\deg(B)L^{\dim(B)} \\ \leqslant c_{41}\deg(A(\tau)).(2LN^2)^{\dim(A(\tau))}. \tag{28}$$

Comme $A(\tau)$ est simple, le seul sous-groupe propre de $A(\tau)$ est $\{0\}$.

On en déduit, en remplaçant dans la relation (28) les différents paramètres par leur valeur:

$$\operatorname{card}(\Gamma) \leqslant c_{43}(C^4h\delta D \log\delta \log D)^g. \tag{29}$$

Par ailleurs, on sait que $\mathrm{card}(\Gamma) \geqslant C^{-(6g+1)}(\delta h)^{-g/2}n$. La relation (29) entraine le théorème 2.2 qui est entièrement démontré.

6. Appendice

Rappelons ici les conditions qui permettent de caractériser $\mathscr{F}_g$ (cf. [Ig] V §4):

(S.1) Si $\tau \in \mathscr{F}_g$, $\det(\mathfrak{Im}\,\sigma.\tau) \leqslant \det(\mathfrak{Im}\,\tau) \forall \sigma \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$;
(S.2) Si $x = (x_{i,j})$ est la partie réelle de $\tau \in \mathscr{F}_g$, on a $|x_{i,j}| \leqslant \frac{1}{2} \forall i, j \leqslant g$;
(S.3) Si $y = \mathfrak{Im}\,\tau$, $\tau \in \mathscr{F}_g$, on a:

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant g$, et tout $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_g) \in \mathbf{Z}^g$ tel que les ζ_i, $k \leqslant i \leqslant g$ soient premiers entre eux,

(a) $\zeta y \zeta' \geqslant y_k = y_{k,k}$;
(b) $y_{k,k+1} \geqslant 0 \forall k$, $1 \leqslant k \leqslant g-1$.

On peut démontrer que si y vérifie (S.3), on a: $0 < y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_g$ et $|y_{i,j}| \leqslant \frac{1}{2} y_i$. De plus, $\forall \tau \in \mathscr{F}_g$ on a $y_1 \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On notera $\|\mathfrak{Im}\,\tau\| = \sup\{|y_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant g\} = y_g$.

LEMME 6.1. *Il existe une constante $c_0 = c(g) > 0$ telle que $\forall \tau \in \mathscr{F}_g$, $\forall n \in \mathbf{R}^g$ on a $nyn' \geqslant c_0 . \Sigma_{i=1}^{i=g} n_i^2 . y_i$.*

DEMONSTRATION. Voir [Ig] V §4.

REMARQUE. La démonstration de ce lemme est effective: par exemple, on peut prendre $c_0 = (\frac{1}{2})^{1/2g^3+4}$.

Rappelons également quelques identités classiques que vérifient les fonctions thêta (voir [Ig], pp. 49–50):

$$\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, -z) = \theta_{(-m_1,-m_2)}(\tau, z). \tag{30}$$

Pour tout ξ_1, ξ_2 éléments de $\mathbf{Z}^g$, on a:

$$\theta_{(m_1+\xi_1,m_2+\xi_2)}(\tau, z) = e(m_1 \xi_2')\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, z). \tag{31}$$

Pour tout u_1, u_2 éléments de $\mathbf{R}^g$, on a:

$$\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, z + u_1\tau + u_2) = e(-\tfrac{1}{2}u_1\tau u_1' - u_1(z+u_2)')e(-u_1 m_2')\theta_{(m_1+u_1,m_2+u_2)}(\tau, z). \tag{32}$$

D'où:

$$\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, z) = e(\tfrac{1}{2}m_1\tau m_1' + m_1(z+m_2)')\theta_{(0,0)}(\tau, z + m_1\tau + m_2). \tag{33}$$

De plus, pour tout ξ_1, ξ_2 éléments de $\mathbf{Z}^g$:

$$\theta_{(m_1,m_2)}(\tau, z+\xi_1\tau+\xi_2)=e(-\tfrac{1}{2}\xi_1\tau\xi_1'-\xi_1 z')e(m_1\xi_2'-m_2\xi_1')\theta_{(m_1,m_2)}(\tau,z). \tag{34}$$

Citons également l'identité suivante, qui permet de passer du plongement projectif de $A(\tau)$ utilisé dans le théorème 3.1 à celui utilisé dans le corollaire 3.2 (c'est une transformation linéaire). Soit r un entier positif, on a alors:

$$\theta_m(\tau, rz) = \sum_{q\in\mathbf{Z}^g/r\mathbf{Z}^g} e((q + m_1)m_2')\theta_{((q+m_1)/r,0)}(r^2\tau, r^2z). \tag{35}$$

où m_2 décrit $\frac{1}{r}\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$. On remarquera qu'en vertu de la relation (31), le choix de m_2 dans sa classe n'intervient pas (voir [Ig], p. 171). Citons encore les "formules d'additions":

THEOREME 6.2. *On désigne par* $m_\alpha=(m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2})$, $m_\beta=(m_{\beta_1}, m_{\beta_2})$, *deux points de* $\mathbf{R}^{2g}$, *par* (z_1, z_2) *un élément de* $\mathbf{C}^g\times\mathbf{C}^g$, *et par* T *la matrice* $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ *où* 1 *désigne suivant les cas* I_{2g} *ou* I_g, *on pose* $(n_\alpha, n_\beta)=(m_\alpha, m_\beta)T$; $(w_1, w_2)=(z_1, z_2)T$. *Pour tout* $\tau\in S_g$, *on a alors*:

$$\begin{aligned}&\theta_{m_\alpha}(\tau, 2z_1)\theta_{m_\beta}(\tau, 2z_2)\\ &\quad=\frac{1}{2^g}\sum_{a_2\in\mathcal{T}_2} e(-2m_{\alpha_1}.a_2')\theta_{[2n_{\alpha_1},n_{\alpha_2}+a_2]}(\tfrac{1}{2}\tau, 2w_1)\theta_{[2n_{\beta_1},n_{\beta_2}+a_2]}(\tfrac{1}{2}\tau, 2w_2).\end{aligned}$$

On peut remarquer qu'ici, comme ci-dessus, le choix de a_2 *dans sa classe n'intervient pas.* CQFD.

DEMONSTRATION. Voir [Ig] p. 139. Citons également le lemme "matriciel" de Masser:

LEMME 6.3 (Masser). *Il existe une constante* $c_{44}=c(g)$ *telle que pour tout réel* $h\geqslant 1$, *tout entier* $\delta>1$ *et tout* $\tau\in\mathcal{F}_g$ *tel que la variété abélienne* $A(\tau)$ *soit définie sur un corps de nombres* k *de degré sur* $\mathbf{Q}\leqslant\delta$ *et soit de hauteur* $h(A(\tau))\leqslant h$, *on a*: $\|y\|=\|\mathfrak{Im}\,\tau\|\leqslant c_{44}\delta h$.

DEMONSTRATION. Voir [Ma2], p. 115, lemme "matriciel". Notons que Masser n'a pas explicité la dépendance en le corps de base dans son lemme. Le résultat ci-dessus s'obtient avec la même démonstration, en tenant compte de la proposition 4.9.

Citons enfin le lemme de zéros de Philippon:

THEOREME 6.4. *Soit* A *une variété abélienne définie sur* $\mathbf{C}$, *de dimension* g, *plongée dans un espace projectif* $\mathbf{P}^N$ *de façon projectivement normale. On notera* deg *l'application degré sur les fermés de* $\mathbf{P}^N$. *Soit encore* Δ *un sous-espace de* $T_A(\mathbf{C})$, *l'espace tangent à l'origine de* A, *et* S *un ensemble fini de points de* A. *On note* $\Gamma^{(g)}(S)$, *l'ensemble*: $\{\Sigma_{i=1}^{g} P_i, P_i \in S\}$. *Soit par ailleurs, un élément* P *de* $\mathbf{C}[X_0, \ldots, X_N]$, *homogène de degré* D, *qui s'annule à l'ordre* $gT + 1$ *le long de* Δ *sur* $\Gamma^{(g)}(S)$, *mais qui n'est pas identiquement nul sur* A. *Il existe alors une sous-variété abélienne* B *de* A, *distincte de* A *définie par des équations de degré au plus* $c_{45}D$, *telle que*:

$$\binom{T + \operatorname{codim}_\Delta(\Delta \cap T_B)}{\operatorname{codim}_\Delta(\Delta \cap T_B)} . \operatorname{card}\left(\frac{S + B}{B}\right) . \deg(B) D^{\dim(B)} \leqslant \deg(A) . (2D)^{\dim(A)}. \tag{36}$$

DEMONSTRATION. Voir [Ph, théorème 2-1] joint à [La].

Références

[Bak] A. Baker, On the periods of the Weierstrass $\wp$-function. *Symposia Mathematicae*, Indam, Rome, 1968/1969, IV, pp. 155–174, Academic Press, London, 1970.

[Be] D. Bertrand, Galois orbits on abelian varieties and zero estimates. J. Loxton et A. Van der Poorten (Eds.), *Diophantine Analysis, LMS Lecture Notes*, 109, pp. 21–35, Cambridge University Press, 1986.

[Co] P. Cohen, *Explicit calculation of some effective constants in transcendence proofs.* PhD thesis, University of Nottingham, 1985.

[Dav1] S. David, Fonctions thêta et points de torsions des variétés abéliennes. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 305, pp. 211–214, 1987.

[Dav2] S. David, Théorie de Baker dans les familles de groupes algébriques commutatifs. En préparation, 1988.

[De] P. Deligne, Preuve des conjectures de Tate et de Shavarévitch [d'après G. Faltings]. *Séminaire Bourbaki*, 1983–84, pp. 616-01–616-17, Novembre 1983.

[F-P] A. Faisant et G. Philibert, *Aproximations simultanées de* τ *et* $j(\tau)$. Problèmes Diophantiens, *n*° 66, Publications mathématiques de l'université Pierre et Marie Curie, 1983–1984.

[Ig] J. Igusa, *Theta functions. Grundlehren Math. Wiss.*, *n*° 194, Springer, 1972.

[La] H. Lange, Families of translations of commutative algebraic groups. *Journal of algebra*, 109, pp. 260—265, 1987.

[Ma1] D. Masser, Small values of the quadratic part of the Néron–Tate height on an abelian variety. *Compositio Math*, 53, pp. 153–170, 1984.

[Ma2] D. Masser, Small values of heights on families of abelian varieties. *Proc. Conf. Bonn, Lecture Notes*, 1290, pp. 109–148, Springer-Verlag, 1985.

[Ma3] D. Masser, Lettre à Daniel Bertrand, Novembre 1986.

[Ma-Wu] D. Masser et G. Wüstholz, Zero estimates on group varieties II. *Inv. Math.*, 80, pp. 233–267, 1985.

[M-B] L. Moret-Bailly, Compactifications, hauteurs et finitude. *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell, L. Szpiro, Astérique*, 127, pp. 113–129, S.M.F., 1985.

[Mum1] D. Mumford, On the equations defining abelian varieties I. *Inventiones Math*, 1, pp. 287–354, 1966.

[Mum2] D. Mumford, *Abelian varieties. TIFR studies in mathematics*, Oxford University Press, 1970.

[Mum3] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I*. Birkhäuser, Boston, 1983.

[M-Z] I. Manin et G. Zarhin, Heights on families of abelian varieties. *U.S.S.R. Math. Sbornik*, 18, pp. 169–179, 1972.

[Ph] P. Philippon, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. S.M.F.*, 114, pp. 355–383, 1986.

[P-W] P. Philippon et M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes dans les groupes algébriques commutatifs. *Illinois Journal of Mathematics*, 32(2), pp. 281–314, 1988.

[Ro] M. Rosen, Abelian varieties over C. G. Cornell et J. Silverman (Eds.), *Arithmetic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1986.

[Se] J.-P. Serre, Cours au collège de France, 1985–1986.

[Sh] G. Shimura, On the derivatives of theta functions and modular forms. *Duke Math. Journal*, 44, pp 365–387, 1977.

[W] M. Waldschmidt, Transcendance et exponentielles en plusieurs variables. *Inventiones Math.*, 63, pp 97–127, 1981.