

COMPOSITIO MATHEMATICA

C. MOEGLIN

**Orbites unipotentes et spectre discret non ramifié.
Le cas des groupes classiques déployés**

Compositio Mathematica, tome 77, n° 1 (1991), p. 1-54

http://www.numdam.org/item?id=CM_1991__77_1_1_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Orbites unipotentes et spectre discret non ramifié *Le cas des groupes classiques déployés*

C. MÖGLIN

LMF/VER 48, Université Pierre et Marie Curie, F-75252 Paris cedex 05, France

Received 18 April 1989; accepted 26 February 1990

Soit k un corps global de nombres dans l'introduction et jusqu'en IV. On note \mathbf{A} l'anneau des adèles de k . Soit G un groupe classique simple déployé, défini sur k : $G = \mathrm{SO}(2n + 1)$, $\mathrm{Sp}(2n)$ ou $\mathrm{O}(2n)$. On note G' le groupe 'dual' de G , i.e. si G est connexe la composante neutre du L -groupe associé à G ; G' est alors plus traditionnellement noté ${}^L G^0$ et si $G = \mathrm{O}(2n)$, $G' = \mathrm{O}(2n, \mathbf{C})$. Par exemple, si $G = \mathrm{SO}(2n + 1)$ alors $G' = \mathrm{Sp}(2n, \mathbf{C})$. On note K un compact maximal de $G(\mathbf{A})$ de la forme $K = \prod_{v, \text{ place de } k} K_v$ avec $K_v = G(O_v)$ si v est une place non archimédienne et O_v est l'anneau des entiers du complété k_v et avec K_v un compact maximal de $G(k_v)$ si v est archimédienne. On s'intéresse à l'ensemble des représentations de $G(\mathbf{A})$ intervenant discrètement dans $L^2(G(k)\backslash G(\mathbf{A}))$ ayant un vecteur invariant sous K , dont les données cuspidales (au sens de ([L], chapitre 4)) sont: un tore déployé, T et la représentation triviale du sous-groupe, noyau des caractères de la forme valeur absolue d'un caractère rationnel de T . On montre que cet ensemble est sans multiplicité et est paramétrisé, suivant les conjectures d'Arthur ([A]) par les orbites unipotentes de G' ne rencontrant aucun sous-groupe de Levi propre de G' .

Pour prouver cela, on suit la méthode de Langlands ([L], chapitre 7 et appendice 3) déjà utilisée dans ([M-W]), i.e. on note \mathbf{F} l'ensemble des fonctions de Paley-Wiener sur \mathbf{C}^n à valeurs complexes. Soit ϕ une telle fonction; on transforme ϕ en une fonction sur \mathbf{C}^n à valeur dans l'ensemble des fonctions sur $G(\mathbf{A})$ invariante à droite par K , notée ϕ , de la façon usuelle, i.e. on fixe B un sous-groupe de Borel défini sur k ayant un tore déployé et tel que $G(\mathbf{A}) = B(\mathbf{A})K$. On pose pour $g = bk \in G(\mathbf{A})$, $b \in B(\mathbf{A})$, $k \in K$,

$$\phi(g)(\lambda) = (\lambda + \rho)(b)\phi(\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^n$ où ρ est la demi-somme des racines de T dans le radical unipotent de B . On note Φ la transformée de Fourier-Mellin de ϕ , i.e.

$$\Phi(g) = \int_{\lambda | \operatorname{Re} \lambda = \lambda^0} \phi(g)(\lambda) d\lambda$$

2 C. Mœglin

où λ^0 est un élément de \mathbf{C}^n (c'est indépendant du choix; dans la suite on supposera que $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$ vérifie $\lambda_1^0 \gg \dots \gg \lambda_n^0 \gg 0$).

A Φ on associe une pseudo-série d'Eisenstein, notée $\hat{\Phi}$, i.e.

$$\hat{\Phi}(g) = \sum_{\gamma \in \mathbf{B}(k) \backslash G(k)} \phi(\gamma g).$$

Langlands a montré que $\hat{\Phi} \in L^2(G(k) \backslash G(\mathbf{A}))^K$. On note \mathbf{W} le complété de l'espace vectoriel engendré par ces éléments $\hat{\Phi}$. Et l'ensemble des représentations que nous étudions, ici, est le socle de \mathbf{W} , i.e. les sous-modules (pour l'algèbre des fonctions \mathbf{C}^∞ à support compact invariante par K) irréductibles de \mathbf{W} . En fait, on calcule, suivant Langlands, la décomposition spectrale de \mathbf{W} . Il s'agit de désintégrer convenablement le produit scalaire induit sur \mathbf{W} par celui de $L^2(G(k) \backslash G(\mathbf{A}))$. Partant de $\phi \in \mathbf{F}$ comme plus haut et $\psi \in \mathbf{F}$ (d'où aussi $\hat{\Psi}$), on pose:

$$\langle \hat{\Phi}, \hat{\Phi} \rangle =: (\phi, \psi).$$

Cela est justifié par le fait que le produit scalaire s'exprime aisément en terme de ϕ et ψ . Pour exprimer le résultat, il faut quelques notations concernant les orbites unipotentes de G' : soit \mathbf{O} une telle orbite; on note $M_{\mathbf{O}}$ un sous-groupe de Levi de G' rencontrant \mathbf{O} et minimal avec ces propriétés (il est unique à conjugaison près). On identifie $M_{\mathbf{O}}$ à un sous-groupe de Levi standard de G grâce à l'identification des groupes de Weyl (à conjugaison près). On note $X(M_{\mathbf{O}})$ les caractères de $M_{\mathbf{O}}$ à valeurs dans \mathbf{C}^* , non ramifiés, i.e. triviaux sur tout sous-groupe compact ouvert. C'est un groupe isomorphe à \mathbf{C}^m , pour m convenable. On note $X(M_{\mathbf{O}})_u$, le sous-groupe forme des caractères unitaires. Pour \mathbf{O} fixée, on construit une application de $X(M_{\mathbf{O}})$ à valeurs dans l'ensemble des formes bilinéaires (de rang 1, à cause des hypothèses de K -invariance, sur \mathbf{F}), noté $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{O}}(\lambda)$ telle que pour $\phi, \psi \in \mathbf{F}$, $(\phi, \psi)_{\mathbf{O}}(\lambda)$ soit holomorphe en $\lambda \in X(M_{\mathbf{O}})_u$ et hermitienne pour $\lambda \in X(M_{\mathbf{O}})_u$. On montre que l'on a:

$$(*) \quad (\phi, \psi) = \sum_{\mathbf{O}} \int_{\lambda \in X(M_{\mathbf{O}})_u} (\phi, \psi)_{\mathbf{O}}(\lambda) d\lambda$$

où la somme porte sur toutes les orbites unipotentes de G' . On obtient la décomposition du produit scalaire sur \mathbf{W} en prolongeant ce résultat par $G(\mathbf{A})$ -invariance. La partie discrète de \mathbf{W} est celle que l'on obtient pour $X(M_{\mathbf{O}})_u = \{0\}$ i.e. $M_{\mathbf{O}} = G'$. On va décrire $(\phi, \psi)_{\mathbf{O}}(\lambda)$; dans le texte, on donne explicitement un élément $\lambda_{\mathbf{O}}$ de \mathbf{C}^n . Il peut se réaliser à l'aide d'un SL_2 triplet associé à l'orbite;

mais j'ai fait un choix particulier sans autre explication qu'il m'est apparu dans le calcul des exemples en petit rang. Il n'y a sûrement pas qu'un choix possible bien que la remarque 1 ci-dessous nécessite des propriétés particulières. Les propriétés particulière que $\lambda_{\mathbf{O}}$ vérifie sont les suivantes:

- (i) il existe un unique élément de W , le groupe de Weyl de G , de longueur minimal pour la propriété: $w\lambda_{\mathbf{O}} = -\lambda_{\mathbf{O}}$; on le note $w_{\mathbf{O}}$;
- (ii) $|\{\alpha \in \Delta^+ | w_{\mathbf{O}}(\alpha) \notin \Delta^+ \text{ et } (\lambda, \check{\alpha}) = 1\}| = n - \dim X(M_{\mathbf{O}})$.

Pour tout $\alpha \in \Delta^+$, le système de racines positives déterminé par B , on note H_{α} l'hyperplan de \mathbf{C}^n défini par $(\lambda, \check{\alpha}) = 1$. On a:

- (iii) $\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}}) = \bigcap_{\alpha \in \Delta^+ | (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = 1, w_{\mathbf{O}}(\alpha) \notin \Delta^+} H_{\alpha}$
- (iv) $|\{\alpha \in \Delta^+ | (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = 0\}| \geq \sup(|\{\alpha \in \Delta^+ | w_{\mathbf{O}}(\alpha) \in \Delta^+, (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = 1\}|, |\{\alpha \in \Delta^+ | (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = -1\}|)$ avec égalité des 3 termes si $M_{\mathbf{O}} = G$.

En fait, si l'on sait définir $\lambda_{\mathbf{O}}$ pour tout \mathbf{O} telle que $M_{\mathbf{O}} = G$, il y a un choix qui s'impose de lui-même pour tout \mathbf{O} .

Pour $\lambda \in \mathbf{C}^n$ et pour $\sigma \in W$, le groupe de Weyl de G , on note:

$$r(\sigma, \lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+ | \sigma(\alpha) \notin \Delta^+} L((\lambda, \check{\alpha})) / (L((\lambda, \check{\alpha}) + 1) e((\lambda, \check{\alpha}))).$$

On pose, alors:

$$\begin{aligned} n'_{\mathbf{O}}(\lambda) &= \prod_{\alpha \in \Delta^+ | (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = -1} ((\lambda, \check{\alpha}) + 1) \prod_{\alpha \in \Delta^+ | (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = 0} (\lambda, \check{\alpha})^{-1}, \\ n''_{\mathbf{O}}(\lambda) &= \prod_{\alpha \in \Delta^+ | (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = 1, w_{\mathbf{O}}(\alpha) \in \Delta^+} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1) \prod_{\alpha \in \Delta^+ | (\lambda_{\mathbf{O}}, \check{\alpha}) = 0} (\lambda, \check{\alpha})^{-1}, \\ n_{\mathbf{O}}(\lambda) &= n'_{\mathbf{O}}(\lambda) n''_{\mathbf{O}}(\lambda). \end{aligned}$$

On montre que les fonctions méromorphes sur \mathbf{C}^n suivantes, (ϕ et ψ sont dans \mathbf{F}):

$$\left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma\lambda) \right) n'_{\mathbf{O}}(\lambda)$$

et

$$\left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\mathbf{O}}\lambda) \overline{\psi(-\tau w_{\mathbf{O}}\lambda)} \right) n''_{\mathbf{O}}(\lambda)$$

4 C. Mæglin

ont comme singularités des hyperplans affines qui ne contiennent pas $\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})$. Par restriction, elles définissent des fonctions méromorphes sur $\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})$ holomorphes au voisinage de tout point appartenant à $\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})_u$. On vérifie d'autre part qu'en calculant $n'_{\mathbf{O}}(\lambda)$ et $n''_{\mathbf{O}}(\lambda)$ par restrictions successives le long des hyperplans H_{α} pour $\alpha \in \Delta^+$ tel que $(\lambda_{\mathbf{O}}, \tilde{\alpha}) = 1$ et $w_{\mathbf{O}}(\alpha) \notin \Delta^+$ (hyperplans rangés dans un ordre convenable, cf. II.6) on obtient des fonctions sur $\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})$ qui valent 1 si $X(M_{\mathbf{O}}) = 0$ et en général, sont l'inverse d'un polynôme, noté $n'_{\mathbf{O}}(\lambda)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})}$, $n''_{\mathbf{O}}(\lambda)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})}$ (l'ambiguïté de la notation est justifiée par le fait que l'on peut inverser avant ou après avoir restreint). On peut alors définir:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})} \\ & := \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda)n'_{\mathbf{O}}(\lambda) \right)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})} n'_{\mathbf{O}}(\lambda)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})}^{-1} \end{aligned}$$

et une formule analogue pour

$$\left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\mathbf{O}}\lambda)\overline{\psi(-\tau w_{\mathbf{O}}\bar{\lambda})} \right)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})}$$

Il est immédiat de vérifier que pour $\lambda \in \lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})_u$, on a:

$$\left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\mathbf{O}}\lambda)\overline{\psi(-\tau w_{\mathbf{O}}\bar{\lambda})} \right)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})} = \left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, -\lambda)\overline{\psi(\tau\lambda)} \right)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})}$$

Alors pour $\lambda' \in X(M_{\mathbf{O}})$, on pose $\lambda = \lambda_{\mathbf{O}} + \lambda'$ et:

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi)_{\mathbf{O}}(\lambda') &= \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda) \right)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})} \\ & \quad \times \left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\mathbf{O}}\lambda)\overline{\psi(-\tau w_{\mathbf{O}}\bar{\lambda})} \right)_{|\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})} \times c_{\mathbf{O}}(\lambda) \end{aligned}$$

où $c_{\mathbf{O}}(\lambda)$ est, à une constante près, le résidu de $r(w_{\mathbf{O}}, \lambda)$ le long des hyperplans H_{α} définis ci-dessus et en fait ce résidu vaut (à une constante près) $r(w_{\mathbf{O}}, \lambda) d_{\mathbf{O}}(\lambda)$ où l'on a posé:

$$d_{\mathbf{O}}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+ | w_{\mathbf{O}}(\alpha) \notin \Delta^+, (\lambda_{\mathbf{O}}, \tilde{\alpha}) = 1} ((\lambda, \tilde{\alpha}) - 1).$$

Ces formules sont analogues à celles trouvées pour $GL(n)$ dans ([M-W]) et j'ai

vérifié que l'on pouvait aussi donner des définitions convenables pour $\lambda_{\mathbf{O}}$ dans le cas où G est un groupe déployé de type G_2 de sorte que (*) soit encore vraie: par exemple si \mathbf{O} est telle que $M_{\mathbf{O}} = G$, il y a 2 possibilités, l'orbite unipotente régulière où l'orbite unipotente sous-régulière. Dans le premier cas, on prend pour $\lambda_{\mathbf{O}}$ la demi-somme des racines positives et dans le deuxième β_2 (dans les notations de Langlands [L] appendice 3) noté plus traditionnellement $\alpha + \beta$ (i.e. la somme des deux racines simples). La méthode pour vérifier (*) dans le cas de G_2 est de calculer la formule que je propose, ce qui est extrêmement rapide et de constater qu'elle coïncide avec celle trouvée par Langlands.

Je remercie vivement J.-L. Waldspurger avec lequel j'ai constamment discuté ces questions.

REMARQUE 1. Supposons que \mathbf{O} soit une orbite unipotente de G' ne rencontrant aucun sous-groupe de Levi propre de G' . Soit $\phi \in \mathbf{F}$, $\lambda_{\mathbf{O}}$ comme ci-dessus; supposons que ϕ est nulle à un très grand ordre en tout conjugué propre de $\lambda_{\mathbf{O}}$ (pour l'action du groupe de Weyl). Le produit scalaire prend une forme très simple pour de telles ϕ , puisque l'on a:

$$(**) \left(\sum_{\sigma \in \mathbf{W}} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma\lambda) \right)_{\lambda = \lambda_{\mathbf{O}}} = * \sum_{\sigma \in \bar{A}(\mathbf{O})} r(\sigma, -\lambda_{\mathbf{O}}) \phi(\lambda_{\mathbf{O}}) = *' \phi(\lambda_{\mathbf{O}})$$

où les étoiles sont des constantes et où $\bar{A}(\mathbf{O})$ est un sous-groupe du stabilisateur de $\lambda_{\mathbf{O}}$ isomorphe au groupe introduit par Lusztig et noté $\bar{A}(u)$ (pour $u \in \mathbf{O}$) en ([Lu]). Dans le cas particulier, où l'on s'est placé, l'image dans $L^2(G(k) \backslash G(\mathbf{A}))$ engendrée par les pseudo séries d'Einstein associées à des ϕ comme ci-dessus coïncident avec l'image de \mathbf{F} tout entier. J'espère que l'on peut réaliser entièrement le spectre discret dont les données cuspidales sont celles considérées au début de l'introduction, à l'aide de fonctions ayant les mêmes propriétés de nullité que ϕ ci-dessus (n'étant évidemment pas K -invariante) et le produit scalaire devrait, pour ces fonctions, avoir la même forme que (**) (sauf la dernière égalité) en remplaçant $r(\sigma, -\lambda)$ par $N(w_{\mathbf{O}}, \lambda) M(\sigma^{-1}, \sigma(\lambda))$ (où $M(,)$ est l'opérateur d'entrelacement non normalisé et $N(,)$ est l'opérateur d'entrelacement normalisé).

2. Dans le texte, je travaille avec des partitions plutôt qu'avec des orbites. Ces deux points de vue sont à peu près équivalents (cf. I.1), toutefois, comme je n'ordonne pas les partitions, pour obtenir les résultats ci-dessus dans le cas où $M_{\mathbf{O}} \neq G$, il faut regrouper les partitions correspondant à la même orbite.

3. L'organisation du texte est la suivante:

- (i) La 1^e partie donne les définitions de base, en particulier celles de $\lambda_{\mathbf{O}}$, $w_{\mathbf{O}}$, $M_{\mathbf{O}}$... mais \mathbf{O} est remplacée par une partition.

- (ii) la 2^e partie donne les lemmes utiles pour définir les fonctions dont il a été question ci-dessus sur $\lambda_{\mathbf{O}} + X(M_{\mathbf{O}})$. C'est assez pénible et beaucoup moins simple que pour $GL(n)$. En particulier, il n'est pas aussi simple que pour $GL(n)$ de se débarrasser des zéros des dénominateurs des facteurs $r(\sigma, -\lambda)$.
- (iii) la 3^e partie prouve le résultat. La méthode est exactement celle suivie dans ([M-W]), la combinatoire est du même type.

I. Définitions

Dans tout ce qui suit, on fixe un Borel B de G ayant un tore déployé T . D'où la notion de parabolique standard et le choix d'un système de racines positives, noté Δ^+ . Soit $\lambda \in \mathbb{C}^n$, on identifie λ à un caractère de T par:

$$\lambda(t_1 \cdots t_n) = |t_1|^{\lambda_1} \cdots |t_n|^{\lambda_n} \text{ si } \lambda = (\lambda_1 \cdots \lambda_n).$$

de façon classique, on étend λ et un caractère de B en utilisant l'isomorphisme de T est $B/\mathfrak{u}B$ où $\mathfrak{u}B$ est le radical unipotent de B .

Soit α une racine positive; on pose $(\lambda, \check{\alpha}) = \langle \lambda, H_{\alpha} \rangle$ où H_{α} est l'élément de l'algèbre de Lie de T associée à α et où λ est vu comme un caractère de l'algèbre de Lie de T . Pour la commodité du lecteur, on va écrire explicitement $(\lambda, \check{\alpha})$, bien que nous n'utiliserons la forme explicite que dans peu de calculs. En utilisant les notations de Bourbaki, on écrit les éléments de Δ^+ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \text{ avec } 1 \leq i < j \leq n, \\ &2\varepsilon_i \text{ pour } G = \text{Sp}(2n) \text{ et } 1 \leq i \leq n, \\ &\varepsilon_i \text{ pour } G = \text{SO}(2n + 1) \text{ et } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Alors, on a pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} (\lambda, (\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)^{\vee}) &= (\lambda_i \pm \lambda_j) \\ (\lambda, (2\varepsilon_i)^{\vee}) &= \lambda_i, \text{ pour } G = \text{Sp}(2n) \\ (\lambda, (\varepsilon_i)^{\vee}) &= 2\lambda_i, \text{ pour } G = \text{SO}(2n + 1). \end{aligned}$$

On prendra souvent comme convention de poser, quand $i = j$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i + \varepsilon_j &= 2\varepsilon_i \text{ si } G = \text{Sp}(2n), \\ &= \varepsilon_i \text{ si } G = \text{SO}(2n + 1), \end{aligned}$$

et n'existe pas si $G = \text{O}(2n)$.

I.1. PARTITIONS (cf. par exemple [S] par. 2). Les orbites unipotentes de G' sont paramétrisées par des partitions ayant les propriétés suivantes:

- (i) $G' = \text{SO}(2n + 1)$: les partitions sont des partitions de $2n + 1$ où tout nombre pair intervient un nombre pair de fois,
- (ii) $G' = \text{Sp}(2n)$: les partitions sont des partitions de $2n$ où tout nombre impair intervient un nombre pair de fois,
- (iii) $G' = \text{O}(2n)$: les partitions sont des partitions de $2n$ ou tout nombre pair intervient un nombre pair de fois.

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$ une telle partition; on note s le nombre d'entiers intervenant dans μ un nombre impair de fois (d'après ce qui vient d'être rappelé les entiers qui interviennent un nombre impair de fois ont tous même parité). On pose $T := (S - s)/2$ et on réécrit μ en ayant permuté certains termes:

$$\mu = (p_1, p_1, \dots, p_T, p_T, p_{T+1}, \dots, p_{T+s}) \text{ où } p_{T+1} > \dots > p_{T+s}.$$

On réécrit encore μ sous la forme suivante:

$$\mu = (p_1, \dots, p_T; q_1, \dots, q_s),$$

passant de μ à μ de façon évidente mais à conjugaison près. Dans la suite on n'aura donc que des partitions du type de μ où la place du point virgule est importante. On emploiera l'expression 'parité des q_j ' pour dire impair si $G' = \text{SO}(2n + 1)$ ou $\text{O}(2n)$ (i.e. $G = \text{Sp}(2n)$ ou $\text{O}(2n)$) et pair sinon.

Soit μ comme ci-dessus. Pour $1 \leq i \leq T$, on pose:

$$p'_i = \sum_{j < i} p_j \text{ (une somme vide est nulle).}$$

On remarque que s est impair si $G' = \text{SO}(2n + 1)$, pair si $G' = \text{O}(2n)$ et d'une parité indéterminée si $G' = \text{Sp}(2n)$. On pose:

$$s' = [(s + 1)/2] \quad \text{si } q_s > 1$$

$$s' = [s/2] \quad \text{si } q_s = 1$$

Alors pour $1 \leq k \leq s'$, on pose

$$q'_k = \left(\sum_{j < k} [(q_{2j-1} + q_{2j})/2] \right) + p'_{T+1}$$

en ayant posé $q_{2k} = 0$ si $2k > s$ i.e. pour $k = s'$, $G' = \text{SO}(2n + 1)$ et $q_s > 1$, la

partie entière n'est utile que dans ce cas. On a: $q'_{s'+1} = n$. On pose encore, pour $1 \leq k \leq s'$:

$$h_k = q'_k + [(q_{2k-1} - q_{2k})/2]$$

avec les mêmes conventions que plus haut. En particulier

$$q'_{k+1} - h_k = q_{2k}.$$

I.2. DÉFINITION DE λ_μ . On fixe μ comme en I.1 et on pose:

$$\lambda_\mu = (\lambda_{\mu,1}, \dots, \lambda_{\mu,n}) \in \mathbb{C}^n$$

où l'on a:

$$\lambda_{\mu,p'_i+t} = (p_i + 1)/2 - t \quad \text{pour } 1 \leq i \leq T \quad \text{et } 1 \leq t \leq p_i$$

$$\lambda_{\mu,q'_k+t} = (q_{2k-1} + 1)/2 - t \quad \text{pour } 1 \leq k \leq s' \quad \text{et } 1 \leq t \leq [(q_{2k-1} + q_{2k})/2]$$

Par exemple, soit $G' = \text{Sp}(2n)$ et $\mu = (3, 2; 6, 4, 2)$, on a:

$$\lambda_\mu = (1, 0, -1, 1/2, -1/2, 5/2, 3/2, 1/2, -1/2, -3/2, 1/2).$$

On remarque que pour k compris entre 1 et s' au sens large, on a

$$\begin{aligned} (q_{2k} + 1)/2 \leq \lambda_{\mu,t} \leq (q_{2k-1} - 1)/2 & \quad \text{pour } q'_k < t \leq h_k, \\ -(q_{2k-1} - 1)/2 \leq \lambda_{\mu,t} \leq (q_{2k} - 1)/2 & \quad \text{pour } h_k < t \leq q'_{k+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

I.3. DEFINITION DE w_μ .

On fixe μ comme en I.1. Ici, comme dans la suite, on identifie W , le groupe de Weyl à $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ où \mathfrak{S}_n représente le groupe des permutations sur n éléments. On note w_μ l'élément suivant:

$$w_\mu(p'_i + t) = p'_{i+1} - t + 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq T \quad \text{et } 1 \leq t \leq p_i,$$

$$w_\mu(t) = -(t) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq s' \quad \text{et } q'_k < t \leq h_k,$$

$$w_\mu(h_k + t) = q'_{k+1} - t + 1 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq s' \quad \text{et } 1 \leq t \leq q_{2k}.$$

Dans l'exemple de I.2, on a:

$$w_\mu: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

$$3, 2, 1, 5, 4, -6, 10, 9, 8, 7, -11$$

Revenons au cas général; on a:

$$w_{\mu} \lambda_{\mu} = -\lambda_{\mu},$$

et

$$\forall \alpha \in \Delta^+ \text{ tel que } w_{\mu}(\alpha) \notin \Delta^+, (\lambda_{\mu}, \alpha) > 0. \quad (1)$$

La propriété (1) ne suffit pas pour assurer que w_{μ} est de longueur minimale parmi les éléments de W vérifiant $w\lambda_{\mu} = -\lambda_{\mu}$. C'est pourtant vrai et w_{μ} est même unique avec cette propriété (sauf si $G = O(2n)$ pour des raisons triviales dues au fait que l'on a mis dans W un élément de longueur 0 qui peut être dans le stabilisateur de λ_{μ}). Comme nous n'utilisons pas cette propriété de minimalité, nous ne la prouvons pas.

I.4. DEFINITION DE M_{μ} , $V(\mu)$. On fixe μ comme en I.1 et on reprend les notations précédentes. On pose:

$$\text{inv}(w_{\mu}) = \{\alpha \in \Delta^+ | w_{\mu}(\alpha) \notin \Delta^+\}.$$

On note M_{μ} le plus petit sous-groupe de Levi de G tel que $\text{inv}(w_{\mu})$ soit formé de racines de M_{μ} . On vérifie que l'on a:

$$M_{\mu} = \text{GL}(p_1) \times \cdots \times \text{GL}(p_T) \times G(n - p'_{T+1})$$

où $G(n - p'_{T+1})$ représente le groupe de même type que G mais de rang $n - p'_{T+1}$. On vérifie aussi qu'un sous-groupe de Levi de G' ayant même groupe de Weyl que M_{μ} , (i.e. $\text{GL}(p_1) \times \cdots \times \text{GL}(p_T) \times G'(n - p'_{T+1})$ à conjugaison près) est un sous-groupe de Levi minimal parmi ceux qui rencontrent l'orbite de G' associée à la partition μ (ou plutôt μ cf. I.1). On pose:

$$M'_{\mu} = \text{GL}(p_1) \times \cdots \times \text{GL}(p_T) \times \text{GL}([(q_1 + q_2)/2]) \times \cdots \\ \times \text{GL}([(q_{2k-1} + q_{2k})/2]) \times \cdots \times \text{GL}([(q_{2s'-1} + q_{2s'})/2]),$$

avec toujours comme convention $q_{2s'} = 0$ si $2s' > s$. On note $\Delta(M_{\mu})$ et $\Delta(M'_{\mu})$ les racines de M_{μ} et M'_{μ} et on pose encore:

$$S_{\mu} = \{\alpha \in \text{inv}(w_{\mu}) | (\lambda_{\mu}, \check{\alpha}) = 1\}, \quad S'_{\mu} = S_{\mu} \cap \Delta(M'_{\mu}).$$

(2) On remarque que S'_{μ} est un ensemble de racines simples positives de $\Delta(M'_{\mu})$.
On a:

$$S_{\mu} = S'_{\mu} \cup \{\varepsilon_{h_k} + \varepsilon_{q_{k+1}}\}_{1 \leq k \leq s'}$$

avec comme convention: $\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n$ si $G = \mathrm{SO}(2n + 1)$ et $2\varepsilon_n$ si $G = \mathrm{Sp}(2n)$.
Cela décrit complètement S_{μ} . Le fait que S_{μ} ne vérifie pas l'analogie de (2) avec M_{μ} remplaçant M'_{μ} est la différence majeure par rapport à ce qui se passe pour $\mathrm{GL}(n)$ et est la seule complication.

On pose:

$$V(\mu) := \{\lambda \in \mathbf{C}^n \mid (\lambda, \check{\alpha}) = 1, \forall \alpha \in S_{\mu}\},$$

$$V'(\mu) := \{\lambda \in \mathbf{C}^n \mid (\lambda, \check{\alpha}) = 1 \forall \alpha \in S'_{\mu}\}.$$

On a, en notant $X(M_{\mu})$ (resp. $X(M'_{\mu})$) les caractères de M_{μ} (resp. M'_{μ}) du type puissance complexe de la valeur absolue d'un caractère rationnel de M_{μ} (resp. M'_{μ}). On a:

$$V(\mu) = \lambda_{\mu} + X(M_{\mu}),$$

$$V'(\mu) = \lambda_{\mu} + X(M'_{\mu}).$$

Soit $x \in V(\mu)$. On écrit x de façon naturelle sous la forme $x = (x_1, \dots, x_T) + \lambda_{\mu}$.
On définit:

$$I_x = \{\alpha \in \Delta^+ \mid (x, \check{\alpha}) = -1\}$$

$$J_x = \{\alpha \in \Delta^+ \mid (x, \check{\alpha}) = 0\}$$

$$K_x = \{\alpha \in \Delta^+ \mid (x, \check{\alpha}) = 1\}.$$

On remarque que l'on a:

$$w_{\mu} \text{ induit une bijection entre } K_x - \mathrm{inv}(w_{\mu}) \text{ et } \{\alpha \in \Delta^+ \mid (w_{\mu}x, \check{\alpha}) = 1\}. \quad (3)$$

Pour voir, cela il faut s'assurer que si α est dans le deuxième ensemble alors $\alpha \notin \mathrm{inv}(w_{\mu})$. S'il n'en est pas ainsi, on a: $\alpha \in \Delta(M_{\mu})$ et $(x - \lambda_{\mu}, \alpha) = 0$. D'où: $w_{\mu}x = -\lambda_{\mu} + (x - \lambda_{\mu})$, et aussi $(\lambda_{\mu}, \check{\alpha}) = -1$ avec $\alpha \in \mathrm{inv}(w_{\mu})$. Cela contredit I.3(1).

On vérifie de même que l'on a:

$$J_x \cap \mathrm{inv}(w_{\mu}) = \emptyset \text{ et } w_{\mu} \text{ induit une bijection entre } J_x \text{ et } \{\alpha \in \Delta^+ \mid (w_{\mu}x, \check{\alpha}) = 0\}. \quad (4)$$

Plus généralement, soit S un sous-ensemble de W . On pose:

$$I_x^S := \{\alpha \in I_x \mid \text{il existe } \sigma \in S \text{ vérifiant } \sigma\alpha \notin \Delta^+\}$$

$$J_x^S := \{\alpha \in J_x \mid S\sigma_\alpha = S \text{ où } \sigma_\alpha \text{ est la symétrie associée à } \alpha\},$$

$$K_x^S := \{\alpha \in K_x \mid \forall \sigma \in S, \sigma(\alpha) \notin \Delta^+\}.$$

Avec ces définitions, on pose:

$$n'_S(x, \rho, \lambda) = \prod_{\alpha \in I_x^S} ((\lambda, \check{\alpha}) + 1) \prod_{\alpha \in J_x^S} (\lambda, \check{\alpha})^{-1} \prod_{\alpha \in K_x^S} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1)^{-1},$$

$$n''(x, \rho, \lambda) = \prod_{\alpha \in K_x - \text{inv}(w_\rho)} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1) \prod_{\alpha \in J_x} (\lambda, \check{\alpha})^{-1}$$

$$n_S(x, \rho, \lambda) = n'_S(x, \rho, \lambda) n''(x, \rho, \lambda),$$

$$d(\rho, \lambda) = \prod_{\alpha \in S_\rho} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1)$$

On remarque que S_ρ est égal à $K_x \cap \text{inv}(w_\rho)$ pour tout $x \in V(\rho)$ (en effet pour $\alpha \in \text{inv}(w_\rho)$ et $x \in V(\rho)$, on a: $(x, \check{\alpha}) = (\lambda_\rho, \check{\alpha})$).

I.5. PARTITIONS D -ADMISSIBLES, POINTS D - ρ -ADMISSIBLE, SOUS-ENSEMBLES DE W

Soit d un entier compris entre 0 et n . Soit ρ une partition comme en I.1; on dit que ρ est d -admissible si $T \geq d$ et $p_1 = \dots = p_d = 1$.

Soit ρ une partition d -admissible et $x \in V(\rho)$. On dit que x est ρ , d -admissible si $x - \lambda_\rho = (x_1, \dots, x_T)$ avec x_1, \dots, x_T sont des nombres réels, $|x_{d+1}|, \dots, |x_T|$ sont inférieurs à ε fixé petit ultérieurement et si $x_1, \dots, x_d, x_i \pm x_j$ pour $1 < i < j \leq d$ sont des réels généraux i.e. la différence de ces nombres avec n'importe quels demi-entiers relatifs n'est pas en valeur absolue inférieure à ε et ces nombres sont positifs et très grands. On pose:

$$W_d = \{\sigma \in W \text{ telque } \sigma(1) = 1, \dots, \sigma(d) = d\}.$$

On aura à considérer des sous-ensembles de W_d de la forme suivante pour $1 \leq i \leq T$ et $1 \leq k \leq s'$:

$$S_i(\text{resp. } S'_i) := \{\sigma \in W_d \mid \sigma(p'_i + 1) = d + 1(\text{resp. } \sigma(p'_{i+1}) = -(d + 1))\}$$

$$S_k(\text{resp. } S'_k) := \{\sigma \in W_d \mid \sigma(q'_k + 1) = d + 1(\text{resp. } \sigma(q'_{k+1}) = -(d + 1))\}.$$

L'ambiguïté de la notation sera toujours levée par le contexte. Notons:

$$W_d(\uparrow, \not\mu) := \{\sigma \in W_d \mid \sigma(\alpha) > 0, \forall \alpha \in S'(\not\mu)\}$$

$$W_d(\uparrow', \not\mu) := \{\sigma \in W_d \mid \sigma(\alpha) > 0, \forall \alpha \in -w_\mu S'(\not\mu)\}.$$

On a:

$$W_d(\uparrow, \not\mu) = \cup_{1 \leq i \leq T} (S_i \cup S'_i) \cup_{1 \leq k \leq s'} (S_k \cup S'_k).$$

On aura aussi besoin d'un sous-ensemble de $W(\uparrow, \not\mu)$, noté $W(\uparrow_0, \not\mu)$ défini par:

$$\begin{aligned} W(\uparrow_0, \not\mu) &:= W(\uparrow, \not\mu) \text{ si } (\lambda, \check{\alpha}_n) \neq 1 \text{ où } \alpha_n \text{ est la dernière racine simple} \\ &:= \{w \in W(\uparrow, \not\mu) \mid w(\alpha_n) > 0\} \text{ si } (\lambda, \check{\alpha}_n) = 1. \end{aligned}$$

On a $(\lambda, \check{\alpha}_n) = 1$ dans les cas suivants:

s est impair et $q_s > 1$,

s est pair et $q_s = 1$ (cela nécessite $G = O(2n)$).

Quant $W(\uparrow, \not\mu)$ et $W(\uparrow_0, \not\mu)$ ne coïncident pas, on a:

$$W(\uparrow_0, \not\mu) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq T} (S_i \cup S'_i) \cup \bigcup_{1 \leq k < s'} (S_k \cup S'_k) \cup S_{s'}.$$

II. Lemmes préliminaires

II.1. Avant de pouvoir énoncer les résultats, il faut donner un sens à certaines fonctions (cf. introduction). Soit $\not\mu$ une partition comme en I.1 et soit S un sous ensemble de W . On utilise les notations de I et la notation \mathbf{F} de l'introduction. Soient $\phi, \psi \in \mathbf{F}$ et soit $x \in V(\not\mu)$ un point réel, on pose:

$$l'_S(x, \not\mu, \lambda) = \left(\sum_{\sigma \in S} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right) n'_S(x, \not\mu, \lambda),$$

$$l''(x, \not\mu, \lambda) = \left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_\mu \lambda) \overline{\psi(-\tau w_\mu \bar{\lambda})} \right) n''(x, \not\mu, \lambda),$$

et l'on a:

LEMME. $l'_S(x, \not\mu, \lambda)$ et $l''(x, \not\mu, \lambda)$ sont des fonctions méromorphes de \mathbf{C}^n dont les singularités au voisinage de tout point $\lambda^0 \in \mathbf{C}^n$ tel que $\text{Re } \lambda^0 = x$ sont incluses dans l'ensemble des points λ de \mathbf{C}^n vérifiant: pour $l'_S(x, \not\mu, \lambda)$: $\exists \sigma \in S$ et $\alpha \in \Delta^+$ tels que

$\sigma(\alpha) < 0$ et $L(-(\lambda, \check{\alpha}) + 1) = 0$, i.e. $L((\lambda, \check{\alpha}) = 0)$, pour $l''(x, \neq, \lambda)$: $\exists \alpha \in \Delta^+$ tel que $L((w_{\neq} \lambda, \alpha) + 1) = 0$.

En particulier, $V(\neq)$ n'est pas inclus dans l'ensemble des singularités de ces fonctions.

Soit $\alpha \in \Delta^+$; on va montrer qu'en un point général de l'hyperplan: $\sigma_{\alpha} \lambda = \lambda$, on a:

$$r(\sigma_{\alpha}, \lambda) = -1.$$

On entend par point général un point tel que pour tout $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$, $L((\lambda, \check{\beta}))$ n'ait pas de pôle et $L((\lambda, \check{\beta}) + 1)$ n'ait pas de zéro. On vérifie à la main que pour tout λ tel que $(\lambda, \check{\alpha}) = 0$, tout voisinage de λ contient un tel point.

Alors on a:

$$r(\sigma_{\alpha}, \lambda) = \prod_{\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}, \sigma_{\alpha}(\beta) \notin \Delta^+} L((\lambda, \check{\beta}))/L((\lambda, \check{\beta}) + 1) \varepsilon((\lambda, \beta^-)) \times L((\lambda, \check{\alpha}))/L((\lambda, \check{\alpha}) + 1) \varepsilon((\lambda, \alpha^-)).$$

On a (puisque $(\lambda, \alpha^-) = 0$):

$$L((\lambda, \check{\alpha}))/L((\lambda, \check{\alpha}) + 1) \varepsilon((\lambda, \alpha^-)) = -1.$$

Soit $\beta \in \Delta^+ - \{\alpha\}$ tel que $\sigma_{\alpha}(\beta) \notin \Delta^+$. Alors, on a:

$$-\sigma_{\alpha}(\beta) \in \Delta^+ \quad \text{et} \quad \sigma_{\alpha}(\beta) \notin \Delta^+.$$

D'autre part:

$$L((\lambda, -\sigma_{\alpha}(\check{\beta}))/L((\lambda, -\sigma_{\alpha}(\check{\beta}) + 1) = L(-(\sigma_{\alpha} \lambda, \check{\beta}))/L(-(\sigma_{\alpha} \lambda, \check{\beta}) + 1) = \varepsilon((\lambda, \beta^-)) \varepsilon((\lambda, -\sigma_{\alpha}(\beta^-)) L((\lambda, \check{\beta}) + 1)/L((\lambda, \check{\beta})).$$

L'assertion cherchée se déduit alors immédiatement de ce que pour $\beta \neq \pm \alpha$, on a: $\sigma_{\alpha}(\beta) \neq -\beta$.

On pose:

$$\delta_S(x, \neq, \lambda) = \left(\prod_{\alpha \in I_x^S} ((\lambda, \check{\alpha}) + 1) \right)$$

et on vérifie aisément que:

$$\left(\sum_{\sigma \in S} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right) \delta_S(x, \neq, \lambda)$$

a les propriétés d'holomorphic annoncées dans l'énoncé pour $l'_S(\lambda)$. Il reste à voir que cette fonction divisée par les fonctions:

$$\prod_{\alpha \in J_x^S} (\lambda, \check{\alpha}) \quad \text{et} \quad \prod_{\alpha \in K_x^S} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1)$$

garde les mêmes propriétés. Par définition de $r(\sigma, \lambda)$, on peut diviser par la deuxième fonction. Pour la première, on remarque que les polynômes $(\lambda, \check{\alpha})$ sont premiers entre eux quand α varie et premiers à $\prod_{\alpha \in K_x^S} (\lambda, \check{\alpha}) - 1$. Il suffit donc de prouver que pour α fixé dans J_x^S :

$$\left(\sum_{\sigma \in S} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right) \delta(x, \not{\mu}, \lambda) / (\lambda, \check{\alpha})$$

est holomorphe en un point général de l'hyperplan $(\lambda, \check{\alpha}) = 0$. Et il suffit de prouver qu'en un tel point, on a:

$$\left(\sum_{\sigma \in S} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right) \delta(x, \not{\mu}, \lambda) = 0 \quad \text{si} \quad (\lambda, \check{\alpha}) = 0$$

et si λ vérifie les conditions ci-dessus. On peut pour prouver cela supposer que $-\lambda$ est général dans l'hyperplan $(\lambda, \check{\alpha}) = 0$ (au sens ci-dessus). Alors $r(\sigma, -\lambda)$ est holomorphe en λ et l'on a:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) &= \sum_{\check{\sigma} \in S/\{1, \sigma_\alpha\}} (r(\check{\sigma}, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) + r(\check{\sigma} \sigma_\alpha, -\lambda) \phi(\check{\sigma} \sigma_\alpha \lambda)) \\ &= \sum_{\check{\sigma} \in S/\{1, \sigma_\alpha\}} (r(\check{\sigma}, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) + r(\check{\sigma}, \sigma_\alpha(-\lambda)) \phi(\check{\sigma} \sigma_\alpha \lambda) r(\sigma_\alpha, -\lambda)) = 0 \end{aligned}$$

car $r(\sigma_\alpha, -\lambda) = -1$ et $\sigma_\alpha \lambda = \lambda$.

On prouve les assertions du lemme concernant $l''(\lambda)$ de façon analogue (on utilise I.4(3) et (4)).

II.2. Soit S comme en I.5, i.e. $\not{\mu}$ est fixée, d -admissible et $S = W_d$ ou $S = S_i, S'_i, S_k, S'_k$. Alors on a:

LEMME. *Pour S comme ci-dessus et pour $x \in V(\not{\mu})$, les fractions rationnelles $n'_S(x, \not{\mu}, \lambda)$, $n''(x, \not{\mu}, \lambda)$ ainsi que leurs inverses n'ont pas $V(\not{\mu})$ comme sous-ensemble de leurs points singuliers. Elles définissent donc par restriction des fonctions méromorphes sur $V(\not{\mu})$ et ces fonctions de $V(\not{\mu})$ n'ont pas $V(\not{\mu})$ comme sous-ensemble de leurs points singuliers.*

On note $\Delta(M_\rho)$ et $\Delta(M'_\rho)$ les racines de M_ρ et M'_ρ . Pour démontrer la première partie du lemme, il suffit de vérifier (1), (2), (3) ci-dessous.

$$I_x \cap \Delta(M'_\rho) = \emptyset \quad \text{et} \quad J_x \cap \Delta(M'_\rho) = \emptyset. \quad (1)$$

Cela résulte de:

$$\forall \alpha \in \Delta(M'_\rho), (x - \lambda_\rho, \check{\alpha}) = 0,$$

d'où si $\alpha \in J_x \cup I_x^S$, $(x, \check{\alpha}) = (\lambda_\rho, \check{\alpha}) \leq 0$ et de I.3 (1).

$$((K_x - \text{inv}(w_\rho)) \cap \Delta(M'_\rho)) = \emptyset. \quad (2)$$

Cela résulte de:

$$\Delta(M'_\rho) \cap \Delta^+ \subset \text{inv}(w_\rho).$$

$$K_x^S \cap \Delta(M'_\rho) = \emptyset. \quad (3)$$

Cela résulte des hypothèses faites sur S ; on vérifie que pour le choix de S fait, on a:

$$\{\alpha \in \Delta^+ \mid \forall \sigma \in S, \sigma(\alpha) \notin \Delta^+\} \cap \Delta(M'_\rho) = \emptyset.$$

On va maintenant, montrer que $n'_S(x, \rho, \lambda)$ vue comme fonction méromorphe de $V'(\rho)$ n'a pas $V(\rho)$ comme sous-ensemble singulier ni comme zéro. Pour cela, on va établir une bijection entre $I_x^S \cap \Delta(M_\rho)$ et $(J_x^S \cup K_x^S) \cap \Delta(M_\rho)$ notée simplement: $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ vérifiant pour tout $\lambda \in V'(\rho)$ et tout $\alpha \in I_x^S \cap \Delta(M_\rho)$

$$\begin{aligned} (\lambda, \check{\alpha}) + 1 &= (\lambda, \check{\alpha}') \quad \text{si } \alpha' \in J_x^S \cap \Delta(M_\rho) \\ &= (\lambda, \check{\alpha}') - 1 \quad \text{si } \alpha' \in K_x^S \cap \Delta(M_\rho) \end{aligned}$$

On le fait explicitement. On rappelle que pour $x \in V(\rho)$ et $\alpha \in \Delta(M_\rho)$, on a:

$$(x, \check{\alpha}) = (\lambda_\rho, \check{\alpha}).$$

Soit $\alpha \in \Delta(M_\rho) - \Delta(M'_\rho)$; décrivons la forme de α , en utilisant la convention du début de I. Il existe k compris entre 1 et s' au sens large, v vérifiant $q'_k < v \leq q'_{k+1}$ et w vérifiant soit $q'_{k+1} < w \leq n$ avec $\alpha = \varepsilon_v - \varepsilon_w$ soit $v \leq w$ avec $\alpha = \varepsilon_v + \varepsilon_w$. Supposons en plus que l'on ait $\alpha \in I_x$. A l'aide de I.2(1) et des inégalités $q_1 > \dots > q_s$, on vérifie que l'on a, avec les notations ci-dessus,

$$h_k + 1 < v \leq q'_{k+1}.$$

On pose:

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \varepsilon_{v-1} - \varepsilon_w \quad \text{if } \alpha = \varepsilon_v - \varepsilon_w, \\ &= \varepsilon_{v-1} + \varepsilon_w \quad \text{si } \alpha = \varepsilon_v + \varepsilon_w \text{ avec soit } v \neq w \text{ soit } G \neq \text{Sp}(2n), \\ &= 2\varepsilon_{v-1} \quad \text{si } \alpha = 2\varepsilon_v, \quad G = \text{Sp}(2n).\end{aligned}$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^n$,

$$\begin{aligned}(\lambda, \check{\alpha}'') &= (\lambda, \check{\alpha}) + (\lambda, (\varepsilon_{v-1} - \varepsilon_v)^\sim), \\ &= (\lambda, \check{\alpha}) - 1 \quad \text{si } (\lambda, (\varepsilon_{v-1} - \varepsilon_v)^\sim) = 1,\end{aligned}$$

ce qui est réalisé en particulier dès que $\lambda \in V'(\neq)$. On remarque que $\alpha \in I_x - I_x^S$ dans les cas suivants: il existe k' tel que $k < k' \leq s'$ et

- (i) $\alpha = \varepsilon_v - \varepsilon_w$ avec $w = q'_{k+1}$ et $S = S'_{k'}$,
- (ii) $\alpha = \varepsilon_v + \varepsilon_w$ avec $w = q'_{k'} + 1$ et $S = S_{k'}$.

Dans ces deux cas $\alpha'' \in J_x - J_x^S$. Par contre, on a aussi $\alpha'' \in J_x - J_x^S$ quand α vérifie, pour k' comme ci-dessus:

- (i) $\alpha = \varepsilon_v - \varepsilon_{q'_{k+1}}$ avec $S = S_{k'}$,
- (ii) $\alpha = \varepsilon_v + \varepsilon_{q'_{k+1}}$ avec $S = S'_{k'}$,
- (iii) $\alpha = \varepsilon_v - \varepsilon_{q'_{k+1}}$ avec $S = S'_k$, $v < q'_{k+1}$,
- (iv) $\alpha = 2\varepsilon_{q'_{k+1}}$ avec $G = \text{Sp}(2n)$, $S = S'_k$

le dernier cas nécessite $q_{2k} = 3$. Dans ces cas respectifs, on pose:

$$\alpha' = \varepsilon_{v-2} - \varepsilon_{q'_{k+1}}, \varepsilon_{v-2} + \varepsilon_{q'_{k+1}}, \varepsilon_{v-2} + \varepsilon_{q'_{k+1}}, 2\varepsilon_{q'_{k+1}-2}.$$

On a ici,

$$(\lambda, \check{\alpha}') + (\lambda, (\varepsilon_{v-2} - \varepsilon_v)^\sim) = (\lambda, \alpha) + 2$$

si $(\lambda, (\varepsilon_{v-2} - \varepsilon_v)^\sim) = 2$, ce qui est réalisé pour $\lambda \in V'(\neq)$ car $h_k \leq v - 2$.

La bijection $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ annoncée est donc complètement définie si l'on pose $\alpha' = \alpha''$ dans les cas où $\alpha'' \in J_x^S$.

On procède de façon analogue pour $n''(x, \neq, \lambda)$, en définissant une bijection $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ de $K_x - \text{inv}(w_\neq)$ sur J_x vérifiant pour tout $\lambda \in V'(\neq)$

$$(\lambda, \alpha) = (\lambda, \check{\alpha}') - 1.$$

II.3. COROLLAIRE (hypothèses et notations de II.2). Comme fonctions sur $V'(\rho)$ on a :

$$n'_S(x, \rho, \lambda) = \prod_{\alpha \in I_x^S - \Delta(M_\rho)} ((\lambda, \check{\alpha}) + 1) \prod_{\alpha \in J_x^S - \Delta(M_\rho)} (\lambda, \check{\alpha})^{-1} \\ \prod_{\alpha \in K_x^S - \Delta(M_\rho)} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1)^{-1},$$

$$n''(x, \rho, \lambda) = \prod_{\alpha \in K_x - \Delta(M_\rho)} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1) \prod_{\alpha \in J_x - \Delta(M_\rho)} (\lambda, \check{\alpha})^{-1}.$$

En particulier si $x = \lambda_\rho + (x_1, \dots, x_T)$ avec tous les x_i généraux, ces fonctions sur C^n sont homogènes de degré 0 et valent 1 sur $V'(\rho)$.

C'est un corollaire de la preuve de II.2. en remarquant que, sous les hypothèses de la fin du corollaire, on a : $I_x, K_x, J_x \subset \Delta(M_\rho)$.

II.4. Calcul de $n_S(x, \rho, \lambda)$ sur $V(\rho)$.

On fixe toujours ρ comme en I.5, une partition d -admissible et on fixe aussi ε un réel petit.

LEMME. Soit S comme en II.2 et soit $x \in V(\rho)$. On note X_1, \dots, X_T les coordonnées naturelles de $V(\rho)$. On considère $n_S(x, \rho, \lambda)$ comme fonction sur $V(\rho)$ grâce à II.2. On écrit $x = \lambda_\rho + (x_1, \dots, x_T)$ et on suppose que pour $1 \leq i \leq d$ x_i est général et pour $d < i \leq T$ on a soit $|x_i| < \varepsilon$ soit $S = S_i$ et $-\varepsilon \leq x_i \leq 1/2 + \varepsilon$ soit $S = S'_i$ et $-1/2 - \varepsilon \leq x_i \leq \varepsilon$ soit $S = S_{d+1}$, $p_{d+1} = 1$, $x_{d+1} \geq 0$ et $x_j \neq 0$ pour $j > d + 1$. Alors $n_S(x, \rho, \lambda)|_{V(\rho)}$ est un polynôme en X_1, \dots, X_T sauf dans les cas suivants :

il existe i tel que $d < i \leq T$, $S = S_i$ ou S'_i

et l'on a :

cas 1 : $x_i = 0$, p_i n'est pas l'un des q_j mais est de même parité (cf. I.1) et $p_i > 1$.

cas 2 : $x_i = 1/2$ avec $S = S_i$ ou $x_i = -1/2$ avec $S = S'_i$, $p_i - 1$ n'est pas l'un des q_j mais est de même parité (éventuellement $p_i = 1$ pour $G = \text{SO}(2n + 1)$).

cas 3 : $i = d + 1$, $x_{d+1} = 1$, $G = \text{Sp}(2n)$ et $q_s > 3$.

cas 4 : $i = d + 1$, $x_{d+1} \in \mathbf{E}$ où \mathbf{E} est l'ensemble suivant

$$\{\pm x_j + (p_j + 1)/2\}_{j > d+1} \cup \{(q_j + 1)/2\}_{1 \leq j \leq s}$$

$j = s$ est exclu si G est symplectique et $q_s = 1$.

Ces cas sont exclusifs les uns des autres, étant données les hypothèses. Plaçons nous dans l'un de ces cas, c'est-à-dire x appartient à un hyperplan de $V(\rho)$ de la

forme $(\lambda, \alpha_0) - z = 0$ où z est un nombre complexe et $\alpha_0 \in \Delta^+ - \Delta(M_\rho)$. Supposons, en outre, que pour tout $\alpha \in \Delta^+ - \Delta(M_\rho)$ tel que $\alpha \notin \alpha_0 + (\Delta(M_\rho) \cup \{0\})$, on ait $(\lambda, \alpha) \neq 0$. Alors on a, comme fonction sur $V(\rho)$:

$$n_S(x, \rho, \lambda) = 2(X_i - x_i)$$

dans les cas 1 et 2,

$$n_S(x, \rho, \lambda) = (X_{d+1} - 1)$$

dans les cas 3,

$$n_S(x, \rho, \lambda) = X_{d+1} \mp X_j - (p_j + 1)/2 \quad \text{ou} \quad X_{d+1} - (q_j + 1)/2$$

suivant les différents cas du cas 4.

On fait le calcul. Toutes les fonctions, ci-dessous sont vues comme des fonctions sur $V(\rho)$. On écrit $n_S(x, \rho, \lambda)$ en utilisant II.3. Cette fraction rationnelle est telle que numérateur et dénominateur sont des produits de formes linéaires nulles en $\lambda = x$. Ainsi $n(x, \rho, \lambda)$ (resp. son inverse) est défini en $\lambda = x$ si et seulement si cette fraction est un polynôme. Pour savoir quand ces fonctions sont définies en $\lambda = x$, on peut remplacer $n_S(x, \rho, \lambda)$ par la fonction $N_S(\lambda)$ définie ci-dessous avec les notations suivantes:

$$\Delta_{S,\pm} := \{\alpha \in \Delta^+ - \Delta(M_\rho) \text{ tel que } \forall \sigma \in S, \sigma(\alpha) \in \Delta^\pm\}$$

$$\Delta^S := \Delta^+ - \Delta(M_\rho) - \Delta_{S,+} - \Delta_{S,-}.$$

$$N_S(\lambda) := \prod_{\alpha \in \Delta_{S,-}} ((\lambda, \check{\alpha}) + 1)/(\lambda, \check{\alpha}) \prod_{\alpha \in \Delta_{S,+}} ((\lambda, \check{\alpha}) - 1)/(\lambda, \check{\alpha}) \\ \times \prod_{\alpha \in \Delta^S} ((\lambda, \check{\alpha}) + 1)((\lambda, \check{\alpha}) - 1)/(\lambda, \check{\alpha})^2$$

En effet, il suffit de voir que si l'un des facteurs des numérateurs (resp. du dénominateur) est nul en x alors ce facteur apparaît au numérateur (resp. dénominateur) de $n_S(x, \rho, \lambda)$ i.e. que $n_S(x, \rho, \lambda)$ est l'unique fonction rationnelle dont numérateur et dénominateur sont des sous-produits de ceux de $N_S(\lambda)$ et telle que $N_S(\lambda)/n_S(x, \rho, \lambda)$ et son inverse soient définis en $\lambda = x$. Ces assertions résultent de:

$$I_x^S - \Delta(M_\rho) = \{\alpha \in \Delta_{S,-} \cup \Delta^S \mid (x, \check{\alpha}) = -1\},$$

$$J_x^S - \Delta(M_\rho) = \{\alpha \in \Delta^S \mid (x, \check{\alpha}) = 0\},$$

(on utilise ici, les hypothèses sur S)

$$K_x^S - \Delta(M_\rho) = \{\alpha \in \Delta_{S,+} \mid (x, \tilde{\alpha}) = 1\},$$

$$K_x - \text{inv}(w_\rho) - \Delta(M_\rho) = K_x - \Delta(M_\rho) = \{\alpha \in \Delta^S \cup \Delta_{S,+} \cup \Delta_{S,-} \mid (x, \tilde{\alpha}) = 1\}.$$

Il est facile de calculer explicitement $N_S(\lambda)$ comme fonction sur $V'(\rho)$. Pour éviter trop de 'resp.' je suppose dans ce qui suit que $G = \text{Sp}(2n)$. On a

$$N_S(\lambda) = \prod_{1 \leq h \leq T, h < h' \leq T+s'} N_{h,h'}(\lambda)$$

avec les définitions ci-dessous, où l'on a posé pour $h' > T$: $p_{h'} + 1 = q'_{T-h'} + 1$ et $p'_{h'+1} = q'_{h'-T+1}$. Pour $h \neq h'$, on pose:

$$\begin{aligned} N_{h,h'}(\lambda) &= (\lambda_{p_h+1} - \lambda_{p_{h'}+1} + 1)(\lambda_{p_{h'}+1} - \lambda_{p_h+1} - 1) \\ &\quad \times (\lambda_{p_{h'}+1} + \lambda_{p_{h'}+1} + 1)(\lambda_{p_h+1} + \lambda_{p_{h'}+1} - 1) \\ &= ((\lambda_{p_h+1} - \lambda_{p_{h'}+1})(\lambda_{p_{h'}+1} - \lambda_{p_h+1})(\lambda_{p_h+1} + \lambda_{p_{h'}+1})(\lambda_{p_{h'}+1} + \lambda_{p_h+1}))^{-1} \end{aligned}$$

si $S \neq S_h, S'_h, S_{h'}, S'_{h'}$; si $S = S_h$ (resp. $S'_h, S_{h'}, S'_{h'}$) les termes contenant λ_{p_h+1} (resp. $\lambda_{p_{h'+1}}, \lambda_{p_{h'+1}}, \lambda_{p_{h'+1}}$) disparaissent de l'expression ci-dessus.

$$N_{h,h}(\lambda) = N_h^+(\lambda)N_h^-(\lambda)$$

où

$$N_h^-(\lambda) = (\lambda_{p_h+1} - 1)/\lambda_{p_h+1} \times (\lambda_{p_h+1} + 1)/\lambda_{p_h+1}$$

si $S \neq S_h, S'_h, S_{h'}, S'_{h'}$; si $S = S_h$ (resp. $S'_h, S_{h'}, S'_{h'}$) les termes contenant λ_{p_h+1} (resp. $\lambda_{p_h+1}, \lambda_{p_h+1}, \lambda_{p_h+1}$) disparaissent de l'expression ci-dessus,

$$N_h^+(\lambda) = 1, \quad \text{si } p_h = 1,$$

$$\begin{aligned} &= (2\lambda_{p_h+1})/(\lambda_{p_h+1} + \lambda_{p_h+1}) \prod_{p_h < t < p_h+1} 2\lambda_t/(2\lambda_t - 1), \quad \text{si } S \neq S_h, S'_h, \\ &= \prod_{p_h+1 < t \leq p_h+1} 2\lambda_t \prod_{p_h < t < p_h+1} (2\lambda_t - 1)^{-1}, \quad \text{si } S = S_h, \\ &= \prod_{p_h < t < p_h+1} 2\lambda_t/(2\lambda_t - 1), \quad \text{si } S = S'_h. \end{aligned}$$

On écrit $x = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$. Pour j compris entre $d+1$ et T au sens large, on a:

$$\lambda_{p_j+1}^0 = x_j + (p_j - 1)/2, \quad \lambda_{p_j+1}^0 = x_j - (p_j - 1)/2$$

Etant données les hypothèses, le premier nombre est supérieur à $-\varepsilon$ et le deuxième inférieur à ε sauf si $x_j > (p_j - 1)/2 + \varepsilon$ ce qui ne peut se produire que si $p_j = 1$ et $j > \varepsilon$ i.e. $j = d + 1$, $S = S_{d+1}$ et $x_{d+1} > \varepsilon$. Pour k compris entre 1 et s' au sens large, on a:

$$\lambda_{q'_k+1}^0 = (q_{2k-1} - 1)/2 > 0;$$

$$\lambda_{q'_k+1}^0 = -(q_{2k} - 1)/2 \leq 0,$$

sauf si $q_{2k} = 0$ i.e. $k = s'$ et $2s' - 1 = s$, i.e., puisque $G = \text{Sp}(2n)$, $q_s > 1$; dans ce cas, on a $\lambda_{q'_k+1}^0 = 1$.

Ainsi pour $h < h'$ les termes du numérateur de $N_{h,h'}(\lambda)$ qui peuvent s'annuler en $\lambda = x$ sont:

(a) pour $h = d + 1$, $S = S_{d+1}$, $p_{d+1} = 1$ (en particulier, $p'_{d+1} = d + 1$) et pour tout $h < h'$:

$$(\lambda_{d+1} - \lambda_{p'_h+1} + 1)(\lambda_{d+1} + \lambda_{p'_h+1} - 1),$$

seulement $(\lambda_{d+1} - \lambda_{p'_h+1} + 1)$ si $h' = T + s'$ et $q_s > 1$ (cf. (b) ci-dessous pour ce cas),

(b) pour h compris entre $d + 1$ et T au sens large, $h' = T + s'$ et $q_s > 1$:

$$\lambda_{p'_h+1} \lambda_{p'_h+1} \quad \text{si } S \neq S_h, S'_h,$$

$$\lambda_{p'_h+1} \quad (\text{resp. } \lambda_{p'_h+1}) \quad \text{si } S = S_h \quad (\text{resp. } S'_h).$$

Les termes du numérateur de $N_h^-(\lambda)$ qui peuvent s'annuler en $\lambda = x$ sont:

(c) pour $h = d + 1$, $S = S_{d+1}$, $p_{d+1} = 1$ (i.e. $p'_{d+1} = d + 1$)

$$\lambda_{d+1} - 1$$

(d) le dénominateur de $N_h^-(\lambda)$ peut s'annuler en $\lambda = x$; si $q_s > 1$ il compense exactement le cas (b).

Si $p_h = 1$, évidemment $N_h^+(\lambda)$ est facile à étudier. Supposons, donc que $p_h > 1$. Au numérateur de $N_h^+(\lambda)$, on trouve des termes du type $2\lambda_t$ avec $p'_h + 1 \leq t \leq p'_{h+1}$ (certaines bornes exclues suivant les cas). Quant t varie ces termes varient de 2 en 2; il ne peut donc y en avoir au plus qu'un qui s'annulent. Plus précisément, on a:

$$2\lambda_t = 2X_h + p_h + 1 - 2v,$$

où $v := t - p'_h$. Un tel terme n'est entier relatif en x que si $x_h \in 1/2\mathbf{Z}$. Tant que $S \neq S_h, S'_h$, cela ne peut se produire que si $x_h = 0$. Mais le dénominateur contient

dans ce cas, $\lambda_{p'_h+1} + \lambda_{p_{h+1}} = 2x_h$ qui compense le zéro éventuel. Supposons donc que $S = S_h$ ou S'_h . On a $2\lambda_i^0 = 0$ dans les cas suivants:

(e) $x_h = 0$, p_h est impair, $t = p'_h + (p_h + 1)/2$, d'où (car $p_h > 1$) $p'_h + 1 < t < p'_{h+1}$;

(f) $x_h = 1/2$, $S = S_h$ (resp. $x_h = -1/2$, $S = S'_h$) p_h est pair, $t = p'_h + p_h/2 + 1$ (resp. $p'_h + p_h/2$); d'où $p'_h + 1 < t \leq p'_{h+1}$ (resp. $p'_h + 1 \leq t < p'_{h+1}$).

Les inégalités sur t prouvent que le numérateur s'annule bien dans les cas (d) et (e). Toutefois, on peut quand même avoir des simplifications avec certains termes des dénominateurs de $N_{h,h'}(\lambda)$ pour $T < h'$. Supposons que l'on ait les hypothèses de (f) et qu'il existe j vérifiant $1 \leq j \leq s$ tel que $p_h - 1 = q_j$. Si $q_j = 1$ i.e. $j = s$ et $q_s = 1$, on a $p_h = 2$ et le terme de (f) qui s'annule est $2\lambda_{p_{h+1}}$ (resp. $2\lambda_{p'_h+1}$); ce terme est compensé par (d). Supposons que $q_h > 1$; on pose $k := [(j + 1)/2]$ et l'on a $1 \leq k \leq s'$ et soit $2k = j$ soit $2k - 1 = j$ d'où soit $(p_j - q_{2k})/2$ soit $(p_j - q_{2k-1})/2$ vaut $1/2$. Or, pour $h' := T + k$, le dénominateur de $N_{h,h'}(\lambda)$ contient le terme:

$$\begin{aligned} \text{pour } S = S_h: & (\lambda_{p'_{h+1}} - \lambda_{p'_{h+1}})(\lambda_{p_{h+1}} + \lambda_{p'_h+1}) \\ & = (X_h + (q_{2k} - p_h)/2)(X_h + (q_{2k-1} - p_h)/2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pour } S = S'_h: & (\lambda_{p'_h+1} + \lambda_{p'_{h+1}})(\lambda_{p'_h+1} - \lambda_{p'_h+1}) \\ & = (X_h - (q_{2k-1} - p_h)/2)(X_h + (q_{2k} - p_h)/2). \end{aligned}$$

On a ainsi une simplification avec les zéros du cas (f). Tenant compte de cela (f) donne exactement le cas 2, (e) avec une remarque analogue sur les simplifications donne le cas (1), (b) donne le cas 3 et (a) donne les cas 4.

Pour les autres groupes, le calcul est analogue.

Sous les hypothèses de la fin de l'énoncé, on calcule $n_S(x, \not{x}, \lambda)$ en 'extrayant' de $N_S(\lambda)$ les termes nuls en x . Une autre façon de faire est de remarquer que I_x , J_x , K_x sont simples sous ces hypothèses de généralité et de faire le calcul directement. Nous ne le ferons pas.

REMARQUE. On fixe $d < i \leq T$; on pose, ici, $S = S_i \cup S'_i$. Alors, on vérifie comme ci-dessus que $n_S(x, \not{x}, \lambda)_{V(\not{x})}$ est l'inverse d'un polyôme si $x = \lambda_{\not{x}} + (x_1, \dots, x_T)$ est tel que x_1, \dots, x_d sont généraux et $|x_{d+1}|, \dots, |x_T| \leq \varepsilon$.

II.5. LEMME. (Hypothèses et notations de II.4 et II.1). Soient S et x vérifiant les hypothèses de II.4. En tant que fonction méromorphe sur $V(\not{x})$, le produit des fonctions $l'_S(x, \not{x}, \lambda)$ et $l''(x, \not{x}, \lambda)$ est holomorphe au voisinage de tout point λ de $V(\not{x})$ tel que $\text{Re } \lambda = x$ et $|\text{Im } \lambda| < T$ où T, ε sont tels que l'on ait:

pour $s \in \mathbf{C}$, $L(s) \neq 0$ si $|\text{Im } s| \leq T$ et $|\text{Re } s| \leq \varepsilon$. On a même: $l'_S(\lambda)$ est holomorphe sous les mêmes conditions et $l''(\lambda)$ l'est si pour tout i compris entre $d + 1$ et T , $|x_i| < \varepsilon$.

Grâce à II.1, on sait que la fonction méromorphe de \mathbf{C}^n , $l'_S(\lambda)$ a ses singularités sur des hyperplans définis par des équations du type:

$$H_{\alpha_0, c}: (\lambda, \alpha_0) - c = 0,$$

avec $\alpha_0 \in \Delta^+$ tel que $\exists \sigma \in S$ vérifiant $\sigma(\alpha_0) \notin \Delta^+$ et c un nombre complexe vérifiant $L(c) = 0$. Les singularités de $l'_S(\lambda)|_{V(\not\neq)}$ sont donc incluses dans l'intersection de ces hyperplans avec $V(\not\neq)$. Or un tel hyperplan ne coupe $V(\not\neq)$ que si $\alpha_0 \notin \Delta(M_{\not\neq})$. D'autre part fixons λ^0 un point de $V(\not\neq)$ vérifiant les conditions de l'énoncé. On va d'abord démontrer, avec les notations ci-dessus:

SOUS-LEMME. *L'hyperplan $H_{\alpha_0, c} \cap V'(\not\neq)$ de $V'(\not\neq)$ n'est un hyperplan singulier pour $l'_S(\lambda)|_{V(\not\neq)}$ que si α_0 est l'une des racines suivantes:*

il existe i et k tels que $d < i \leq T$, $1 \leq k \leq s'$, $q_{2k} < p_i \leq q_{2k-1}$ et α_0 est de la forme $\varepsilon_i + \varepsilon_r$ avec $p'_i < t \leq p'_{i+1}$, $q'_k < r \leq q'_{k+1}$ vérifiant $(\lambda_0, \alpha_0) = c$.

Pour i tel que $d < i \leq T$, on fixe $\alpha_i \in \Delta^+$, si une telle racine existe, vérifiant: il existe k compris entre 1 et s' au sens large tel que i, k, α_i vérifient les conditions ci-dessus sauf $(\lambda_0, \alpha_i) = c$ remplacée par $L((\lambda_0, \alpha_i)) = 0$. Alors la fonction de $V'(\not\neq)$:

$$\prod_i L((\lambda, \alpha_i))|_{V(\not\neq)} l'_S(\lambda)|_{V(\not\neq)}$$

est holomorphe en λ^0 (le produit porte sur tous les indices i pour lesquels α_i existe).

REMARQUE. (1) *la fonction $(\lambda, \alpha_i)|_{V(\not\neq)}$ est indépendante du choix de α_i .*

On a, pour tout $\lambda \in V'(\not\neq)$ et pour α, β des racines de la forme $\varepsilon_t + \varepsilon_v$ avec $p'_i < t \leq p'_{i+1}$, $q'_k < v \leq q'_{k+1}$:

$$(\lambda, \alpha^-) - (\lambda, \beta^-) \text{ est un entier relatif indépendant de } \lambda.$$

Imposer $L((\lambda_0, \alpha^-)) = 0$ et $L((\lambda_0, \beta^-)) = 0$ entraîne que $0 < \operatorname{Re}(\lambda_0, \alpha^-)$, $\operatorname{Re}(\lambda_0, \beta^-) < 1$ d'où cet entier relatif est nul et:

$$(\lambda, \alpha^-) = (\lambda, \beta^-), \quad \forall \lambda \in V(\not\neq).$$

(2) *si α_i existe et parce que l'on a supposé que $p_i > q_{2k}$, on peut prendre α_i sous la forme $\varepsilon_t + \varepsilon_{q'_{k+1}}$*

Nous n'utiliserons pas cette propriété et je ne la démontre donc pas, mais je l'indique parce que nous allons trouver α_i sous cette forme dans la preuve du sous-lemme.

Preuve du sous-lemme: on calcule $l'_S(\lambda)|_{V'(\neq)}$ en restreignant terme à terme, i.e.:

$$l'_S(\lambda)|_{V'(\neq)} = \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda)|_{V'(\neq)} \phi(\sigma\lambda)|_{V'(\neq)} \right) n'_S(x, \neq, \lambda)|_{V'(\neq)}.$$

On a (cf. [M-W], III.1 (ii)), en tant que fonction méromorphe sur $V'(\neq)$

$$r(\sigma, -\lambda) = 0, \quad \text{si } \sigma \notin W(\uparrow, \neq),$$

i.e.

$$l'_S(\lambda)|_{V'(\neq)} = \sum_{\sigma \in W(\uparrow, \neq)} r(\sigma, -\lambda)|_{V'(\neq)} \phi(\sigma\lambda)|_{V'(\neq)} n'_S(x, \neq, \lambda)|_{V'(\neq)}.$$

On fixe, ici, $H_{\alpha_0, c}$ comme dans l'énoncé et λ' un point très voisin de λ^0 dans $V'(\neq) \cap H_{\alpha_0, c}$ mais vérifiant:

$$(\lambda', \alpha^\sim) \notin \mathbf{Z}, \quad \forall \alpha \in \Delta^+ - \Delta(M'_\neq).$$

$H_{\alpha_0, c} \cap V'(\neq)$ n'est un hyperplan singulier pour $l'_S(\lambda)|_{V'(\neq)}$ que si $l'_S(\lambda)|_{V'(\neq)}$ n'est pas holomorphe en λ' . Mais en λ' , $n'_S(x, \neq, \lambda)|_{V'(\neq)}$ est holomorphe. On va étudier, pour σ fixé dans $W(\uparrow, \neq)$, $r(\sigma, -\lambda)|_{V'(\neq)}$ au voisinage de λ' . On décompose, en utilisant l'équation fonctionnelle pour simplifier l'écriture:

$$r(\sigma, -\lambda) = E(\lambda)R(\sigma, \lambda)R'(\sigma, \lambda)$$

où $E(\lambda)$ est un produit de facteurs ε et où:

$$R'(\sigma, \lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta(M'_\neq) \cap \Delta^+ \mid \sigma(\alpha) \notin \Delta^+} L((\lambda, \alpha^\sim) + 1)/L((\lambda, \alpha^\sim)),$$

$$R(\sigma, \lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+ - \Delta(M'_\neq) \mid \sigma(\alpha) \notin \Delta^+} L((\lambda, \alpha^\sim) + 1)/L((\lambda, \alpha^\sim)).$$

Pour $\alpha \in \Delta(M'_\neq)$ et $\sigma(\alpha) \notin \Delta^+$, on a, par hypothèse sur σ , $\alpha \notin \Delta(M'_\neq)$ d'où, (λ', α^\sim) est très voisin de \mathbf{Z} sans y appartenir. Ainsi $R'(\sigma, \lambda)$ est holomorphe en λ' . Pour étudier $R(\sigma, \lambda)$ en λ' , on répartit les éléments α de Δ^+ pour lesquels il existe $\sigma \in S$ tels que $\sigma(\alpha) \notin \Delta^+$, en chaînes $C = (\alpha_1, \dots, \alpha_{Q(C)})$ ayant les propriétés suivantes:

pour tout j avec $1 \leq j < Q(C)$, $(\lambda, a_j) = (\lambda, \alpha_{j+1}) + 1, \forall \lambda \in V'(\neq)$

pour tout j avec $1 \leq j < Q(C)$, si $\sigma(\alpha_j) \notin \Delta^+$ alors $\sigma(\alpha_{j+1}) \notin \Delta^+, \forall \sigma \in W(\uparrow, \neq)$

(2)

On pose alors, pour σ fixé dans $W(\uparrow, \not\neq)$, $m^-(C) = \infty$ si $\sigma(\alpha_{Q(C)}) \in \Delta^+$ et $m^-(C) = \inf \{j \mid 1 \leq j \leq Q(C), \sigma(\alpha_j) \notin \Delta^+\}$. Supposons que cette répartition ait été faite et notons Σ l'ensemble des chaines. Un calcul immédiat montre que l'on a:

$$R(\sigma, \lambda) = \prod_{C \in \Sigma \mid m^-(C) < \infty} L((\lambda, \alpha_{m^-(C)} \vec{\lambda}) + 1) / L((\lambda, \alpha_{Q(C)} \vec{\lambda})) \quad (3)$$

Soit C une chaine vérifiant (1) et (2); on dit que C vérifie (4) si l'on a:

$$\operatorname{Re}(\lambda', \alpha_{Q(C)} \vec{\lambda}) < \varepsilon. \quad (4)$$

La fonction $L((\lambda, \alpha_{Q(C)} \vec{\lambda}))^{-1}$ est holomorphe en λ' si C vérifie (4). On a ainsi montré:

$$\prod_{C \in \Sigma} L((\lambda, \alpha_{Q(C)} \vec{\lambda}))|_{V'(\not\neq)} I_S(\lambda)|_{V'(\not\neq)} \quad (5)$$

où le produit est limité aux chaines ne vérifiant pas (4), est holomorphe en λ' et donc en λ^0 . Il reste à construire explicitement Σ et à déterminer les éléments de Σ ne vérifiant pas (4). Pour i, t, v, j, k vérifiant $d < i \leq T, p'_i < t \leq p'_{i+1}, p'_{i+1} < v, i < j \leq T, 1 \leq k \leq s'$, on définit les chaines suivantes:

$$\begin{aligned} C_{t,i} &: \varepsilon_t \text{ seulement si } G = \operatorname{SO}(2n+1), \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_t + \varepsilon_{p'_{i+1}}; \\ C_{t,j,+} &: \varepsilon_t + \varepsilon_{p'_j+1} \text{ seulement si } S \neq S_j, \dots, \varepsilon_t + \varepsilon_{p'_j+1}; \\ C_{t,j,-} &: \varepsilon_t - \varepsilon_{p'_j+1} \text{ seulement si } S \neq S'_j, \dots, \varepsilon_t - \varepsilon_{p'_j+1}; \\ C_{t,k,+} &: \varepsilon_t + \varepsilon_{q'_k+1} \text{ seulement si } S \neq S_k, \dots, \varepsilon_t - \varepsilon_{q'_k+1}; \\ C_{t,k,-} &: \varepsilon_t - \varepsilon_{q'_k+1} \text{ seulement si } S \neq S'_k, \dots, \varepsilon_t - \varepsilon_{q'_k+1}; \\ C_{i,v,\pm} &: \varepsilon_{p'_i+1} \pm \varepsilon_v \text{ seulement si } S \neq S_i, \dots, \varepsilon_{p'_{i+1}} \pm \varepsilon_v. \end{aligned}$$

Ces chaines vérifient (1) et (2), mais elles ne vérifient pas toutes (4). En effet, on a, avec les notations ci-dessus: pour $C_{t,j,+}$, $\lambda'_t + \lambda'_{p'_j+1}$ a sa partie réelle très voisine de:

$$x_i + x_j + (p_i - p_j)/2 - (t - p'_i - 1).$$

Rappelons que l'on a des hypothèses sur x_i et x_j ; mais le nombre ci-dessus n'est négatif pour tout t compris entre $p'_i + 1$ et p'_{i+1} au sens large (sauf si $S = S_i$ où l'on a aussi $t > p'_i + 1$) que si $p_i \leq p_j$ avec inégalité stricte si $S = S_j$ (cas où x_j peut être voisin de $1/2$). Par contre si $p_i \geq p_j$ avec inégalité stricte si $S = S_i$ les

chaines $C_{i,v,+}$ vérifient (4) pour tout v tel que $p'_j + 1 \leq v \leq p'_{j+1}$ (la première inégalité étant stricte si $S = S_j$).

Cela incite à définir Σ comme réunion des chaines suivantes: (notations précédentes)

$C_{i,v,+}$ pour $p'_j < v \leq p'_{j+1}$ ($p'_j + 1 < v$ si $S = S_j$) et $C_{i,v,-}$ pour $p'_j < v \leq p'_{j+1}$ ($v < p'_{j+1}$ si $S = S'_j$), si $p_i \geq p_j$ avec inégalité stricte si $S = S_i$;

$C_{i,j,\pm}$ pour $p'_i < t \leq p'_{i+1}$ ($p'_i + 1 < t$ si $S = S_i$) si $p_i < p_j$ ou $p_i \leq p_j$ si $S = S_i$;

$C_{i,v,+}$ pour $q'_k < v \leq q'_{k+1}$ ($q'_k + 1 < v$ si $S = S_k$) et $C_{i,v,-}$ pour $q'_k < v \leq q'_{k+1}$ ($v < q'_{k+1}$ si $S = S'_k$), si $p_i \geq q_{2k-1}$ avec inégalité stricte si $S = S_i$;

$C_{i,k,\pm}$ pour $p'_i < t \leq p'_{i+1}$ ($p'_i + 1 < t$ si $S = S_i$) pour $p_i < q_{2k-1}$ ou $p_i \leq q_{2k-1}$ si $S = S_i$;

$C_{i,i}$ si $G = \text{Sp}(2n)$.

On vérifie que les seules chaines ne vérifiant pas (4) sont les chaines $C_{i,k,+}$ pour i, k vérifiant $q_{2k} < p_i \leq q_{2k-1}$. Pour C l'une de ces chaines, on a $L((\lambda', \alpha_{Q(C)})) = 0$ seulement si (λ' étant très voisin de λ^0):

$$\varepsilon < \text{Re}((\lambda^0, \alpha_{Q(C)}) < 1 - \varepsilon.$$

Or $\alpha_{Q(C)} = \varepsilon_i + \varepsilon_{q_{i+1}}$ vérifie les hypothèses de α_i dans l'énoncé du sous-lemme et donc, grâce à la remarque 1, t peut prendre au plus une valeur. Le sous-lemme résulte alors de (5).

Comme dans l'énoncé du sous-lemme, on fixe pour tout i tel que $d < i \leq T$, α_i si cette racine existe. On a:

$$\prod_i (L((\lambda, \alpha_i))'_S(\lambda))_{|V(\neq)}$$

le produit portant sur tout les indices i comme plus haut pour lesquels α_i existe, est une fonction holomorphe en λ^0 . Ainsi pour démontrer II.5, il suffit de démontrer l'holomorphie en imposant en plus à λ^0 de vérifier $L((\lambda^0, \alpha_i)) = 0$ pour un seul indice i comme ci-dessus. On fixe i et λ^0 avec ces propriétés, d'où aussi k . On note $X_1, \dots, X_T, v_1, \dots, v_s$ les coordonnées naturelles sur $V'(\neq)$ et on pose:

$$H_k = \{\lambda \in V'(\neq) | v_k = 0\}.$$

On va démontrer que $l'_S(\lambda)_{|H_k}$ est holomorphe en λ^0 ce qui prouvera les propriétés d'holomorphie cherchées pour $l'_S(\lambda)_{|V(\neq)}$. Pour cela, on peut encore remplacer λ^0 par λ' un point très voisin de H_k mais dont les coordonnées autres que X_i et v_k sont générales.

On procède de la façon suivante: on décomposera $l'_S(\lambda)_{|V(\neq)}$ sous la forme

$l_0(\lambda) + l_+(\lambda) + l_-(\lambda)$ où chaque fonction écrite est méromorphe sur $V'(\neq)$ n'ayant pas H_k comme hyperplan singulier et vérifiant:

$$l_0(\lambda)|_{H_k} = 0 \text{ comme fonction méromorphe sur } H_k,$$

$l_+(\lambda)$ est holomorphe en λ' ,

$L((\lambda, \alpha_i^{\sim}))/L((\lambda, \alpha_i^{\sim}) - 2v_k)l_-(\lambda)$ si $G \neq \text{Sp}(2n)$ est holomorphe en λ' (Si $G = \text{Sp}(2n)$ c'est légèrement plus compliqué, il faut décomposer un peu plus).

On pose:

$$I_k := \{\alpha \in \Delta^+ - \Delta(M'_{\rho}) \mid \forall \lambda \in H_k, (\lambda, \alpha^{\sim}) = -1\},$$

$$J_k := \{\alpha \in \Delta^+ - \Delta(M'_{\rho}) \mid \forall \lambda \in H_k, (\lambda, \alpha^{\sim}) = 0\},$$

$$K_k := \{\alpha \in \Delta^+ - \Delta(M'_{\rho}) \mid \forall \lambda \in H_k, (\lambda, \alpha^{\sim}) = +1\}.$$

Les éléments α de $\Delta^+ - \Delta(M'_{\rho})$ tels que la fonction (λ, α^{\sim}) soit constante sur H_k sont de la forme $\varepsilon_v + \varepsilon_w$ avec la convention du début de I. Ainsi pour $\alpha \in I_k$ (resp. J_k , resp. K_k), on a:

$$(\lambda, \alpha^{\sim}) = 2v_k - 1 \text{ (resp. } 2v_k, \text{ resp. } 2v_k + 1)$$

sauf si $G = \text{Sp}(2n)$ et $v = w$ où $2v_k$ est remplacé partout par v_k .

On définit I_k^S, J_k^S et K_k^S de façon similaire à I_k^S, \dots (cf. I.4) et l'on pose:

$$n_k(\lambda) := \prod_{\alpha \in I_k^S} ((\lambda, \alpha^{\sim}) + 1) \prod_{\alpha \in J_k^S} (\lambda, \alpha^{\sim})^{-1} \prod_{\alpha \in K_k^S} ((\lambda, \alpha^{\sim}) - 1)$$

La preuve de II.2 montre que $n_k(\lambda)|_{V'(\neq)} = 1$. On fixe σ dans S et on pose $B := \sigma \cdot \text{Stab } H_k \cap S$ où $\text{Stab } H_k$ est le stabilisateur point par point de H_k . On remarque que pour tout $\alpha \in J_k$ σ_{α} est dans $\text{Stab } H_k$ et donc, si $\alpha \in J_k^S$, on a $B\sigma_{\alpha} = B$. On vérifie comme en II.1 que l'on a:

$$\sum_{\sigma' \in B} r(\sigma', -\lambda) \phi(\sigma' \lambda) n_k(\lambda) \tag{6}$$

est une fonction méromorphe sur \mathbf{C}^n pour laquelle H_k n'est pas inclus dans le lieu singulier.

D'autre part pour tout σ dans $W(\uparrow, \neq)$, $r(\sigma, -\lambda)$ vaut à une fonction méromorphe le long de H_k près:

$$\prod_{\alpha \in I_k \mid \sigma(\alpha) \notin \Delta^+} L(2v_k)/L(-1 + 2v_k) \prod_{\alpha \in K_k \mid \sigma(\alpha) \notin \Delta^+} L(2v_k + 2)/L(2v_k + 1).$$

On note m (resp. m') le nombre de termes dans le premier produit (resp. le second) alors si $m < m'$, on a:

$r(\sigma, -\lambda)$ ne contient pas H_k comme hyperplan singulier et sa restriction à H_k est nulle en tant que fonction méromorphe sur H_k . (7)

On note $W_0 := \{\sigma \in W(\uparrow, \not\neq) \text{ tels que } m > m'\}$ et on pose:

$$l_0(\lambda) := \sum_{\sigma \in W_0} (r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda))|_{V(\not\neq)} n'_S(x, \not\neq, \lambda)|_{V(\not\neq)}.$$

Rappelons que $n_S(x, \not\neq, \lambda)|_{V(\not\neq)}$ est méromorphe le long de H_k . On vient de voir que H_k n'est pas un hyperplan singulier de $l_0(\lambda)$ et que $l_0(\lambda)|_{H_k} = 0$. On découpe maintenant $W(\uparrow, \not\neq) - W_0$ en paquets P tels que deux éléments sont dans un même paquet si et seulement si ils diffèrent par multiplication à droite par un élément du stabilisateur point par point de H_k . On note \mathbf{P} l'ensemble des paquets. Soit $P \in \mathbf{P}$; il résulte de (6) et (7) que l'on a:

$$l_P(\lambda) := \sum_{\sigma \in P} ((r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda))|_{V(\not\neq)} n_S(x, \not\neq, \lambda)|_{V(\not\neq)}),$$

est méromorphe le long de H_k et de ce qui précède que:

$$(L((\lambda, \alpha_i^{\sim}))l_P(\lambda))|_{V(\not\neq)}$$

est holomorphe en λ' . On va démontrer que cette fonction est divisible en ce point soit par $L((\lambda, \alpha_i^{\sim}))$ soit par $L((\lambda, \alpha_i^{\sim}) - 2v_k)$ soit par $L((\lambda, \alpha_i^{\sim}) - v_k)$. Cela suffit évidemment pour avoir l'holomorphie de $l_P(\lambda)$ en λ' après restriction à H_k . Si P est tel que pour tout $\sigma \in P$, $r(\sigma, -\lambda)|_{V(\not\neq)}$ n'admet pas $\{\lambda \mid L((\lambda, \alpha_i^{\sim})) = 0\}$ comme singularité en λ' , on a de façon triviale la divisibilité par $L((\lambda, \alpha_i^{\sim}))$. On fixe dans ce qui suit P ne vérifiant pas cette condition et $\sigma \in P$ tel que $r(\sigma, -\lambda)|_{V(\not\neq)}$ admet $\{\lambda \mid L((\lambda, \alpha_i^{\sim})) = 0\}$ comme singularité en λ' . On a besoin des propriétés suivantes:

pour $h_k < r \leq q'_{k+1}$, on pose $r' = w_{\not\neq}(r)$ d'où pour tout $\lambda \in V(\not\neq)$ $\lambda_r = -\lambda_{r'}$. A l'aide de I.2 (1), on vérifie que les seules relations non triviales du type $\lambda_v = \pm \lambda_w$ vérifiées pour tout $\lambda \in H_k$ sont les relations écrites ci-dessus. D'où:

$$\begin{aligned} \text{soient } \sigma, \sigma' \in P, \text{ alors } \sigma'(r) &= \sigma(r) \text{ si } r \leq h_k \text{ ou } r > q'_{k+1} \text{ et} \\ \sigma'(r) &= \sigma(r) \text{ ou } -\sigma(r') \text{ si } h_k < r \leq q'_{k+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Les inégalités de I.2(1) montrent aussi que $\varepsilon_{h_k} + \varepsilon_{q'_{k+1}}$ (qui est un élément de K_k) est le seul élément qui n'est pas de la forme $\varepsilon_v + \varepsilon_w$ avec $h_k < v \leq w \leq q'_{k+1}$

alors que I_k n'a que des termes de cette forme. Ainsi w_{\neq} induit une bijection de I_k sur $K_k - \{\varepsilon_{h_k} + \varepsilon_{q'_{k+1}}\}$. D'où:

$$|I_k| = |K_k| - 1. \quad (9)$$

On revient à P et σ comme plus haut; nécessairement il existe $\alpha \in K_k$ tel que $\sigma(\alpha) \in \Delta^+$. On écrit α sous la forme $\varepsilon_r + \varepsilon_w$ avec $h_k \leq r \leq w \leq q'_{k+1}$. On regroupe différemment les éléments de Δ^+ qui constituent les chaînes $C_{t,k,\pm}$ pour $p'_i < t \leq p'_{i+1}$ ($p'_i + 1 < t$ si $S = S_i$) et $C_{i,i}$ si $G = \text{Sp}(2n)$ et $r = w$. On utilise les chaînes suivantes (pour t comme ci-dessus):

$$\begin{aligned} C'_{t,k,+} &: \varepsilon_t + \varepsilon_{q'_{k+1}} \text{ (si } S \neq S_k), \dots, \varepsilon_t + \varepsilon_r; \\ C'_{t,k,-} &: \varepsilon_t - \varepsilon_w, \dots, \varepsilon_t - \varepsilon_{q'_{k+1}}; \\ C_{i,v,+} &, \text{ pour } r < v \leq q'_{k+1}; \\ C_{i,v,-} &, \text{ pour } w < v \leq q'_{k+1} \text{ (} v < q'_{k+1}, \text{ si } S = S'_i). \end{aligned}$$

Ces chaînes vérifient (1), (2). On a vu qu'elles vérifient (4) sauf $C'_{t,k,+}$. On va d'abord supposer que $G \neq \text{Sp}(2n)$ ou $r \neq w$. Les hypothèses sur σ assurent qu'il existe t^0 tel que $L((\lambda', (\varepsilon_{r^0} + \varepsilon_{v^0}))) = 0$ et $\sigma(\varepsilon_{r^0} + \varepsilon_r) \notin \Delta^+$. Comme λ' est très voisin de λ^0 , les singularités pour λ' sont incluses dans celles pour λ^0 et l'on a aussi

$$L((\lambda^0, (\varepsilon_{r^0} + \varepsilon_r))) = 0;$$

ainsi $\varepsilon_{r^0} + \varepsilon_r$ correspond à un choix α_i de l'énoncé du sous-lemme et r étant fixé, il n'y a qu'une valeur de t^0 qui a cette propriété. On suppose donc que $\alpha_i = \varepsilon_{r^0} + \varepsilon_r$. Comme $\sigma(-\varepsilon_r - \varepsilon_w) \notin \Delta^+$, on a aussi:

$$\sigma(\varepsilon_{r^0} - \varepsilon_w) \notin \Delta^+, \quad \text{i.e. } m^-(C'_{t^0,k,-}) = \varepsilon_{r^0} - \varepsilon_w.$$

Or on a:

$$(\lambda, \alpha_i^\sim) = (\lambda, (\varepsilon_r + \varepsilon_w)^\sim) + (\lambda, (\varepsilon_{r^0} - \varepsilon_w)^\sim) = (\lambda, (\varepsilon_{r^0} - \varepsilon_w)^\sim) + 1 + 2v_k.$$

Il résulte de (3) que:

$$(L((\lambda, \alpha_i^\sim))L((\lambda, \alpha_i^\sim) - 2v_k)^{-1}r(\sigma, -\lambda))|_{V(\neq)} \quad (10)$$

n'a pas comme ensemble singulier: $\{\lambda \in V(\neq) \mid L((\lambda, \alpha_i^\sim) - 2v_k) = 0\}$.

Soit $\sigma' \in P$; on a: $\sigma'(\varepsilon_{r^0} - \varepsilon_w) = \sigma(\varepsilon_{r^0} - \varepsilon_w)$ ou $\sigma(\varepsilon_{r^0} + \varepsilon_w)$ d'après (8). Or on a, pour tout $\lambda \in H_k$:

$$(\lambda_{\neq}, (\varepsilon_r - \varepsilon_w)^{\sim}) = (\lambda_{\neq}, (\varepsilon_r + \varepsilon_w)^{\sim}) = (\lambda, (\varepsilon_r + \varepsilon_w)^{\sim}) = 1,$$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_w \in \Delta(M'_{\neq}).$$

Il résulte de I.4(2) que $\varepsilon_r - \varepsilon_w$ est nécessairement une racine (simple) positive de $\Delta(M'_p)$. D'où:

$$\sigma(\varepsilon_r - \varepsilon_w) \in \Delta^+$$

et

$$\sigma(\varepsilon_{r^0} + \varepsilon_w) = \sigma(\varepsilon_{r^0} + \varepsilon_r) - \sigma(\varepsilon_r - \varepsilon_w) \notin \Delta^+.$$

On en déduit que pour tout $\sigma' \in P$, on a:

$$m^-(C'_{t_0, k, -}) = \varepsilon_{r^0} - \varepsilon_w.$$

(10) est alors aussi vraie pour σ' remplaçant σ et on obtient aussi (10) pour:

$$L((\lambda, \alpha_i))L((\lambda, \alpha_i) - 2v_k)^{-1}l_P(\lambda).$$

Or cette fonction, a priori n'avait comme lieu singulier en λ' que cet ensemble. D'où l'holomorphie en λ' .

On suppose que $G = \text{Sp}(2n)$ et $r = w$; on suppose aussi, grâce à ce qui précède que $2\varepsilon_r$ est le seul élément de K_k qui ne soit pas inversé par σ . Cela entraîne, puisque $\sigma \notin W_0$, grâce à (9) que $\sigma(\alpha) \notin \Delta^+$ pour tous les éléments de I_k . Donc en particulier $\sigma(2\varepsilon_r) \notin \Delta^+$, i.e. $\sigma(r) > 0$ et $\sigma(r') < 0$. Il résulte de ces relations et de (8) que l'on a:

$$\forall \sigma' \in P, \quad \sigma'(r) > 0.$$

Grâce à cela est aux méthodes du cas précédent on démontre que l'on a soit:

$$\forall \sigma' \in P, \quad m^-(C_{i, i}) = 2\varepsilon_{r^0},$$

soit:

$$\forall \sigma' \in P, \quad m^-(C_{r^0-1, k, -}) = \varepsilon_{r^0-1} - \varepsilon_r.$$

Or on a, pour tout $\lambda \in V'(\not\phi)$:

$$\begin{aligned} (\lambda, 2\varepsilon_{i_0}^{\sim}) &= (\lambda, \alpha_i^{\sim}) - (\lambda, 2\varepsilon_r^{\sim}) = (\lambda, \alpha_i^{\sim}) - v_k - 1, \\ (\lambda, (\varepsilon_{r^0-1} - \varepsilon_r)^{\sim}) &= \lambda_{r^0-1} - \lambda_r = \lambda_{r^0} + 1 + \lambda_r - 2\lambda_r = (\lambda, \alpha_i^{\sim}) - 2v_k - 1. \end{aligned}$$

On termine comme plus haut. Cela termine la preuve de l'holomorphie de $l'_S(\lambda)_{V(\not\phi)}$.

Pour $l''(\lambda)$, on procède comme pour $l'_S(\lambda)$; on trouve que les pôles éventuels de $l''(\lambda)$ vue comme fonction de $V(\not\phi)$ n'apparaissent que si $S = S'_i$ et $x_i \in [-\varepsilon - 1/2, -\varepsilon]$ ou $S = S_i$ et $x_i \in [\varepsilon, \varepsilon + 1/2]$, pour une valeur de i comprise entre $d + 1$ et T . Par exemple, si $S = S_i$, $l''(\lambda)$ n'est holomorphe qu'après avoir été multipliée par la fonction suivante:

$$\prod_{j < i \mid p_j = p_i} L(\lambda_{p'_j+1} - \lambda_{p'_i+1}). \quad (11)$$

A l'aide de (3) et des chaînes telles que $m^-(C)$ est imposé par la condition $S = S_i$ (i.e. les chaînes $C_{j,p'_i+1,-}$ pour $j < i$ et $p_j = p_i$), on voit que (11) divise $l'_S(\lambda)$. Pour traiter le cas de $S = S'_i$, le plus simple est de faire un changement de variable dans le produit $l'_S(\lambda)l''(\lambda)$, en remplaçant λ par $\sigma_i\lambda$ où σ_i est l'élément de W défini par:

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= t \quad \text{si } t > p'_i+1 \text{ ou } t \leq p'_i, \\ \sigma_i(p'_i+1) &= -(p'_i+1 - t + 1) \quad \text{si } 1 \leq t \leq p_i, \end{aligned}$$

ce qui ramène ce cas au cas où $S = S_i$.

Cela termine la preuve du lemme.

II.6. Définition des formes bilinéaires sur \mathbf{F}

On fixe $\not\phi$ comme en I.1, $\phi, \psi \in \mathbf{F}$ (cf. introduction) et on définit la fonction méromorphe de \mathbf{C}^n :

$$\zeta(\not\phi, \lambda) = \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma\lambda) \right) \left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\not\phi}\lambda) \overline{\psi(-\tau w_{\not\phi}\lambda)} \right) \times r(w_{\not\phi}, \lambda) d(\not\phi, \lambda).$$

Plus généralement, soit S un sous-ensemble de W ; on note $\zeta_S(\not\phi, \lambda)$ la même expression mais où la première somme ne porte que sur $\sigma \in S$. Si $\not\phi$ est d-admissible (cf. I.5), on notera plutôt $\zeta_d(\not\phi, \lambda)$ au lieu de $\zeta_{W_d}(\not\phi, \lambda)$. On pose encore:

$$c_{\not\phi} = (T! \times 2^{T+\pi(\not\phi)} (2\pi)^{d\not\phi})^{-1},$$

où $d_{\mathcal{J}} := \dim V(\mathcal{J})$ et $\eta(\mathcal{J})$ vaut s si G est un groupe orthogonal et $s - 1$ pour $G = \mathrm{Sp}(2n)$. Supposant que \mathcal{J} est d -admissible, on pose:

$$c_{d,\mathcal{J}} = ((T - d)! \times 2^{T-d+\eta(\mathcal{J})} (2\pi)^{d_{\mathcal{J}}})^{-1}.$$

En particulier:

$$\zeta_0(\mathcal{J}, \lambda) = \zeta(\mathcal{J}, \lambda), \quad c_{0,\mathcal{J}} = c_{\mathcal{J}}.$$

Le problème est de restreindre $\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)$ à $V(\mathcal{J})$ quand S est du type considéré en I.5. On fixe $x^0 \in V(\mathcal{J})$ un point tel que $s^0 - \lambda_{\mathcal{J}}$ soit général. On définit $\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})}$ comme fonction méromorphe de $V(\mathcal{J})$ par:

$$\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})} := (\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda) n_S(x^0, \mathcal{J}))|_{V(\mathcal{J})}. \quad (1)$$

Le deuxième membre a le sens ordinaire puisque l'on a vu que $\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda) n_S(x^0, \mathcal{J})$ est une fonction méromorphe de \mathbf{C}^n avec comme singularités, des hyperplans ne contenant pas $V(\mathcal{J})$. Rappelons que $r(w_{\mathcal{J}}, \lambda) d(\mathcal{J}, \lambda)$ est une fonction de \mathbf{C}^n holomorphe au voisinage de tout point de $V(\mathcal{J})$. On sait que l'on a (cf. II.3):

$$n_S(x^0, \mathcal{J})|_{V(\mathcal{J})} = 1$$

d'où:

$$\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})} = (\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})})|_{V(\mathcal{J})}, \quad (2)$$

où le membre de droite a le sens ordinaire. Soit $x \in V(\mathcal{J})$; on définit $n_S(x, \mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})}^{-1}$ par:

$$n_S(x, \mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})}^{-1} := (n_S(x, \mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})}^{-1})|_{V(\mathcal{J})} = ((n_S(x, \mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})})|_{V(\mathcal{J})})^{-1}.$$

Et l'on a:

$$\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})} = (\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda) n_S(x, \mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})}) n_S(x, \mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})}^{-1} \quad (3)$$

malgré toutes ces égalités, la définition de $\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})}$ dépend du choix des fonctions $n_S(x, \mathcal{J}, \lambda)$ qui n'a rien de bien canonique ou du choix de $V'(\mathcal{J})$ qui n'est pas plus canonique. On vérifiera en III.6 que l'on a $\zeta_S(\mathcal{J}, \lambda)|_{V(\mathcal{J})} \neq 0$. On obtient alors facilement la remarque suivante:

REMARQUE. Soient $\mathbf{H} = \{H_1, \dots, H_K\}$ un ensemble d'hyperplans ayant les propriétés suivantes:

(i) $K = \text{codim } V(\not\phi)$ et $\bigcap_{1 \leq i \leq K} H_i = V(\not\phi)$

(ii) les restrictions successives, notées $\zeta_S(\not\phi, \lambda)_i$ de $\zeta_S(\not\phi, \lambda)$ à $H_0 := \mathbf{C}^n$, $H_1, \dots, H_1 \cap \dots \cap H_i$ n'admettent pas $H_1 \cap \dots \cap H_{i+1}$ comme hyperplan singulier ou comme zéro.

Alors il existe une constante, notée $*$, indépendante de ϕ et $\psi \in \mathbf{F}$ tel que

$$\zeta_S(\not\phi, \lambda)_K = * \zeta_S(\not\phi, \lambda)|_{V(\not\phi)}.$$

En effet, on vérifie que pour \mathbf{H} comme dans l'énoncé, la propriété (ii) est vraie quand on remplace $\zeta_S(\not\phi, \lambda)$ par $n_S(x^0, \not\phi, \lambda)$ ou par $n_S(x^0, \not\phi, \lambda)^{-1}$. Ainsi, on définit: $n_S(x^0, \not\phi, \lambda)_K$ et $n_S(x^0, \not\phi, \lambda)_K^{-1}$ qui vérifient, comme fonctions de $V(\not\phi)$:

$$\zeta_S(\not\phi, \lambda)_K n_S(x^0, \not\phi, \lambda)_K = (\zeta_S(\not\phi, \lambda) n_S(x^0, \not\phi, \lambda))|_{V(\not\phi)},$$

$$n_S(x^0, \not\phi, \lambda)_K n_S(x^0, \not\phi, \lambda)_K^{-1} = 1.$$

Il faut donc vérifier que $n_S(x^0, \not\phi, \lambda)_K$ est une constante non nulle. Pour cela, on remarque que $n_S(x^0, \not\phi, \lambda)_K$ est une fraction rationnelle de $V(\not\phi)$; on l'écrit sous forme réduite et en regardant comment elle a été construite à partir de $n_S(x^0, \not\phi, \lambda)$, on voit que si elle n'est pas constante son numérateur et son dénominateur s'annulent en x^0 . Or, quitte à changer x^0 en le gardant général, on peut supposer que $\zeta_S(\not\phi, \lambda)_K$ et $(\zeta_S(\not\phi, \lambda) n_S(x^0, \not\phi, \lambda))|_{V(\not\phi)}$ sont définis et non nuls en x^0 ; c'est une contradiction. D'où l'assertion.

On définit maintenant les formes bilinéaires sur \mathbf{F} dont nous aurons besoin; il s'agit de:

$$\phi, \psi \in \mathbf{F} \mapsto \zeta_S(\not\phi, \lambda)|_{V(\not\phi)} =: (\phi, \psi)_{\not\phi, S}(\lambda)$$

et on pose, pour $x \in V(\not\phi)$ tel que $\zeta_S(\not\phi, \lambda)|_{V(\not\phi)}$ n'ait pas de pôles pour $\lambda \in V(\not\phi)$ vérifiant $\text{Re } \lambda = x$ et $|\text{Im } \lambda| < T$:

$$I_{T,d,S}(\not\phi, x) := c_{d,\not\phi} \int_{\lambda \in \mathcal{V}(\not\phi) \mid \text{Re } \lambda = x, |\text{Im } \lambda| < T} \zeta_S(\not\phi, \lambda)|_{V(\not\phi)} d\lambda.$$

Pour la normalisation des mesures, on procède comme en ([M-W], II). Si $S = W_d$, on notera simplement:

$$I_{T,d}(\not\phi, x) = I_{T,d,S}(\not\phi, x).$$

Les formes bilinéaires dont il est question dans l'introduction s'obtiennent pour $S = W$.

On utilisera souvent au III la remarque suivante:

soit $\sigma_0, \tau_0 \in W$ tels qu'il existe une partition $\check{\mu}, d - 1$ admissible, vérifiant:

$$\begin{aligned} \sigma_0: V(\check{\mu})(\text{resp. } V'(\check{\mu})) &\rightarrow V(\check{\lambda})(\text{resp. } V'(\check{\lambda})), \\ \tau_0 w_{\check{\mu}} \sigma_0^{-1} &= w_{\check{\lambda}}, \\ d(\check{\mu}, \lambda) &= d(\check{\lambda}, \sigma_0(\lambda)), \end{aligned}$$

$\tilde{S} := S\sigma_0^{-1}$ est du type considéré en I.5.

Alors, par un simple changement de variable, on obtient:

$$\zeta_S(\check{\mu}, \lambda)_{|V(\check{\mu})} = \zeta_S(\check{\lambda}, \sigma_0(\lambda))_{|V(\check{\lambda})}. \tag{4}$$

III. Enonces et resultats

III.1. On fixe T un nombre réel grand. On choisit alors ε de tel sorte que $L(s)$ n'ait pas de 0 pour $\text{Re } s \notin [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ et $|\text{Im } s| < T$. On utilisera la notation $=_T$ entre deux intégrales faisant intervenir des éléments ϕ et ψ de F (cf. Introduction) pour dire qu'en multipliant ϕ ou ψ par $(y - \langle \lambda, \lambda \rangle)^{-1}$ où y est une variable complexe, la différence des deux membres de l'égalité ' $=_T$ ' est holomorphe en y pour $\text{Re } y > R^2 - T^2$ où R est une constante réelle grande (ceci est tiré de ([L] p. 227) et permet de ne travailler qu'avec des intégrales convergentes). Soit $0 \leq d \leq n$ et soit $\check{\mu}$ une partition comme en I.1 que l'on suppose d -admissible. On fixe $x_{\check{\mu}}$ un point d - $\check{\mu}$ -admissible (par exemple $x_{\check{\mu}} = \lambda_{\check{\mu}}$) et l'on définit pour $\phi, \psi \in F$:

$$I_{T,d}(\check{\mu}, \phi, \psi, x_{\check{\mu}}) = \int_{\lambda \in V(\check{\mu}) \mid \text{Re } \lambda = x_{\check{\mu}}, |\text{Im } \lambda| < T} (\phi, \psi)_{\check{\mu},d}(\lambda).$$

A $=_T$ près, cela est indépendant du point $x_{\check{\mu}}$ choisi (grâce à II.6 et au théorème des résidus). Alors on a:

THÉORÈME. *Pour tout $0 \leq d \leq n$, on a:*

$$(\phi, \psi) =_T \sum I_{T,d}(\check{\mu}, \phi, \psi),$$

où la somme porte sur toutes les partitions d -admissibles, en particulier sur toutes les partitions si $d = 0$. On a la forme exacte:

$$(\phi, \psi) = \sum \int_{\lambda \in V(\check{\mu}) \mid \text{Re } \lambda = \lambda_{\check{\mu}}} (\phi, \psi)_{\check{\mu}}(\lambda) d\lambda.$$

Le passage de la première partie du théorème à la deuxième a été fait par Langlands (cf. [L], chapitre 7, lemme 7.6). L'assertion pour $d = n$ est le calcul classique du produit scalaire (cf. [L], chapitre 5). Dans tout ce qui suit on fixe T , et ϕ, ψ qui disparaissent des notations. On utilisera aussi la notation suivante, pour S comme en I.5

$$I_{d,S}(\not\phi, x) := \int_{\lambda \in V(\not\phi) \mid \operatorname{Re} \lambda = x, |\operatorname{Im} \lambda| < T} c_{d,\not\phi} \zeta_S(\not\phi, \lambda)_{V(\not\phi)} d\lambda$$

en mettant évidemment des hypothèses convenables sur x pour que cela ait un sens (cf. II.6).

III.2. REMARQUE. Soit $\not\phi$ une partition d -admissible; pour calculer $\zeta_d(\mathcal{P}, \lambda)_{V(\not\phi)}$, on a vu que l'on pouvait d'abord restreindre à $V'(\not\phi)$ puis restreindre la fonction méromorphe obtenue. La restriction à $V'(\not\phi)$ peut se faire terme à terme dans la définition de $\zeta_d(\not\phi, \lambda)$. Comme dans la preuve de II.5, on a :

$$r(\sigma, -\lambda)_{V'(\not\phi)} = 0 \quad \text{si } \sigma \notin W(\uparrow, \not\phi),$$

d'où :

(1) $\zeta_d(\not\phi, \lambda)_{V(\not\phi)}$ est la restriction d'abord à $V'(\not\phi)$ puis à $V(\not\phi)$ de la fonction suivante :

$$r(w_{\not\phi}, \lambda)_{d(\not\phi, \lambda)} \left(\sum_{\sigma \in W_d(\uparrow, \not\phi)} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right) \sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\not\phi} \lambda) \overline{\psi(-\tau w_{\not\phi} \bar{\lambda})}.$$

Supposons, en outre que l'on ait :

$$(\lambda_{\not\phi}, \alpha_n) = 1$$

où α_n est la dernière racine simple. On pose :

$$V''(\not\phi) = V'(\not\phi) \cap \{\lambda \mid (\lambda, \alpha_n) = 1\}.$$

On peut alors restreindre de $V'(\not\phi)$ à $V''(\not\phi)$ avant de restreindre à $V(\not\phi)$ et cela peut encore se faire terme à terme. Dans cette restriction s'annulent les termes $r(\sigma, -\lambda)$ pour $\sigma \notin W(\uparrow_0, \not\phi)$ (cf. I.5 pour la notation). On obtient alors, en tenant compte de II.6(1), sous l'hypothèse ci-dessus :

(2) $\zeta_d(\not\phi, \lambda)_{V(\not\phi)}$ est la restriction à $V'(\not\phi)$ de la fonction :

$$r(w_{\not\phi}, \lambda)_{d(\not\phi, \lambda)} \left(\sum_{\sigma \in W(\uparrow_0, \not\phi)} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right) \left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\not\phi} \lambda) \overline{\psi(-\tau w_{\not\phi} \bar{\lambda})} \right).$$

REMARQUE. On fixe i tel que $d < i \leq T$; on pose, ici, $S = S_i \cup S'_i$. Alors (cf. la remarque terminant II.4) $n_S(x, \mu, \lambda)_{V(\mu)}$ est l'inverse d'un polynôme si $x = \lambda_\mu + (x_1, \dots, x_T)$ est tel que x_1, \dots, x_d sont généraux et $|x_{d+1}|, \dots, |x_T| \leq \varepsilon$. Ainsi, grâce à II.2(2) et II.5, on voit que $\zeta_S(\mu, \lambda)_{V(\mu)}$ est holomorphe en $\lambda \in V(\mu)$ de partie réelle égale à x soumis aux conditions ci-dessus et de partie imaginaire plus petite que T .

COROLLAIRE. Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que l'on a :

$$(\phi, \psi) = \sum_{\mu} \sum_S I_{T,d,S}(\mu, x_\mu),$$

où μ parcourt l'ensemble des partitions d -admissibles $(p_1, \dots, p_T; q_1, \dots, q_s)$ et S parcourt l'ensemble des sous-ensembles de W de la forme $S_i \cup S'_i$ pour $d < i \leq T$, S_k pour $1 \leq k \leq s'$, S'_k pour $1 \leq k \leq s'$ avec $k < s'$ si $(\lambda_\mu, \alpha_n) = 1$ (où α_n est comme ci-dessus).

III.3. Preuve du théorème

On prouve le théorème par récurrence décroissante sur d . Si $d = n$, c'est la forme explicite du produit scalaire. Supposons donc le théorème démontré pour $d + 1$ et prouvons le pour d . On fixe ϕ, ψ, T comme en III.1. Soit μ une partition $d + 1$ -admissible; on fixe x_μ un point $d + 1$, μ -admissible avec les propriétés suivantes:

(1) $x_\mu = \lambda_\mu + (x_1, \dots, x_T)$, avec x_1, \dots, x_{d+1} grands et généraux et x_{d+2}, \dots, x_T très petits mais généraux (i.e. non nuls ainsi que leurs sommes et leurs différences).

Pour $z \in [0, x_{d+1}]$, on pose:

$$x_\mu(z) = \lambda_\mu + (x_1, \dots, x_{d+1} - z, \dots, x_T).$$

μ est d -admissible et $x_\mu(x_{d+1})$ est un point d , μ -admissible. On va d'abord mettre $I_{T,d+1}(\mu, x_\mu(x_{d+1}))$ sous une forme convenable puis on calculera la différence entre $I_{T,d+1}(\mu, x_\mu)$ et $I_{T,d+1}(\mu, x_\mu(x_{d+1}))$. C'est la démarche suivie en ([M-W]). On a:

LEMME. $I_{T,d+1}(\mu, x_\mu(x_{d+1})) = \sum_{\tilde{\mu}, S} I_{T,d,S}(\tilde{\mu}, x_{\tilde{\mu}})$, où la somme porte sur toutes les partitions $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_T; q_1, \dots, q_s)$ telles que $\mu = (p_1, \dots, p_T; q_1, \dots, q_s)$ et il existe j vérifiant $d \leq j \leq T$, $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_T) = (p_1, \dots, p_d, \tilde{p}_{d+1}, \dots, p_j, p_{d+1}, p_{j+1}, \dots)$ et où $S = \{\sigma \in W_d \mid \sigma(p'_{j+1}) = d + 1\}$ ou $S = \{\sigma \in W_d \mid \sigma(p'_{j+1}) = -(d + 1)\}$ (on remarque que $p'_{j+1} = \tilde{p}'_j + 1 = \tilde{p}'_{j+1}$).

On va utiliser II.6 (4) avec $\sigma_0 = \tau_0$ l'unique élément de W qui vérifie $W_{d+1}\sigma_0^{-1} = S$ (i.e. si $S = \{\sigma \in W \text{ tel que } \sigma(p'_{j+1}) = \pm(d + 1)\}$, le signe étant fixé

par S ; on a $\sigma_0(d+1) = \pm p'_{j+1}$ et σ_0 effectue les décalages nécessaires, i.e. $\sigma_0(t) = t$ pour $t \leq d$ et $t > p'_{j+1}$, $\sigma_0(t) = t - 1$ pour $d+1 < t \leq p'_{j+1}$. Les hypothèses de II.6(4) sont vérifiées et l'on en tire:

$$c_{d+1, \rho}^{-1} I_{T, d+1}(\rho, x_\rho(x_{d+1})) = c_{d, \tilde{\rho}}^{-1} I_{T, d, S}(\tilde{\rho}, \sigma_0 x_\rho(x_{d+1})).$$

On remarque que $\sigma_0(x_\rho(x_{d+1}))$ est un point d - $\tilde{\rho}$ -admissible et on sait (cf. II.6 et II.4), que $\zeta_S(\tilde{\rho}, \lambda)$ est holomorphe pour $|\operatorname{Im} \lambda| < T$ si $\operatorname{Re} \lambda$ est d - $\tilde{\rho}$ -admissible. Ainsi, on peut remplacer $\sigma_0(x_\rho(x_{d+1}))$ par n'importe quel point d - $\tilde{\rho}$ -admissible par exemple $x_{\tilde{\rho}}$. D'autre part, on a:

$$c_{d+1, \rho} = 2(T-d)c_{d, \tilde{\rho}},$$

car $d_{\tilde{\rho}} = d_\rho$, $\eta(\tilde{\rho}) = \eta(\rho)$ et le T est le même pour $\tilde{\rho}$. D'où:

$$I_{T, d+1}(\rho, x_\rho(x_{d+1})) = 2(T-d)I_{T, d, S}(\tilde{\rho}, x_{\tilde{\rho}})$$

et on obtient le lemme en sommant sur $\tilde{\rho}$ et S .

On en déduit immédiatement le corollaire:

COROLLAIRE. $\sum_\rho I_{T, d+1}(\rho, \lambda, x_\rho x_{d+1}) = \sum_{\tilde{\rho}, S} I_{T, d, S}(\tilde{\rho}, x_{\tilde{\rho}})$, où la somme de droite porte sur toutes les partitions d -admissibles $(p_1, \dots, p_T; q_1, \dots, q_S)$ et où S porte sur tous les ensembles du type $(S_i \cup S'_i)$ avec $d < i \leq T$ et $p_i = 1$. La somme de gauche porte, elle, sur toutes les partitions $d+1$ -admissibles.

III.4. Calcul de $I_{T, d+1}(\rho, x_\rho) - I_{T, d+1}(\rho, x_\rho(x_{d+1}))$

On fixe une partition $d+1$ -admissible, ρ . On fait le calcul annoncé dans le titre en suivant ([L], chapitre 7) i.e. en utilisant le théorème des résidus. En particulier, il faut déterminer les hyperplans de $V(\rho)$ singuliers pour $\zeta_{d+1}(\rho, \lambda)_{|V(\rho)}$ qui contiennent un élément λ tel que $\operatorname{Re} \lambda = x_\rho(z)$ pour $z \in [0, x_{d+1}]$ et $|\operatorname{Im} \lambda| < T$. Grâce au choix de x_ρ , toutes les hypothèses de II.4 où l'on fait $x = x_\rho(z)$ et S (notation de II.4) = W_{d+1} sont satisfaites pour tout z . Tenant compte de II.6(3) et II.5, on en déduit que les pôles sont au plus simples (cas 2 pour $i = d+1$, cas 3 et 4 de II.4) et que les résidus sont obtenus en calculant

$$\zeta_{d+1}(\rho, \lambda) n_{W_{d+1}}(x_\rho(z), \rho, \lambda)_{|V(\rho)} \quad (1)$$

à une constante près, notée α qui vaut 1 dans tous les cas sauf le cas 2 de II.4 où elle vaut 1/2 (α est le coefficient de X_{d+1} dans $n_{W_{d+1}}(x_\rho(z), \rho, \lambda)_{|V(\rho)}$).

On va écrire séparément tous les cas, mais la méthode est générale; dans chaque cas, on écrit une partition $\tilde{\rho}$, un élément σ_0 de W et un élément \tilde{x} de $V(\tilde{\rho})$

tels que l'on ait:

$$\sigma_0(x_{\neq}(z)) = \tilde{x}$$

et, en posant $\tilde{\lambda} = \sigma_0 \lambda$, $\tilde{S} = W_{d+1} \sigma_0^{-1}$,

$$n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{|V(\tilde{\neq})} \text{ est un polynôme de degré au plus 1} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_0 \{ \lambda \in V(\neq) \mid n_{W_{d+1}}(x_{\neq}(z), \neq, \lambda)_{|V(\neq)} = 0 \} \\ &= V(\tilde{\neq}) \text{ si } n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{|V(\tilde{\neq})} \text{ est de degré 0} \\ &= \{ \lambda \in V(\tilde{\neq}) \mid n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{|V(\tilde{\neq})} = 0 \} \text{ sinon} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \zeta_{d+1}(\neq, \lambda)_{W_{d+1}}(x_{\neq}(z), \neq, \lambda)_{V(\neq) \cap \{ \lambda \mid n_{W_{d+1}}(x_{\neq}(z), \neq, \lambda)_{|V(\neq)} = 0 \}} \\ &= \zeta_{\tilde{S}}(\tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{|V(\tilde{\neq})} \text{ si } n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{|V(\tilde{\neq})} \text{ est de degré 0} \\ &= -\zeta_{\tilde{S}}(\tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{\{ \lambda \in V(\tilde{\neq}) \mid n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{|V(\tilde{\neq})} = 0 \}} \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4)$$

Il ne faut pas que le lecteur s'effraye des différents cas et sous-cas ci-dessous. Ils ne font que passer en revue les différentes façons que l'on a d'enlever p_{d+1} à \neq et d'ajouter soit 1 à l'un de p_j (\tilde{S} est alors S_{j-1} ou S'_{j-1} , ces notations sont relatives à $\tilde{\neq}$, en remarquant que j devient $j-1$ dans $\tilde{\neq}$) soit 2 à l'un des q_j (éventuellement à $q_j = 0$) (\tilde{S} est alors $S_{(j+1)/2}$ si j est impair et $S_{j/2}$ si j est pair). Mais il est clair, que si l'on ajoute 2 à q_j alors que q_{j-1} valait $q_j + 2$, on n'a plus de partition convenable; on se trouve alors et alors seulement dans un des cas où $n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\neq}, \tilde{\lambda})$ est de degré 1. Comme (4) le suggère, le résidu obtenu sera éliminé par un autre résidu. Comme pour $GL(n)$, quand on ajoute 1 à un p_j , le point \tilde{x} n'est pas d - $\tilde{\neq}$ -admissible et il faut encore parcourir un nouveau chemin; sur ce chemin (contrairement au cas de $GL(n)$), on a encore des singularités dont certaines sont 'l'autre résidu' ci-dessus et les autres la contribution des partitions ayant un terme q_j qui vaut $q_{j+1} + 2$ avec $\tilde{S} = S_{(j+1)/2}$ si j est impair et $S'_{j/2}$ si j est pair (termes que l'on obtenait pas ci-dessus). Ensuite, il restera à regrouper tous les termes (y compris le deuxième membre de III.3 Corollaire) et à utiliser le corollaire de III.2.

Détaillons chaque cas:

1^e cas. Il existe i tel que $d+1 < i \leq T$ et $x_{d+1} - z = x_i + (p_i + 1)/2$. Alors $n_{W_{d+1}}(x_{\neq}(z), \neq, \lambda)_{|V(\neq)} = X_{d+1} - x_i - (p_i + 1)/2$. On pose:

$$\begin{aligned} \tilde{\neq} &= (p_1, \dots, p_d, p_{d+2}, \dots, p_i + 1, \dots, p_T; q_1, \dots, q_s) \\ &=: (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{T-1}; \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_s) \end{aligned}$$

Ici $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \neq} = (2\pi)^{-1} c_{d, \tilde{\neq}}$ car $d_{\neq} = d_{\tilde{\neq}} + 1$, $\eta(\neq) = \eta(\tilde{\neq})$ et $(T - (d+1)) = ((T-1) - d) = (\tilde{T} - d)$. On pose aussi

$$\sigma_0(d+1) = p'_i$$

et σ_0 effectue les décalages nécessaires, i.e.

$$\begin{aligned}\sigma_0(j) &= j \quad \text{pour } j \leq d \quad \text{ou } j > p'_i \\ &= j - 1 \quad \text{pour } d + 1 < j \leq p'_i.\end{aligned}$$

En particulier:

$$\tilde{S} := W_{d+1}\sigma_0^{-1} = \{\sigma \in W \mid \sigma(\tilde{p}'_{i-1} + 1) = d + 1\}.$$

On pose:

$$\tilde{x} = \lambda_{\tilde{\rho}} + (x_1, \dots, x_d, x_{d+2}, \dots, x_i + 1/2, \dots, x_T) = \sigma_0(x_{\rho}(z)) \in V(\tilde{\rho}).$$

On a aussi, ici:

$$\sigma_0(V(\rho) \cap \{x_{d+1} - X_i - (p_i + 1)/2 = 0\}) = V(\tilde{\rho}), \quad n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\rho}, \tilde{\lambda})_{V(\tilde{\rho})} = 1$$

en tenant compte des hypothèses de généralité sur $x_1, \dots, x_d, x_{d+2}, \dots, x_T$ et de II.3:

2^e cas. Il existe i tel que $d + 1 < i \leq T$ et $x_{d+1} - z = -x_i + (p_i + 1)/2$. Alors $n_{W_{d+1}}(x_{\rho}(z), \rho, \lambda)_{V(\rho)} = X_{d+1} + X_i - (p_i + 1)/2$. On pose, comme dans le premier cas:

$$\tilde{\rho} = (p_1, \dots, p_d, p_{d+2}, \dots, p_i + 1, \dots, p_T; q_1, \dots, q_s) =: (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{T-1}; \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_s)$$

Ici $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \rho} = (2\pi)^{-1} c_{d, \tilde{\rho}}$ comme dans le premier cas. On pose aussi

$$\sigma_0(d + 1) = -(p'_{i+1})$$

et σ_0 effectue les décalages nécessaires, i.e.

$$\begin{aligned}\sigma_0(j) &= j \quad \text{pour } j \leq d \quad \text{ou } j > p'_{i+1} \\ &= j - 1 \quad \text{pour } d + 1 < j \leq p'_{i+1}.\end{aligned}$$

En particulier:

$$\tilde{S} := W_{d+1}\sigma_0^{-1} = \{\sigma \in W \mid \sigma(\tilde{p}'_i) = -(d + 1)\}.$$

On pose:

$$\tilde{x} = \lambda_{\tilde{\rho}} + (x_1, \dots, x_d, x_{d+2}, \dots, x_i - 1/2, \dots, x_T) = \sigma_0(x_{\rho}(z)) \in V(\tilde{\rho}).$$

On a aussi, ici:

$$\sigma_0(V(\not{\rho}) \cap \{X_{d+1} - X_i - (p_i + 1)/2 = 0\}) = V(\not{\rho}), n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \not{\rho}, \tilde{\lambda})_{V(\not{\rho})} = 1$$

comme dans le premier cas.

3^e cas. Il existe k tel que $1 < k \leq s$ et $x_{d+1} - z = (q_{2k-1} + 1)/2$. Alors $n_{W_{d+1}}(x_{\not{\rho}}(z), \not{\rho}, \lambda)_{V(\not{\rho})} = X_{d+1} - (q_{2k-1} + 1)/2$. Ce cas se différencie en deux sous-cas.

3^e cas a: $q_{2k-2} > q_{2k-1} + 2$. On pose:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (p_1, \dots, p_d, p_{d+2}, \dots, p_T; q_1, \dots, q_{2k-2}, q_{2k-1} + 2, \dots, q_s) \\ &=: (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{T-1}; \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_s) \end{aligned}$$

Ici $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \not{\rho}} = (2\pi)^{-1} c_{d, \tilde{\rho}}$ comme dans le premier cas. On pose aussi

$$\sigma_0(d+1) = q'_k \quad \cdot$$

et σ_0 effectue les décalages nécessaires, i.e.

$$\begin{aligned} \sigma_0(j) &= j \quad \text{pour } j \leq d \quad \text{ou } j > q'_k \\ &= j - 1 \quad \text{pour } d+1 < j \leq p'_i. \end{aligned}$$

En particulier:

$$\tilde{S} := W_{d+1} \sigma_0^{-1} = \{\sigma \in W \mid \sigma(\tilde{q}'_k + 1) = d+1\}.$$

On pose:

$$\tilde{x} = \lambda_{\tilde{\rho}} + (x_1, \dots, x_d, x_{d+2}, \dots, x_T) = \sigma_0(x_{\not{\rho}}(z)) \in V(\tilde{\rho}).$$

On a aussi, ici:

$$\sigma_0(V(\not{\rho}) \cap \{X_{d+1} - (q_{2k-1} + 1)/2 = 0\}) = V(\tilde{\rho}), n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\rho}, \tilde{\lambda})_{V(\tilde{\rho})} = 1$$

cf. II.3 en tenant compte des hypothèses de généralité faites sur x .

3^e cas b: $q_{2k-2} = q_{2k-1} + 2$. On pose:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (p_1, \dots, p_d, q_{2k-2}, p_{d+2}, \dots, p_T; q_1, \dots, q_{2k-3}, q_{2k}, \dots, q_s) \\ &=: (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_T; \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_{s-2}) \end{aligned}$$

Ici $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \not\neq} = (T-d)/2c_{d, \tilde{\neq}}$ car $T - (d+1) + \eta(\not\neq) = T - d + \eta(\tilde{\neq}) + 1$, puisque s a baissé de 2 pour $\tilde{\neq}$ et T ne change pas pour $\tilde{\neq}$ i.e. $d_{\not\neq}$ non plus. On pose aussi

$$\begin{aligned}\sigma_0(d+1) &= d+1 \\ \sigma_0(h_{k-1} + t) &= d+t \quad \text{pour } 2 \leq t \leq q_{2k-2}\end{aligned}$$

et σ_0 effectue les décalages nécessaires, i.e.

$$\begin{aligned}\sigma_0(j) &= j \quad \text{pour } j \leq d \quad \text{ou } j > q'_k \\ &= j + q_{2k-2} - 1 \quad \text{pour } d+1 < j \leq h_{k-1} + 1.\end{aligned}$$

En particulier:

$$\tilde{S} := W_{d+1}\sigma_0^{-1} = \{\sigma \in W \mid \sigma(\tilde{p}'_{d+1} + 1) = d+1\},$$

on a $\tilde{p}'_{d+1} + 1 = d+1$. On pose:

$$\tilde{x} = \lambda_{\tilde{\neq}} + (x_1, \dots, x_d, 0, x_{d+2}, \dots, x_T) = \sigma_0(x_{\not\neq}(z)) \in V(\tilde{\neq}).$$

On a aussi, ici:

$$n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\neq}, \tilde{\lambda})_{V(\tilde{\neq})} = 2\tilde{X}_{d+1}$$

(cf. II.4) où $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_T$ sont les coordonnées naturelles de $V(\tilde{\neq})$ et l'on a:

$$\sigma_0(V(\not\neq) \cap \{X_{d+1} - (q_{2k-1} + 1)/2 = 0\}) = V(\tilde{\neq}) \cap \{\tilde{X}_{d+1} = 0\}.$$

4^e cas. Il existe k tel que $1 < k \leq s'$ et $x_{d+1} - z = (q_{2k} + 1)/2$. Alors $n_{W_{d+1}}(x_{\not\neq}(z), \lambda)_{V(\not\neq)} = X_{d+1} - (q_{2k} + 1)/2$. Ce cas se différencie aussi en deux sous-cas.

4^e cas a: $q_{2k-1} > q_{2k} + 2$. On pose:

$$\begin{aligned}\tilde{\neq} &= (p_1, \dots, p_d, p_{d+2}, \dots, p_T; q_1, \dots, q_{2k-1}, q_{2k} + 2, \dots, q_s) \\ &=: (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{T-1}; \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_s)\end{aligned}$$

Ici $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \not\neq} = (2\pi)^{-1}c_{d, \tilde{\neq}}$ comme dans le premier cas. On pose aussi

$$\sigma_0(d+1) = -(q'_{k+1})$$

et σ_0 effectue les décalages nécessaires, i.e.

$$\begin{aligned}\sigma_0(j) &= j \quad \text{pour } j \leq d \quad \text{ou } j > q'_{k+1} \\ &= j - 1 \quad \text{pour } d + 1 < j \leq q'_{k+1}.\end{aligned}$$

En particulier:

$$\tilde{S} := W_{d+1}\sigma_0^{-1} = \{\sigma \in W \mid \sigma(\tilde{q}'_k + 1) = -(d + 1)\}.$$

$\tilde{\alpha}$ est comme dans le cas 3(a) et le reste est sans changement par rapport au cas 3(a).

4^e cas b: $q_{2k-1} = q_{2k} + 2$. On pose:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda} &= (p_1, \dots, p_d, q_{2k-1}, p_{d+2}, \dots, p_T; q_1, \dots, q_{2k-2}, q_{2k+1}, \dots, q_s) \\ &=: (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_T; \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_{s-2})\end{aligned}$$

Ici $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \tilde{\lambda}} = (T - d)/2c_{d, \tilde{\lambda}}$ comme dans le cas 3b.

$$\begin{aligned}\sigma_0(d + 1) &= d + 1 \\ \sigma_0(q'_k + t) &= d + t \quad \text{pour } 2 \leq t \leq q_{2k-1} - 1 \\ \sigma_0(q'_k + 1) &= -(d + q_{2k-1})\end{aligned}$$

et σ_0 effectue les décalages nécessaires, i.e.

$$\begin{aligned}\sigma_0(j) &= j \quad \text{pour } j \leq d \quad \text{ou } j > q'_{k+1} \\ &= j + q_{2k} + 1 \quad \text{pour } d + 1 < j \leq q'_k.\end{aligned}$$

En particulier:

$$\tilde{S} := W_{d+1}\sigma_0^{-1} = W_{d+1}$$

Ici $\tilde{\alpha}$ et $n_{\tilde{S}}(\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})$ sont comme dans le cas 3(b) et l'on a les mêmes propriétés.

5^e cas. $x_{d+1} - z = 1/2$ pour $G = \text{SO}(2n + 1)$ ou $x_{d+1} - z = 1$ pour $G = \text{Sp}(2n)$ avec $q_s = 1$. Alors $n_{w_{d+1}}(x_{\tilde{\lambda}}(z), \tilde{\lambda}, \lambda)_{V(\tilde{\lambda})}$ vaut $2X_{d+1} - 1$ pour $G = \text{SO}(2n + 1)$ (d'où l'apparition de la constante $1/2$ dans ce qui a été dit avant le 1^e cas) et $X_{d+1} - 1$ pour $G = \text{Sp}(2n)$. Ce cas se différencie en deux sous cas:

5^e cas (a): $q_s > 2$ pour $G = \text{SO}(2n + 1)$ ou $1_{s-1} > 3$ pour $G = \text{Sp}(2n)$.

On pose:

$$\tilde{\lambda} = (p_1, \dots, p_d, p_{d+2}, \dots, p_T; q_1, \dots, q_s, 2) =: (\tilde{p}_1 \cdots \tilde{p}_{T-1}; \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_{s+1})$$

pour $G = \mathrm{SO}(2n + 1)$ Ici $\alpha = 1/2$ et $\alpha c_{d+1, \check{\mu}} = (2\pi)^{-1} c_{d, \check{\mu}}$ car s devient $s + 1$ dans $\check{\mu}$. On pose

$$\check{\mu} = (p_1, \dots, p_d, p_{d+2}, \dots, p_T; q_1, \dots, q_s + 2) =: (\check{p}_1 \cdots \check{p}_{T-1}; \check{q}_1 \cdots \check{q}_s)$$

pour $G = \mathrm{Sp}(2n)$ (on a d'ailleurs: $q_s + 2 = 3$). Ici $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \check{\mu}} = (2\pi)^{-1} c_{d, \check{\mu}}$ comme dans le premier cas. On pose aussi:

$$\sigma_0(d + 1) = n$$

si $G = \mathrm{Sp}(2n)$ ou $G = \mathrm{SO}(2n + 1)$ avec s pair et

$$\sigma_0(d + 1) = -n$$

sinon, σ_0 effectuant sur les autres éléments les décalages nécessaires. On n'écrit pas \tilde{S} qui se calcule aisément et pour le reste on a les mêmes propriétés que dans les cas 3(a) et 4(a).

5^e cas(b): $q_s = 2$ pour $G = \mathrm{SO}(2n + 1)$ ou $q_{s-1} = 3$ pour $G = \mathrm{Sp}(2n)$. On pose:

$$\check{\mu} = (p_1, \dots, p_d, 2, \dots, p_T; q_1, \dots, q_{s-1})$$

pour $G = \mathrm{SO}(2n + 1)$. Ici $\alpha = 1/2$, $c_{d+1, \check{\mu}} = (T - d)/2 c_{d, \check{\mu}}$. On pose

$$\check{\mu} = (p_1, \dots, p_d, 3, \dots, p_T; q_1, \dots, q_{s_2}, q_s)$$

pour $G = \mathrm{Sp}(2n)$. Alors $\alpha = 1$ et $c_{d+1, \check{\mu}} = (T - d)/2 c_{d, \check{\mu}}$. On définit aussi σ_0 par:

$$\sigma_0(d + 1) = (d + 1)$$

$$\sigma_0(n) = d + 2 \quad \text{si } q_s = 2 \quad \text{et } s \text{ est pair}$$

$$= -(d + 2) \quad \text{si } q_s = 2 \quad \text{et } s \text{ est impair}$$

$$= d + 3 \quad \text{et } \sigma_0(n - 1) = d + 2 \quad \text{si } q_{s-1} = 3,$$

et σ_0 effectue les décalages nécessaires. On a:

$$\tilde{S} = W_{d+1},$$

$$\tilde{x} = \lambda_{\check{\mu}} + (x_1, \dots, x_d, 0, x_{d+2}, \dots, x_T),$$

$$n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \check{\mu}, \lambda) = 2\tilde{X}_{d+1}$$

et on a les mêmes propriétés que dans les cas 3(b) et 4(b).

Il faut maintenant prouver (4) puisque (2) et (3) ont été déjà vues. La preuve est

la même dans tous les cas. On pose:

$$\tau_0 = w_{\tilde{\lambda}\sigma_0 w_{\tilde{\mu}}},$$

nous n'avons pas besoin de calculer explicitement τ_0 . On pose aussi:

$$\tilde{\sigma} = \sigma\sigma_0^{-1}, \quad \tilde{\tau} = \tau\tau_0^{-1}, \quad \tilde{\lambda} = \sigma_0\lambda.$$

Alors, on a, en tant que fonctions méromorphes de \mathbf{C}^n , par un simple changement de variables:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \overline{W_{d+1}}} r(\sigma, -\lambda)\phi(\rho\lambda) \sum_{\tau \in \overline{W}} r(\tau, w_{\tilde{\mu}}\lambda)\overline{\psi(-\tau w_{\tilde{\mu}}\tilde{\lambda})} \times r(w_{\tilde{\mu}}, \lambda) \\ &= \sum_{\tilde{\sigma} \in \overline{S}} r(\tilde{\sigma}, -\tilde{\lambda})\phi(\tilde{\sigma}\tilde{\lambda}) \sum_{\tilde{\tau} \in \overline{W}} r(\tilde{\tau}, w_{\tilde{\lambda}}\tilde{\lambda})\overline{\psi(-\tilde{\tau} w_{\tilde{\lambda}}\tilde{\lambda})} \times r(w_{\tilde{\lambda}}, \tilde{\lambda}). \end{aligned}$$

On pose:

$$Q(\lambda) = d(\tilde{\mu}, \lambda)n_{W_{d+1}}(x_{\tilde{\mu}}(z), \tilde{\mu}, \lambda)d(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda})^{-1}n_S(\tilde{x}, \tilde{\mu}, \tilde{\lambda})^{-1};$$

c'est une fraction rationnelle de \mathbf{C}^n et il suffit de prouver qu'elle vaut 1 dans les cas 1, 2, 3(a), 4(a), 5(a) et -1 dans les 3(b), 4(b), 5(b). Prouvons cela. On fixe S du type considéré en II.4; on écrit:

$$\begin{aligned} \Delta_{S,\pm} &:= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \forall \sigma \in S, \sigma(\alpha) \in \Delta^{\pm}\}, \\ \Delta^S &:= \Delta^+ - \Delta_{S,+} - \Delta_{S,-}. \end{aligned}$$

On reprend les notations, I_x, J_x, K_x de I.4. Et l'on a:

$$d(\tilde{\mu}, \lambda) = \prod_{\alpha \in K_x \cap \text{inv}(w_{\tilde{\mu}})} ((\lambda, \tilde{\alpha}) - 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} n_S(x, \tilde{\mu}, \lambda)d(\tilde{\mu}, \lambda) &= \prod_{\alpha \in I_x \cap (\Delta^S \cup \Delta_{S,-})} ((\lambda, \tilde{\alpha}) + 1) \prod_{\alpha \in K_x} ((\lambda, \tilde{\alpha}) - 1) \\ & \prod_{\alpha \in J_x \cap \Delta^S} (\lambda, \tilde{\alpha})^{-1} \prod_{\alpha \in J_x} (\lambda, \tilde{\alpha})^{-1} \prod_{\alpha \in K_x \cap \Delta_{S,-}} ((\lambda, \tilde{\alpha}) - 1)^{-1} \\ &= \prod_{\alpha \in I_x \cap (\Delta_S \cup \Delta_{S,-})} ((\lambda, \tilde{\alpha}) + 1) \prod_{\alpha \in K_x \cap (\Delta_S \cup \Delta_{S,+})} ((\lambda, \tilde{\alpha}) - 1) \\ & \prod_{\alpha \in J_x \cap (\Delta_{S,-} \cup \Delta_{S,+})} (\lambda, \tilde{\alpha})^{-1} \prod_{\alpha \in J_x \cap \Delta^S} (\lambda, \tilde{\alpha})^{-2}. \end{aligned}$$

Soit $\sigma_0 \in W$; on pose $\tilde{S} = S\sigma_0^{-1}$ et on suppose que \tilde{S} est aussi du type considéré en I.5 pour une partition, notée $\tilde{\lambda}$. On pose $\tilde{\lambda} = \sigma_0\lambda$, $\tilde{x} = \sigma_0(x)$ et on suppose que $\tilde{x} \in V(\tilde{\lambda})$. Soit $\alpha \in \Delta^+$; on pose $\tilde{\alpha} = \sigma_0\alpha$ si $\sigma_0\alpha \in \Delta^+$ et $\tilde{\alpha} = -\sigma_0(\alpha)$ sinon. On vérifie que si $\alpha \in \Delta^S$ alors $\tilde{\alpha} \in \Delta^S$ et que si $\alpha \in \Delta_{S,+}$ on a $\tilde{\alpha} \in \Delta_{S,+}$ si $\tilde{\alpha} = \sigma_0\alpha$ et $\tilde{\alpha} \in \Delta_{S,-}$ sinon. Par un calcul immédiat, on obtient:

$$n_S(x, \lambda)d(\lambda)d(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})^{-1}n_S(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})^{-1} = (-1)^D$$

où

$$D := |\{I_x \cap (\Delta^S \cup \Delta_{S,-})\} \cup \{K_x \cap (\Delta^S \cup \Delta_{S,+})\} \cup \{J_x \cap (\Delta_{S,+} \cup \Delta_{S,-}) \cap \text{inv}(\sigma_0)\}|,$$

où $\text{inv}(\sigma_0)$ est $\{\alpha \in \Delta^+ \mid \sigma_0(\alpha) \notin \Delta^+\}$. Ainsi, le calcul de $Q(\lambda)$ est le calcul de la parité de D dans les différents cas considérés. On a:

$D = 0$ dans les cas 1 et 2 (calcul facile)

D est pair dans les cas 3(a), 4(a), 5(a); (5)

en effet, on a:

$$\begin{aligned} \Delta^{W_{d+1}} \cap \text{inv}(\sigma_0) &= \emptyset, & \Delta_{W_{d+1,-}} &= \emptyset \\ |\{K_x \cap \Delta_{W_{d+1,+}} \cap \text{inv}(\sigma_0)\}| &= |\{J_x \cap \Delta_{W_{d+1,+}} \cap \text{inv}(\sigma_0)\}|. \end{aligned}$$

D'où $Q(\lambda) = 1$ dans ces cas.

Dans les cas (b), on vérifie que l'on a, en posant $S = W_{d+1}$ (d'où $\text{inv}(\sigma_0) \subset \Delta^S$):

$$\begin{aligned} (K_x \cup J_x) \cap \Delta_{S,+} \cap \text{inv}(\sigma_0) &= \emptyset, \\ |\{I_x \cap \Delta^S \cap \text{inv}(\sigma_0)\}| &= |\{K_x \cap \Delta^S \cap \text{inv}(\sigma_0)\}| - 1, \\ (I_x \cup J_x) \cap \Delta_{S,-} \cap \text{inv}(\sigma_0) &= \emptyset. \end{aligned} \tag{6}$$

D'où $Q(\lambda) = -1$ dans ces cas.

Résumons la contribution des résidus obtenus à la différence $I_{T,d+1}(\lambda, x) - I_{T,d+1}(\lambda, x(x_{d+1}))$ à '= \mathbf{T} ' près:

(7) dans les cas a:

$$I_{T,d,S}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}),$$

dans les cas b:

$$-(T-d)/2c_{d,\tilde{\lambda}}2\pi \int_{\lambda \in V(\tilde{\lambda}) \mid \tilde{\lambda}_{d+1}=0, \text{Re } \lambda = \tilde{x}, |\text{Im } \lambda| < \mathbf{T}} \zeta_S(\tilde{\lambda}, \lambda)n_S(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \lambda)|_{V(\tilde{\lambda})}.$$

On remarque que dans les 5 cas ci-dessus \tilde{x} est d - $\tilde{\lambda}$ -admissible sauf dans les cas 1 et 2. Il faut donc encore parcourir un chemin (cf. [M-W], III). Pour cela, on fixe $d + 1 \leq i \leq T$ et z_1 (resp. z_2) tels que le cas 1 (resp. 2) se produise pour ces valeurs. On note \tilde{x} par \tilde{x}_1 ou \tilde{x}_2 suivant le cas considéré. Si l'on est dans le cas 1, pour $z' \in [0, 1/2 + 2x_i]$, on pose $\tilde{x}_1(z') = \lambda_{\tilde{\lambda}} + (x_1, \dots, x_d, x_{d+2}, \dots, x_i + 1/2 - z', \dots, x_T)$ et si l'on est dans le cas 2, pour $z' \in [0, 1/2 - 2x_i]$, on pose $\tilde{x}_2(z') = \lambda_{\tilde{\lambda}} + (x_1, \dots, x_d, x_{d+2}, \dots, x_i - 1/2 + z', \dots, x_T)$. De cette façon $x_i + 1/2 - z'$ parcourt, en sens inverse, l'intervalle $[-x_i, x_i + 1/2]$ tandis que $x_i - 1/2 + z'$ parcourt en sens inverse, l'intervalle $[-x_i, x_i - 1/2]$. Ainsi, on a:

$$I_{T,d,S_1}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_1(1/2 + 2x_i)) + I_{T,d,S_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2(1/2 - 2x_i)) = I_{T,d,S_{i-1} \cup S_{i-1}}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}),$$

où $\tilde{x} = \lambda_{\tilde{\lambda}} + (x_1, \dots, x_d, x_{d+2}, \dots, -x_i, \dots, x_T)$ est un point d - $\tilde{\lambda}$ -admissible. Il faut donc calculer les deux différences suivantes:

$$I_{T,d,S_1}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_1) - I_{T,d,S_1}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_1(1/2 + 2x_i))$$

et

$$I_{T,d,S_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2) - I_{T,d,S_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_2(1/2 - 2x_i))$$

à \mathbf{T} près. La deuxième différence est 'nulle' parce que l'on ne traverse pas d'hyperplan singulier pour $\zeta_{S_2}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})_{V(\tilde{\lambda})}$ quand $|\text{Im } \tilde{\lambda}| < \mathbf{T}$ et $\text{Re } \tilde{\lambda} = \tilde{x}_2(z')$ avec $\tilde{x}_2(z')_i \in [-x_i, x_i - 1/2]$ (cf. II.6(3), II.5 et II.4). Il n'y a donc qu'à regarder la première différence. On peut alors oublier l'indice 1 et revenir à $\tilde{S} = S_{i-1}$, $\tilde{\lambda}$ et \tilde{x} . En utilisant les mêmes références que ci-dessus, on voit que $\zeta_{S_{i-1}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})_{V(\tilde{\lambda})}$ a des singularités pour $\tilde{\lambda}$ tel que $|\text{Im } \tilde{\lambda}| < \mathbf{T}$ seulement si $\text{Re } \tilde{\lambda} = \tilde{x}(z')$ avec $z' = x_i$ ou $1/2 + x_i$. Ces singularités sont au plus simples et le résidu se calcule en considérant la restriction aux hyperplans singuliers de:

$$1/2(\zeta_{S_{i-1}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})n_{S_{i-1}}(\tilde{x}(z'), \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}))_{V(\tilde{\lambda})}.$$

On procède comme précédemment, i.e. on écrit tous les cas où il y a des singularités; dans ces cas, on donne une nouvelle partition, notée $\tilde{\lambda}$ un élément $\tilde{\sigma}_0 \in W$ et un élément $\tilde{x} \in V(\tilde{\lambda})$. On vérifie l'analogie de (2), (3) et (4).

6^e cas. $z' = x_i$, $\tilde{p}_{i-1} - 1$ est non nul et de la parité des \tilde{q}_j mais n'est pas l'un des \tilde{q}_j . On a $n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) = (2\tilde{X}_i - 1)$. Ce cas se différencie en deux:

6^e cas (a): $\tilde{p}_{i-1} + 1$ n'est pas l'un des \tilde{q}_j . Alors on pose:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{i-1}, \dots, \tilde{p}_{T-1}; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{p}_{i-1} + 1, \tilde{p}_{i-1} - 1, \dots, \tilde{q}_s) \\ &=: (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{T-2}; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{s+2}) \end{aligned}$$

où $\tilde{p}_{i-1} + 1$ et $\tilde{p}_{i-1} - 1$ ont été placés de sorte que l'on ait:

$$\tilde{q}_1 > \cdots > \tilde{q}_{s+2}.$$

On a: $1/2c_{d,\tilde{p}} = (2\pi)^{-1}c_{d,\tilde{p}}\tilde{\gamma}(T-d-1)^{-1}$. On pose:

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \dots, \tilde{x}_{T-1}).$$

On note j l'entier compris entre 1 et $s+1$ tel que l'on ait $\tilde{q}_j = \tilde{p}_{i-1} + 1$. On pose $k := \lfloor (j+1)/2 \rfloor$. Je n'écris pas $\tilde{\sigma}_0$ qui dépend de la parité de j mais on a les analogues de (2), (3) et (4), d'où comme contribution de ce résidu:

$$(T-d-1)^{-1}I_{T,S_k}(\tilde{p}, \tilde{x})$$

Si j est impair, et

$$(T-d-1)^{-1}I_{T,S_k}(\tilde{p}, \tilde{x})$$

si j est pair (on utilise, ici, le fait que $c_{d+1,\tilde{p}} = 2c_{d,\tilde{p}}$).

On remarque que ces contributions sont du type des contributions obtenues dans les cas 3(a), 4(a) et 5(a) mais qu'elles ne pouvaient être obtenues dans ces cas là car $\tilde{q}_j = \tilde{q}_{j+1} + 2$ et $\tilde{q}_{j+1} \neq 0$.

6^e cas (b): $\tilde{p}_{i-1} + 1$ est l'un des \tilde{q}_j .

On pose:

$$\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{i-1} + 1, \dots, \tilde{p}_{T-1}; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_t - 2, \dots, \tilde{q}_s),$$

où t est l'unique entier tel que $\tilde{q}_t = \tilde{p}_{i-1} + 1$. On pose aussi:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \lambda_{\tilde{p}} + (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-2}, 0, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_{T-1}) \\ &= \lambda_{\tilde{p}} + (x_1, \dots, \tilde{x}_{d+1}, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_T). \end{aligned}$$

On pose $k = \lfloor (t+1)/2 \rfloor$ et on définit $\tilde{\sigma}_0 \in W$ tel que l'on ait:

$$\tilde{\sigma}_0(\tilde{q}'_k + 1) = -\tilde{p}'_i$$

si t est impair,

$$\tilde{\sigma}_0(\tilde{q}'_{k+1}) = \tilde{p}'_i$$

si t est pair et $\tilde{\sigma}_0$ effectue les décalages nécessaires.

On a :

$$\tilde{S} := \tilde{S}\tilde{\sigma}_0^{-1} = \{\sigma \in W \mid \sigma(\tilde{p}'_{i-1} + 1) = d + 1\}$$

$$n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \lambda) = 2\tilde{X}_{i-1},$$

$$\tilde{\sigma}_0(\tilde{x}(x_i)) = \tilde{x} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_0(V(\tilde{\lambda}) \cap \{\tilde{X}_i = 1/2\}) = V(\tilde{\lambda}) \cap \{\tilde{X}_i = 0\}.$$

On démontre que l'on a (en posant $\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_0\lambda$):

$$\zeta_{\tilde{S}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})n_{\tilde{S}}(\tilde{x}(x_i), \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) = -\zeta_{\tilde{S}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})$$

comme en (6) (les égalités de (6) sont vraies en remplaçant S par \tilde{S} et \tilde{S} par \tilde{S}).

7^e cas: $z' = 1/2 + x_i$ ici on prend $\tilde{\lambda} = \lambda$, $\tilde{x} = \tilde{x}(1/2 + x_i)$, et $\tilde{\sigma}_0 = \text{identité}$.

SOUS-LEMME. *La contribution des résidus obtenus dans le 7^e cas quand i et λ varient s'éliminent avec les résidus obtenus dans les cas 3(b), 4(b), 5(b), 6(b) quand λ varie parmi les partitions $d + 1$ -admissibles.*

On fixe λ comme dans le 7^e cas; i est ici le $i - 1$ du 7^e cas et l'on écrit $\lambda = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_S)$. On sait que \tilde{p}_i est de la parité des q_j , sans être l'un d'entre eux. On suppose d'abord que $\tilde{p}_i - 2$ est l'un des \tilde{q}_j . On note λ_0 la partition $d + 1$ -admissible:

$$\lambda_0 = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d, 1, \tilde{p}_{d+1}, \dots, \tilde{p}_i - 2, \dots, \tilde{p}_T, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_i + 2, \dots, \tilde{q}_S)$$

où t est l'unique entier tel que $\tilde{q}_t = \tilde{p}_i - 2$. Dans le 6^e cas obtenu à partir de λ_0 on a un résidu qui clairement est l'opposé de la contribution de λ . Et réciproquement, i.e. les résidus obtenus dans les 6^e cas (b) s'éliminent avec ceux obtenus dans les 7^e cas pour des partitions λ et des entiers i tels que $\tilde{p}_i - 2$ soit l'un des \tilde{q}_j . Supposons que cette dernière condition ne soit plus vérifiée. On pose σ_1 la permutation qui vérifie:

$$\sigma_1(\tilde{p}'_i + t) = d + t$$

et effectue les décalages nécessaires sur les autres éléments. On pose aussi:

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d, \tilde{p}_i, \tilde{p}_{d+1}, \dots, \tilde{p}'_i, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_S),$$

$$\tilde{x} = \sigma_1(\tilde{x}), \quad \tilde{\lambda} = \sigma_1\lambda.$$

On vérifie que l'on a:

$$\zeta_{\tilde{S}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})n_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})|_{V(\tilde{\lambda}) \cap \{\tilde{X}_i = 0\}} = \zeta_{W_{d+1}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})n_{W_{d+1}}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})|_{V(\tilde{\lambda}) \cap \{\tilde{X}_{d+1} = 0\}}.$$

La méthode pour prouver cette égalité est celle déjà employée. Ainsi, la somme des contributions des résidus obtenus dans le 7^e cas quand $\tilde{\lambda}$ et i varient avec les hypothèses faites sur \tilde{p}_i , vaut: (on tient compte du $1/2$ qui apparaissait dans (8) et de ce qu'il y a $(\tilde{T} - d)$ partitions $\tilde{\lambda}$ qui donnent la même partition $\tilde{\lambda}$)

$$\sum (\tilde{T} - d)/2 \times (2\pi) \int_{\lambda \in V(\tilde{\lambda}) | \tilde{X}_{d+1} = 0, |\operatorname{Im} \lambda| < T, \operatorname{Re} \lambda = \tilde{x}} c_{d, \tilde{\lambda}} \times \zeta_{W_{d+1}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) n_{W_{d+1}}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda}, \tag{9}$$

où la somme porte sur les partitions d -admissibles $\tilde{\lambda} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s)$ telles que \tilde{p}_{d+1} soit > 1 et de la parité des \tilde{q}_j et ni \tilde{p}_{d+1} ni $\tilde{p}_{d+1} - 2$ ne sont l'un des \tilde{q}_j . Soit $\tilde{\lambda}$ une telle partition; on pose $T = \tilde{T}$, $s = \tilde{s}$ et

$$\begin{aligned} \mu_0 &:= (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d, 1, \tilde{p}_{d+2}, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{p}_{d+1}, \tilde{p}_{d+1} - 2, \dots, \tilde{q}_s) \\ &:= (p_1, \dots, p_T; q_1, \dots, q_{s+2}), \end{aligned}$$

où \tilde{p}_{d+1} et $\tilde{p}_{d+1} - 2$ ont été placés de tel sorte que $q_1 > \dots > q_{s+2}$. On note j l'entier tel que $q_j = \tilde{p}_{d+1} - 2$ (éventuellement $q_j = 0$). Il est alors facile de voir que la partition $\tilde{\lambda}$ coïncide avec μ_0 dans le cas 3(b) si j est impair, dans le cas 4(b) si j est pair ($q_j \neq 0$) et dans le cas 5(b) si $q_j = 0$ ou $q_j = 1$ avec j impair (i.e. $G = \operatorname{Sp}(2n)$ et $j = s + 2$). D'où la simplification annoncée. On vérifie, ensuite, aisément que l'on a utilisé exactement une fois les résidus obtenus dans les cas 3(b), 4(b) et 5(b). Cela termine la preuve du sous-lemme.

III.5. Fin de la preuve

Il reste à regrouper toutes les contributions des résidus obtenus dans les cas (a) et à l'extrémité des premiers chemins. Vérifions que l'on a:

$$\sum_{\tilde{\lambda}} I_{T, d+1}(\mu, x_\mu) = \sum_{\tilde{\lambda}, \tilde{S}} I_{T, d, \tilde{S}}(\tilde{\lambda}, x_{\tilde{\lambda}})$$

où la première somme porte sur les partitions $d + 1$ -admissibles, la deuxième somme porte sur les partitions d -admissibles avec \tilde{S} parcourant, pour $\tilde{\lambda} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s)$ fixée l'ensemble $\{(\tilde{S}_i \cup \tilde{S}'_i)_{d < i \leq T}, (\tilde{S}'_k)_{1 \leq k \leq s'}, (\tilde{S}'_k)_{1 \leq k \leq s'}\}$ en exceptant \tilde{S}'_s si $(\lambda_{\tilde{\lambda}}, \alpha_n) = 1$ (cf. I.5 et III.2 corollaire).

Fixons \tilde{S} et $\tilde{\lambda}$ comme dans le 2^e membre;

1^e cas. $\tilde{S} = \tilde{S}_i \cup \tilde{S}'_i$ pour $d < i \leq T$. Si $\tilde{p}_i = 1$, $I_{\tilde{S}}(\tilde{\lambda}, \lambda)$ est une des contributions du deuxième membre du corollaire de III.3. Supposons que $p_i > 1$; on pose

$$\mu = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d, 1, \tilde{p}_{d+1}, \dots, \tilde{p}_i - 1, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_s).$$

On a: $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{\lambda}$ dans le cas 1 et 2 et $\tilde{S} = \tilde{S}_i$ dans le cas 1 et $\tilde{S} = \tilde{S}_i$ dans le cas 2. Ainsi, $I_{\tilde{S}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})$ s'obtient grâce aux extrémités des deuxièmes chemins (cas 1 et 2).

2^e cas: $\tilde{S} = S_k$. Si $\tilde{q}_{2k-1} - 2 > \tilde{q}_{2k}$, on pose:

$$\not\lambda_0 = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d, 1, \tilde{p}_{d+1}, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{2k-1} - 2, \dots, \tilde{q}_s).$$

et $I_{\tilde{S}}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda})$ s'obtient grâce au résidu obtenu en partant de $\not\lambda_0$ le long de $\{X_{d+1} - (q_{2k-1} + 1)/2 = 0\}$ dans le cas 3(a).

Si $\tilde{q}_{2k-1} - 2 = \tilde{q}_{2k} \neq 0$, on pose:

$$\not\lambda_0 := (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d, 1, \tilde{p}_{d+1}, \dots, \tilde{q}_{2k}, \dots, \tilde{p}_T; \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_{2k-2}, \tilde{q}_{2k+1}, \dots, \tilde{q}_s)$$

où \tilde{q}_{2k} est placé à n'importe quelle place au delà du 1 et avant le point virgule. Il y a $T + 1 - d$ possibilités. La valeur de T pour $\not\lambda_0$ est $T + 2$, on utilise alors la contribution des résidus du cas 6(a), j impair (notation du cas 6(a)) pour obtenir $I_{\tilde{S}}(\tilde{\lambda}, \lambda)$.

Si $\tilde{q}_{2k-1} - 2 \leq 0$, on utilise le cas 5(a).

3^e cas. $\tilde{S} = S'_k$. On procède comme pour S_k mais il faut $q_{2k} \geq 2$ ce qui exclut S'_k dans tous les cas où $(\lambda_{\tilde{\lambda}}, \alpha_n) = 1$ (notation ci-dessus).

Il faut vérifier que l'on a utilisé toutes les extrémités des chemins et toutes les contributions des résidus exactement une fois dans la procédure ci-dessus. C'est facile et cela termine la preuve.

III.6. PROPOSITION. Soit μ une partition de la forme $(; q_1, \dots, q_s)$ avec $q_1 > \dots > q_s$ (i.e. l'orbite de G' correspondante a comme partition (q_1, \dots, q_s) et ne rencontre aucun sous-groupe de Levi propre de G'). Alors la forme bilinéaire sur \mathbb{F} (notation de l'introduction):

$$(\phi, \psi) \mapsto \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma\lambda) \right) \sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\mu}\lambda) \overline{\psi(-\tau w_{\mu}\lambda)}$$

calculée en $\lambda = \lambda_{\mu}$ grâce à II.6, est hermitienne de rang exactement 1. Elle coïncide, évidemment, avec:

$$(\phi, \psi) \mapsto \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma\lambda) \right) \left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, -\lambda) \psi(\tau\lambda) \right)$$

calculé en $\lambda = \lambda_{\mu}$ grâce à II.6.

On écrit $n'(\lambda)$ pour $n'_W(\lambda_{\mu}, \mu, \lambda)$. Il résulte de II.3 que $n'(\lambda)$ restreint à $V'(\mu)$ vaut

1. Ainsi, on définit $(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda))_{\lambda=\lambda_{\mu}}$ comme étant la valeur de la fonction de C^n holomorphe en λ_{μ} suivante (cela est conforme avec II.6)

$$l'(\lambda) := n'(\lambda) \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda) \right).$$

On pose $n''(\lambda) = n''(\lambda_{\mu}, \mu, \lambda)$ et l'on a:

$$l''(\lambda) := \left(\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\mu}\lambda)\overline{\psi(-\tau w_{\mu}\bar{\lambda})} \right) n''(\lambda) \quad (1)$$

calculée en λ_{μ} vaut:

$$\sum_{\tau \in W} r(\tau, w_{\mu}\lambda)\psi(-\tau w_{\mu}\bar{\lambda})_{\lambda=\lambda_{\mu}}.$$

On veut démontrer d'abord que $l'(\lambda_{\mu}) = \overline{l''(\lambda_{\mu})}$. On pose $\lambda' = -w_{\mu}\bar{\lambda}$ et l'on vérifie immédiatement que l'on a:

$$\overline{l''(\lambda)} = l'(\lambda')n''(-w_{\mu}\lambda')n'(\lambda')^{-1}.$$

Il suffit donc de vérifier que $n''(-w_{\mu}\lambda')n'(\lambda')^{-1} = 1$. Or, en revenant aux définitions et en utilisant I.4 (3) et (4), on a:

$$\begin{aligned} n''(-w_{\mu}\lambda') &= \prod_{\alpha \in K_{\lambda_{\mu}} - \text{inv}(w_{\mu})} ((-w_{\mu}\lambda, \alpha^{\vee}) - 1) \cdot \prod_{\alpha \in J_{\lambda_{\mu}}} (-w_{\mu}\lambda, \alpha^{\vee})^{-1} \\ &= (-1)^D \prod_{\alpha \in I_{\lambda_{\mu}}} ((\lambda, \alpha^{\vee}) + 1) \prod_{\alpha \in J_{\lambda_{\mu}}} (\lambda, \alpha^{\vee})^{-1}, \end{aligned}$$

où D est le degré homogène de $n''(\lambda)$. On a vu qu'il valait 1 en II.3. D'où le résultat cherché.

Il reste à démontrer que pour ϕ bien choisie:

$$l'(\lambda) := \left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda) \right) n'(\lambda)$$

est non nul en $\lambda = \lambda_{\mu}$. On prend ϕ nulle à un très grand ordre en tout point de la forme $\sigma\lambda_{\mu}$ pour $\sigma \in W$ vérifiant $\sigma\lambda_{\mu} \neq \lambda_{\mu}$. Pour ce choix de ϕ , on a évidemment:

$$l'(\lambda_{\mu}) = \left(\sum_{\sigma \in W \cap \text{Stab}_{\lambda_{\mu}}} r(\sigma, -\lambda)\phi(\sigma\lambda)n'(\lambda) \right)_{|\lambda=\lambda_{\mu}}.$$

On restreint d'abord à $V'(\not\phi)$ ce qui fait disparaître de la somme les termes qui ne sont pas dans $W(\uparrow, \not\phi)$. Soit $1 \leq k \leq [s/2]$, on note σ_k l'élément de W défini par:

$$\begin{aligned} \sigma_k(j) &= j \quad \text{si } j \notin [h_k + 1, q'_{k+1}], \\ \sigma_k(h_k + t) &= -(q'_{k+1} - t + 1) \quad \text{pour } 1 \leq t \leq q_{2k}. \end{aligned}$$

On a $\sigma_k \lambda_{\not\phi} = \lambda_{\not\phi}$ de façon évidente et $\sigma_k \in W(\uparrow, \not\phi)$. Quand k varie, les σ_k engendrent un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{[s/2]}$ (que l'on peut identifier au groupe $\bar{A}(\mathbf{O})$ de Lusztig ([Lu], où il est noté $\bar{A}(u)$) où \mathbf{O} est l'orbite de G' associée à $\not\phi$). On note ce groupe $\bar{A}_{\not\phi}$. On va montrer que l'on a:

$$W(\uparrow, \not\phi) \cap \text{Stab } \lambda_{\not\phi} = \bar{A}_{\not\phi}. \tag{2}$$

L'inclusion du membre de droite dans celui de gauche est évidente. Réciproquement, soit $\sigma \in W(\uparrow, \not\phi) \cap \text{Stab } \lambda_{\not\phi}$. Pour simplifier l'écriture, on pose:

$$\lambda_{\not\phi} =: (y_1, \dots, y_n).$$

On a $y_1 > y_2 > \dots > y_{h_1} > \pm y_j$ pour tout $j > h_1$. D'où nécessairement:

$$\sigma(1) = 1, \dots, \sigma(h_1) = h_1.$$

On a:

$$y_{h_1+1} = -y_{q'_2} > \pm y_j,$$

pour tout $j > h_1 + 1$ et $j \neq q'_2$. D'où $\sigma(h_1 + 1) = h_1 + 1$ et $\sigma(q'_2) = q'_2$ ou $\sigma(h_1 + 1) = -q'_2$ et $\sigma(q'_2) = -(h_1 + 1)$.

Dans le premier cas, on doit avoir $\sigma(\varepsilon_j - \varepsilon_{q'_2}) > 0$, pour tout $h_1 < j < q'_2$, d'où $0 < \sigma(j) < q'_2$. Il n'y a qu'une possibilité, puisque $\sigma \in \text{Stab } \lambda_{\not\phi}$, qui est $\sigma(j) = j$ pour $h_1 > j \leq q'_2$. Dans le deuxième cas, on a $\sigma(\varepsilon_{h_1+1} - \varepsilon_j) > 0$ pour tout $h_1 + 1 < j \leq q'_2$ d'où $-q'_2 < \sigma(j) < 0$. Il n'y a encore qu'une possibilité:

$$\sigma(j) = \sigma_1(j) \quad \text{pour } j \leq q'_2.$$

Il est clair que $\tilde{\not\phi} := (q_3, \dots, q_s)$ est du même type que $\not\phi$ et que $\sigma_{\{q'_3+1, \dots, n\}}$ est du même type que σ . Par récurrence, on obtient l'assertion cherchée:

$$\sigma \in \bar{A}_{\not\phi}.$$

D'où

$$\left(\sum_{\sigma \in W} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right)_{|\lambda = \lambda_{\neq}} = \left(\sum_{\sigma \in A_{\neq}} r(\sigma, -\lambda) \phi(\sigma \lambda) \right)_{|\lambda = \lambda_{\neq}}.$$

Montrons maintenant que pour tout $1 \leq k \leq [s/2]$, on a :

(4) $r(\sigma_k, -\lambda)$ vue comme fonction méromorphe de $V'(\neq)$ est holomorphe en $\lambda = \lambda_{\neq}$ et y vaut un nombre réel positif.

Remarquons tout de suite que cela termine la preuve de la proposition.

En tant que fonction méromorphe de \mathbf{C}^n ; on a, aux facteurs ε -près :

$$\begin{aligned} r(\sigma_k, -\lambda) &= \prod_{h_k < j < j' \leq q'_{k+1}} L(-\lambda_j - \lambda_{j'}) / L(-\lambda_j - \lambda_{j'} + 1) \\ &\times \prod_{h_k < j \leq q'_{k+1}, < j'} L(-\lambda_j \pm \lambda_{j'}) / L(-\lambda_j \pm \lambda_{j'} + 1) \times r(\lambda), \end{aligned}$$

où l'on a :

$$r(\lambda) = 1 \quad \text{si } G = O(2n)$$

$$r(\lambda) = \prod_{h_k < j \leq q'_{k+1}} L(-2\lambda_j) / L(1 - 2\lambda_j) \quad \text{si } G = SO(2n + 1),$$

$$r(\lambda) = \prod_{h_k < j \leq q'_{k+1}} L(-\lambda_j) / L(1 - \lambda_j) \quad \text{si } G = Sp(2n).$$

On écrit $\lambda = \lambda_{\neq} + (v_1, \dots, v_s)$ à l'aide des coordonnées naturelles sur $V'(\neq)$. Supposons d'abord que $G = SO(2n + 1)$ et calculons (toujours aux facteurs ε -près) :

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= \prod_{h_k < j < j' \leq q'_{k+1}} L(-\lambda_j - \lambda_{j'}) / L(-\lambda_j - \lambda_{j'} + 1) \\ &= \prod_{h_k < j \leq q'_{k+1}} L(-2\lambda_j) / L(-\lambda_j - \lambda_{q'_{k+1}} + 1) \\ &= \prod_{1 \leq t \leq q_{2k}} L(-2v_j + q_{2k} + 1 - 2t) / L(-2v_j + q_{2k} + 1 - t) \\ &\quad \prod_{z \text{ entier impair}, -q_{2k} < z < q_{2k}} L(-2v_j + z) \prod_{1 \leq z \leq q_{2k}} L(-2v_j + z)^{-1} \\ &= \prod_{z \text{ entier impair}, -q_{2k} < z < 0} L(-2v_j + z) \prod_{z \text{ entier pair}, 1 \leq z \leq q_{2k}} L(-2v_j + z)^{-1} \\ &= \prod_{z \text{ entier pair}, 2 \leq z \leq q_{2k}} L(2v_j + z) / L(-2v_j + z). \end{aligned}$$

Cette fonction est définie en $v_j = 0$ et y vaut 1. Pour G quelconque, on calcule dans $V'(\not{j})$: (aux facteurs ε -près)

$$\prod_{h_k < j \leq q_{k+1} < j'} L(-\lambda_j \pm \lambda_{j'}) / L(-\lambda_j \pm \lambda_{j'} + 1) \\ = \prod_{q_{k+1} < j'} L(-\lambda_{h_{k+1}} \pm \lambda_{j'}) / L(-\lambda_{q_{k+1}} \pm \lambda_{j'} + 1).$$

On remarque que $\text{Re}(-\lambda_{q_{k+1}} \pm \lambda_{j'}) > 0$ au voisinage de $\lambda_{\not{j}}$ et que $\text{Re}(-\lambda_{h_{k+1}} \pm \lambda_{j'}) < 0$ au voisinage de $\lambda_{\not{j}}$. (5) est donc holomorphe en $\lambda = \lambda_{\not{j}}$ et on peut calculer directement en faisant $\lambda = \lambda_{\not{j}}$; on a alors $\lambda_{h_{k+1}} = -\lambda_{q_{k+1}}$, d'où: $L(-\lambda_{h_{k+1}} \pm \lambda_{j'}) = L(-\lambda_{q_{k+1}} \mp \lambda_{j'} + 1)$ et la fonction vaut 1 aux facteurs ε -près. Cela termine complètement le cas de $G = \text{SO}(2n + 1)$. Les autres cas se démontrent de façon analogue.

REMARQUE. On démontre de façon analogue que $\zeta_S(\not{j}, \lambda)$ défini sur $V(\not{j})$ comme expliqué en II.6 n'est pas nulle.

IV. Le cas des corps de fonctions

Ici k est un corps de fonctions de caractéristique p . On note q le nombre d'éléments du corps résiduel. La théorie générale est la même que pour les corps de nombres (les problèmes de convergences disparaissant) (cf. [M]) et nos démonstrations aussi. Il faut simplement définir, pour tout \not{j} partition comme en I.1:

$$V(\not{j}) := \{ \lambda \in (\mathbf{C}/(2\pi(\log q)^{-1}\mathbf{Z}))^n \mid (\lambda, \alpha) \in 2\pi(\log q)^{-1}\mathbf{Z} \forall \alpha \in S_{\not{j}} \},$$

les notations sont celles de I.3. On change dans la définition de $c_{d,\not{j}}$ (cf. II.6) 2π en $2\pi(\log q)^{-1}$. (cf. [M-W], IV) et on obtient la forme exacte du théorème III.1 (i.e. sans que ne s'introduise **T**). Mais on remarque que $V(\not{j})$ n'est pas en général connexe et en particulier réduit à un point si $M_{\not{j}} = G$.

Bibliographie

- [A] J. Arthur, *On some problems suggested by the trace formula, in Lie group representations II*, L. N. vol. 1041, Springer Verlag, 1983, pp. 1-49.
- [L] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein Series*, L.N. vol. 544, Springer Verlag, 1976.
- [Lu] G. Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field*, Ann. of math. studies, Princ. University Press, Vol. 107, 1984.

- [M-W] C. Mœglin, J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de $GL(n)$* , prépublication, 1988.
- [M] L. E. Morris, *Eisenstein series for reductive group over global function fields II, the general case*, *Can. J. of Math.*, vol. 34, no. 5, 1982, pp. 1112–1182.
- [S] N. Spaltenstein, *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, L.N. vol. 946, Springer Verlag, 1982.