Composititio Mathematica

LAURENT MORET-BAILLY

Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann

Compositio Mathematica, tome 75, n° 2 (1990), p. 203-217
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1990__75_2_203_0>

Compositio Mathematica **75**: 203–217, 1990.

Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann

LAURENT MORET-BAILLY

IRMAR, Université de Rennes-I, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France

Received 22 August 1989; accepted in revised form 17 November 1989

0. Introduction

0.1. Pour g entier $\geqslant 1$, on note $\mathscr{A}_g$ la catégorie fibrée sur la catégorie des schémas, dont la fibre en S est la catégorie des $(A \xrightarrow{f} S, \xi)$ où A est un S-schéma abélien de dimension relative g, et ξ une polarisation principale sur A, les morphismes étant les S-isomorphismes respectant les polarisations. $\mathscr{A}_g$ est un champ algébrique lisse sur $\mathbb{Z}$ au sens de Deligne et Mumford [2]. On note $\tilde{\mathscr{A}}_g$ le champ des $(A \xrightarrow{f} S, \Theta)$, où $f\colon A \to S$ est comme ci-dessus et où $\Theta \subset A$ est un diviseur (relatif à S) effectif, symétrique, et définissant une polarisation principale sur A (de sorte que $f_*\mathcal{O}_A(\Theta)$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_S$, via la section s_Θ de $\mathcal{O}_A(\Theta)$ définissant Θ). On a un morphisme évident $\tilde{\mathscr{A}}_g \to \mathscr{A}_g$ qui fait de $\tilde{\mathscr{A}}_g$ un torseur sur $\mathscr{A}_g$, sous le noyau de la multiplication par 2 du (dual du) schéma abélien universel $\mathscr{X}_g \to \mathscr{A}_g$: en particulier ce morphisme est fini et plat de degré 2^{2g}, et $\tilde{\mathscr{A}}_g$ est plat sur $\mathbb{Z}$, lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[1/2]$.

Soit $f\colon \tilde{\mathscr{X}}_g \to \tilde{\mathscr{A}}_g$ le schéma abélien universel, muni de sa section unité $e_g\colon \tilde{\mathscr{A}}_g \to \tilde{\mathscr{X}}_g$ (nous oublierons parfois l'indice g pour alléger l'écriture) et du diviseur $\Theta_g \subset \tilde{\mathscr{X}}_g$. On dispose sur $\tilde{\mathscr{A}}_g$ de deux faisceaux inversibles remarquables, à savoir

$$\omega_g := e_g^*(\Omega^g_{\tilde{\mathscr{X}}/\tilde{\mathscr{A}}}) = f_*(\Omega^g_{\tilde{\mathscr{X}}/\tilde{\mathscr{A}}})$$

et le faisceau des "Thetanullwerte"

$$TH_g := e_g^*(\mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{X}}}(\Theta)).$$

On pose alors

$$\Delta_g := TH_g^{\otimes -2} \otimes \omega_g.$$

A titre de notation, si $x = (A \xrightarrow{f} S, \Theta) \in \mathrm{ob}\tilde{\mathscr{A}}_g(S)$, on notera $\omega(x)$, ou encore $\omega(A/S)$ ou $\omega(A)$ s'il n'y a pas de confusion, le faisceau sur S valeur en x de ω_g: c'est donc par définition $f_*\Omega^g_{A/S}$, et l'on peut le voir aussi comme $x^*\omega_g$ lorsque x

est vu comme un 1-morphisme de S dans $\tilde{\mathscr{A}}_g$. On définit $TH(A/S)$ et $\Delta(A/S)$ de manière analogue.

On sait [7, chapitre VIII, théorème 3.2] que le faisceau Δ_g est *de torsion* dans $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathscr{A}}_g)$. Plus précisément [1, I, Theorem 5.1]:

THÉORÈME 0.2. *Le faisceau $\Delta_g^{\otimes 4}$ est* trivial *sur $\tilde{\mathscr{A}}_g$. Autrement dit, il existe un isomorphisme*

$$\varphi_g\colon TH_g^{\otimes 8} \xrightarrow{\simeq} \omega_g^{\otimes 4} \tag{0.2.1}$$

de faisceaux sur $\tilde{\mathscr{A}}_g$.

Ce théorème est établi dans loc. cit. sous la forme équivalente suivante: soit

$$M = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\Theta) \otimes f^*e^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-\Theta)):$$

alors M est symétrique et rigidifié (i.e. e^*M est trivial) et l'on a

$$(f_*M)^{\otimes 8} \simeq \omega^{\otimes -4},$$

ce qui donne 0.2 puisque

$$f_*M \simeq f_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\Theta) \otimes TH^{-1} \simeq TH^{-1}.$$

0.3. Le problème se pose donc du "calcul" de φ_g. D'abord φ_g est "presque" unique: en effet, nous établirons au §1 que

$\tilde{\mathscr{A}}_g$ a deux composantes irréductibles, notées
$\mathscr{A}_g^+$ et $\mathscr{A}_g^-$, qui se rencontrent en caractéristique 2; (0.3.1)

$$H^0(\mathscr{A}_g^+, \mathbb{G}_m) = \{-1, +1\} = H^0(\mathscr{A}_g^-, \mathbb{G}_m). \tag{0.3.2}$$

(Pour éviter des empilements d'indices on note $\mathbb{G}_a$ (resp. $\mathbb{G}_m$) le faisceau $\mathcal{O}_Y$ (resp. $\mathcal{O}_Y^\times$) sur un schéma ou un champ algébrique quelconque Y).

Par suite, φ_g est *unique au signe près* sur chaque composante de $\tilde{\mathscr{A}}_g$.

L'objet principal de cet article (théorème 0.5) est de calculer φ_g sur $(\mathscr{A}_g^+)_{\mathbb{C}}$, en un sens analytique que nous précisons ci-dessous.

0.4. *Descriptions analytiques.* Nous noterons $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}$, $\tilde{\mathscr{A}}_{g,\mathrm{an}}$, etc., les champs analytiques complexes déduits respectivement de $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}$, $\tilde{\mathscr{A}}_{g,\mathbb{C}}$, etc. Ainsi, un objet de $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}$ est de la forme $(f\colon A \to S, \xi)$ où S est un espace analytique complexe, A un S-espace analytique abélien, et ξ une polarisation principale sur A relativement à S.

On considère le "demi-espace de Siegel"

$$\mathbf{H}_g = \{\Omega \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t\Omega = \Omega, \text{ et } \mathrm{Im}(\Omega) \text{ est définie positive}\} \tag{0.4.1}$$

et l'on note $\Lambda_g \subset \mathbb{C}^g \times \mathbf{H}_g$ le réseau (relatif à $\mathbf{H}_g$)

$$\Lambda_g = \{(z, \Omega) \mid z \in \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g\}. \tag{0.4.2}$$

On considère la fonction thêta de Riemann sur $\mathbb{C}^g \times \mathbf{H}_g$ (où, contrairement aux conventions de Igusa [4], on identifie les éléments de $\mathbb{Z}^g$ à des matrices colonnes):

$$\theta_g(z, \Omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi\, {}^t m \Omega m + 2i\pi\, {}^t m z) \tag{0.4.3}$$

dont le diviseur est Λ-invariant, d'où un diviseur Θ_g^+ sur

$$X_g := \mathbb{C}^g \times \mathbf{H}_g/\Lambda_g \xrightarrow{\ f\ } \mathbf{H}_g. \tag{0.4.4}$$

Le groupe $\Gamma_g = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ opère sur $\mathbb{C}^g \times \mathbf{H}_g$ en respectant Λ, par la formule

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (z, \Omega) = ({}^t(C\Omega + D)^{-1} z, (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}). \tag{0.4.5}$$

Il opère donc sur X_g, de manière compatible à $f\colon X_g \to \mathbf{H}_g$ et à son action sur $\mathbf{H}_g$. On note $\Gamma_g^+ \subset \Gamma_g$ le stabilisateur de Θ_g^+ pour cette action; c'est un sous-groupe d'indice fini de Γ_g, souvent noté $\Gamma(1,2)$ dans la littérature.

On sait alors que $(X_g \xrightarrow{f} \mathbf{H}_g, \Theta_g^+)$ est un objet de $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^+(\mathbf{H}_g)$, que nous noterons simplement X_g, et qui de plus fait de $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^+$ le quotient, au sens des champs, de $\mathbf{H}_g$ par Γ_g^+ (cf. par exemple [7, VIII, 3.4]). En particulier, la donnée d'un faisceau inversible sur $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^+$ équivaut à celle d'un faisceau inverisble sur $\mathbf{H}_g$ muni d'une action de Γ_g^+ compatible à son action sur $\mathbf{H}_g$. On a une description analogue pour $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^-$ (voir loc. cit.).

Il est facile d'expliciter les faisceaux $\omega(X_g)$ et $TH(X_g)$. D'abord l'image réciproque sur $\mathbb{C}^g \times \mathbf{H}$ de $\mathscr{O}(\Theta)$ est trivialisée (par construction) par la section $\theta(z, \Omega)^{-1} s_{\Theta_g^+}$; par restriction à la section unité, on obtient le faisceau

$$TH(X_g) = \mathscr{O}_{\mathbf{H}_g}(\mathrm{div}\ \theta^0) \tag{0.4.6}$$

où l'on a posé $\theta^0(\Omega) = \theta(0, \Omega)$ (observer que θ^0 n'est pas identiquement nulle de sorte que son diviseur a un sens). Ce faisceau est donc trivialisé par la section

$$\alpha_g = (\theta^0)^{-1} s_{\Theta^0} \tag{0.4.7}$$

avec $\Theta^0 = \operatorname{div} \theta^0$. De plus Γ_g^+ opère sur $\mathcal{O}(\Theta^0)$ en respectant la section s_{Θ^0}, de sorte que l'action de $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_g^+$ multiplie α_g par la fonction $\theta^0(\Omega)/\theta^0((A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1})$.

Le faisceau $\omega(X_g)$ est bien sûr engendré par

$$\beta_g = (2i\pi)^g \, \mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_g \tag{0.4.8}$$

où $z_1, \ldots, z_g$ désignent les coordonnées naturelles de $\mathbb{C}^g$, et σ ci-dessus multiplie β_g par $\det(C\Omega + D)^{-1}$. Par suite, $\Delta(X_g)$ (vu comme $(\omega(\mathrm{X}_g))(-2\Theta^0)$) est trivialisé sur $\mathbf{H}_g$ par la section

$$\gamma_g = (2i\pi)^g \theta^0(\Omega)^2 \, \mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_g \tag{0.4.9}$$

que l'action de σ multiplie par

$$\zeta_\sigma(\Omega) = \det(C\Omega + D)^{-1} \, \theta^0(\Omega)^{-2} \, \theta^0((A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1})^2.$$

Or il résulte de l'*équation fonctionnelle* de θ ([10, II, §5], ou [4, V, §2, Theorem 3]) que $\zeta_\sigma(\Omega)$ est *indépendant de* Ω, et est une racine quatrième de l'unité. Autrement dit, $\gamma_g^{\otimes 4}$ est une section Γ_g^+-invariante de $\Delta_g^{\otimes 4}$ sur $\mathbf{H}_g$ et *provient donc d'une trivialisation de* $\Delta_g^{\otimes 4}$ *sur* $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^+$.

Nous allons montrer que la trivialisation ainsi construite *coïncide* (au signe près) avec celle induite par (0.2.1); autrement dit:

THÉORÈME 0.5. *La trivialisation* φ_g *de* $\Delta_g^{\otimes 4}$ *(dont l'existence est assurée par* 0.2 *et l'unicité au signe près par* (0.3.2)) *vérifie* $\varphi_g(X_g) = \pm \gamma_g^{\otimes 4}$. *En d'autres termes,* $\varphi_g(X_g)$, *vu comme isomorphisme* $TH_g(X_g)^{\otimes 8} \xrightarrow{\simeq} \omega_g(X_g)^{\otimes 4}$, *envoie la section* $\alpha_g^{\otimes 8}$ *sur* $\pm \beta_g^{\otimes 4}$ (*cf.* (0.4.7) *et* (0.4.8)).

La démonstration est donnée au §2. L'équation fonctionnelle et l'absence de fonctions globales non constantes sur les champs considérés impliquent d'abord que 0.5 est vrai à une constante multiplicative près, qu'il suffit en outre de déterminer pour $g = 1$ en raison de diverses (et triviales) compatiblités aux produits. On obtient ensuite le résultat en testant sur la courbe de Tate: c'est là un avatar du "principe de q-expansion". Notons qu'on pourrait vraisemblablement éviter la réduction au cas $g = 1$ en utilisant la "construction de Mumford" et les développements en série qui s'en déduisent (voir [1]).

0.6. REMARQUE. Il est sans doute possible d'obtenir (ou même de déduire de 0.5) des résultats analogues, d'une part sur $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^-$, d'autre part sur les champs de variétés abéliennes avec polarisation de degré quelconque (toutefois ces derniers peuvent poser des problèmes de mauvaise réduction mod. p, pour p premier divisant le degré de polarisation). L'auteur abandonne cette question aux familiers des fonctions thêta.

0.7. REMARQUE. Pour montrer que Δ_g est de torsion, on utilise dans [7] et dans [1] des arguments de type "Riemann-Roch" (propriétés générales du foncteur image directe). En caractéristique positive, on peut aussi exploiter le changement de base par Frobenius (cf. [7, VIII, §2]; cette méthode se prête bien à la généralisation aux schémas semi-abéliens). Il est possible de parvenir au même résultat en utilisant l'équation fonctionnelle et le théorème de Faltings ([1]) affirmant que $\mathscr{A}_g$ est (lisse et) à fibres géométriquement irréductibles sur Spec($\mathbb{Z}$). Contentons-nous d'esquisser cette démonstration. L'équation fonctionnelle implique d'abord que la restriction de $\Delta_g^{\otimes 4}$ à $\mathscr{A}_{g,\mathbb{Q}}^+$ est triviale (car les flèches naturelles $\mathrm{Pic}(\mathscr{A}_{g,\mathbb{Q}}^+) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^+) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^+)$ sont injectives). On remarque ensuite qu'une puissance convenable de Δ_g provient d'un faisceau inversible δ sur $\mathscr{A}_g$ qui est automatiquement de torsion dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{A}_{g,\mathbb{Q}})$. Vu le théorème de Faltings, une puissance convenable de δ provient alors de Spec($\mathbb{Z}$) donc est triviale, d'où la conclusion. En raffinant les arguments qui précèdent, on arrive à montrer que $\Delta_g^{\otimes 2^{3g}}$ est trivial sur $\tilde{\mathscr{A}}_g$, résultat moins bon que 0.2; je pense néanmoins que cette approche méritait d'être signalée.

0.8. *Plan de l'article.* Le §1 contient, "faute de références commodes", des préliminaires sur la géométrie des champs $\tilde{\mathscr{A}}_g$, essentiellement la description de leurs composantes et le sorite des produits. Le cas $g = 1$ est particulier: l'assertion $H^0(\mathscr{A}_1^-, \mathbb{G}_m) = \{-1, +1\}$, notamment, demande un peu de soin (et son analogue complexe est faux).

Le §2 contient la démonstration de 0.5.

Au §3, on montre comme conséquence de 0.5 que φ_g est de norme $(2\pi)^{4g}$ sur $\mathbb{C}$ lorsqu'on munit ω et TH de leurs métriques hermitiennes naturelles. Ce résultat est exploité dans [8], où l'on en déduit la norme de l'"isomorphisme de Mumford" sur le champ des courbes lisses de genre $g \geqslant 1$, ainsi qu'une formule de Noether pour les surfaces arithmétiques plus précise que celle de [3].

1. Les champs $\tilde{\mathscr{A}}_g$ et leurs composantes.

1.1. *Composantes de* $\tilde{\mathscr{A}}_g$. Le diviseur Θ du schéma abélien universel $\tilde{\mathscr{X}} = \tilde{\mathscr{X}}_g$ étant symétrique, on a un isomorphisme canonique $[-1]_{\tilde{\mathscr{X}}}^*(\mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{X}}}(\Theta)) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{X}}}(\Theta)$ (où, pour $n \in \mathbb{Z}$, $[n]_{\tilde{\mathscr{X}}}$ désigne la multiplication par n dans $\tilde{\mathscr{X}}$). Il induit un automorphisme de TH qui est une *involution*: c'est donc la multiplication par une fonction

$$\varepsilon_g\colon \tilde{\mathscr{A}}_g \to \mu_2 = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1) \subset \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}. \tag{1.1.1}$$

La fonction ε admet l'interprétation suivante ([9, §2, Prop. 2]): si $(A, \Theta) \in \tilde{\mathscr{A}}_g(k)$, où k est un corps, alors $\varepsilon(A, \Theta) = (-1)^m$ où m est la multiplicité de Θ à l'origine. Ceci montre en particulier que ε est *surjectif* (considérer par exemple des produits de courbes elliptiques).

Au-dessus de $\mathbb{Z}[1/2]$, $\mu_2 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1)$ est somme disjointe des fermés $X = 1$ et $X = -1$, de sorte que $\tilde{\mathscr{A}}_g[1/2] = \tilde{\mathscr{A}}_g \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$ est somme des champs

$$\mathscr{A}_g^+[1/2] := \varepsilon_g^{-1}(X = +1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2] \tag{1.1.2}$$

et

$$\mathscr{A}_g^-[1/2] := \varepsilon_g^{-1}(X = -1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2].$$

DÉFINITION 1.1.3. On note $\mathscr{A}_g^+$ (resp. $\mathscr{A}_g^-$) l'adhérence schématique dans $\tilde{\mathscr{A}}_g$ de $\mathscr{A}_g^+[1/2]$ (resp. $\mathscr{A}_g^-[1/2]$).

PROPOSITION 1.1.4. *$\tilde{\mathscr{A}}_g$ est réunion (ensembliste) des fermés $\mathscr{A}_g^+$ et $\mathscr{A}_g^-$, lesquels sont plats sur $\mathbb{Z}$, finis et surjectifs sur $\mathscr{A}_g$ (donc surjectifs sur $\mathbb{Z}$), et irréductibles.*

Preuve. $\mathscr{A}_g^+[1/2]$ et $\mathscr{A}_g^-[1/2]$ sont lisses sur $\mathbb{Z}$, d'où la platitude de $\mathscr{A}_g^+$ et $\mathscr{A}_g^-$ sur $\mathbb{Z}$, par densité. Leur réunion est $\tilde{\mathscr{A}}_g[1/2]$ qui est dense dans $\tilde{\mathscr{A}}_g$ puisque celui-ci est plat sur $\mathbb{Z}$, donc $\tilde{\mathscr{A}}_g = \mathscr{A}_g^+ \cup \mathscr{A}_g^-$. Il est clair que $\mathscr{A}_g^+$ et $\mathscr{A}_g^-$ sont finis sur $\mathscr{A}_g$ puisque $\tilde{\mathscr{A}}_g$ l'est; au-dessus de $\mathbb{Z}[1/2]$ ils sont même finis étales sur $\mathscr{A}_g[1/2]$.

Il est bien connu que $\mathscr{A}_g^+[1/2]$ et $\mathscr{A}_g^-[1/2]$ s'envoient surjectivement sur $\tilde{\mathscr{A}}_g[1/2]$: toute variété abélienne principalement polarisée sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$ admet à la fois des caractéristiques thêta paires et impaires. La surjectivité de $\mathscr{A}_g^+$ et $\mathscr{A}_g^-$ sur $\mathscr{A}_g$ en résulte compte tenu de la finitude.

En raison de leur platitude sur $\mathbb{Z}$, l'irréductibilité de $\mathscr{A}_g^+$ et $\mathscr{A}_g^+$ résulte de celle de $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^+$ et $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^-$, conséquence de leur description analytique (cf. 0.4) comme quotients du demi-espace de Siegel.

1.1.5. REMARQUE. J'ignore si $\mathscr{A}_g^+$ et $\mathscr{A}_g^-$ sont plats sur $\mathscr{A}_g$; c'est vrai en tout cas pour $g = 1$ (voir ci-dessous).

1.2. *Le cas $g = 1$.* Pour tout schéma S, $\tilde{\mathscr{A}}_1(S)$ est la catégorie des couples (E, a) où E est une S-courbe elliptique et $a \in E(S)$ un point d'ordre 2 (autrement dit, $\tilde{\mathscr{A}}_1$ est le noyau de la multiplication par 2 dans la courbe elliptique universelle $\mathscr{X}_1 \to \mathscr{A}_1$). Si 2 est inversible sur S, on a $\varepsilon_1(E, a) = -1$ si et seulement si $a = e_{E/S}$ (la section unité de E). Il en résulte par densité que

(1.2.1) la projection naturelle $\mathscr{A}_1^- \to \mathscr{A}_1$ est un isomorphisme, d'inverse donné par $(E \to S) \mapsto (E, e_{E/S})$.

D'autre part $\mathscr{A}_1^+[1/2]$ est le champ sur $\mathbb{Z}[1/2]$ des courbes elliptiques munies d'un point d'ordre 2 non trivial; on en déduit que

(1.2.2) $\mathscr{A}_1^+$ est le champ $[\Gamma_0(2)]$ de [5], paramétrant les courbes elliptiques munies d'un sous-groupe fini et plat de rang 2 sur la base.

En particulier, $\mathscr{A}_1^+$ et $\mathscr{A}_1^-$ sont tous deux plats sur $\mathscr{A}_1$, et *réguliers* [5, th. 6.6.1].

Le champ $\tilde{\mathscr{A}}_1$ est un diviseur relatif dans $\mathscr{X}_1 \to \mathscr{A}_1$, et $\mathscr{A}_1^-$ (resp. $\mathscr{A}_1^+$) s'identifie au diviseur $e(\mathscr{A}_1)$ (resp. $\tilde{\mathscr{A}}_1 - e(\mathscr{A}_1)$).

1.2.3. *Caractéristique* 2: $\tilde{\mathscr{A}}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2$ s'écrit $2D_1 + D_2$ (en tant que diviseur dans $\mathscr{X}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2$), où $D_1 = e(\mathscr{A}_1 \otimes \mathbb{F}_2) = \mathscr{A}_1^- \otimes \mathbb{F}_2$ et où D_2 est radiciel de degré 2 sur $\mathscr{A}_1 \otimes \mathbb{F}_2$ (donc irréductible); on a donc $\mathscr{A}_1^+ \otimes \mathbb{F}_2 = (2D_1 + D_2) - D_1 = D_1 + D_2$. Ainsi on a ensemblistement $\mathscr{A}_1^+ \cap \mathscr{A}_1^- = D_1$ (de sorte que $\tilde{\mathscr{A}}_1$ est *connexe*); c'est vrai aussi schématiquement car la fonction ε_1 vaut 1 (resp. -1) sur $\mathscr{A}_1^+$ (resp. $\mathscr{A}_1^-$) de sorte que $1 = -1$ sur $\mathscr{A}_1^+ \cap \mathscr{A}_1^-$, d'où $\mathscr{A}_1^+ \cap \mathscr{A}_1^- \subset \mathscr{A}_1^- \otimes \mathbb{F}_2 = D_1$ qui est un diviseur intègre puisque $\mathscr{A}_1^-$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, à fibres irréductibles.

Les composantes D_1 et D_2 de $\mathscr{A}_1^+ \otimes \mathbb{F}_2$ se coupent en un point P correspondant à la courbe elliptique supersingulière sur $\mathbb{F}_2$, munie de son unique sous-groupe d'ordre 2. Du point de vue modulaire, $D_2 - \{P\}$ (resp. D_1) paramètre les $(E \to S, H)$, où E est une courbe elliptique sur le $\mathbb{F}_2$-schéma S, et $H \subset E$ un sous-schéma en groupes fini et plat de rang 2 sur S, qui est *étale* (resp. *radiciel*) sur S.

On notera que $\varepsilon_1 : \tilde{\mathscr{A}}_1 \to \mu_2$ *n'est pas plat* car $\varepsilon_1^{-1}(-1)$ est réunion de $\mathscr{A}_1^-$ et de D_2 donc n'est pas équidimensionnel.

1.2.4. *Compactifications.* Les champs $\mathscr{A}_1^+$ et $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1^-$ admettent des compactifications naturelles $\bar{\mathscr{A}}_1^+$ et $\bar{\mathscr{A}}_1$, définies comme suit:

Pour tout schéma S, $\bar{\mathscr{A}}_1(S)$ est la catégorie des $(E \xrightarrow{f} S \xrightarrow{e} E)$, où $f\colon E \to S$ est une S-courbe propre et plate dont les fibres géométriques sont soit lisses de genre 1, soit rationnelles avec un point double ordinaire, et où e est une section contenue dans l'ouvert de lissité E' de f; celui-ci se trouve alors muni d'une unique structure de S-schéma en groupes pour laquelle e est la section unité, les fibres étant des courbes elliptiques ou des tores de dimension 1.

Pour tout schéma S, $\bar{\mathscr{A}}_1^+(S)$ est la catégorie des $(E \xrightarrow{f} S \xrightarrow{e} E, H)$ où E est une S-courbe propre et plate dont chaque fibre géométrique est soit de l'un des types envisagés pour $\bar{\mathscr{A}}_1$, soit réunion de deux droites projectives se coupant transversalement en deux points; e est encore une section de l'ouvert de lissité E' qui fait de celui-ci un S-schéma en groupes dont les fibres, outre les types précédents, peuvent être isomorphes au produit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un tore de dimension 1. Enfin, H est un sous-schéma en groupes de E', fini et plat de rang 2 sur S, tel que le quotient E'/H soit à fibres *connexes* (de sorte que si

$E' = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_S \times_S \mathbb{G}_{m,S}$, H doit être réunion de la section unité et de la section $(1, 1)$).

Pointes: Soit $E_1 \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ la courbe obtenue à partir de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ en identifiant les sections 0 et ∞, et e_1: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to E_1$ la section de coordonnée affine 1. On obtient ainsi un objet de $\bar{\mathscr{A}}_1(\mathbb{Z})$, correspondant à une section $[E_1]$: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to \bar{\mathscr{A}}_1$, dont l'ouvert complémentaire est $\mathscr{A}_1$. L'unique sous-groupe $H_1 = \mu_2 \subset \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}} = E'_1$, fini et plat de rang 2, définit une section $[E_1, H_1]$: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to \bar{\mathscr{A}}_1^+$.

Soit $E_2 \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ la courbe obtenue à partir de deux exemplaires C_0 et C_1 de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ recollés le long de leurs sections 0 et ∞ respectives; soit e_2: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to E'_2$ la section 1 de C_0, et soit $H_2 \subset E'_2$ la réunion des sections 1 de C_0 et C_1: on obtient une section $[E_2, H_2]$: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \to \bar{\mathscr{A}}_1^+$, disjointe de $[E_1, H_1]$, et $\mathscr{A}_1^+$ est le complémentaire dans $\bar{\mathscr{A}}_1^+$ de la réunion de ces deux sections.

1.2.5. *Schémas de modules grossiers.* Les champs $\bar{\mathscr{A}}_1$ et $\bar{\mathscr{A}}_1^+$ admettent des schémas de modules grossiers sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$; celui de $\bar{\mathscr{A}}_1$ est la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, de coordonnée affine l'invariant modulaire j, la section à l'infini étant l'image de $[E_1]$. Celui de $\bar{\mathscr{A}}_1^+$, que nous noterons $\bar{\mathbf{A}}_1^+$, est un modèle entier de la courbe modulaire $X_0(2)$ (les sections $[E_i, H_i]$ correspondant bien aux 'pointes' de celle-ci). On voit facilement que les composantes D_1 et D_2 définies en 1.2.3 se prolongent en les deux composantes (notées $\bar{D}_1$ et $\bar{D}_2$) de $\bar{\mathbf{A}}_1^+ \otimes \mathbb{F}_2$, lesquelles sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_2}$ et se coupent au seul point P de 1.2.3; la section $[E_1, H_1]$ (resp. $[E_2, H_2]$) rencontre $\bar{D}_1$ (resp. $\bar{D}_2$) en un point noté Q_1 (resp. Q_2).

PROPOSITION 1.2.6. *Les homomorphismes suivants sont bijectifs*:

(i) $\{-1, +1\} \to H^0(\mathscr{A}_1^-, \mathbb{G}_m)$
(ii) $\{-1, +1\} \to H^0(\mathscr{A}_1^+, \mathbb{G}_m)$
(iii) $\{-1, +1\}^2 = H^0(\mu_2, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\varepsilon_1^*} H^0(\tilde{\mathscr{A}}_1, \mathbb{G}_m)$.

Preuve. Comme $\tilde{\mathscr{A}}_1$ est plat sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, (iii) résulte de (i) et (ii). Une fonction globale sur $\mathscr{A}_1^+$ (resp. $\mathscr{A}_1^-$) est la même chose qu'une fonction sur le schéma de modules grossier correspondant. Dans le cas de $\mathscr{A}_1^-$, celui-ci est isomorphe à $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[j]$, d'où (i).

Montrons (ii). Soit $\varphi \in H^0(\mathscr{A}_1^+, \mathbb{G}_m)$: nous pouvons considérer φ comme une fonction rationnelle sur $\bar{\mathbf{A}}_1^+$, dont le diviseur est de la forme $a[E_1, H_1] + b[E_2, H_2]$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. En caractéristique 2, φ induit sur $\bar{D}_0$ (resp. $\bar{D}_1$) une fonction dont le diviseur est aQ_1 (resp. bQ_2); par suite $a = b = 0$, et $\varphi \in H^0(\bar{\mathbf{A}}_1^+, \mathbb{G}_m) = \{-1, +1\}$ (car $\bar{\mathbf{A}}_1^+$ est une courbe propre et plate sur $\mathbb{Z}$ à fibres géométriquement connexes).

1.2.7. REMARQUE. Dans le cas de $\mathscr{A}_1^- = \mathscr{A}_1$, la démonstration de (i) montre en fait que $f_* \mathbb{G}_{m,\mathscr{A}_1} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ si f désigne la projection sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. L'assertion analogue pour $\mathscr{A}_1^+$ est fausse: il résulte d'un théorème de Manin et Drinfeld que la différence des deux pointes est de torsion dans $\mathrm{Pic}(\bar{\mathbf{A}}_{1,\mathbb{Q}}^+)$ ce qui implique l'existence d'une fonction inversible non constante sur $\mathscr{A}_{1,\mathbb{Q}}^+$.

Revenons maintenant aux champs $\tilde{\mathscr{A}}_g$, pour g quelconque:

1.3. *Produits.* Pour g' et g'' entiers >0, on a une application

$$m_{g',g''}\colon \tilde{\mathscr{A}}_{g'} \times \tilde{\mathscr{A}}_{g''} \to \tilde{\mathscr{A}}_{g'+g''}$$
$$((A', \Theta'), (A'', \Theta'')) \mapsto (A' \times A'', \mathrm{pr}_1^*\Theta' + \mathrm{pr}_2^*\Theta'') = (A, \Theta) \tag{1.3.1}$$

et il résulte des définitions que l'on a des isomorphismes naturels de faisceaux inversibles sur $\tilde{\mathscr{A}}_{g'} \times \tilde{\mathscr{A}}_{g''}$:

$$m^*_{g',g''}(\omega_{g'+g''}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{pr}_1^*\omega_{g'} \otimes \mathrm{pr}_2^*\omega_{g''} \tag{1.3.2}$$

$$m^*_{g',g''}(TH_{g'+g''}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{pr}_1^*TH_{g'} \otimes \mathrm{pr}_2^*TH_{g''}. \tag{1.3.3}$$

$$m^*_{g',g''}(\Delta_{g'+g''}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{pr}_1^*\Delta_{g'} \otimes \mathrm{pr}_2^*\Delta_{g''}. \tag{1.3.4}$$

Avec les notations de (1.3.1), on a évidemment

$$\varepsilon_{g'+g''}(A, \Theta) = \varepsilon_{g'}(A', \Theta') \cdot \varepsilon_{g''}(A'', \Theta'') \tag{1.3.5}$$

et il en résulte par densité que $m_{g',g''}$ envoie $\mathscr{A}^+_{g'} \times \mathscr{A}^-_{g''}$ dans $\mathscr{A}^-_{g'+g''}$, etc.

Les constructions analytiques de 0.4 sont compatibles aux produits au sens suivant: on a des applications naturelles

$$\delta_{g',g''}\colon \mathbf{H}_{g'} \times \mathbf{H}_{g''} \to \mathbf{H}_{g'+g''}$$
$$(\Omega', \Omega'') \mapsto \begin{pmatrix} \Omega' & 0 \\ 0 & \Omega'' \end{pmatrix} \tag{1.3.6}$$

qui vérifient (canoniquement)

$$(\delta_{g',g''})^*(X_{g'+g''}) \xrightarrow{\simeq} m_{g',g''}(X_{g'}, X_{g''}) \tag{1.3.7}$$

(isomorphisme dans $\mathscr{A}^+_{g'+g'',\mathrm{an}}(\mathbf{H}_{g'} \times \mathbf{H}_{g''})$). Moyennant cette identification, l'isomorphisme (1.3.2) (resp. (1.3.3), resp. (1.3.4)) envoie la section analytique $\beta_{g'+g''}$ sur $\beta_{g'} \otimes \beta_{g''}$ (resp. $\alpha_{g'+g''}$ sur $\alpha_{g'} \otimes \alpha_{g''}$, resp. $\gamma_{g'+g''}$ sur $\gamma_{g'} \otimes \gamma_{g''}$), la seconde assertion résultant de la formule

$$\theta_{g'+g''}\left((z', z''), \begin{pmatrix} \Omega' & 0 \\ 0 & \Omega'' \end{pmatrix}\right) = \theta_{g'}(z', \Omega') \cdot \theta_{g''}(z'', \Omega'').$$

PROPOSITION 1.4.

(i) *Pour tout* $g \geqslant 1$ *on a* $(\mathscr{A}_g^+ \cap \mathscr{A}_g^-) \otimes \mathbb{F}_2 \neq \varnothing$ (*de sorte que, d'après* 1.1.4, $\tilde{\mathscr{A}}_g$ *est* connexe).

(ii) *Pour tout* $g \geqslant 2$, *on a*

$$H^0(\mathscr{A}_g^+, \mathbb{G}_a) = \mathbb{Z} = H^0(\mathscr{A}_g^-, \mathbb{G}_a);$$

$$\varepsilon_g^*\colon \mathbb{Z}[T]/(T^2-1) = H^0(\mu_2, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\simeq} H^0(\tilde{\mathscr{A}}_g, \mathbb{G}_a).$$

(iii) *Pour tout* $g \geqslant 1$, *on a*

$$H^0(\mathscr{A}_g^+, \mathbb{G}_m) = \{-1, +1\} = H^0(\mathscr{A}_g^-, \mathbb{G}_m);$$

$$\varepsilon_g^*\colon \{-1, +1\}^2 = H^0(\mu_2, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\simeq} H^0(\tilde{\mathscr{A}}_g, \mathbb{G}_m).$$

Preuve. Pour $g \geqslant 2$, $m_{g-1,1}$ envoie $\mathscr{A}_{g-1}^+ \times \mathscr{A}_1^+$ (resp. $\mathscr{A}_{g-1}^+ \times \mathscr{A}_1^-$) dans $\mathscr{A}_g^+$ (resp. $\mathscr{A}_g^-$). L'assertion (i) résulte ainsi du cas $g = 1$, déjà vu (1.2.3).

Montrons (ii). Comme $\mathscr{A}_g^+$ est plat et surjectif sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, l'assertion $H^0(\mathscr{A}_g^+, \mathbb{G}_a) = \mathbb{Z}$ résulte de $H^0(\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^+, \mathbb{G}_a) = \mathbb{C}$, qui résulte à son tour de l'existence d'une immersion ouverte $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}} \hookrightarrow \bar{\mathscr{A}}_{g,\mathbb{C}}$ ("compactification de Satake"), où $\bar{\mathscr{A}}_{g,\mathbb{C}}$ est propre sur $\mathbb{C}$ et où, pour $g \geqslant 2$, la frontière $\bar{\mathscr{A}}_{g,\mathbb{C}} - \mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}$ est de codimension $\geqslant 2$: il existe alors, par normalisation, une compactification analogue de $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^+$, laquelle est irréductible puisque $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^+$ l'est. L'assertion $H^0(\mathscr{A}_g^-, \mathbb{G}_a) = \mathbb{Z}$ se démontre de même.

On en déduit que $H^0(\tilde{\mathscr{A}}_g, \mathbb{G}_a)$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui contient $\mathbb{Z}[T]/(T^2-1)$, lequel s'identifie, par la flèche $T \mapsto (-1, +1)$, au noyau de

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$(m, n) \to m - n \pmod 2$$

Or, si $\varphi = (m, n) \in H^0(\tilde{\mathscr{A}}_g, \mathbb{G}_a) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a $\varphi|_{\mathscr{A}_g^-} = m$ et $\varphi|_{\mathscr{A}_g^+} = n$, d'où $m \equiv n \pmod 2$ en vertu de (i). Ceci achève d'établir (ii).

L'assertion (iii) résulte de (ii) si $g \geqslant 2$, et de 1.2.6 si $g = 1$.

1.4.1. REMARQUE. L'argument utilisé en (ii) montre en fait que, pour $g \geqslant 2$, toute fonction *analytique* globale sur $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^+$ (resp. $\mathscr{A}_{g,\mathbb{C}}^-$) est constante. Par contre, l'assertion (ii) est fausse pour $g = 1$, puisque $H^0(\mathscr{A}_1, \mathbb{G}_a) = \mathbb{Z}[j]$.

COROLLAIRE 1.5. *La trivialisation* φ_g *de* 0.2 *est unique à multiplication près par une fonction sur* $\tilde{\mathscr{A}}_g$ *de carré* 1; *de plus la restriction de* φ_g *à* $\mathscr{A}_g^+$ (*resp.* $\mathscr{A}_g^-$) *est unique au signe près.*

De plus, si $g = g' + g''$, *alors* φ_g, $\varphi_{g'}$ *et* $\varphi_{g''}$ *respectent la compatibilité aux produits* (1.3.4).

2. Preuve du théorème 0.5

2.0. Dans tout le §2 nous noterons encore Δ_g, φ_g, etc. les restrictions de ces objets à $\mathscr{A}_g^+$.

Sur $\mathscr{A}_g^+$, le diviseur $e^*\Theta$ est bien défini; notons-le encore Θ^0 (comme sur $\mathbf{H}_g$). Nous considérerons la section φ_g de $\Delta_g^{\otimes 4}$ sur $\mathscr{A}_g^+$ (unique au signe près d'après 1.5) comme une section de $\omega_g^{\otimes 4}$ dont le diviseur est $8\Theta^0$: ainsi, 0.5 proclame que cette section, évaluée sur l'objet $X_g \to \mathbf{H}_g$, est au signe près la forme $\gamma_g^{\otimes 4}$.

Le quotient $\varphi_g/\gamma_g^{\otimes 4}$ est de toute façon une fonction holomorphe inversible sur $\mathbf{H}_g$, que nous noterons λ_g; il résulte des diverses compatibilités aux produits mentionnées en 1.3 que l'on a (toujours au signe près)

$$(\lambda_{g'+g''} \circ \delta_{g',g''})(\Omega', \Omega'') = \lambda_{g'}(\Omega')\lambda_{g''}(\Omega'') \tag{2.0.1}$$

pour $\Omega' \in \mathbf{H}_{g'}$ et $\Omega'' \in \mathbf{H}_{g''}$.

2.1. Comme on l'a vu en 0.4, il résulte de l'équation fonctionnelle de θ que $\gamma_g^{\otimes 4}$ se descend en une section globale de $\omega_g^{\otimes 4}$ sur $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^+$, dont le diviseur est automatiquement $8\Theta_0$. Autrement dit, λ_g est une fonction holomorphe inversible sur $\mathscr{A}_{g,\mathrm{an}}^+$ donc est *constante* pour $g \geqslant 2$ en vertu de 1.4.1. Donc d'après (2.0.1) ci-dessus, λ_g est constante (y compris pour $g = 1$) et est (au signe près) de la forme $\lambda_g = C^g$, où C est un nombre complexe indépendant de quoi que ce soit, dont nous voulons montrer qu'il est égal à 1. *Ceci permet de se placer désormais dans le cas $g = 1$.*

2.2. Il y a intérêt, plutôt que de considérer $X_1 \to \mathbf{H}_1$, à passer qu quotient par $\mathbb{Z}$ identifié à un sous-groupe de Γ_1^+ par

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que n envoie (z, Ω) sur $(z, \Omega + 2n)$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ opère librement sur $\mathbf{H}$, et l'on obtient par passage au quotient le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \times \mathbf{H}/\Lambda \arrow[r, "p'", "(z,\Omega) \mapsto (e^{2i\pi z}, e^{i\pi\Omega})" above=12pt] \arrow[d] & \mathbb{C}^* \times D^*/\bar{\Lambda} := \mathscr{E} \arrow[d] \\ \mathbf{H} \arrow[r, "p", "\Omega \mapsto e^{i\pi\Omega}"' below=12pt] & D^* \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

où D^* est le disque unité épointé du plan complexe, dont la coordonnée canonique sera notée $q^{1/2}$, et où $\bar{\Lambda}$ est le réseau relatif de $\mathbb{C}^* \times D^*$ engendré par la section $q = (q^{1/2})^2$. On obtient de la sorte un objet $(\mathscr{E}, \Theta)$ de $\mathscr{A}_{\mathrm{an}}^{+}$ où le diviseur Θ est la section $-q^{1/2}$. De plus la fonction θ^0 sur $\mathbf{H}$ est invariante sous l'action de $\mathbb{Z}$, et se descend en la fonction

$$\bar{\theta}^0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2/2}.$$

De même la 1-forme $2i\pi\,\mathrm{d}z$ sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ provient de la 1-forme $\mathrm{d}u/u$ sur $\mathbb{C}^* \times D^*$, où u désigne la coordonnée canonique sur $\mathbb{C}^*$.

On voit ainsi que les trivialisations α, β et γ de 0.4 se descendent sur D^* en des trivialisations des faisceaux $TH(\mathscr{E})$, $\omega(\mathscr{E})$, $\Delta(\mathscr{E})$, à savoir

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= (\bar{\theta}^0)^{-1} s_{\Theta^0} \\ \bar{\beta} &= \mathrm{d}u/u \\ \bar{\gamma} &= (\bar{\theta}^0)^2\, \mathrm{d}u/u. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

2.3. *Arithmétisation.* Nous noterons R le sous-anneau de $\mathbb{Z}[[q^{1/2}]][1/q]$ formé des séries qui convergent pour $q^{1/2} \in \mathbb{C}$, $0 < |q^{1/2}| < 1$: par exemple, $\bar{\theta}^0 \in R^\times$. On a un morphisme naturel d'espaces localement annelés

$$h\colon D^* \to \operatorname{Spec} R \tag{2.3.1}$$

déduit du plongement naturel de R comme sous-anneau de l'anneau des fonctions holomorphes sur D^*.

THÉORÈME 2.4. *Il existe* $(E, \Theta) \in \mathrm{ob}\mathscr{A}_1^+(R)$ *descendant* $(\mathscr{E}, \Theta)$ *via le morphisme* h *de* (2.3.1). *De plus les sections* $\bar{\alpha}$ *et* $\bar{\beta}$ *de* (2.2.2) (*donc aussi* $\bar{\gamma}$) *proviennent de trivialisations des faisceaux correspondants sur* $\operatorname{Spec} R$.

Ce théorème entraîne immédiatement 0.5. En effet, il implique que la fonction λ_1 sur $\mathbf{H}_1$ définie en 2.0 est en fait dans $R^\times$ (c'est le quotient de deux trivialisations d'un même faisceau sur $\operatorname{Spec} R$). Or nous avons vu en 2.1 que λ_1 est constante, d'où $\lambda_1 \in R^\times \cap \mathbb{C} = \{-1, +1\}$, cqfd.

2.5. *Preuve de* 2.4: il s'agit essentiellement des calculs de Tate exposés dans [6, Chapitre 15, §1]. On définit $E \subset \mathbb{P}_R^2$ par l'équation affine $Y^2 - XY = X^3 - h_2 X - h_3$, où h_2 et $h_3 \in R$ sont les séries données dans loc. cit. (la convergence n'y est énoncée que sur un corps local non archimédien mais marche tout aussi bien sur $\mathbb{C}$). On obtient bien une R-courbe elliptique car le discriminant $\Delta = q - 24q^2 + 252q^3 + \cdots$ est dans $R^\times$. Le morphisme $\mathscr{E} \to E$ est donné par $u \mapsto (X(u), Y(u))$ où $X(w)$ et $Y(w)$ sont les séries $(1X)$ et $(1Y)$ de [6], qui sont encore dans R. Le théorème 1 de loc. cit. dit précisément que ce morphisme induit un isomorphisme de $\mathscr{E}$ avec $E \times_{\operatorname{Spec} R} D^*$ (qui est simplement la D^*-courbe elliptique donnée par la même équation). Bien entendu, le diviseur thêta de E est la section $(X(-q^{1/2}), Y(-q^{1/2}))$. La 1-forme $\bar{\beta} = \mathrm{d}u/u$ provient de la 1-forme $\mathrm{d}X/(2Y - X)$, dont on vérifie qu'elle trivialise le fiasceau $\omega(E)$ sur $\operatorname{Spec} R$. De même, comme $\bar{\theta}^0 \in R^\times$, $\bar{\alpha}$ provient d'une trivialisation du faisceau $TH(E)$.

3. Normes

Comme conséquence importante de 0.5, nous allons calculer la *norme* de φ_g, en un sens que nous définissons ci-dessous:

3.1. *Métrique sur* ω_g: si A est une variété abélienne de dimension g sur $\mathbb{C}$, on définit un produit hermitien sur $\omega(A)$, identifié à $H^0(A, \Omega^g_{A/\mathbb{C}})$, par la formule

$$(\sigma \mid \tau) = \left(\frac{i}{2}\right)^g (-1)^{g(g-1)/2} \int_{A(\mathbb{C})} \sigma \wedge \bar{\tau}. \tag{3.1.1}$$

On pose $\|\sigma\| = (\sigma \mid \sigma)^{1/2}$. Ceci munit le faisceau ω_g d'une métrique hermitienne C^∞. La norme de la section β_g de (0.4.8) au point $\Omega \in \mathbf{H}_g$ est donnée par $\|\beta_g(X_g(\Omega))\| = (2\pi)^g \times (\text{covolume du réseau } \Lambda_g(\Omega) \subset \mathbb{C}^g)^{1/2}$, c'est-à-dire

$$\|\beta_g(\mathrm{X}_g(\Omega))\| = (2\pi)^g (\det(\operatorname{Im} \Omega))^{1/2}. \tag{3.1.2}$$

3.2. *Métrique sur* TH_g: si A est une $\mathbb{C}$-variété abélienne et L un faisceau inversible sur A, il existe sur L une métrique hermitienne C^∞, unique à un facteur constant près, dont la forme de courbure soit invariante par translations (cf. par exemple [7, III, §2]). Lorsque $(A, \Theta) \in \mathrm{ob}\tilde{\mathscr{A}}_g(\mathbb{C})$, on obtient une métrique bien définie sur $\mathcal{O}_A(\Theta)$ en fixant la norme de la section canonique s_Θ par la condition

$$\int_{A(\mathbb{C})} \|s_\Theta\|^2 \,\mathrm{d}h = 2^{-g/2} \tag{3.2.1}$$

où $\mathrm{d}h$ est la mesure de Haar de masse totale 1. On obtient en particulier, par restriction à la section nulle, une métrique hermitienne C^∞ sur le faisceau TH_g.

On vérifie (cf. 3.4 plus bas) que lorsque $(A, \Theta) = X_g(\Omega)$ pour $\Omega \in \mathbf{H}_g$, et $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}^g$, la norme de s_Θ au point de A image de z est

$$\|s_\Theta(z \bmod \Lambda_g(\Omega))\| = \det(\operatorname{Im} \Omega)^{1/4} \exp(-\pi\, {}^t y (\operatorname{Im} \Omega)^{-1} y) |\theta(z, \Omega)| \tag{3.2.2}$$

d'où par restriction à la section nulle la norme de la section α_g de (0.4.7):

$$\|\alpha_g(X_g(\Omega))\| = \det(\operatorname{Im} \Omega)^{1/4}. \tag{3.2.3}$$

Il est immédiat que les métriques définies ci-dessus sont compatibles aux produits, en ce sens que les isomorphismes (1.3.2) et (1.3.3) sont des isométries.

On déduit des métriques ci-dessus une métrique sur Δ_g, et il résulte des formules (3.1.2) et (3.2.3) que la section γ_g vérifie

$$\|\gamma_g\| = \|\beta_g\|/\|\alpha_g\|^2 = (2\pi)^g. \tag{3.2.4}$$

THÉORÈME 3.3. *La section φ_g de $\Delta_g^{\otimes 4}$ est de norme $(2\pi)^{4g}$.*

Preuve. Sur $\mathscr{A}^+_{g,\mathrm{an}}$ ceci résulte immédiatement de (0.5) et (3.2.4). On en déduit le cas de $\mathscr{A}^-_{g,\mathrm{an}}$ par compatibilité aux produits: si v_g est la norme de φ_g (donc une fonction sur $\tilde{\mathscr{A}}_{g,\mathrm{an}}$, à valeurs réelles >0), les compatibilités en question et le corollaire 1.5 impliquent que $v_{2g}((A, \Theta) \times (A, \Theta)) = v_g(A, \Theta)^2$, d'où le résultat car $(A, \Theta) \times (A, \Theta)$ est dans $\mathscr{A}^+_{2g,\mathrm{an}}$.

3.4. Rappelons brièvement comment l'on démontre (3.2.2). Le membre de droite (notons-le $\rho(z, \Omega)$) est Λ-invariant, et est le produit de $|\theta|$ par une fonction C^∞ positive; il en résulte qu'il existe une unique norme sur $\mathscr{O}(\Theta)$, notée $\| \ \|'$, telle que $\|s_\Theta\|' = \rho(z, \Omega)$. Celle-ci est à courbure (par rapport à z) invariante, parce que $\rho(-, \Omega)$ est produit du module d'une fonction holomorphe par une exponentielle quadratique. Donc $\|?\|' = \mu(\Omega)\|?\|$, avec $\mu(\Omega) > 0$. On détermine μ par la condition (3.2.1), ce qui revient à calculer

$$I := \int_{\mathbb{C}^g/\Lambda(\Omega)} \exp(-2\pi\, {}^t y (\operatorname{Im}\Omega)^{-1} y)\, \theta(z, \Omega)\, \overline{\theta(z, \Omega)}\, dh. \tag{5}$$

Pour cela (cf. [4, II, §5, Lemma 7]) on développe θ suivant (0.4.3) et l'on échange intégration et sommation, d'où une série double d'intégrales indexée par p, $q \in \mathbb{Z}^g$. On écrit $z = a + \Omega b$ avec a et $b \in [0, 1]^g$, de sorte que la mesure de Haar dh n'est autre que la mesure naturelle $da \cdot db$. Le terme (p, q) de la série est l'intégrale d'une fonction du type $\exp(2i\pi\, {}^t(p - q)a) \times F_{p,q}(b)$ donc se décompose en produit; mais, pour $p \neq q$, le facteur en a est un caractère non trivial de $\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ de sorte que l'intégrale correspondante est nulle. Le terme (p, p) se trouve être

$$\int_{[0,1]^g} \exp(-2\pi\, {}^t(b + p)(\operatorname{Im}\Omega)(b + p))\, db$$

et la somme (pour $p \in \mathbb{Z}^g$) de ces intégrales est l'intégrale gaussienne

$$\int_{\mathbb{R}^g} \exp(-2\pi\, {}^t b(\operatorname{Im}\Omega) b)\, db = \det(2 \operatorname{Im}\Omega)^{-1/2}$$

d'où le résultat.

Références

1. Ching-li Chai et G. Faltings, ouvrage en préparation.
2. P. Deligne et D. Mumford, *The Irreducibility of the Space of Curves of Given Genus*, Pub. Math. IHES, vol. 36.
3. G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* 119 (1984), 387–424.
4. J. Igusa, *Theta Functions*, Grundlehren 194 (Springer).
5. N. M. Katz et B. Mazur, Arithmetic Moduli of Elliptic Curves, *Ann. of Math. Studies* (Princeton) n° 108.
6. S. Lang, *Elliptic Functions* (Addison-Wesley).
7. L. Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, vol. 129.
8. L. Moret-Bailly, La formule de Noether pour les surfaces arithmétiques, *Invent. Math.* 98 (1989), 491–498.
9. D. Mumford, On the Equations Defining Abelian Varieties I, *Invent. Math.* 1 (1966), 287–354.
10. D. Mumford, Tata Lectures on Theta I, *Progress in Math.* (Birkhäuser), vol. 28.