MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

Représentations modulaires de $GL(2,F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$

Compositio Mathematica, tome 72, nº 1 (1989), p. 33-66

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1989__72_1_33_0>

Compositio Mathematica **72**: 33–66, 1989.

Représentations modulaires de $GL(2, F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$

MARIE-FRANCE VIGNÉRAS
8 rue des Ecoles, Paris 75005, France

Received 25 February 1988, revised 16 June 1988

Au docteur Alan Steinbach pour le soutien de son amitié. Avec toute mon admiration pour ses formidables compétences médicales.

Soient F soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $F_p((T))$, et C un corps algébriquement clos de caractéristique l. Nous supposons $l \neq p$.

Nous allons étudier la théorie des représentations du groupe $G = GL(2, F)$ sur C, complétant ainsi l'étude faite par Alain Robert, il y a quelques années.

I. Résultats

Par définition, une représentation (π, V) de G sur C est un espace vectoriel V sur C, muni d'une action $\pi: G \to GL(V)$, telle que le stabilisateur dans G de tout élément de V soit ouvert. On dira "caractère" pour une représentation de dimension 1.

THEOREME 1. *Toute représentation irréductible de dimension finie de $GL(2, F)$ est un caractère, et de la forme $g \to \chi$ dét g, pour un caractère χ de F^* sur C.*

Preuve. Si dim V est finie, Ker π est un sous-groupe ouvert distingué de G. Il contient donc $SL(2, F)$, et via le déterminant π s'identifie à une représentation irréductible de F^*. Par le lemme de Schur, une représentation irréductible de dimension finie de F^* est un caractère.

On construit certaines représentations irréductibles de G en décomposant les représentations induites à partir d'un caractère χ du groupe des matrices triangulaires supérieures

$$B = \left\{ s = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, \quad d \in F^*, \quad b \in F \right\}.$$

Tout caractère χ de B est de la forme $s \in B \to \chi_1(a)\chi_2(d)$, χ_1, χ_2 deux caractères de F^*. On note par val la valuation de F, et par q le nombre d'éléments de son corps résiduel. Le caractère $q^{-\mathrm{val}}$ est le module de F^*. Il est trivial si $q = 1$ modulo l, quadratique si $q = -1$ modulo l et $l \neq 2$. On note par ε le caractère de G qu'il définit via le déterminant.

$$\varepsilon(g) = q^{-\mathrm{val}(\text{dét}\, g)}, \quad g \in G.$$

Le module de B est $s \in B \to q^{-\mathrm{val}(a/d)}$. On fixe une racine carrée α de q^{-1} dans C. On note par $\mu(s) = \alpha^{\mathrm{val}(a/d)}$ la racine carrée du module de B, donnée par α. La représentation induite $\mathrm{ind}(G, B, \chi\mu) = i(\chi)$ de caractère central $\chi_1\chi_2$, est la représentation de G par translation à droite dans l'espace des fonctions $f\colon G \to C$, localement constantes modulo B, telles que

$$f(sg) = (\mu\chi)(s) f(g), \quad s \in B, \quad g \in G.$$

Sa définition dépend du choix de α; c'est l'induite unitaire si $C = \mathbb{C}$ et $\alpha > 0$. Soit χ^w le caractère de B, obtenu en permutant χ_1 et χ_2.

THEOREME 3. (a) *La représentation $i(\chi)$ est irréductible si et seulement si $\chi_1 \neq \chi_2 q^{\pm\mathrm{val}}$.*

(b) *Deux représentations $i(\chi)$ et $i(\chi')$ ont des images égales ou disjointes dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie. Elles sont égales si et seulement si $\chi' = \chi$ ou χ^w*

(c) *La représentation $i(\mu)$ a comme quotient le caractère trivial.*
- *Si $q \neq -1$ modulo l, $i(\mu)$ est de longueru 2, indécomposable si $q \neq 1$ modulo, et semi-simple sinon.*
- *Si $q = -1$ modulo l, $i(\mu)$ est de longueur 3, indécomposable de sous-quotients 1, $(-1)^{\mathrm{val}}$, et une représentation irréductible de dimension infinie π_1.*

La représentation $i(\mu)$ admet donc toujours un seul sous-quotient irréductible de dimension infinie, que l'on note par St si $q \neq -1$ modulo l.

DEFINITION 4. Une représentation irréductible $i(\chi)$ est dite *principale*. Une représentation irréductible de G qui n'est pas contenue dans une représentation $i(\chi)$ est dite *cuspidale*. Les autres représentations irréductibles de dimension infinite de G sont dites *spéciales*.

La représentation π_1 est cuspidale, elle est sous-quotient de $i(\mu)$ mais ni sous-module, ni quotient d'une représentation $i(\chi)$.

COROLLAIRE 5. (1) *Les classes d'isomorphismes des représentations principales de G ont pour représentants les représentations irréductibles $i(\chi)$ paramétrées par les couples non ordonnés (χ_1, χ_2) de caractères de F^* tels que $\chi_1 \neq \chi_2 q^{\pm\mathrm{val}}$*

$$\chi(s) = \chi_1(a)\, \chi_2(d).$$

(2) *Si* $q \neq -1$ modulo l, *les classes d'isomorphismes des représentations spéciales ont pour représentants les produits tensoiels de St avec un caractère de G, et sont paramétrées par les caractères* χ *de* F^*

$$\pi = St \otimes \chi \text{ dét.}$$

(3) *Si* $q = -1$ modulo l, *la représentation* π_1 *est cuspidale, et sous-quotient d'une représentation induite. Il n'existe pas de représentation spéciale.*

Comme l ne divise pas q, F est isomorphe au groupe de ses caractères, et il existe une mesure de Haar sur F à valeurs dans C, c'est-à-dire une forme linéaire non nulle $S(F) \to C$ sur l'espace $S(F)$ des fonctions $f\colon F \to C$ localement constantes, à support compact. On note par O l'anneau des entiers de F, par ω une uniformisante de O, par ψ un caractère de F de conducteur O, et par dx la mesure de Haar telle que $\mathrm{vol}(O) = 1$.

LEMME 6. *La représentation* (τ, W) *de dimension infinie suivante du groupe* $P = \{s \in B, d = 1\}$ *est irréductible,*

- $W = S(F^*)$
- si $f \in W, s \in P$ comme ci-dessus, $x \in F^*$, $(\tau(s)f)(x) = \psi(bx)f(ax)$.

Preuve du lemme. Un sous-espace P-stable non nul de W contient une fonction $f\colon F^* \to C$ telle que $f(1) = 1$, et pour tout n assez grand la fonction caractéristique ϕ_n de $1 + \omega^n O$, ainsi que ses translatées $\phi(ax)$, $a \in F^*$. Cet espace est donc égal à W. [Si $f = 1$ sur $1 + \omega^n O$, on a $\lambda\phi_n(x) = \int_P \varphi(p)\, \tau(p) f(x)\, dp$, avec $\lambda \in C^*$, $\varphi\colon P \to C$ égale à $\Psi(-b)$ lorsque $a \in 1 + \omega^n O$ et $b \in \omega^{-n} O$ et nulle sinon].

THEOREME 7. *Les représentations irréductibles du groupe P sont à équivalence près*: (τ, W) *et les caractères* $s \in P \to \chi$ dét s, χ *caractère de* F^*.

Soit (π, V) une représentation de G.

Elle est dite *admissible* si l'espace des invariants par tout sous-groupe ouvert compact est de dimension finie. Les représentations irréductibles principales ou spéciales sont admissibles. En effet, comme $B\backslash G$ est compact, la représentation $i(\chi)$ est admissible. Ses sous-quotients sont admissibles, par exactitude du foncteur "invariants par un sous-groupe ouvert compact de volume non nul", et l'existence d'un système fondamental de voisinages de l'unité formé de sous-groupes ouverts compacts de volume non nul ($l \neq p$): par exemple, les groupes de congruence

$$\Gamma(\omega^n) = 1 + \omega^n M(2, O), \quad n > 0.$$

Elle est dite *absolument irréductible* si pour tout corps commutatif C' contenant C, la représentation naturelle de G dans $C' \otimes_C V$ est irréductible.

Elle *satisfait le lemme de Schur* si tout endomorphisme de V qui commute à $\pi(G)$ est un multiple de l'identité.

THEOREME 8. *Une représentation irréductible vérifie les propriétés équivalentes:*

(i) *elle est absolument irréductible,*
(ii) *elle satisfait le lemme de Schur,*
(iii) *elle a un caractère central,*
(iv) *elle est admissible.*

REMARQUE. L'équivalence de ces propriétés seulement figurait dans une première version de l'article. C'est Waldspurger qui m'a fait remarqué qu'elles étaient toujours vérifiées.

On ne considère désormais que des représentations dans lesquelles une uniformisante donnée de F opère trivialement.

THEOREME 9. *Si π est une représentation cuspidale irréductible, sa restriction à P est irréductible, isomorphe à τ, si $l \neq 2$.*

C'est l' "*unicité du modèle de Whittaker*". La démonstration complexe de Gelfand-Kazhdan le fournit en caractéristique 0. Elle s'étend à C si $l \neq 2$ (nous en donnerons la démonstration).

Supposons $l \neq 0$ (ne divisant pas q). Soit K un corps local de caractéristique 0, de corps résiduel C, d'anneau des entiers A, d'idéal maximal λ. La catégorie des représentations de G sur K ayant un *A-réseau admissible* L, c'est-à-dire un A-module $L \subset V$, avec les propriétés

- L engendre V (i.e. tout $v \in V$ s'écrit $v \sim x/\omega^n, n \geqslant 0, x \in L$),
- L est stable par G,
- pour tout sous-groupe ouvert compact Γ de G, le A-module L^Γ est libre de type fini

est une catégorie abélienne.

Soit R_C(ou $R_K(A)$) le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de G sur C (ou sur K avec un A-réseau admissible). On verra que:

(1) Une représentation irréductible π de G sur K admet un A-réseau admissible L si et seulement si elle est
   - cuspidale,
   - égale à St ou à
   - une représentation $i(\chi)$ principale telle que χ soit à valeurs dans A.
(2) Dans ce cas les fonctions d'un modèle de Kirillov à valeurs dans A forment un A-réseau admissible.
(3) La réduction $L/\lambda L$ de L modulo l'idéal maximal λ de A est une représentation de G de longueur finie, et a une image dans R_C indépendant du choix du modèle.

La *réduction modulo* λ est l'application linéaire de $R_K(A)$ dans R_C déduite de (2). On dit qu'une représentation irréductible π de G sur C se relève à K, si sa classe d'équivalence est la réduction modulo λ d'une reprèsentation (irréductible) de G sur K. On écrit de façon plus imagée que π *se relève à la caractéristique* 0.

Nous allons maintenant étudier la théorie "des K-types". C'est une théorie algébrique, qui se prête bien à la théorie des représentations modulaires. Elle consiste à classifier les représentations irréductibles par leurs restrictions aux sous-groupes ouverts compacts.

Le groupe G possède deux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux modulo le centre. On peut les représenter par les groupes

$$H_1 = F^* GL(2, O), \quad H_2 = \text{le groupe engendré par } F^* \Gamma_0(\omega) \quad \text{et} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{bmatrix},$$

où $\Gamma_0(\omega) = \{g \in GL(2, O), c \in \omega O\}$.

Certaines représentations irréductibles de ces groupes jouent un rôle très important. Ce sont les représentations *très cuspidales* décrites par Carayol.

Elles s'identifient aux représentations irréductibles cuspidales de $GL(2, F_q)$ ou s'obtiennent par induction soit d'un caractère d'un p-groupe, soit d'un prolongement d'une représentation irréductible d'un p-groupe d'Heisenberg. Leur dimension est $(q \pm 1)_X$ une puissance de p. Leur description montre:

LEMME 10. *La réduction induit une surjection des représentations très cuspidales en caractéristique* 0 *sur celles en caractéristique* l.

La réduction est une bijection si $q^2 \neq 1$ modulo l.

THEOREME 11. (1) *L'induite à* G *d'une représentation très cuspidale est irréductible et cuspidale.*

(2) *Toute représentation cuspidale irréductible est à torsion près par un caractère, égale à l'induite d'une représentation très cuspidale.*

On montrera (1) par réduction du résultat en caractéristique 0 (montré par Carayol); pour 2), on étendra les arguments complexes de Howe et de Moy. On déduit alors de 3,11;

COROLLAIRE 12. (1) *La réduction modulo* λ *d'une représentation cuspidale de* G *sur* K *est toujours irréductible.*

(2) *La réduction modulo* λ *de St est irréductible si* $q \neq -1$ modulo l, *et égale à l'image de*

$$(-1)^{\text{val}} + \pi_1$$

dans le groupe de Grothendieck si $q = -1$ *modulo* l.

(3) *La réduction modulo λ d'une représentation principale $i(\chi)$ est égale à l'image dans le groupe de Grothendieck de $i(\mu)$, où μ est la réduction modulo λ de χ, explicitement décrite par le théorème* 1.

COROLLAIRE 13. *Toute représentation modulaire irréductible de G en caractéristique l se relève à la caractéristique* 0.

Si L est un corps algébriquement clos, B un sous-anneau de L, notons par Irr_L(ou $\mathrm{Irr}_L(B)$) l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de G sur L (ayant un B-réseau admissible). Il n'y a pas de différence entre:

- la classe de la représentation irréductible est définie sur L
- la représentation irréductible est isomorphe à une représentation définie sur L

Ceci peut se déduire de l'existence et l'unicité du "nouveau vecteur".

COROLLAIRE 14. *Si l ne divise pas $(q-1)q(q+1)$, la réduction* modulo λ *définit une bijection de* $\mathrm{Irr}_K(A)$ *sur* Irr_C.

Autrement dit, si l ne divise pas $(q-1)q(q+1)$, la théorie des représentations du groupe G est "la même" en caractéristique 0 ou en caractéristique l, comme dans le cas où F est le corps fini à q éléments (Serre, p. 141).

Remarque sur la correspondance de Langlands modulaire

Il existe plusieurs types de correspondance de Langlands. On fait allusion ici à celles qui est existent entre $GL(2, F)$, le groupe multiplicatif H d'une algèbre de quaternions sur F, et le groupe de Galois Gal_F d'une clôture algébrique de F. On a étudié dans [2] celle entre H et Gal_F, et montré que la correspondance de Langlands "se réduit modulo λ". Ceci reste essentiellement vrai avec $GL(2, F)$, à condition de grouper les représentations irréductibles qui sont facteurs d'une même représentation induite par un caractère du groupe des matrices triangulaires supérieures.

Remarques sur les démonstrations

La théorie des représentations complexes irréductibles est bien connue. La théorie des représentations irréductibles sur un corps algébriquement clos C, qui n'est pas le corps des nombres complexes, se fait de deux façons différentes:

- par des démonstrations directes, valables sur tout C,
- par réduction à partir de la caractéristique 0, plus une démonstration directe valable pour tout C de caractéristique 0.

Certains résultats, vrais sur les complexes, ne le sont pas en caractéristique $\neq 0$. Dans ce cas, on mettra des hypothèses supplémentaires de façon à les rendre vrais.

Exemples:

- le *lemme de Schur*: une représentation irréductible a toujours un caractère central sur les complexes, mais non sur les corps de nombres algébriques, ou sur une clôture algébrique de F_p.
- Il existe une *unique mesure de Haar* sur G à valeurs dans C, à multiple près, mais le volume d'un sous-groupe compact est *nul* si son cardinal n'est pas premier à l.
- Les représentations cuspidales sont projectives et injectives, mais non sur C de caractéristique divisant $q^2 - 1$.

La théorie des représentations modulaires des groupes finis sert de guide. L'hypothèse d'admissibilité permettra de se ramener à des modules de dimension finie sur les algèbres de Hecke.

Cet article est une première étape. Il faudra ensuite étudier les représentations modulaires sur un anneau local A, de corps résiduel C, et commencer la théorie des blocs.

Les arguments sont souvent généraux. Il faudra par exemple tester leur généralité sur le groupe $GL(n, F)$ puis passer aux groupes réductifs p-adiques.

Enfin, le cas de caractéristique $l = p$ égale est fort intéressant. Il faudra le traiter, en s'inspirant de la théorie modulaire des groupes finis, ainsi que de la théorie des représentations des groupes réels.

Je tiens à remercier Joseph Oesterlé pour les questions qu'il m'a posées concernant les représentations modulaires, auxquelles cet article fournit plus ou moins une réponse. Cet article ne serait pas publié sans le soutien et les conseils de Waldspurger à qui j'adresse tout ma gratitude.

II. Demonstrations

Les démonstrations figurant dans ce qui suit, jusqu'au paragraphe concernant l'uncité des modèles de Whittaker inclus, reprennent les démonstrations complexes des résultats correspondants qui figurent dans Bernstein et Zelevinski, en les généralisant à la théorie des représentations d'un groupe réductif p-adique sur un corps algébriquement clos C, de caractéristique $l \neq p$. Nous supposons que $G = GL(2, F)$, ce qui facilite l'exposition, la rend plus concrète, et met en évidence les différences qui apparaissent avec le cas complexe.

Représentations de N

Comme $l \neq p$, le groupe N est isomorphe au groupe N' de ses caractères sur C. La transformation de Fourier identifie une représentation (π, V) de N à un module M *non dégénéré* sur $S(N')$, i.e. tel que $S(N')M = M$. Comme espace $M = V$, l'action de $f' \in S(N')$ est

$$f'v = \pi(f)v, \quad v \in V$$

si f' est la transformée de Fourier de f. On identifie M avec l'ensemble des sections à support compact d'un faisceau sur N', de fibre en $\psi \in N'$ le C-espace $V/I_\psi V$, où

$$I_\psi = \{f \in S(N'), \quad f(\psi) = 0\}.$$

On note par $\pi(\psi)$ ou $V(\psi)$ l'espace engendré par les éléments $(\pi \otimes \psi^{-1})(n)v - v$, $v \in V$, $n \in N$, par π_ψ ou $V_\psi = V/V(\psi)$ l'ensemble des coinvariants de V par $(\pi \otimes \psi^{-1})(N)$ et par p_ψ la surjection canonique de V sur V_ψ. On a $\pi(\psi) = \pi \otimes \psi^{-1}(1)$.

Le groupe N est *limite de ses sous-groupes profinis* (tout $n \in N$ est contenu dans un sous-groupe compact), ce qui permet de montrer le lemme suivant:

LEMME 15. (1) *L'espace* $V(1)$ *engendré par les éléments* $\pi(n)v - v$, $v \in V, n \in N$, *est égal à l'union des noyaux des applications* $w \to \pi(e_K)w$, *où* K *parcourt les sous-groupes ouverts compacts* K *de* N, *et*

$$\pi(e_K)w = \mathrm{vol}(K)^{-1} \int_K \pi(k)w \, \mathrm{d}_K k$$

pour une mesure de Haar $\mathrm{d}_K k$ *sur* K.

(2) *On a pour tout* ψ, $I_\psi = V(\psi) = \cup \operatorname{Ker}(\pi \otimes \psi^{-1})(e_K)$.

Preuve. (1) L'espace $\cup \operatorname{Ker} \pi(e_K)$ introduit dans le lemme est toujours un sous-espace de $V(1)$. En effet, il est clair que w comme ci-dessus s'écrit $w = \mathrm{vol}(K)^{-1} \int_K (w - \pi(k)w) \, \mathrm{d}_K k$, c'est une somme finie et w appartient au premier espace.

Comme N est limite de ses groupes profinis, un élément $n \in N$ est contenu dans un groupe compact K et pout tout $v \in V$, on a $\int_K \pi(k)(\pi(n)v - v) \, \mathrm{d}_K k = 0$.

(2) On va montrer que $I_\psi V = V(\psi) = V'(\psi)$ où

$$V'(\psi) = \{v \in V, \quad \text{tel qu'il existe } f' \in S(N'), \quad f(\psi) \neq 0 \text{ et } f'v = 0\}.$$

Par produit tensoriel par ψ, il suffit de montrer que $I_1 V \subset V(1) \subset V'(1) \subset I_1 V$.

- si $v = f'm$ appartient à $I_1 V$, avec $f \in S(N')$, $f'(1) = 0$ et $m \in V$, soit $f \in S(N)$ dont f' est la transformée de Fourier. Alors $v = \pi(f)m$, $\int_N f(x)\,dx = 0$ ce qui implique que $v = \int_N f(x)(\pi(x)v - v)\,dx$ appartient à $V(1)$
- si $w \in V(1)$ avec $\int_K \pi(k)w\, d_K k = 0$ comme dans le lemme, soit f' la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de K, on a $f'(1) \neq 0$ et $f'w = 0$ donc $w \in V'(1)$.
- si $v \in V$ et $f' \in S(N')$, $f'(1) \neq 0$ avec $f'v = 0$, soit $t' \in S(N')$ tel que $v = t'v$. On a $v = (t' - t'(1)f'(1)^{-1}f')v$, donc $v \in V(1)$.

Soit (π, V) une représentation de G. Sa restriction à N est une représentation de N et l'on peut lui associer un faisceau sur N', de fibre V_ψ en $\psi \in N'$. On note par $(r_\psi \pi, V_\psi)$ la représentation naturelle sur V_ψ

- du centre $Z \approx F^*$ si $\psi \neq 1$,
- tensorisée par μ^{-1}, groupe T das matrices diagonales si $\psi = 1$.

On note par Alg G l'ensemble des représentations de G sur C. C'est une catégorie et l'application $(\pi, V) \to (r_\psi \pi, V_\psi)$ est un foncteur r_ψ de Alg G dans Alg Z si $\psi \neq 1$, et dans Alg T si $\psi = 1$.

PROPOSITION 16. *Propriétés des foncteurs r_ψ.*

(a) *ils sont exacts*

(b) *r_1 est l'adjoint à gauche de i: donc pour tout caractère χ de T et toute représentation π de G*

$$\mathrm{Hom}_T(r_1 \pi, \chi) = \mathrm{Hom}_G(\pi, i(\chi)).$$

Preuve. (a) est une conséquence du lemme 15 et (b) résulte de la formule de réciprocité de Frobenius. La torsion par μ^{-1} dans la définition de $r_1 \pi$ a été faite de façon à avoir (b).

LEMME 17. *Si (π, V) est une représentation irréductible non nulle de P ou de G, alors π est un caractère si et seulement si $V_\psi = 0$ pour un caractère non trivial $\psi \in N'$.*

Preuve. (1) La représentation π est un caractère si et seulement si N opère trivialement. En effet, si le noyau de π contient N, la représentation s'identifie à une représentation irréductible de F^*, et c'est un caractère (remarque I.1). Pour P, c'est clair sur sa définition; pour G, il suffit d'utiliser qu'un sous-groupe distingué contenant N contient $SL(2, F)$.

(2) Pour que N opère trivialement, il faut et il suffit que $V(1)$ soit nul.

(3) $V(1)$ est nul si et seulement si $V = V(\psi)$ pour tout caractère non trivial $\psi \in N'$. L'implication $\Rightarrow$ se voit sur la définition de $V(\psi)$. Inversement on remarque que l'espace V s'identifie à l'ensemble des sections à support compact du faisceau sur

N' associé à la restriction de π à N. Si toutes ses fibres en $\psi \neq 1$ sont nulles, V est isomorphe à la fibre en 1. Donc $V(1) = \{0\}$.
(4) L'égalité $V = V(\psi)$ pour tout caractère non trivial $\psi \in N'$ est vraie si elle l'est pour l'un d'entre eux. En effet, P normalise N et opère transitivement sur les caractères non triviaux de N.

Contragrédiente
Si (π, V) est une représentation de G, la contragrédiente (π^*, V^*) est l'ensemble V^* des formes linéaires lisses sur V, muni de l'action naturelle π^* de G:

$$\langle \pi^*(g)L, \pi(g)v \rangle = \langle L, v \rangle, \quad g \in G, \quad L \in V^*, \quad v \in V$$

"lisse" signifie que $L\colon V \to C$ est fixe par un sous-groupe ouvert compact de G. Si π est admissible, π^* est admissible, et $\pi^{**} = \pi$.

Décomposition de la série principale

LEMME 18. *Soit χ est un caractère de B.*

(1) (a) *$r_\psi i(\chi)$ est de dimension 1 si $\psi \neq 1$,*
(b) *$r_1 i(\chi)$ est de longueur 2, de quotients χ^w et χ.*
(2) *Pour que la restriction de $i(\chi)$ à P contienne un caractère, il faut et il suffit que $\chi_1 = \chi_2 q^{\mathrm{val}}$.*
(3) *$i(\chi^{-1})$ est la contragrédiente de $i(\chi)$.*
(4) *$\mathrm{Hom}_G(i(\chi), i(\chi^w))$ est non nul.*
(5) *Toute représentation irréductible $\pi \neq 0$ de G telle que $r_1\pi \neq 0$ est contenue dans une représentation $i(\chi)$, et réciproquement.*

Preuve. (1) On utilise le théorème d'induction-restriction de Mackey, généralisé aux groupes p-adiques. On a $G = B \cup BwB$ où

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La restriction de $i(\chi)$ à B vérifie la suite exacte

$$1 \to \mathrm{ind}\,(B, T, \chi^w \mu^{-1}) \to i(\chi)|_B \to \chi\mu \to 1$$

ce qui se voit en considérant le sous-B-module des fonctions nulles hors de l'ouvert dense BwB, qui s'identifie à l'espace $S(F)$ muni de l'action de B: pour $s \in B$, de diagonale t, $f \in S(F)$, $x \in F$

$$sf(x) = (\chi^w \mu^{-1})(t) f(a^{-1}(\mathrm{d}x + b)).$$

On le note $\mathrm{ind}(B, T, \chi^w \mu^{-1})$. Sa restriction à N est isomorphe à la représentation régulière de N, dont l'image par r_ψ est de dimension 1, pour tout ψ. L'application canonique sur ses coinvariants par N est $f \to \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Comme $\int f(ad^{-1}x)\,\mathrm{d}x = \mu^{-2}(t)\int f(x)\,\mathrm{d}x$, l'action naturelle de T sur les coinvariants de $\mathrm{ind}(B, T, \chi^w \mu^{-1})$ est $\chi^w \mu$.

(2) Si $i(\chi)$ contient un caractère v de G, il existe une fonction $f: G \to C$ non nulle vérifiant

$$f(sg) = (\chi\mu)(s)v(g)f(1), \quad s \in B, \quad g \in G.$$

f ne s'annule pas et en appliquant cette égalité à $g \in B$ ou wB, on obtient

$$\chi\mu = (\chi\mu)^W = v.$$

Il suffit de supposer que la restriction de $i(\chi)$ à B contient $v|_B$: si une fonction $f \neq 0$ vérifie

$$f(sgs') = (\chi\mu)(s)v(s')f(g), \quad s, s' \in B, \quad g \in G.$$

f n'est pas identiquement nulle sur l'ouvert dense BwB, et cette égalité implique qu'elle ne s'annule pas sur BwB. On en déduit que $f(1) \neq 0$, puisque f est localement constante. On applique l'égalité à $g = 1$, et $g = w$.

(3) Pour $f \in i(\chi)$ et $f' \in i(\chi^{-1})$, la fonction ff' appartient à $\mathrm{ind}(G, B, \mu^2)$. Il existe sur cet espace une forme linéaire G-invariante L. La forme linéaire $f \mapsto L(ff')$ est lisse, et l'on obtient une injection $i(\chi^{-1}) \subset i(\chi)^*$.

Par dualité, $i(\chi^{-1})^*$ est un quotient de $i(\chi)$ pour tout χ, en particulier pour χ^{-1}.

(4) Résulte de 1(b) et de Frobenius.

(5) Vient de Frobenius, et de ce que $r_1\pi$ est de type fini.

Demonstration du Théorème 3

On déduit des lemmes ci-dessus que $i(\chi)$ admet un seul sous-quotient irréductible de dimension infinie. Si $i(\chi)$ est réductible, alors $i(\chi)$ ou bien sa contragrédiente $i(\chi^{-1})$ contient un caractère et $\chi_1 = \chi_2 q^{\pm \mathrm{val}}$.

(1) $\chi_1 \neq \chi_2 q^{\pm \mathrm{val}}$. Alors $i(\chi)$ et $i(\chi^w)$ sont irréductibles, isomorphes. Par Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_G(i(\chi), i(\chi')) = \mathrm{Hom}_T(r_1 i(\chi), \chi')$$

Si $\chi' \notin \{\chi, \chi^w\}$, ces espaces sont nuls. Il n'y a donc pas d'autres isomorphismes entre les représentations irréductibles $i(\chi)$.

(2) $\chi_1 = \chi_2 q^{\pm \mathrm{val}}$. Alors $i(\chi)$ ou $i(\chi^{-1})$ est le produit tensoriel de $i(\mu)$ par un caractère. Il suffit d'étudier les représentations $i(\mu)$ et $i(\mu^{-1})$. Le caractère trivial est contenu avec multiplicité 1 dans $i(\mu^{-1})$. Il est quotient de sa duale $i(\mu)$. Soit St le noyau. de la forme linéaire G-invariante sur $i(\mu)$

$$f \to \int_{B\backslash G} f(x)\,\mathrm{d}x$$

unique à scalaire près.

(a) si $q^2 \neq 1$ modulo l, $i(\mu)$ ne contient pas de caractère. Si St était réductible, $i(\mu)$ contiendrait une représentation cuspidale (par exactitude de r_1), ce qui est impossible par Frobenius. Comme $\mu \neq \mu^w = \mu^{-1}$, les représentations $i(\mu)$ et $i(\mu^{-1})$ sont indécomposables. En effet, par Frobenius

$$\dim_C \mathrm{Hom}_G(i(\chi), \uparrow i(\chi)) = 1, \quad \chi = \mu \text{ ou } \mu^{-1}$$

Donc St est irréductible. Elle est isomorphe à sa contragrédiente.

(b) si $q^2 = 1$ modulo l, deux cas se présentent:

- $q \neq 1 \bmod l$, alors $i(\mu)$ contient le caractère non trivial $\mu^2 = (-1)^{\mathrm{val}}$ et a pour quotient le caractère trivial. Elle a un sous-quotient irréductible π_1, puisque la longueur est au plus trois. La représentation π_1 est de dimension infinie. Il n'est ni sous-module ni quotient, puisque son image par r_1 est nul (même argument que ci-dessus).
- $q = 1 \bmod l$, la représentation triviale est sous-module et quotient de $i(\mu)$. Le module de B est trivial, et $B\backslash G$ possède une mesure G-invariante, pour laquelle son volume est nul si et seulement si l divise aussi $q + 1$, donc $l = 2$. Si $l \neq 2$, on choisit la mesure telle que $\mathrm{vol}(B\backslash G) = 1$.

L'espace de $i(\mu)$ est l'espace des fonctions localement constantes $f: B\backslash G \to C$. L'application qui envoie $f \in i(\mu)$ sur la fonction constante égale à $\int_{B\backslash G} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'identité ou l'application nulle sur les fonctions constantes selon que $l \neq 2$, ou $l = 2$. On en déduit:

- si $l \neq 2$ divise $q - 1$, les fonctions constantes sont facteur direct dans $i(\mu)$, et $i(\mu) = 1 + St$. La représentation St est de dimension infinie. Elle est irréductible, sinon elle aurait une représentation cuspidale comme sous-quotient. Par dualité, elle serait contenue dans $i(\mu)$, ce qui est impossible par Frobenius.
- si $l = 2$, $i(\mu)$ est indécomposable de longueur trois, admettant 1 comme sous-module et comme quotient, et un sous-quotient irréductible π tel que $r_\psi \pi = 0$ si $\psi = 1$, et $r_\psi \pi$ de dimension 1 si $\psi \neq 1$. Comme précédemment, le sous-quotient de dimension infinie est isomorphe à sa contragrédiente, et il n'est pas sous-module ou quotient si $l = 2$.

Demonstration du Theoreme 7

Soit (π, V) une représentation de $G' = P$ ou G qui n'est pas un caractère. Sa restriction à N n'est pas triviale, $V(1) \neq 0$. Les fibres V_ψ en $\psi \neq 1$ sont des C-espaces

- tous isomorphes: comme on l'a déjà utilisé, P agit transitivement sur les caractères non triviaux de N.
- non nuls: $V \neq V_1$, donc au moins une fibre $V_\psi, \psi \neq 1$, n'est pas nulle.

L'action de N sur V_ψ est l'homothéthie par le caractère ψ.

Si $G' = P$, on en déduit que $\pi = \mathrm{ind}(P, N, V_\psi)$, pour un caractère quelconque $\psi \neq 1$. Ceci résulte de ce que ces deux représentations définissent le même faisceau sur P/N qui s'identifie aux caractères non triviaux de N. Si π est irréductible, V_ψ est irréductible, de dimension 1 et donc π est isomorphe à τ.

Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G, de *volume non nul.* Soit $\pi(e)$ la projection

$$V \to V^\Gamma = \pi(e)V, \quad \text{où } \pi(e)v = \mathrm{vol}(\Gamma)^{-1} \int_\Gamma \pi(x)v \, \mathrm{d}x.$$

L'application qui associe à une représentation de G l'espace de ses Γ-invariants est *exact.*

L'algèbre de Hecke de G relative à Γ est l'algèbre $H_C(G, \Gamma)$ pour le produit de convolution des fonctions $f\colon G \to C$, bi-invariantes par Γ à support compact. On démontre comme dans le cas complexe (Bernstein-Zelevinski):

(1) Le $H_C(G, \Gamma)$-module V^Γ est simple, si V est irréductible.
(2) Si pour tout Γ dans un système fondamental de voisinages de l'unité, formé de sous-groupes ouverts compacts, de volume non nul, le $H_C(G, \Gamma)$-module V^Γ est simple, alors V est irréductible.

Les groupes de congruence Γ ont une décomposition "à la Iwahori"

$$\Gamma = \Gamma^+\Gamma^0\Gamma^- = \Gamma^-\Gamma^0\Gamma^+,$$

où les groupes $\Gamma^+, \Gamma^0, \Gamma^-$ sont les intersections de Γ avec les groupes des matrices strictement triangulaires supérieures, diagonales, strictement triangulaires inférieures. La conjugaison par une matrice $t(x^{-1}, 1)$ avec $\mathrm{val}\, x \gg 0$ les dilate, fixe, contracte. On a

$$\pi(e) = \pi(e_+)\pi(e_0)\pi(e_-)$$

où $e_+, e_0, e_- = e_U$ pour $U = \Gamma^+, \Gamma^0, \Gamma^-$. La relation $\pi(e)\pi(t(x, 1))v = 0$ pour val $x \gg 0$ devient $\pi(e_U)v = 0$ où U est le conjugué de Γ^+ par $t(x^{-1}, 1)$. Donc $v \in V(1)$. Rappelons que

$$G = HTH, \quad \text{où } H = GL(2, 0)F^*, \quad T = \{t(\omega^n, 1), n \geqslant 0\}.$$

On en déduit:

LEMME 19. *Pour que $g \to \pi(e)\pi(g)v$ soit à support compact modulo le centre, il faut et il suffit que $v \in V(1)$.*

Un *coefficient* d'une représentation (π, V) de G est une fonction $f\colon G \to C$ de la forme

$$f(g) = \langle L, \pi(g)v\rangle, \quad g \in G, \quad v \in V, \quad L \in V^*.$$

On déduit du lemme 19:

LEMME 20. (1) *Une représentation irréductible est cuspidale si et seulement si ses coefficients sont à support compact modulo le centre.*
(2) (*Waldspurger*) *Une représentation irréductible cuspidale est admissible.*

Supposons que V soit *à engendrement fini.* Soit $G^\circ = \operatorname{Ker} |\text{dét}|$, et Z le groupe engendré par une uniformisante $\omega \in F^*$ dans le centre de G. Le groupe ZG° est d'indice fini dans G. La restriction de π à ZG° est à engendrement fini. Soit X un ensemble fini de générateurs. Soit $W \subset V^\Gamma$ le sous-espace engendré par les $\pi(e)\pi(g)v$, $v \in X$, $g \in G^\circ$. Si (π, V) est *cuspidale*, pour tout $v \in V$, l'application

$$g \in G \to \pi(e)\pi(g)v \in V^\Gamma$$

est à support compact modulo le centre, par le Lemme 19. L'espace W est donc de dimension finie, et $\pi(Z)W = V^\Gamma$. Si π a un caractère central, $W = V^\Gamma$ est de dimension finie.

Waldspurger m'a fait remarqué que la propriété $\pi(Z)W = V^\Gamma$ implique que V^Γ est de dimension finie, par l'argument suivant: comme V^Γ est de type fini sur le centre, il a un quotient $Z-$irréductible. Il existe donc un caractère χ de Z tel que l'espace U des χ-invariants de V^Γ par Z soit différent de V^Γ. Comme U est un sous-$H_C(G, \Gamma)$-module du module simple V^Γ, on a $U = 0$. Donc V^Γ est de dimension finie.

Demonstration du Lemme 8

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Une représentation irréductible de G qui a un caractère central est admissible. C'est clair pour les représentations principales ou spéciales. Pour une représentation cuspidale, cela a été déjà fait.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Comme C est algébriquement clos, et V^Γ de dimension finie pour tout Γ, le $H_{C'}(G, \Gamma)$-module $(V \otimes_C C')^\Gamma = V^\Gamma \otimes_C C'$ est simple, pour tout corps $C' \supset C$. La représentation de G sur $V \otimes_C C'$ est donc irréductible. Une représentation irréductible admissible est donc absolument irréductible.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si (π, V) est absolument irréductible, on choisit un corps non dénombrable $C' \supset C$. La dimension d'une représentation irréductible de G est dénombrable, donc tout endomorphisme de V qui commute à $\pi(G)$ est un multiple de l'identité, par un scalaire évidemment dans C. Ainsi, (π, V) satisfait le lemme de Schur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Une représentation irréductible qui satisfait le lemme de Schur a évidemment un caractère central.

Une représentation irréductible cuspidale a donc un caractère central, par le Lemme 20(2) et l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii). C'est vrai pour toute représentation irréductible π, en utilisant le fait que π_N est de type fini, donc a un quotient irréductible.

Demonstration du Théorème 9

Soit (π, V) une représentation irréductible.

Un *modèle de Whittaker* de π est une sous-représentation isomorphe à π contenue dans la représentation

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\,(G, N, \psi) = \{f\colon G \to C, &\text{ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, et}\\ &\text{vérifiant}\\ &f(ng) = \psi(n) f(g), g \in G, n \in N\}.\end{aligned}$$

muni de l'action naturelle de G par translation à droite.

Notons que par définition, (τ, W) est l'induite à support compact $\mathrm{ind}(P, N, \psi)$.

Un *modèle de Kirillov* de π une sous-représentation de $\mathrm{Ind}(P, N, \psi)$, sur laquelle l'action de P se prolonge en une action de G, qui est isomorphe à π.

L'*existence* d'un modèle de Whittaker équivalente à

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}(G, N, \psi)) \neq 0$$

ou encore à $V_\psi \neq 0$, pour $\psi \neq 1$, résulte de la démonstration du Théorème 7 ($G' = G$). Son existence ou son unicité ne dépendent pas du choix de ψ.

La dimension de $\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}\,(G, N, \psi))$ ne dépend que de la restriction de la représentation à N, puisque par Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_N(\pi, \psi) \sim \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}(G, N, \psi)) \sim \mathrm{Hom}_P(\pi, \mathrm{Ind}(P, N, \psi)).$$

Le premier isomorphisme associe à une forme linéaire non nulle (non nécessairement lisse)

$$L: V \to C, \quad L(\pi(n)v) = \psi(n)L(v), \quad n \in N, \quad v \in V$$

une application linéaire

$$W: V \to \mathrm{Ind}(G, N, \psi), \quad W(v)(g) = L(\pi(g)v), \quad g \in G.$$

L'image de $W \neq 0$ est un modèle de Whittaker, et ses éléments $W(v)(g)$ des *fonctions de Whittaker* (ce sont des coefficients généralisés). Inversement,

$$L(v) = W(v)(1).$$

Le second s'obtient naturellement en restreignant $W(v)$ à P.

La restriction à P de $W(v)$ est déterminée par sa restriction à F^* (naturellement plongé dans P), et le caractère central. Les fonctions

$$\kappa(x) = W(v)(t(x, 1)), \quad v \in V, \quad x \in F^*,$$

sont appelées des *fonctions de Kirillov*

Comme la restriction de π à P n'est pas nécessairement irréductible, l'existence du modèle de Kirillov est équivalente à la question: existe-t-il un modèle de Whittaker Wh tel que si $W \in Wh$ n'est pas nul, sa restriction à P n'est pas nulle? L'unicité du modèle de Whittaker implique celle du modèle de Kirillov.

THEOREME 9 (version améliorée). *Soit (π, V) une représentation irréductible de G ayant un caractère central, et de dimension infinie. Supposons $l \neq 2$.*

(1) *Elle admet un unique modèle de Whittaker.*
(2) *La restriction de π à P contient une unique sous-représentation irréductible (isomorphe à (τ, W)). La représentation $\pi|_P$ est irréductible, ou de longueur* 2, 3 *selon que π est cuspidale, spéciale ou principale.*
(3) *Elle admet un unique modèle de Kirillov. Les fonctions de Kirillov sont localement constantes sur F^*, nulles à l'infini ($|x| \to \infty$).*

Le théorème fournit une caractérisation des propriétés cuspidales, spéciales ou principales, via le modèle de Kirillov: le modèle de Kirillov d'une représentation irréductible de dimension infinie contient $S(F^*)$ comme sous-espace de dimension 0, 1, 2 selon que la représentation est cuspidale, spéciale, principale. L'unicité des modèles de Kirillov permet de montrer l'existence de *nouveaux vecteurs.* Nous y reviendrons plus loin.

La suite suivante est P-exacte, car N est distingué dans P:

$$0 \to V(1) \to V \to V_1 \to 0$$

L'espace $V(1)$ a une fibre nulle en 1, et sa fibre en $\psi \neq 1$ est celle de V: $V(1)_\psi = V_\psi$.

L'unicité du modèle de Whittaker est aussi équivalente à: $V(1)$ est un P-module isomorphe à τ.

La méthode complexe de Gelfand-Kazhdan étendue à C ne permet pas pour l'instant de traiter le cas $l = 2$. Il existe une autre méthode due à Howe, mais encore restrictive ($p \neq 2$) (preprint de l'I.H.E.S.).

Montrons d'abord comment on obtient les propriétés (2) et (3) (en admettant l'unicité).

– Soit $W \subset V$ un P-sous-module irréductible W. On a $W(1) \subset V(1)$, où $V(1) \approx \tau$ est irréductible. Donc $W(1) = V(1)$, ou bien $W(1) = 0$. Si $W(1) = 0$, W est de dimension 1, et V n'est pas cuspidale. Par le Lemme 18,2), la restriction à P d'une représentation irréductible principale ou spéciale de G ne contient pas de caractère. Donc $W = W(1) \approx \tau$ est l'unique P-sous-module de V.

– On fixe $\psi \neq 1$. Soit Wh le modèle de Whittaker de π pour ψ. L'ensemble des fonctions de Whittaker nulles sur P est un P-sous-module de Wh. S'il n'était pas nul, il contiendrait $Wh(1)$ par le raisonnement précédent. Vérifions que $Wh(1)$ ne s'annule pas sur P, en exhibant $n \in N$ et une fonction de Whittaker W, tel que $W(.n) - W \in Wh(1)$ ne soit pas nul en $g = 1$. Il suffit de prendre

– W tel que $W(1) \neq 0$: on peut se ramener à cela par translation,

– n tel que $\psi(n) \neq 1$,

alors $W(n) - W(1) = (\psi(n) - 1)\, W(1) \neq 0$.

On en déduit l'existence et l'unicité du modèle de Kirillov.

Les fonctions de Kirillov sont nulles à l'infini, car $W(v)(g) = 0$ est équivalent à: $L(\pi(g)v) = 0$, ou encore à $r_\psi(\pi(g)v) = 0$, et l'on applique le Lemme 19.

Preuve de l'unicité du modèle de Whittaker, $l \neq 2$

La preuve complexe de Gelfand et Kazhdan (*BZ* p. 58) est adaptée ici à C. Par dualité, on a

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}(G, N, \psi^{-1}) \approx \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}(G, N, \psi), \pi^*).$$

L'isomorphisme est $L \to A$,

$$\langle L(v), f\rangle = \langle v, A(f)\rangle, \quad v \in V, \quad f \in S(G, \psi)$$

où l'on note l'espace de $\mathrm{ind}(G, N, \psi)$ par

$$S(G, \psi) = \{f\colon G \to C, \text{ localement constante, à support compact modulo } N, \text{ vérifiant } f(ng) = \psi(n)f(g), n \in N, g \in G\}.$$

Le noyau de A est l'orthogonal de l'image de L. L'existence des modèles de Whittaker permet de choisir

$$A: S(G, \psi) \to \pi^*, \quad A': S(G, \psi) \to \pi$$

non nulles (donc surjectives). on définit sur $S(G, \psi)$ une forme bilinéaire G-invariante non nulle

$$B(f, f') = \langle Af, A'f' \rangle, \quad f, f' \in S(G, \psi).$$

Le noyau de A coincide avec le noyau à gauche de B égal à

$$\{f \in S(G, \psi), B(f, f') = 0 \text{ pour tout } f' \in S(G, \psi)\}.$$

Le noyau de A' coincide avec le noyau à droite de B. L'unicité du modèle de Whittaker sera un conséquence du lemme suivant.

LEMME 21. *Si $l \neq 2$ et si B est une forme bilinéaire G-invariante sur $S(G, \psi)$, alors*

$$B(f, f') = B(f'\alpha, \; -f\alpha)$$

où $\alpha(g) = g/\text{dét}\, g, g \in G$.

Ce lemme implique que $\operatorname{Ker} A\alpha = \operatorname{Ker} A'$. Puisque π est irréductible, ceci implique $\operatorname{Hom}_G(\pi, \operatorname{Ind}(G, N, \psi^{-1}) \leqslant 1$. Les éléments $\alpha(g)$ et ${}^t g^{-1}$ sont conjugués.

Preuve du Lemme 21.

(a) Soit $Y = N \times N\backslash G \times G$, et $p: G \times G \to Y$ la surjection canonique; G opère sur Y par multiplication à droite δ: $p(x, x') \in Y \to p(xg^{-1}, x'g^{-1})$. Les orbites $c(x)$ de G dans Y admettent comme représentants

$$x = p(g, 1), \quad \text{où } g = tr, \quad t \text{ diagonal}, \quad r \in \{1, w\}.$$

Le stabilisateur H de x dans G est $N \cap rNr^{-1}$. Soit σ: $\sigma(x, x') = (-\alpha(x'), \alpha(x))$, $(x, x') \in Y$ (α passe au quotient $N\backslash G$). On vérifie que σ est un automorphisme de Y d'ordre 4 qui normalise l'action de G:

$$\sigma\delta(g)\sigma^{-1} = \delta(-g).$$

(b) Une forme bilinéaire sur $S(G, \psi)$ s'identifie à
- une forme linéaire sur

$$S(G, \psi) \otimes S(G, \psi) \approx S(G \times G, \theta) \approx \operatorname{ind}(G \times G, N \times N, \theta),$$
$$\theta(n, n') = \psi(nn'), \quad n, n' \in N.$$

– une distribution sur le faisceau M défini par $S(G \times G, \theta)$ sur Y.
Le lemme est équivalent à: toute distribution G-invariante sur M est σ-invariante.

(c) Comme G et les stabilisateurs H sont unimodulaires, il existe une distribution G-invariante sur $M(c(x))$, si et seulement si l'action de H sur la fibre en x est triviale. Si $x \in Y$ a un stabilisateur H non trivial, $x = p(t, 1)$ et $H = N$ agit sur fibre de M en x par multiplication par $\psi(tnt^{-1}n)$

$$f(tn, n) = f(tnt^{-1}t, n) = \psi(tnt^{-1}n) f(t, 1).$$

Ainsi, il existe une distribution G-invariante sur $M(c(x))$ si et seulement si

$$x = p(g, 1), \quad \text{avec } g = tw \quad \text{où } g = t(a, -a).$$

Pour ces éléments, $\alpha(g)g = -1$ et les orbites $c(x)$ correspondantes sont σ-invariantes, et une distribution G-invariante sur $M(c(x))$ est donc invariante par σ, car

$$\sigma(g, 1) = (-1, \alpha(g)) = \delta\alpha(g)^{-1}(-\alpha(g)^{-1}, 1) = \delta\alpha(g)^{-1}(g, 1).$$

(d) Soit X l'ensemble des $x = p(tr, 1) \in Y$, avec $r = w$. L'action de G sur X est régulière et l'on déduit de (c) que toute distribution G-invariante sur $M(X)$ est σ-invariante (Bernstein-Zelevinski 6.13, p. 56). En particulier, si T est une distribution G-invariante sur Y, $T'(f) = T(\sigma f) - T(f)$ ne dépend que de la restriction de f à $Y - X$. Par les dernières équations ci-dessus, $T'(f) = T'(\sigma f)$, d'où $2T(\sigma f) = 2T(f)$. On peut simplifier par 2 si $l \neq 2$.

On suppose désormais que l'uniformisante ω opère trivialement sur les représentations de G.

Représentations cuspidales

Notations: l'ordre d'Eichler est

$$\vartheta = \{g \in M(2, O),\ c \in \omega O\}.$$

Le groupe des unités *de* ϑ *est* $\Gamma_0 = \{g \in GL(2, O),\ c \in \omega O\}$, le radical est

$$P = \{g \in M(2, O),\ a, d,\ c \in \omega O\}$$

est $\Gamma_1 = 1 + P = \{g \in GL(2, 0),\ a - 1,\ d - 1,\ c \in \omega O\}$.
La filtration de $M(2, F_q)$:

$$M(2, F_q) \supset \{g \in M(2, F_q),\ c = 0\} \supset \{g \in M(2, F_q),\ a = c = d = 0\}$$

se relève en une filtration de $GL(2, O)$:

$$\begin{aligned} GL(2,O) &= \Gamma \supset \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma(1) \supset \cdots \supset \Gamma(n-1) \\ &= 1 + \omega^{n-1}M(2,O) \supset \Gamma_0(n) \\ &= 1 + \omega^{n-1}\vartheta \supset \Gamma_1(n) = 1 + \omega^{n-1}P \supset \Gamma(n) \supset \cdots \end{aligned}$$

DEFINITION. Le *conducteur* $F(\pi)$ d'une représentation irréductible (π, V) sera le plus grand de ces groupes tel que $V^{F(\pi)} \neq \{0\}$.

On dira que π est *minimale*, si l'on ne peut pas grandir $F(\pi)$ en tordant π par un caractère χ de G. Si π est irréductible, minimale, et $F(\pi)$ est contenu strictement dans $\Gamma(1)$, on dira que π est *sauvagement ramifiée.*

THEOREME 23. *Soit (π, V) est une représentation irréductible minimale de G. La représentation π est cuspidale si et seulement si le conducteur de π est*

$$F(\pi) = \Gamma(n) \quad \text{ou } \Gamma_0(n+1), \quad n \geqslant 1.$$

Sa démonstration comporte plusieurs étapes.

PROPOSITION 24. *Une représentation cuspidale de G n'a pas de vecteur invariant par le groupe Γ_1.*

Preuve. Ceci est une version forte du théorème de Casselman (4.1.3) et Borel (4.7, p. 248) complexe qui démontre la même chose pour le groupe Γ_0. Leur démonstration s'étend si $(l, q-1) = 1$, car le volume de Γ_0 est alors inversible. L'intêret de Γ_1 est que c'est un pro-p-groupe, de cardinal inversible en toute caractéristique $p \neq l$, ayant une décomposition d'Iwahori. On peut choisir une mesure de Haar sur G telle que son volume soit égal à 1. Si e_1 est la fonction caractéristique de Γ_1, alors $\pi(e_1)$ est un projecteur de V sur l'espace W de ses vecteurs invariants par Γ_1.

On note $e(g)$ la double classe modulo Γ_1 de $g \in G$. Soit $r = \mathrm{diag}(\omega, 1)$, r contracte N, $rNr^{-1} \subset N$, et dilate l'unipotent opposé.

Il existe un entier positif n_0, tel que pour $n \geqslant n_0$, la surjection $V \to V_N$ induit un isomorphisme entre $\pi(e(r^n))W$ et l'ensemble des vecteurs de V_N invariants par les matrices diagonales de Γ_1.

Supposons $W \neq 0$, alors nous voulons montrer que l'action de $e(r^n)$ dans W est inversible. Le groupe μ_{q-1} des racines de l'unité d'ordre $q-1$ de F se plonge dans Γ_0 diagonalement:

$$\alpha \in \mu_{q-1} \to t(\alpha) \in G \text{ égal à la matrice diagonale } (\alpha, \alpha^{-1}).$$

Le groupe engendré par $t(\mu_{q-1})$ et Γ_1 est le groupe d'Iwahori U_0 de $SL(2, F)$. On montre

$$e(r)\,e(r^{-1}) = e_1 + f,$$

où $f \in H(G, U_0)$ appartient à l'algèbre de Hecke sur $\mathbf{Z}$ de G par rapport à U_0.

Pour cela, utiliser la décomposition d'Iwahori de Γ_1 et la célèbre formule:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/x & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $f = \Sigma e(ut(x))$, $u = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad x \in \mu_{q-1}$.

L'action de $H(G, U_0)$ sur W est nilpotente. C'est clair si $(l, q-1) = 1$, puisque V n'a pas de vecteur U_0-invariant par le théorème de Borel-Casselman. Sinon $f^2 = 0$, pour tout $f \in H(G, U_0)$ puisque le volume de U_0 est nul. On en déduit que l'action de $e_1 + f$ dans W est inversible. Donc celle de $e(r)$ aussi. La même calcul montre que

$$e(r)^n - e(r^n) \in H(G, U_0).$$

On en déduit que l'action de $e(r^n)$ dans W est inversible.

Soit (π, V) une représentation irréductible cuspidale telle que $V^{\Gamma(1)} \neq 0$. Le groupe $GL(2, O)$ opère sur $V^{\Gamma(1)}$, et son action passe au quotient $GL(2, O)/\Gamma(1) \approx GL(2, F_q)$. Par la proposition, il n'existe pas dans $V^{\Gamma(1)}$ d'élément non nul invariant par $N(O) = \{g \in N,\ b \in O\}$, car $\Gamma(1)$ et $N(O)$ engendrent Γ_1. Donc la représentation de $GL(2, F_q)$ sur $V^{\Gamma(1)}$ est une représentation cuspidale.

Soit (π, V) une représentation de conducteur $F(\pi) \not\subset \Gamma(1)$. La filtration de $GL(2, O)$ que l'on a considérée est l'union de deux filtrations disjointes

- de la filtration des sous-groupes distingués $\Gamma(n)$ de $GL(2, O)$ et
- de la filtration $((1 + \omega^n \vartheta \supset 1 + \omega^n P))$ de sous-groupes distingués de Γ_1.

Les quotients de ces deux filtrations sont des p-groupes commutatifs, isomorphes respectivement à $A = M(2, F_q)$, $(F_q)^2$.

Le plus petit groupe contenant strictement $F(\pi)$ dans la filtration contenant $F(\pi)$ opère sur $V^{F(\pi)}$, et par quotient fournit une représentation de A sur $V^{F(\pi)}$. Elle se décompose en une somme directe de caractères, car $l \neq p$. On fixe un plongement de F_p dans C^*, i.e. une racine p-ième de l'unité $\mu \in C^*$. Par auto-dualité, ces caractères correspondent à des éléments de A. Soit $X(\pi)$ l'ensemble ainsi déterminé. Nous allons décrire $X(\pi)$ lorsque π est minimale, cuspidale.

Le groupe $F(\pi)$ est de l'un des trois types suivants:

(a) $F(\pi) = \Gamma(f) = \Gamma(\omega^f)$.
L'isomorphisme $\Gamma(\omega^{f-1})/\Gamma(\omega^f) \approx M(2, F_q)$ est induit par $g \to \omega^{-f+1}g$ (mod ωO). Tout caractère de $M(2, F_q)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\psi_g(g') = \mu^h, \quad h = \text{trace}(gg') = aa' + bc' + cb' + dd', \quad g, g' \in M(2, F_q),$$

où trace: $M(2, F_q) \to F_p$ est la trace réduite.
L'ensemble $X(\pi)$ des $g \in M(2, F_q)$ tels que le caractère ψ_g apparaisse dans la représentation de $M(2, F_q)$ sur $V^{F(\pi)}$ est invariant par conjugaison par $GL(2, F_q)$. Les éléments de $X(\pi)$ n'ont pas leurs valeurs propres dans F_q. Sinon, $X(\pi)$ contiendrait un élément

$$g \in B = \{g \in M(2, F_q), c = 0\}.$$

(b) $F(\pi) = 1 + \omega^n\vartheta$.
L'isomorphisme $1 + \omega^{n-1}P/1 + \omega^n\vartheta \approx (F_q)^2$ est induit par $g \to (b', c') = \omega^{-n+1}(b, \omega^{-1}c)$ modulo ωO. Tout caractère de $(F_q)^2$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\psi_g(g') = \mu^h, \quad h = \text{trace}(gg') = bc' + cb', \quad \text{si } g \approx (b, c), \quad g' \approx (b', c').$$

L'ensemble $X(\pi)$ est stable par la permutation des coordonnées $(x, y) \to (y, x)$.
Pour tout $g \approx (b, c) \in X(\pi)$, on a $bc \neq 0$. Sinon, on pourrait supposer $b = 0$, et $h = 0$ si $b' = 0$; un vecteur de $V^{F(\pi)}$, sur lequel $(F_q)^2$ agit par ψ_g est invariant par

$$\Gamma(\omega^f) = \{g \in 1 + \omega^{f-1}P, \quad \text{tel que } b' = 0\}$$

qui contient strictement $F(\pi)$.

(c) $F(\pi) = 1 + \omega^n P$.
L'isomorphisme $1 + \omega^n\vartheta/1 + \omega^n P \approx (F_q)^2$ est induit par $g \to (a, d) = \omega^{-n}(a - 1, d - 1)$ modulo ωO. Les caractères de $(F_q)^2$ sont de la forme précédente, mais avec

$$h = aa' + dd', \quad \text{si } g \approx (a, d), \quad g' \approx (a', d').$$

En tordant π par un caractère de F^* trivial sur $1 + \omega^n O$, on remplace $X(\pi)$ par un translaté $X(\pi) - (x, x)$, $x \in F_q$. Si π est minimale, et $(a, d) \in X(\pi)$, on a $a \neq d$.

Examinons ce cas plus en détal. On étend au p-groupe

$$J = \{g \in G, b, c \in \omega^j O,\ a - 1,\ d - 1 \in \omega^n O\}, \quad \text{si } n = 2j - 1$$
$$J = \{g \in G,\ b \in \omega^j O,\ c \in \omega^{j+1} O,\ a - 1,\ d - 1 \in \omega^n O\}, \quad \text{si } n = 2j$$

un caractère χ de $1 + \omega^n \vartheta$ intervenant dans $V^{F(\pi)}$, en un caractère trivial sur les sous-groupes

$$N(J) = \{n \in J,\ a = d = 1,\ c = 0\}, \quad N_{-}(J) = \{n \in J,\ a = d = 1,\ b = 0\}.$$

On le note χ_J ou encore χ.

Soit $G' \approx (F^*)^2$ le groupe des matrices diagonales de G; le caractère χ de J définit par restriction un caractère χ' de

$$G' \cap J = J' \approx (1 + \omega^n O)^2 = \{t \in J,\ b = c = 0\}.$$

Soit $H(G//J, \chi)$ *l'algèbre de Hecke de G sur C par rapport à* (J, χ). C'est l'algèbre pour le produit de convolution des fonctions $f: G \to C$, à support compact, bi-χ-invariantes par J

$$f(jgj') = \chi(jj') f(g), \quad j, j' \in J, \quad g \in G,$$

pour la mesure de Haar sur G, telle que $\mathrm{vol}(J) = 1$. Le support de $H(G//J, \chi)$ est noté par

$$\mathrm{Supp}\, H(G//J, \chi) = \{g \in G, \text{ il existe } f \in H(G//J, \chi),\ f(g) \neq 0\}.$$

Comme J est un p-groupe, $\mathrm{vol}(JgJ)$ est une puissance de p. On fixe une racine carrée de p dans C, et on l'utilise pour définir $\mathrm{vol}(JgJ)^{1/2}$. L'algèbre de Hecke $H(G//J, \chi)$ est engendrée par les

$$f_g \in H(G//J, \chi) \text{ de support } JgJ \text{ telle que } f(g) = \mathrm{vol}(JgJ)^{-1/2},$$
$$g \in \mathrm{Supp}\, H(G//J, \chi).$$

On définit de même des fonctions $f'_g \in H(G'//J', \chi')$, $g \in \mathrm{Supp}\, H(G'//J', \chi')$.

PROPOSITION 25. (1) *Soit π une représentation de G. Si sa restriction à $1 + \omega^{f-1} P$ contient χ alors sa restriction à J contient χ_J.*
(2) *L'application η: $f'_g \to f_g$, $g \in G'$, définit un isomorphisme entre les algèbres*

$$H(G'//J', \chi') \approx H(G//J, \chi).$$

La preuve de ce théorème important par Roger Howe (ch. 2, §4) sur les complexes s'étend à C. Les arguments sont les suivants:

(1) Tout caractère de $\Gamma(\omega^j)$ qui prolonge χ est conjugué dans $\Gamma(\omega)$ à un caractère trivial sur les groupes $N(\omega^j O)$ et

$$N_{-}(\omega^j O) = \{g \in G,\ a = d = 1,\ b = 0, c \in \omega^j O\}$$

(2) (a) Supp $H(G//J, \chi) \subset JG'J$, donc η est surjective
(b) $Jg'J \cap G' = J'g'J'$ pour $g' \in G'$, donc η est injective
(c) η est un homomorphisme d'algèbres.
Tous ces résultats restent vrais sur K, et par réduction sur C.

Comme les centres de G et G' sont différents, on applique une remarque de Howe, et l'on obtient.

COROLLAIRE 26. *Si π est cuspidale minimale, sauvagement ramifiée, alors*

$$F(\pi) \neq 1 + \omega^n P.$$

Preuve (Howe). Soit $\mathbb{Z}$ plongé dans F^* via l'uniformisante. Une représentation irréductible π cuspidale (de coefficients à support compact modulo $\mathbb{Z}$), de conducteur $F(\pi) = 1 + \omega^n P$, contenant χ, s'identifie à un sous-module simple de $H(G//J\mathbb{Z}, \chi)$. Nous allons montrer que $H(G//J\mathbb{Z}, \chi)$ ne contient pas de sous-module simple. On déduit facilement de 25 que

$$H(G//J\mathbb{Z}, \chi) \approx H(G'//J'\mathbb{Z}, \chi').$$

Le groupe $G'/\mathbb{Z}$ ne contient pas de représentation irréductible, dont les coefficients sont compacts: en effet, toute représentation irréductible de G' est un caractère (remarque 2), et $G'/\mathbb{Z}$ n'est pas compact. Donc $H(G'//J'\mathbb{Z}, \chi')$ n'a pas de sous-module simple, quelque soit χ'.

Nous allons montrer que toutes les représentations irréductibles minimales sauvagement ramifiées π de conducteur $F(\pi) = \Gamma(\omega^f)$, $1 + \omega^n\vartheta$, où $f \geqslant 1, n \geqslant 1$, sont cuspidales. Nous le déduirons de la construction des représentations cuspidales, à partir des représentations très cuspidales.

Représentation très cuspidale

A conjugaison près, $G = GL(2, F)$ possède deux sous-groupes H compacts maximaux modulo le centre. Ce sont

$$\begin{aligned} H &= H_1 \text{ le normalisateur de } M(2, O) \\ &= H_2 \text{ le normalisateur de } \vartheta. \end{aligned}$$

Le groupe H est filtré par les groupes

$$
\begin{aligned}
G(n) &= \Gamma(\omega^n) \qquad \text{si } H = H_1 \\
&= 1 + \omega^j \vartheta \quad \text{si } \ n = 2j, \quad 1 + \omega^j P \quad \text{si } n = 2j + 1 \quad \text{et } H = H_2.
\end{aligned}
$$

Soit σ une représentation irréductible de H non triviale sur $G(0)$; on dira que l'entier $f \geqslant 1$ tel que σ soit triviale sur $G(f)$, mais non sur $G(f-1)$ est l'exposant du conducteur de σ. Elle est dite sauvagement ramifiée si $f > 1$.

DEFINITION 27. Une représentation très cuspidale est une représentation irréductible σ de H, de conducteur d'exposant $f \geqslant 1$ et

(a) pour H_1,
  - si $f = 1$, σ s'identifie à une représentation cuspidale de $GL(2, F_q)$.
  - si $f \geqslant 2$, tout caractère qui apparait dans la restriction de σ à $\Gamma(\omega^{f-1})$ s'identifie à un caractère $\psi_g, g \in M(2, F_q)$ de valeurs propres n'appartenant pas à F_q.

(b) Pour H_2, f est pair, et tout caractère qui apparait dans la restriction de σ à $1 + \omega^{(f/2)-1} P$ s'identifie à un caractère ψ_g, $g \in (F_q^*)^2$.

LEMME 28. *Toute représentation irréductible cuspidale minimale de G possède un quotient très cuspidal.*

Preuve. Soit $H(\pi) = H_1$, si $F(\pi) = \Gamma(\omega^f)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad H_2$, si $F(\pi) = 1 + \omega^n \vartheta$.

Si $\Gamma(1) = F(\pi)$, on le sait déjà. On suppose donc $\Gamma(1) \neq F(\pi)$. Le groupe $\mathbb{Z}F(\pi)$ est distingué d'indice fini dans $H(\pi)$, et $F(\pi)$ est un p-groupe profini. La restriction de π à $\mathbb{Z}F(\pi)$ est semi-simple. Ses composantes isotypiques sont $H(\pi)$-stables. L'espace W des vecteurs de V invariant par $\mathbb{Z}F(\pi)$ est de dimension finie (admissibilité), et admet un $H(\pi)$-quotient irréductible. Tout $H(\pi)$-sous-quotient irréductible de W est très cuspidal par la description de $X(\pi)$.

On en déduit par Frobenius, que

- toute représentation cuspidale irréductible ou
- toute représentation irréductible π telle que $F(\pi) = \Gamma(\omega^f), 1 + \omega^n \vartheta$, où $f \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ est contenue dans une représentation induite $\pi(\sigma) = \mathrm{Ind}(G, H, \sigma)$ d'une représentation irréductible très cuspidale σ de H.

Construction des représentations très cuspidales, $f \geqslant 2$.

Elles ont été construites par Carayol (p. 210) pour $C = \mathbb{C}$. Ses arguments restent valables pour tout C. Nous allons les redonner brièvement.

La théorie des groupes finis, en particulier de la restriction à un sous-groupe distingué abélien, d'une représentation irréductible montre que:

- Si χ est un caractère contenu dans la restriction de σ au sous-groupe $F^*G(f')$, $f' = [(f+1)/2]$,

– abélien modulo $G(f)$
– distingué d'indice fini dans H
et Z le centralisateur de χ dans H, alors il existe une représentation irréductible ρ de Z dont la restriction à $F^*G(f')$ est isomorphe à $(\dim\rho)\chi$ telle que

$$\sigma \approx \operatorname{ind}(H, Z, \rho).$$

A conjugaison près dans H, le couple (Z, ρ) est uniquement déterminé par la classe d'équivalence de σ.

Comme χ est à valeurs dans le groupe $\mu_{p^\infty}(C) \approx \mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$ des racines de l'unité dans C d'ordre une puissance de p, on peut identifier χ à un caractère complexe χ'. On déduit alors de (Carayol, p. 202) le centralisateur de χ. On a:

(a) $Z = E^*G([f/2])$
où $E = F(u)$ est un corps, et $u \in M(2, F)$ vérifie

$$\chi((1 + \omega^{f'}x) = \psi(\operatorname{trace}(ux))$$

– si $H = H_1$, $x \in O$, $u = \omega^{-f}y$, $y \in GL(2, O)$ d'image dans $GL(2, F_q)$ quadratique sur F_q,
– si $H = H_2$, $x \in \vartheta$, $u = \omega^{-j}y$, $y \in P^{-1} = \{g \in G, a, c, d \in O, b \in \omega^{-1}O\}$ tel que c, $\omega b \notin \omega O$.

(b) Si f est pair, $Z/\operatorname{Ker}\chi$ est *abélien* et $\dim \rho = 1$, la partie de $\dim \sigma$ première à p est $q - 1$ si $H = H_2$ et $q + 1$ si $H = H_1$.

(c) Si f est impair (E/F non ramifiée, $H = H_1$), c'est plus compliqué. La représentation ρ est le prolongement à $T = Z/\operatorname{Ker}\chi$ d'une représentation irréductible d'un *p-groupe d'Heisenberg* $H' = F^*E^1G(f - 1)/2)/\operatorname{Ker}\chi$. On note $A = F^*E^1G(f + 1)/2)/\operatorname{Ker}\chi$.
– H' est distingué dans T, et T est le produit semi-direct de H' par un groupe cyclique d'ordre $q + 1$, s'identifiant au groupe E^*/F^*E^1.
– A est un p-groupe abélien, central dans T, et le quotient $P = H'/A$ est abélien d'ordre q^2.
– Le groupe H' est une extension centrale de P par A:

$$1 \to A \to H' \to P \to 1.$$

La théorie de ses représentations est la même en caractéristique 0 ou l (voir [2]). Si $[p, p'] = pp'p^{-1}p'^{-1} \in A$ est le commutateur de $p, p' \in P$, l'accouplement $\chi_1([p, p'])$ est non dégénéré, pour tout caractère χ_1 de A prolongeant χ. Le nombre de prolongements χ_1 est égal à Card A. Il existe une unique représentation $r(\chi_1)$ irréductible de H' contenant χ_1, et

$$\mathrm{ind}(H', A, \chi_1) = |P|^{1/2} r(\chi_1),$$

donc $\dim r(\chi_1) = q$.

- Le groupe T est une extension du groupe cyclique d'ordre $q + 1$ par le p-groupe d'Heisenberg H'

  $$1 \to H' \to T \to \mathbb{Z}/(q + 1)\mathbb{Z} \to 1$$

  Comme A est central dans T, et $(q + 1, p) = 1$, toute représentation irréductible de H' se prolonge à T. Deux telles extensions différent par un caractère de $\mathbb{Z}/(q + 1)\mathbb{Z}$. Le nombre d'extensions est égal à la partie de $q + 1$ première à l. On a $\dim \rho = q$.
- $\dim \sigma = [H: Z] \dim \rho$. La partie de $\dim \sigma$ première à p est $q - 1$ (Carayol, p. 211).

Premières remarques.

- La réduction conserve l'entier f. Une représentation de H sur K dont la réduite est très cuspidale est elle-même très cuspidale.
- Si $f = 1$, on sait déjà que le lemme 10 est vrai, et la dimension de σ est $q - 1$ (voir [1]).
- Si $f \geqslant 2$, la description des représentations très cuspidales implique facilement le lemme 10.

Demonstration du Théorème 11

Par la remarque suivant le lemme 28, toute représentation cuspidale π est contenue dans une représentation $\mathrm{Ind}(G, H, \sigma)$ où σ est très cuspidale.

Par le lemme 10, une représentation irréductible très cuspidale se relève en une représentation irréductible très cuspidale Σ en caractéristique 0. Par le théorème sur les nombres complexes, $\mathrm{Ind}(G, H, \Sigma) = \mathrm{ind}(G, H, \Sigma)$ est irréductible.

On va vérifier (§ suivant) que la réduction d'un A-réseau de $\mathrm{Ind}(G, H, \Sigma)$ est égale à $\mathrm{Ind}(G, H, \sigma)$.

On en déduit que $\mathrm{Ind}(G, H, \sigma) = \mathrm{ind}(G, H, \sigma)$ est admissible. Ceci démontre:

LEMME 29. *Une représentation irréductible est contenue dans la réduction d'une représentation irréductible en caractéristique* 0.

On montre $\pi = \mathrm{ind}(G, H, \sigma)$, i.e. l'assertion (1) du Théorème 11 en vérifiant (voir la remarque suivant le Théorème 36).

LEMME 30. *La réduction d'une représentation irréductible cuspidale est irréductible.*

Soit $\pi(\sigma) = \mathrm{ind}(G, H, \sigma)$. Si $\pi(\sigma) \approx \pi(\sigma')$, on a $\mathrm{Hom}(\pi(\sigma), \pi(\sigma')) = 1$. Par Mackey,

$$\pi(\sigma)|_H = \sigma \bigoplus (\oplus\, \mathrm{ind}(H, H \cap gHg^{-1}, {}^g\sigma|_{H\cap gHg^{-1}}),$$

où ${}^g\sigma$ est la représentation de gHg^{-1} déduite de σ par:

$${}^g\sigma(ghg^{-1}) = \sigma(h), \quad h \in H.$$

Si σ, σ' sont deux représentations très cuspidales non équivalentes de H, alors la restriction à $H \cap gHg^{-1}$ des représentations σ et ${}^g\sigma'$ n'ont pas de sous-quotient commun, si $g \in G - H$. Ceci se démontre comme dans le cas complexe (Carayol). On en déduit $\sigma \approx \sigma'$.

Le Théorème 11 est démontré. Les assertions des Corollaires 12 et 13 résultent du Théorème 3, du Lemme 10 et du Théorème 11.

Representations sur A

Les résultats de cette section s'étendent aux groupes réductifs p-adiques. Soit H un sous-groupe fermé de G, (σ, W) une représentation irréductible admissible de H, d'induite $(\pi, V) = \mathrm{ind}(G, H, \sigma)$. On suppose que π est admissible.

LEMME 31. (1) *Si σ a un A-réseau admissible M, alors $L = \{f \in V, f(G) \subset M\}$ est un A-réseau admissible de π.*

(2) *Si $(\pi', V') \subset (\pi, V)$ est une sous représentation de π et si L est un A-réseau admissible de π, alors $L' = L \cap V'$ est un A-réseau admissible de π'.*

Preuve du Lemme 31 (1) L est évidemment un A-module, G-stable. Si $f \in V$, f ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc $a \in A$, tel que les valeurs de af appartiennent à M. Donc, $af \in L$, et L engendre V. Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G. On a

$$V^\Gamma = \bigoplus_{g \in H\backslash G/\Gamma} V(g)^\Gamma, \quad V(g)^\Gamma = \{f \in V^\Gamma, \text{ de support contenu dans } Hg\,\Gamma\}.$$

Les termes sont presque tous nuls, puisque π est admissible.

L'application $f \to f(g)$ est un isomorphisme de $V(g)^\Gamma$ sur W^U, $U = H \cap g\Gamma g^{-1}$. On a

$$L^\Gamma = \bigoplus_{g \in H\backslash G/\Gamma} L(g)^\Gamma, \quad L(g)^\Gamma = L \cap V(g)^\Gamma = \{f \in V(g)^\Gamma, f(g) \in M^U\}$$

et pour tout $g \in G$, $L(g)^\Gamma$ est isomorphe à M^U, qui par hypothèse est un A-module libre de type fini. Il en est de même de L^Γ.

Le même type d'argument fournit un résultat utilisé dans la démonstration du Théorème 11: si Σ est une représentation de H sur K ayant un A-réseau M, de réduite modulo l notée (σ, W), alors la réduction de $\mathrm{ind}(G, H, M)$ est $\mathrm{ind}(G, H, W)$. La seule difficulté est la surjectivité de la réduction $L = \mathrm{ind}(G, H, M) \to Z = \mathrm{ind}(G, H, W)$. Ceci résulte des descriptions de

$$L^\Gamma = \prod_{g \in H \backslash G/\Gamma} L(g)^\Gamma, \quad Z^\Gamma = \prod_{g \in H \backslash G/\Gamma} Z(g)^\Gamma,$$

des isomorphismes $f \to f(g)$:

$$L(g)^\Gamma \to M^U, \quad Z(g)^\Gamma \to W^U$$

et de la surjectivité $M^U \to W^U$, si Γ est de cardinal premier à l.

(2) L' est évidemment un A-module stable par G. Si $v \in V'$, il existe $a \in A$, $av \in L$, donc $av \in L'$ et L' engendre V'. Comme A est un anneau de valuation, un sous-module d'un module libre de type fini est libre de type fini. Comme $L'^\Gamma \subset L^\Gamma$, et L^Γ est libre de type fini sur A, L'^Γ est libre de type fini sur A.

LEMME 32. *Soit (π, V) une représentation irréductible de G sur K, ayant un A-réseau admissible L. Supposons que $L/\lambda L$ soit une représentation de G de longueur finie. Alors, pour tout A-réseau admissible L' de (π, V), $L'/\lambda L'$ est une représentation de G de longueur finie, et les semi-simplifiées des représentations de G sur $L/\lambda L$ et $L'/\lambda L'$ sont isomorphes.*

Preuve. (a) Soient $W = L/\lambda L$, $W' = L'/\lambda L'$. Soit r la longueur de la représentation de G sur W. Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G', de volume non nul, assez petit de sorte que W^Γ soit un $H_C(G//\Gamma)$-module de longueur r. Les groupes Γ avec ces propriétés forment un système fondamental de voisinages de l'unité de G. Comme L^Γ et M^Γ sont deux réseaux de l'espace V^Γ de dimension finie sur K, stables par $H_A(G//\Gamma)$, la démonstration des groupes finis (Serre, p. 138) montre que les réductions de W^Γ et W'^Γ ont des semi-simplifiées isomorphes. On en déduit que les semisimplifiées de W et de W' sont isomorphes (sinon, il existerait Γ tel que le résultat précédent devienne faux).

LEMME 33. *Une représentation irréductible de $G = GL(2, F)$ sur K admet un A-réseau admissible si et seulement si elle est*
- *principale, et χ est à valeurs dans A (notations du théorème 3),*
- *spéciale, ou cuspidale.*

Notons que le module μ de B servant à définir les représentations $i(\chi) = \mathrm{ind}(G, B, \chi\mu)$ est à valeurs dans A^*. Toutes les représentations irréductibles de $G = GL(2, F)$ sont des sous-représentations de représentations induites admissibles. Les représentations du lemme sont celles qui sont contenues dans l'induite d'une représentation irréductible σ ayant un A-réseau admissible.

Il nous reste à vérifier que la condition "χ est à valeurs dans A" équivalente à "$\sigma = \chi\mu$ a un A-réseau admissible" est nécessaire. Nous utilisons pour cela le foncteur de coinvariants par N:

LEMME 34. *Soit (π, V) une représentation irréductible de G sur K, de A-réseau admissible L. Alors $r_1\pi$ est une représentation admissible de A-réseau admissible r_1L.*

On en déduira ce que l'on voulait puisque $r_1\pi$ est de longueur 2, de quotients χ et χ^w.

Preuve du Lemme 35. Rappelons que

- $r_1V = V/V(1)$, où $V(1)$ est le K-espace vectoriel engendré par les $\pi(n)v - v$, $n \in N$, $v \in V$,
- $r_1L = L/L(1)$, où $L(1)$ est le A-module engendré par les $\pi(n)v - v$, $n \in N$, $v \in L$.

On a $L(1) = V(1) \cap L$. Ceci vient du Lemme 15, qui caractérise les éléments de $V(1)$ comme l'union des noyaux des applications

$$e_U: v \to \int_U \pi(n)v \, \mathrm{d}n,$$

U parcourant les sous-groupes compacts de N. Le Lemme 15 reste vrai pour A, car le cardinal de U est inversible dans A.

Donc r_1L est naturellement plongé dans r_1V. Si $w \in r_1V$, provient de $v \in V$, il existe $a \in A$ tel que $av \in L$, d'où $aw \in r_1L$. Donc r_1L est un A-module engendrant r_1V. Il est stable comme L. Il reste à vérifier que r_1L est libre de type fini. Il est suffit de voir qu'il est de type fini, puisqu'il n'a pas de torsion. Par le théorème de Casselman (4.1.3) qui reste vrai sur A car p est inversible dans A, si Γ est un groupe de congruence assez petit, pour tout n entier assez grand, r_1 induit une surjection

$$\pi(f_t)L = \pi(f_t)(L^\Gamma) \to (r_1L)^U$$

où $t = t(\omega^n, \omega^{-n})$, f_t est la fonction caractéristique $\Gamma t \Gamma$, U est l'intersection de Γ et du groupe des matrices diagonales. On sait que L^Γ est un A-module de type fini. Le A-module $(r_1L)^U$ est aussi de type fini. Si Γ est assez petit, $r_1L = (r_1L)^U$.

LEMME 35. *Soit K un corps local non archimédien d'anneau des entiers A. La catégorie des représentations de G sur K ayant un A-modèle admissible est abélienne.*

Preuve. Le fait que A est un anneau de valuation complet et que la dimension d'une représentation admissible π est dénombrable implique qu'un A-réseau admissible L est libre (un A-module sans torsion de rang dénombrable est somme d'un module libre et d'un K-espace vectoriel). Si π' est un quotient de π, l'image L'

de L dans π est un A-module stable sans torsion de rang dénombrable engendrant π, qui contient pas de droite. Il est donc libre. On en déduit qu'il est admissible.

Modèle de Kirillov

Soit π une représentation irréductible de G sur K de dimension infinie, de caractère central trivial sur ω. On fixe un caractère ψ non trivial de F à valeurs dans K. Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

THEOREME 36. *L'ensemble $K_A(\pi, \psi)$ des fonctions de Kirillov à valeurs dans A est un A-réseau admissible de π si et seulement si π possède un A-réseau admissible.*

Avec le Théorème 9, on en déduit: la réduction d'une représentation irréductible cuspidale est toujours irréductible.

Comme K est de caractéristique 0, il se plonge dans $\mathbb{C}$. La représentation π étant absolument irréductible, nous allons utiliser la théorie complexe des *fonctions L et ε*.

Cette théorie est développée dans Jacquet-Langlands. Il est pratique d'utiliser aussi comme référence Godement, en faisant attention que les conventions ne sont pas les mêmes. Nous adoptons les conventions de Jacquet-Langlands, et nous utilisons les calculs explicites de Godement. Soit $X = q^{-s}$, et

$$L(\pi, s) = P_\pi(X)^{-1}, \quad P_\pi(X) \in \mathbb{C}[X], \quad P(0) = 1,$$
$$\varepsilon(\pi, s, \psi) = c(\pi, \psi)X^m, \quad c(\pi, \psi) \in \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{Z},$$
$$\gamma(\pi, s, \psi) = \varepsilon(\pi, s, \psi)\, L(\pi \otimes \omega_\pi^{-1}, 1 - s)/L(\pi, s) = G_\pi(X, \psi),$$

$G_\pi(X, \psi), P_\pi(X)$ sont des éléments inversibles de l'anneau $I_{\mathbb{C}}(X)$ des séries de Laurent en X à coefficients dans $\mathbb{C}$. On a

$$G_\pi(X, \psi) = c(\pi, \psi)X^m P_\pi(X) P_{\pi'}(X^{-1})^{-1},$$

où $\pi' = \pi \otimes \chi$, $\chi(x) = |x|\omega_\pi(x)^{-1}$, $x \in F^*$.

Définition du nouveau vecteur. (Deligne, définition. 2.2.7, p. 82; Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika th.4.1, p. 208) Soit ψ un caractère de conducteur O (ψ est trivial sur O, mais non sur $\omega^{-1}O$). Le nouveau vecteur $v(x) \in K(\pi, \psi)$ est l'unique fonction sur F^*, ne dépendant que de la valuation, à support dans O, telle que

$$\sum v(\omega^n)X^n = P_\pi(X)^{-1},$$

dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}\,[[X]]$. En particulier, $v(1) = 1$.

On peut calculer explicitement le nouveau vecteur, car l'on connait $P_\pi(X)$ (Godement, 1.48):

$$\begin{aligned} P_\pi(X) &= 1, \text{ si } \pi \text{ est cuspidale} \\ &= 1 - q^{-1/2}X, \text{ si } \pi = \mathrm{St} \\ &= P_\chi(X)P_{\chi'}(X), \text{ si } \pi = i(\chi, \chi') \text{ est de la série principale, où} \\ P_\chi(X) &= 1, \text{ si } \chi \text{ est ramifié} \\ &= 1 - \chi(\omega)X, \text{ sinon} \end{aligned}$$

On remarque que $P_\pi(X) \in A[X]$ signifie que π a un A-réseau admissible, puisque que $q^{1/2}$, $\chi(\omega) \in A^*$. On en déduit:

LEMME 37. *On a les équivalencews:*
(1) *π a un A-réseau admissible,*
(2) *$P_\pi(X) \in A[X]$,*
(3) *$v \in K(\pi, \psi)$ a ses valeurs dans A.*

Si ces conditions sont vérifiées, on vérifie que $c(\pi, \psi) \in A^*$

- si π est spéciale ou principale, ceci se déduit de Jacquet-Langlands ou de Godement (1.50) et du résultat pour les caractères (Tate (3.2.6.3)).
- si π est cuspidale, on peut utiliser que π est induite d'une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact, ou la correspondance de Jacquet-Langlands avec les quaternions.

Dans tous les cas, $c(\pi, \psi)$ est le produit

- de sommes de Gauss associées à un caractère ou à une représentation de dimension finie d'un corps de quaternions (normalisées de sorte que leur valeur absolute soit 1)
- d'un facteur de la forme q^r, où $r \in (1/2)\mathbb{Z}$
- d'une puissance de $\chi(\omega)$, et d'une puissance de $\chi'(\omega)$ si $\pi = i(\chi, \chi')$.

Comme $\pi' = \pi \otimes \chi$ a aussi un A-réseau admissible, $P_\pi(X)$ et $P_{\pi'}(X^{-1})$ sont inversibles dans $I_A(X)$. On a alors $G_\pi(X, \psi) \in I_A(X)$.

L'action de $\pi(w)$ sur le modèle de Kirillov est liée à $G_\pi(X, \psi)$ (Jacquet-Langlands). Si $f \in K(\pi, \psi)$ et χ un caractère de O^*, on considère

$$f'(\chi, X) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f'_n(\chi) X^n \in I_{\mathbb{C}}(X),$$

où $f'_n(\chi)$ est la transformée de Fourier de la fonction

$$u \in O^* \to f_n(u) = f(\omega^n u)$$

par rapport à une mesure de Haar fixée. On sait que

$$K(\pi, \psi) = S(F^*) \cup \pi(w)S(F^*).$$

Pour $f \in S(F^*)$, la série $f'(\chi, X)$ a un nombre fini de termes, et $f'(\chi, X^{-1})$ appartient aussi à $I_{\mathbb{C}}(X)$. On a alors (Jacquet-Langlands, Proposition 2.10, p. 46, et (2.18.1), p. 79):

$$(\pi(w)f)'(\chi, X) = G_{\pi''}(X, \psi)f'(\chi'^{-1}, X^{-1})$$

où $\chi' = \chi\omega_\pi|_{O^*}$, et $\pi'' = \pi \otimes \chi^{-1}$, χ identifié à un caractère de F^* trivial sur ω.

Si $f \in S_A(F^*)$, alors f_n est à valeurs dans A, pour tout n. Pour tout m, le m-ième coefficient membre de droite de l'égalité est une combinaison finie à valeurs dans A de $f'_n(\chi'^{-1})$. La transformée de Fourier de $f'_n(\chi'^{-1})$ est aussi à valeurs dans A. Donc $\pi(w)f$ est à valeurs dans A. On a ainsi montré:

LEMME 38. *Si π a un réseau A-admissible, alors*
(1) *$G_\pi(X, \psi)$ est un élément inversible de $I_A(X)$.*
(2) *$\pi(w)v$ est à valeurs dans A.*
(3) *$K_A(\pi, \psi) = \{f \in K(\pi, \psi), f$ a ses valeurs dans $A\}$ engendre $K(\pi, \psi)$, est stable par G.*
(4) *$K_A(\pi, \psi) = S_A(F^*) \cup \pi(w)S_A(F^*)$, où $S_A(F^*) = \{f \in S(F^*), f$ a ses valeurs dans $A\}$.*

Pour finir la démonstration du théorème, il reste à montrer que pour tout entier n assez grand, l'ensemble L des $w \in W$ à valeurs dans A, où

$$W = \{w \in K(\pi, \psi), \text{ invariant par } \Gamma(\omega^n)\}$$

est un A-module libre. Comme L engendre W, on peut trouver une base $\{w\}$ de W dans L. Si $\Sigma kw \in L$, les dénominateurs de L sont bornés. Donc L est contenu dans un module libre de type fini. Il est donc libre.

Bibliographie

I. Bernstein, A. Zelevinski. Representations of the group $GL(n, F)$ over a local field. *Russian Math Surveys* (1976) vol. 3.

Armand Borel. Admissible Representations of a Semi-Simple Group over a Local Field with Vectors Fixed under an Iwahori Subgroup. *Inventiones math:* 35, (1976) 233–259.

Henri Carayol. Represéntations cuspidales du groupe linéaire. *Ann. Scient. Ec. Norm.* Sup. 4° série, t.17, (1984) p. 191 à 225.

William Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups. Preprint.

P. Deligne. Formes modulaires et représentations de $GL(2)$. Dans: Modular functions of one variable II. Springer-Verlag *Lecture Notes* 349, 1973.

Roger Godement. Notes on Jacquet-Langlands theory. *The Institute for Advanced Study*, 1970.

Roger Howe with the collaboration of Allen Moy. Harish-Chandra Homomorphism for p-adic groups. CBMS notes 59, *Amer. Math. Soc.* Providence R.I. 1985.

H. Jacquet, R.P. Langlands. Automorphic Forms on $GL(2)$. Springer-Verlag *Lecture Notes* 114, 1970.

H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, and J. Shalika. Conducteur des représentations du groupe linéaire. *Math. Ann.* 256, 199–214.

Alain Robert. Modular Representations of the Group $GL(2)$ over a Local Field. *Journal of Algebra* 22, (1972) 386–405.

John Tate. Number Theory Background, dans Automorphic Forms, Representations and L-functions, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXXIII, part 2, A.M.S. Providence Rhode Island, 1979.

Jean-Pierre Serre. Représentations linéaires des groupes finis. Hermann.

Goro Shimura. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Tokyo-Princeton, 1971.

Marie-France Vignéras. [1] Représentations modulaires de $GL(2, F)$ en caractéristique l, F corps fini de caractéristique $p \neq l$. Preprint 1987. [2] Correspondance modulaire galois-quaternions pour un corps p-adique. Preprint 1987.