

COMPOSITIO MATHEMATICA

G. ELENCSWAJG

P. LE BARZ

L'anneau de Chow des triangles du plan

Compositio Mathematica, tome 71, n° 1 (1989), p. 85-119

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1989__71_1_85_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'anneau de Chow des triangles du plan

G. ELENCAWAJG et P. LE BARZ

LA 168, IMSP, Parc Valrose, 06034 NICE Cedex, France

Received 13 February 1987; accepted in revised form 19 September 1988

Introduction

Si X est une variété algébrique (disons non-singulière), le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^k X$ [6] paramétrise les idéaux $I \subset \mathcal{O}_X$ avec $\text{Supp } \mathcal{O}_X/I$ fini et $\dim \mathcal{O}_X/I = k$. Nous appellerons k -uplets (sous-entendu non ordonnés!) de tels idéaux.

Par exemple si X est une courbe, on a $\text{Hilb}^k X = \text{Sym}^k X$. Si $k = 2$, $\text{Hilb}^2 X$ est l'éclaté de $\text{Sym}^2 X$ le long de la diagonale.

Le premier cas où l'on n'a pas de description concrète de $\text{Hilb}^k X$ est celui de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ qui paramétrise les triplets du plan. Nous nous proposons dans cet article d'en calculer explicitement l'anneau d'équivalence rationnelle $\text{CH}^*(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$, souvent appelé anneau de Chow. Ceci détaille la Note [2].

Signalons que pour la variété des doublets, l'anneau $\text{CH}^*(\text{Hilb}^2 \mathbb{P}^N)$ est facile à calculer explicitement par la fibration en \mathbb{P}^2 naturelle: $\text{Hilb}^2 \mathbb{P}^N \rightarrow \text{Grass}(1, N)$. D'ailleurs le résultat était déjà connu de Schubert qui appelait les doublets "quadriques de dimension zéro". Ellingsrud et Strømme [4], [5] ont déterminé la structure du groupe additif de $\text{CH}^*(\text{Hilb}^d \mathbb{P}^2)$ pour tout d ; les CH^i sont libres et ils en donnent le rang r_i . En particulier pour $d = 3$, ils trouvent:

i	0	1	2	3	4	5	6
CH^i	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}^5	\mathbb{Z}^6	\mathbb{Z}^5	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}

(Voir [3] pour une présentation de leurs résultats).

Notre travail donne la structure multiplicative de l'anneau $\text{CH}^*(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$. Nous présentons cet anneau par 7 générateurs (cycles effectifs à signification géométrique simple), notés $H, A, h, a, p, \alpha, \beta$, de codimensions respectives 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Nous donnons des \mathbb{Z} -bases des $\text{CH}^i(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$ formées de monômes en ces 7 générateurs et nous calculons explicitement toutes les relations.

Notre méthode pour calculer une base de CH^i consiste à accoupler r_i éléments de CH^i avec r_i éléments de CH^{6-i} en espérant trouver une matrice de déterminant ± 1 . Comme toujours dans ce cas, se pose le délicat problème des multiplicités. Tant pour définir correctement les générateurs précédents que pour

calculer les multiplicités dans un cadre général, nous introduisons une variété auxiliaire $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$; elle est formée des couples (t, d) où t est un triplet, d un doublet et $d \subset t$, inclusion schématique. (Voir en Annexe nos calculs explicites de multiplicité).

Il se trouve en effet que pour définir des cycles effectifs de $\text{CH}^1(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$, la tentation est grande de “privilégier” un point p dans un triplet t ; ceci n’a de sens que si l’on est dans le revêtement tautologique de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$. Or ce revêtement est une variété singulière [3] et de plus le “doublet résiduel” de p dans t n’est pas toujours défini. Notre variété $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$ est par contre lisse et pour tout $(t, d) \in \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$, le “point résiduel” de d dans t est toujours bien défini. Si l’on note

$$\pi: \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2 \rightarrow \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$$

$$(t, d) \mapsto t$$

la projection naturelle (qui est génériquement un revêtement à trois feuillets), nous définissons des cycles dans $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ comme images directes sous π_* de cycles effectifs dans $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$. Ceci permet par la formule des projections de résoudre la plupart des problèmes de multiplicité. Par exemple en II.1, on trouve la relation $A.P = 3a$ alors qu’ensemblément $A \cap P = a$.

On donne ensuite le calcul explicite de tous les monômes en les générateurs $H, A, h, a, p, \alpha, \beta$ qui sont des O -cycles. Les autres monômes en ces générateurs se calculent alors par algèbre linéaire (dualité entre CH^i et CH^{6-i}). Insistons sur le fait que nos bases des CH^i sont d’une part des monômes et possèdent d’autre part une signification géométrique simple.

Ceci est entre autres très commode pour certaines applications énumératives, par exemple l’étude du contact triple entre familles de courbes planes, Section VI. Voir également Roberts-Speiser [8].

Signalons que le présent travail a été généralisé dans deux directions par Mallavibarrena-Sols [7] et Rossello [9]; voir aussi Collino [1].

I. Bases de $\text{CH}^1 = \text{Pic}$ et CH^5

1. Les diviseurs H et P

On a mentionné dans l’Introduction que $\text{Pic}(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$ est libre de rang 2 et on en donne dans ce paragraphe une base naturelle.

Deux diviseurs qui viennent directement à l’esprit sont respectivement

$$\begin{cases} H: \text{“formé des triplets dont un point reste sur une droite fixe”} \\ P: \text{“formé des triplets dont deux points restent alignés avec un point fixe”}. \end{cases}$$

Pour rendre ces deux définitions plus rigoureuses et plus maniables, on introduit une variété auxiliaire d'incidence $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$, sous-variété du produit $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2 \times \text{Hilb}^2 \mathbb{P}^2$. Cette variété est définie par la condition:

$$(t, d) \in \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2 \quad \text{si et seulement si } d \text{ est sous-schéma de } t.$$

Cette sous-variété est non-singulière (voir [3]) et la première projection

$$\pi: \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2 \rightarrow \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$$

$$(t, d) \mapsto t$$

est génériquement un revêtement à trois feuillets. On dira que d est le "doublet privilégié" dans (t, d) .

On voit alors que si le support de d est distinct du support de t , le point résiduel $t - d$ est parfaitement défini dans \mathbb{P}^2 . Cette notion se prolonge au cas où $\text{Supp } d = \text{Supp } t$: voir [3] où on définit précisément l'application

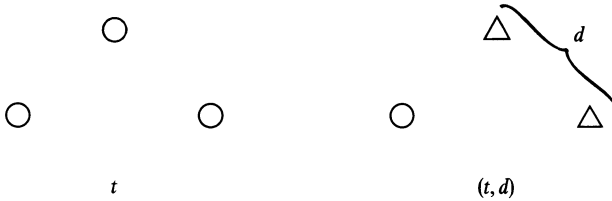
$$\text{"Résiduel"}: \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$(t, d) \mapsto t - d$$

et où l'on donne son expression en coordonnées locales dans les différents cas.

Nous utiliserons constamment la

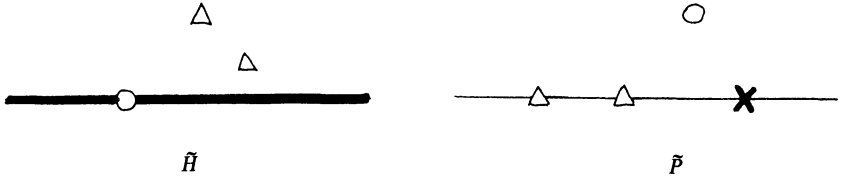
Convention de dessin:



Un triplet $t \in \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ formé de trois points simples est représenté par trois petits ronds; par contre chacun des trois $(t, d) \in \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$ qui correspondent à t est représenté par deux petits triangles pour le doublet privilégié et un petit rond pour le point résiduel $t - d$.

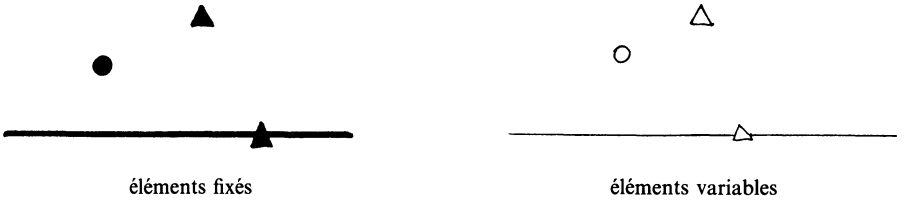
On peut maintenant définir les deux diviseurs \tilde{H} et \tilde{P} dans $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$; les conditions qui les définissent sont respectivement:

$$\begin{cases} (t, d) \in \tilde{H} & \text{si et seulement si } t - d \text{ reste sur une droite fixée de } \mathbb{P}^2, \\ (t, d) \in \tilde{P} & \text{si et seulement si } d \text{ reste aligné avec un point auxiliaire fixé de } \mathbb{P}^2. \end{cases}$$



Conventions de dessin:

- (i) Comme dans le dessin de \tilde{P} ci-dessus, dans tout l'article les croix représentent des points fixés auxiliaires ne faisant pas partie des triplets considérés.
- (ii) On dessinera toujours en épais ce qui est fixé, alors que ce qui est variable sera dessiné en lignes minces.



La définition rigoureuse de H et P est alors:

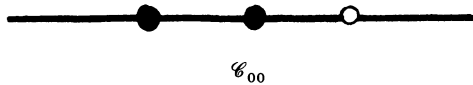
$$H = \pi_* \tilde{H} \quad \text{et} \quad P = \pi_* \tilde{P}.$$

On va voir que ces deux diviseurs forment une \mathbb{Z} -base de $\text{Pic}(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$.

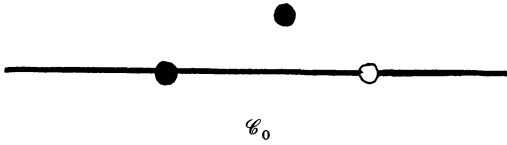
2. Courbes dans $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$

Pour, entre autres, prouver l'indépendance de diviseurs, nous introduisons les trois courbes suivantes dans $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$.

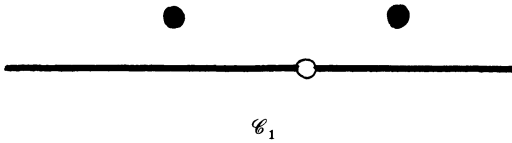
- La courbe $\mathcal{C}_{00} \subset \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ est formée des triplets dont deux points sont fixés et le troisième reste aligné avec ces deux points. Compte tenu de nos conventions de dessin, \mathcal{C}_{00} est symbolisé par



- Pour définir la courbe \mathcal{C}_0 , on prend une droite fixée, un point fixe et un point variable situés sur cette droite et un troisième point fixe en dehors:

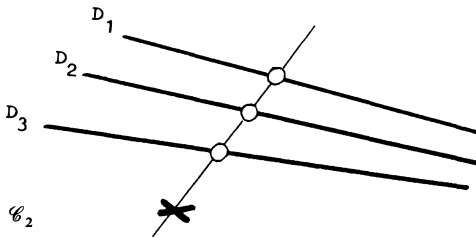


- \mathcal{C}_1 est formée d'un point mobile sur une droite fixe et de deux points fixes en dehors de cette droite:

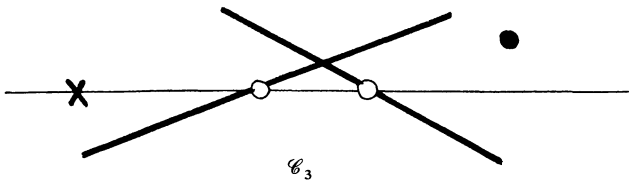


Voici la description de trois autres courbes dont l'utilité n'apparaîtra que plus tard (II.5).

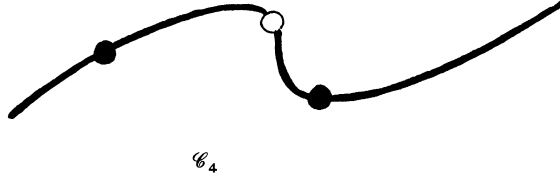
- \mathcal{C}_2 est formée des triplets intersection d'une droite variant autour d'un point fixé auxiliaire, avec trois droites fixées.



- \mathcal{C}_3 est formée des triplets qui sont réunion d'un point fixé et du doublet (variable) intersection de deux droites fixées avec une droite tournant autour d'un point auxiliaire fixé.



- Enfin \mathcal{C}_4 est formée des triplets dont deux points sont fixés sur une cubique fixée et la troisième est variable sur cette cubique.



3. Un tableau d'accouplement $CH^1 \times CH^5$

(a) Outre les éléments H et P de $\text{Pic}(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$, introduisons la classe A associée au diviseur de Hilb³ \mathbb{P}^2 formée des triplets alignés (c'est-à-dire sous schémas d'une droite).

Identifiant $CH^6(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$ à \mathbb{Z} via l'application "degré", nous pouvons dresser la table de multiplication entre éléments de CH^1 et CH^5 (voir ci-après):

Tableau I

$CH^5 \backslash CH^1$	H	P	A
\mathcal{C}_{00}	1	0	-1
\mathcal{C}_0	1	1	0
\mathcal{C}_1	1	2	1
\mathcal{C}_2	3	3	0
\mathcal{C}_3	2	3	1
\mathcal{C}_4	3	4	1

REMARQUE 1. Nous rappelons qu'un triplet $\{P_1, P_2, P_3\}$ formé de trois points distincts admet un voisinage dans Hilb³ \mathbb{P}^2 de la forme $U_1 \times U_2 \times U_3$ où U_i est un voisinage de P_i dans \mathbb{P}^2 .

Commençons par établir les lignes \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 du Tableau I.

On a d'abord $\mathcal{C}_1 \cdot A = 1$ comme il résulte immédiatement de la Remarque 1 précédente (la multiplicité est bien 1). Par ailleurs $\mathcal{C}_0 \cdot A = 0$ car l'intersection ensembliste $\mathcal{C}_0 \cap A$ est vide. De même $\mathcal{C}_0 \cdot H = \mathcal{C}_1 \cdot H = \mathcal{C}_0 \cdot P = 1$ (faire un dessin ou bien utiliser la formule des projections $\mathcal{C}_0 \cdot H = \pi_*(\pi^* \mathcal{C}_0 \cdot \tilde{H})$, etc...). De même $\mathcal{C}_1 \cdot P = 2$. Les deux lignes \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 sont donc justifiées.

Comme on sait déjà que CH^1 et CH^5 sont libres de rang 2 sur \mathbb{Z} et le mineur

	H	A
\mathcal{C}_0	1	0
\mathcal{C}_1	1	1

étant égal à 1, nous avons prouvé le

THEOREME 1. (i) $\{H, A\}$ est une \mathbb{Z} -base de $\text{Pic}(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$.

(ii) On a la relation fondamentale

$$\mathcal{R}_1 \quad \boxed{P = A + H}.$$

Exemple. Soit $D \subset \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ le diviseur des triplets non simples. Il est clair que $D \cdot \mathcal{C}_1 = 0$; par contre $D \cdot \mathcal{C}_0 = 2$ (Voir Annexe).

D'où par ce qui précède: $D = 2(H - A)$.

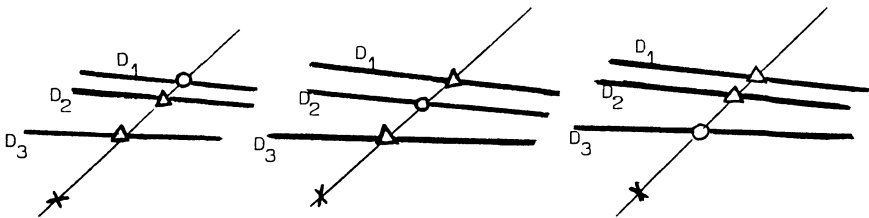
(b) Justifions rapidement les lignes restantes. D'abord l'intersection ensembliste $\mathcal{C}_{00} \cap P$ étant vide, on a $\mathcal{C}_{00} \cdot P = 0$. De plus $\mathcal{C}_{00} \cdot H = 1$ (même méthode qu'en (a)). De \mathcal{R}_1 on déduit donc $\mathcal{C}_{00} \cdot A = -1$ (remarquer que l'intersection ensembliste est infinie).

Mise en garde: les résultats précédents prouvent qu'on n'a pas de spécialisation de \mathcal{C}_1 en \mathcal{C}_0 ni de \mathcal{C}_0 en \mathcal{C}_{00} , contrairement à ce que pourraient faire croire les dessins.

Occupons-nous de la ligne \mathcal{C}_2 et commençons par calculer $\mathcal{C}_2 \cdot P$. Bien qu'ensemblément $\mathcal{C}_2 \cap P$ soit réduit à un seul triplet (clair géométriquement...), nous allons voir que ce triplet compte avec multiplicité 3. En effet, par formule des projections, on a

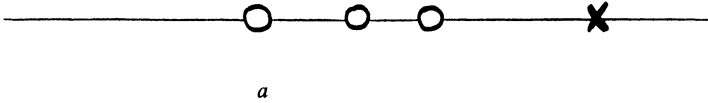
$$\mathcal{C}_2 \cdot P = \pi_* (\pi^* \mathcal{C}_2 \cdot \tilde{P}).$$

Le cycle $\pi^* \mathcal{C}_2$ est réunion des trois composantes figurées ci-dessous (voir les conventions de dessin introduites en 1°).



Remarquer que le degré des morphismes $\pi|_{\tilde{H}^2}$ et $\pi|_{\tilde{P}^2}$ est 1.

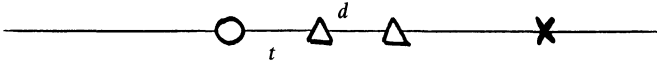
Maintenant définissons directement (c'est-à-dire sans parler de $\tilde{\text{Hilb}}$) le cycle a : il est formé des triplets alignés avec un point fixe, ce qu'on dessinera:



la croix désignant le point fixe (il n'appartient pas au triplet).

Nous allons montrer la relation $A.P = 3a$ d'où l'on tire immédiatement par \mathcal{R}_1 (vu au Théorème 1): $A^2 = 3a - H.A$.

En effet, $A.P = A.\pi_*\tilde{P} = \pi_*(\pi^*A.\tilde{P})$. Le cycle $\pi^*A.P$ se dessine alors dans $\tilde{\text{Hilb}}$:



Mais alors que son image ensembliste par π est a , son image par π_* est $3a$, car le degré du morphisme $\pi|_{(\pi^*A.\tilde{P})}$ est 3 (en effet, trois choix possibles de $d \subset t$ au dessus d'un triplet t de a).

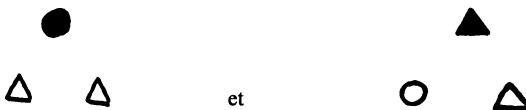
Par ailleurs, remarquons que pour des raisons géométriques évidentes,

$$ap = 0,$$

les triplets de p ne pouvant être alignés avec un point fixe.

2. Les cycles h^2, ha, hp

Examinons π^*h qui scinde en deux composantes que l'on dessine

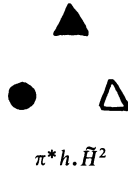


Remarquons que le degré de π restreint à la deuxième composante est 2, de sorte qu'on a bien $\pi_*\pi^*h = 3h$ comme on s'y attend, π étant à 3 feuillets.

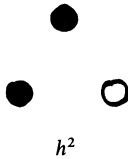
(i) Ceci permet d'expliciter $h^2 = \pi_*(\pi^*h.\tilde{H}^2)$.

L'intersection de la première composante de π^*h avec \tilde{H}^2 est vide; l'autre

intersection se dessine

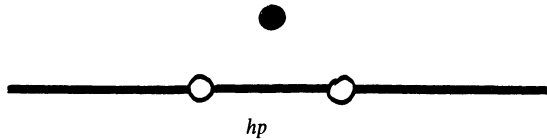


et son image par π_* est donc le cycle h^2 représenté par



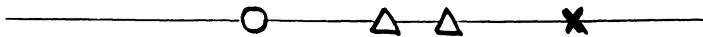
car la restriction de π est de degré 1. On peut donc énoncer: h^2 représente deux points fixes et un point variable.

(ii) De même $hp = \pi_*(\pi^* h \cdot \tilde{P}^2)$. Cette fois seule la première composante de $\pi^* h$ a une intersection non vide avec \tilde{P}^2 et on voit que son image par π_* est le cycle représenté par



ce qu'on énoncera: hp représente deux points mobiles sur une droite fixe et un point fixe en dehors.

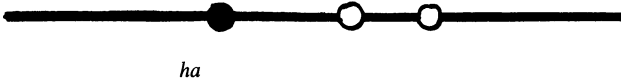
(iii) Par contre pour calculer ha , on écrit $ha = \pi_*(\pi^* a \cdot \tilde{H}^2)$. Le cycle $\pi^* a$ se dessine



et l'intersection avec \tilde{H}^2 (qui signifie $t - d$ fixé) se dessine donc



Son image par π_* est le cycle:



On énonce: le cycle ha représente les triplets sur une droite fixe, dont un point est fixé.

Bien remarquer la subtilité qui suit: alors qu'en 1) on avait $AP = 3a$ car le degré de $\pi | (\pi^* A \cdot \tilde{P})$ était $\binom{3}{2} = 3$, ici le degré de $\pi | (\pi^* a \cdot \tilde{H}^2)$ est $\binom{2}{2} = 1$ car au dessus de tout t de ha , il y a un seul (t, d) dans le cycle $\pi^* a \cdot \tilde{H}^2$: tout vient de ce que $t - d$ est déterminé d'avance.

3. Cycles auxiliaires: $\Sigma_{00}, \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$

Introduisons six cycles auxiliaires dans $CH^4(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$ définis comme images directes par π_* de cycles $\tilde{\Sigma}_{00}, \tilde{\Sigma}_0, \tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \tilde{\Sigma}_3, \tilde{\Sigma}_4$ dans $CH^4(\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2)$

Cycles dans $CH^4(\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2)$	Leurs images par π_* dans $CH^4(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$

Pour comprendre ces dessins, il faut se rappeler nos conventions: le doublet privilégié d dans $(t, d) \in \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$ est figuré par deux petits triangles et ce qui est en traits épais est fixé. Commentons ces dessins.

(a) On commence par fixer deux droites D_1 et D_2 .

$\tilde{\Sigma}_{00}$ est formé des (t, d) avec $d \subset D_2, t - d \in D_1$ et $d \cap D_1 \neq \emptyset$. $\tilde{\Sigma}_0$ est formé des (t, d) avec $d \subset D_2, t - d \in D_1$ et $d \ni M$ où M est un point fixé sur $D_2 \setminus D_1$. $\tilde{\Sigma}_1$ est formé des (t, d) avec $t - d \in D_1, d \cap D_2 \neq \emptyset$ et $d \ni M$ où M est un point fixé en dehors des droites.

(b) Fixons un point Q en dehors des deux droites. Définissons $\tilde{\Sigma}_2$ comme l'ensemble des (t, d) avec t aligné sur $Q, t - d \in D_1$ et $d \cap D_2 \neq \emptyset$.

Dans $\tilde{\Sigma}_3$, on demande $t - d \in D_1$; puis, si L est la droite joignant Q à $t - d$, on demande $d \cap L \neq \emptyset$ et $d \ni M$ où M est un point fixé en dehors de D_1 . (D_2 ne joue aucun rôle dans cette définition).

Enfin $\tilde{\Sigma}_4$ est formé des (t, d) avec $t \subset C$ où C est une cubique fixée, $t - d$ étant fixé sur cette cubique.

Bien sûr ces cycles sont susceptibles de définitions plus formelles et plus ennuyeuses. Par exemple, considérons le diagramme (où les flèches sont naturelles) dans lequel $\text{Hilb}^2 \mathbb{P}^2$ désigne le revêtement tautologique à deux feuillets de $\text{Hilb}^2 \mathbb{P}^2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hilb}^2 \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{(p_1, p_2)} & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 & & (d, p) \mapsto (d - p, p) \\
 \downarrow \omega & & & & \downarrow \\
 \tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{D} & \text{Hilb}^2 \mathbb{P}^2 & & (t, d) \mapsto d \\
 \downarrow \pi & & & & \downarrow \\
 \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2 & & & & t
 \end{array}$$

Appelant δ le diviseur hyperplan de \mathbb{P}^2 , on pourrait définir par exemple $\tilde{\Sigma}_0 = \tilde{H} \cdot \tilde{P}^2 \cdot D^* \omega_* p_2^* \delta$.

4. Un tableau d'accouplement $\text{CH}^2 \times \text{CH}^4$

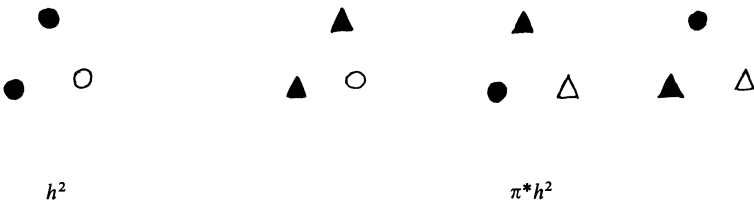
L'accouplement entre les différents cycles de CH^2 et CH^4 que nous avons introduits, va donner (via l'isomorphisme degré: $\text{CH}^6 \rightarrow \mathbb{Z}$) le tableau suivant. Nous allons maintenant justifier ce tableau, *sauf momentanément les deux premières lignes*, auxquelles nous nous consacrons au (5).

(a) *ligne h^2* . Nous allons commencer par justifier la troisième ligne du tableau. Pour cela explicitons l'image réciproque $\pi^* h^2$; c'est la somme des trois

Tableau II

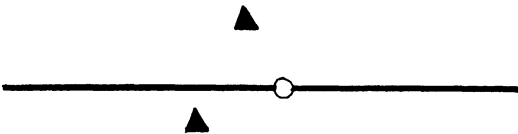
$CH^4 \backslash CH^2$	H^2	HA	h	a	p
H^2h	3	3	1	1	1
H^2a	6	-3	1	-1	0
h^2	1	1	1	0	0
ha	1	-1	0	0	0
hp	1	0	0	0	0
Σ_{00}	2	0	0	0	1
Σ_0	2	1	0	0	1
Σ_1	2	2	0	1	1
Σ_2	5	-2	1	-1	0
Σ_3	3	1	1	0	0
Σ_4	9	3	0	1	3

composantes dessinées ci-après

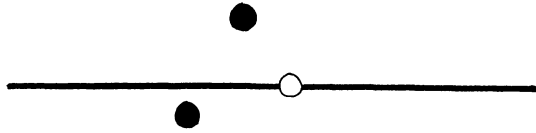


Les deux dernières sont bien sûr rationnellement équivalentes dans $\tilde{H}ilb^3 \mathbb{P}^2$.

Or $Hh^2 = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^*h^2)$ par la formule des projections; seule la première des trois composantes de π^*h^2 coupe \tilde{H} (puisque \tilde{H} est décrit par la condition "le point complémentaire reste sur une droite fixe"). Le cycle intersection $\tilde{H} \cdot \pi^*h^2$ est donc décrit par le dessin



On reconnaît en son image directe par π_* la courbe \mathcal{C}_1 introduite en I.2; d'où $Hh^2 = \mathcal{C}_1$:

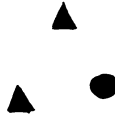


La relation $Hh^2 = \mathcal{C}_1$ ainsi prouvée permet de conclure (en consultant le Tableau I):

$$H^2h^2 = 1 \quad \text{et} \quad HAh^2 = 1.$$

Les deux premières entrées de la ligne h^2 sont ainsi justifiées.

Calculons maintenant $h^3 = h^2h$ en utilisant π^*h^2 explicité précédemment. On a $h^2.h = \pi_*(\pi^*h^2.\tilde{H}^2)$; or \tilde{H}^2 est décrit par "le point complémentaire est fixé" et donc le cycle \tilde{H}^2 ne coupe que la première des trois composantes de π^*h^2 en l'unique élément de $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$ figuré par

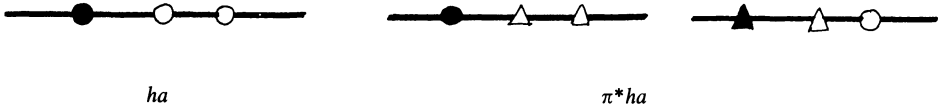


La Remarque 1 montre que la multiplicité est 1. D'où $h^2.h = 1$, ce qui donne la troisième entrée de la ligne h^2 .

Enfin les relations $h^2.a = h^2.p = 0$ sont évidentes géométriquement.

(b) ligne ha

Explicitons l'image réciproque $\pi^*(ha)$; elle est formée des deux composantes dessinées ci-après



Bien remarquer que le degré de la restriction de π à la dernière composante est 2. Or $Hha = \pi_*(\tilde{H}.\pi^*ha)$; seule la dernière composante de π^*ha coupe \tilde{H} en:



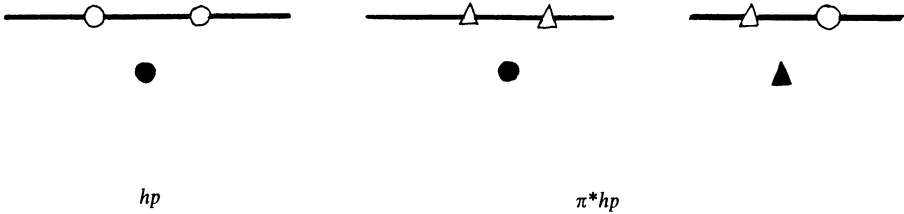
et on reconnaît en son image par π_* la courbe \mathcal{C}_{00} introduite en I. La relation $Hha = \mathcal{C}_{00}$ ainsi prouvée permet de conclure (en consultant le Tableau I):

$$H^2ha = 1 \quad \text{et} \quad HAha = -1.$$

Que les trois autres entrées de la ligne ha soient nulles est évident géométriquement.

(c) ligne hp

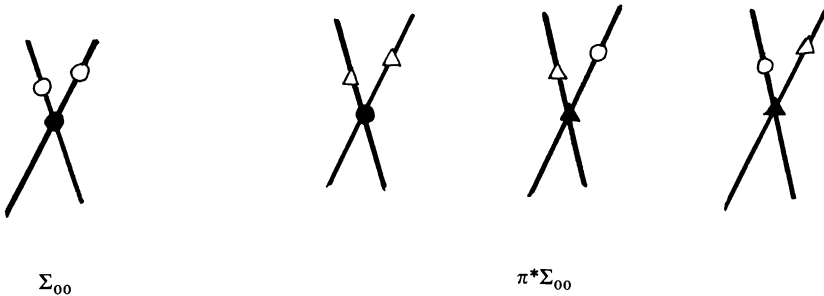
Encore une fois, les entrées nulles de cette ligne sont évidentes géométriquement. On montre $Hhp = \mathcal{C}_0$ en explicitant comme précédemment π^*hp :



$$\text{D'où } H^2hp = \mathcal{C}_0 \cdot H = 1.$$

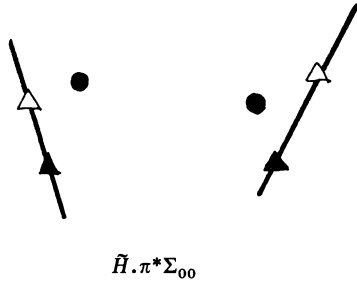
(d) ligne Σ_{00}

Calculons uniquement $\Sigma_{00} \cdot H^2$ et $\Sigma_{00} \cdot p$, les autres entrées étant évidemment nulles. On explicite $\pi^*\Sigma_{00}$:



La première composante de $\pi^*\Sigma_{00}$ ne coupe pas \tilde{H} ; donc $\tilde{H} \cdot \pi^*\Sigma_{00}$ se représente

par deux composantes rationnellement équivalentes

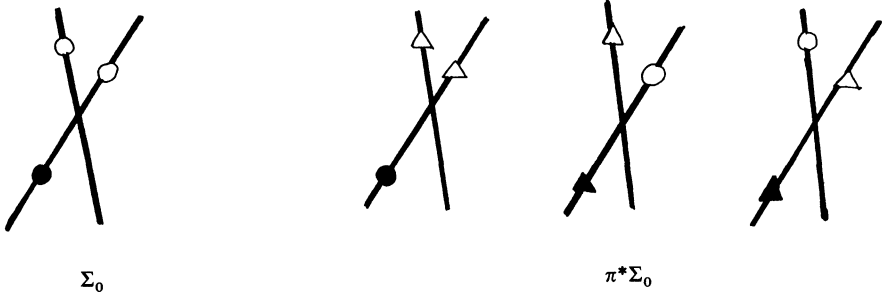


En prenant l'image directe par π , on trouve $H \cdot \Sigma_{00} = 2\mathcal{C}_0$ (cf. I.2) d'où $H^2 \cdot \Sigma_{00} = 2$.

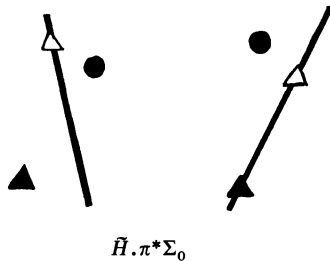
De même $\Sigma_{00} \cdot p = \pi_*(\pi^*\Sigma_{00} \cdot \tilde{P}^2)$. Le cycle \tilde{P}^2 se décrit par "l'axe du doublet privilégié est fixé"; il coupe donc seulement la première composante de $\pi^*\Sigma_{00}$, en un unique élément de $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$ (on vérifie que la multiplicité est 1, Remarque 1). Donc $\pi^*\Sigma_{00} \cdot \tilde{P}^2 = 1$ et par suite $\Sigma_{00} \cdot p = 1$.

(e) ligne Σ_0

On explicite $\pi^*\Sigma_0$:



On a $H \cdot \Sigma_0 = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^*\Sigma_0)$ où le cycle $\tilde{H} \cdot \pi^*\Sigma_0$ est figuré par



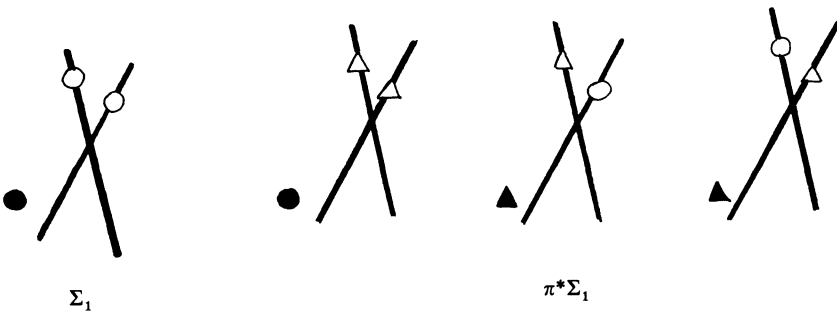
Par image directe sous π on voit que $H\Sigma_0 = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_0$ (cf. I.2) et le Tableau I permet d'en déduire

$$H^2\Sigma_0 = 2 \quad \text{et} \quad H A \Sigma_0 = 1.$$

Il reste à vérifier que $\Sigma_0 \cdot p = \pi_*(\pi^*\Sigma_0 \cdot \tilde{P}^2)$ vaut 1, ce qui se voit exactement comme en (d).

(f) ligne Σ_1

On explicite $\pi^*\Sigma_1$:



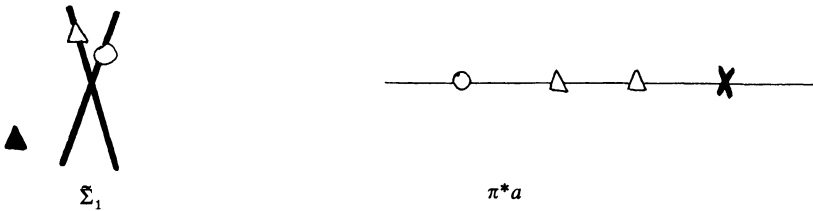
Par des raisonnements similaires à ceux de (d) et (e) on trouve $H \cdot \Sigma_1 = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^*\Sigma_1) = 2\mathcal{C}_1$ d'où $H^2\Sigma_1 = H A \Sigma_1 = 2$.

Exactement comme en (d) et (e) on trouve $\Sigma_1 \cdot p = 1$. Que $\Sigma_1 \cdot h$ est nul est évident géométriquement.

Enfin pour calculer $\Sigma_1 \cdot a$, la situation change par rapport à (d) et (e): on utilise la formule des projections dans l'autre sens, à savoir

$$\pi_*(\tilde{\Sigma}_1 \cdot \pi^*a)$$

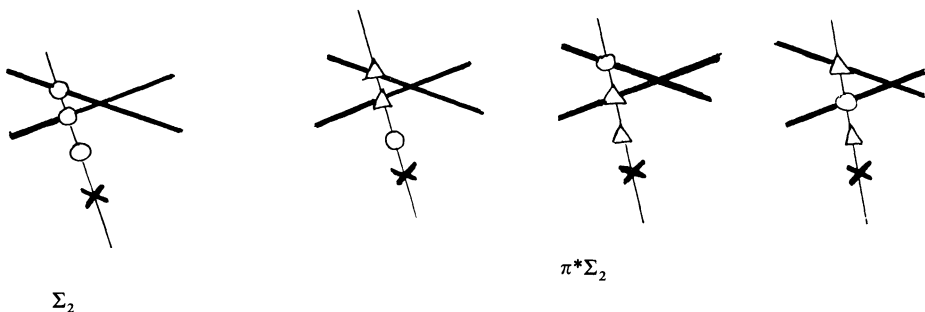
Rappelons les dessins



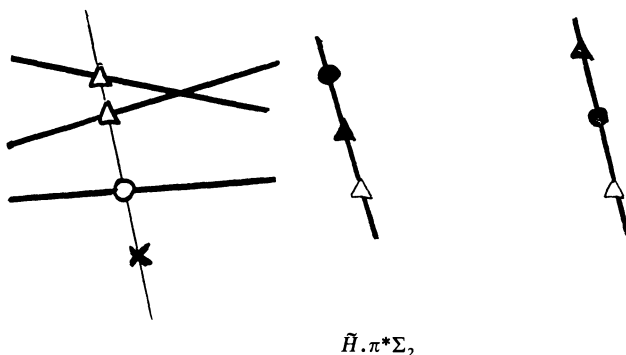
qui montrent (vu la Remarque 1) que le degré de $\tilde{\Sigma}_1 \cdot \pi^*a$ est 1. D'où $\Sigma_1 \cdot a = 1$.

(g) ligne Σ_2

On explicite $\pi^*\Sigma_2$:



Examinons $\tilde{H}.\pi^*\Sigma_2$; on trouve les trois composantes dessinées ci-après:



Par image directe sous π il vient $H.\Sigma_2 = \pi_*(\tilde{H}.\pi^*\Sigma_2) = \mathcal{C}_2 + 2\mathcal{C}_{00}$ (cf. I.2). D'où par Tableau I:

$$H^2.\Sigma_2 = 5 \quad \text{et} \quad H A \Sigma_2 = -2.$$

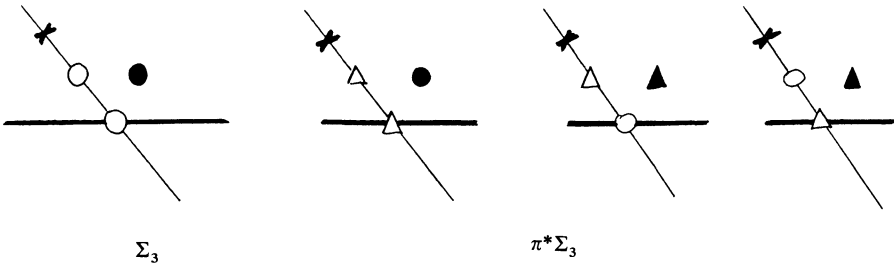
Par ailleurs $\Sigma_2.h = \pi_*(\pi^*\Sigma_2.\tilde{H}^2)$; \tilde{H}^2 ne coupe que la première des trois composantes de $\pi^*\Sigma_2$ et ce en un seul élément de $\tilde{\text{Hilb}}^3\mathbb{P}^2$ (la multiplicité est 1: voir Remarque 1). Que $\Sigma_2.p = 0$ est parfaitement évident géométriquement.

Enfin, pour calculer $\Sigma_2.a$, on commence par remarquer, par \mathcal{R}_1 et ce qui précède, que $HP\Sigma_2 = -2 + 5 = 3$. Ensuite on examine $P\Sigma_2 = \pi_*(\tilde{P}.\pi^*\Sigma_2)$; le cycle $\pi^*\Sigma_2$ a été dessiné plus haut. On voit que l'image de $\tilde{P}.\pi^*\Sigma_2$ par π_* est $3\mathcal{C}_{00}$, où \mathcal{C}_{00} est la courbe définie en I.2. D'où $P^2\Sigma_2 = P.P\Sigma_2 = 3P.\mathcal{C}_{00} = 0$ par Tableau I.

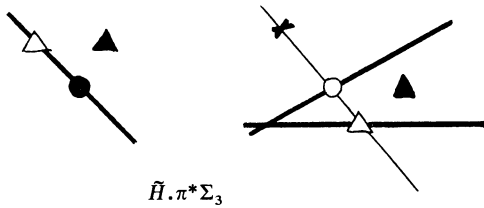
Maintenant, il vient par \mathcal{R}_1 : $AP\Sigma_2 = P^2\Sigma_2 = HP\Sigma_2 = 0 - 3$ par ce qui précède. Mais $AP = 3a$ comme on l'a vu en II.1 et on obtient ainsi $\Sigma_2 a = -1$.

(h) ligne Σ_3

On explicite $\pi^*\Sigma_3$:



Seules les deux dernières composantes coupent \tilde{H} en les courbes suivantes de $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$



Par projection sous π_* , on obtient $H \cdot \Sigma_3 = \pi_*(\tilde{H} \cdot \Sigma_3) = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_3$ (cf. I.2). De Tableau I résulte alors

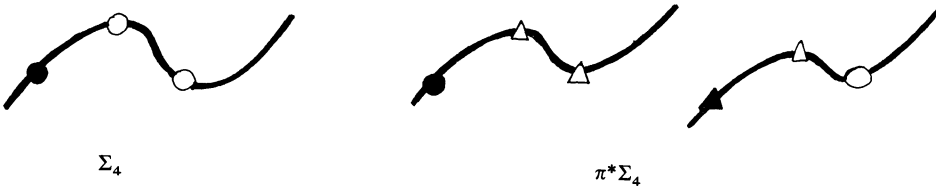
$$H^2 \Sigma_3 = 3 \quad \text{et} \quad H A \Sigma_3 = 1.$$

Enfin $\Sigma_3 h = \pi_*(\pi^*\Sigma_3 \cdot \tilde{H}^2)$; seule la dernière composante de $\pi^*\Sigma_3$ coupe \tilde{H}^2 et ce en un seul point (multiplicité 1: Remarque 1); d'où $\Sigma_3 h = 1$.

Que $\Sigma_3 a = \Sigma_3 p = 0$ est évident géométriquement.

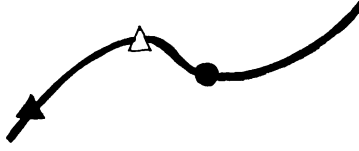
(i) ligne Σ_4

Enfin explicitons $\pi^*\Sigma_4$:



Seule la deuxième composante de $\pi^*\Sigma_4$ coupe \tilde{H} pour donner trois fois le cycle

suivant:



Par suite $H \cdot \Sigma_4 = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^* \Sigma_4) = 3\mathcal{C}_4$ ce qui par Tableau I livre immédiatement

$$H^2 \Sigma_4 = 9 \quad \text{et} \quad HA \Sigma_4 = 3.$$

Par ailleurs $\Sigma_4 h = 0$ est évident géométriquement. Maintenant $\Sigma_4 p = \pi_*(\pi^* \Sigma_4 \cdot \tilde{P}^2)$ et seule la première composante de $\pi^* \Sigma_4$ est coupée par \tilde{P}^2 , et ce en $\binom{3}{2} = 3$ éléments de $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$ (avec multiplicité 1: Remarque 1); d'où $\Sigma_4 p = 3$.

Enfin on écrit $\Sigma_4 a = \pi_*(\tilde{\Sigma}_4 \cdot \pi^* a)$ et on constate que $\tilde{\Sigma}_4$ coupe $\pi^* a$ en un seul élément (multiplicité 1), d'où $\Sigma_4 a = 1$.

CONCLUSION. Le Tableau II est ainsi justifié, sauf pour les premières lignes $H^2 h$ et $H^2 a$.

5. Justification des lignes $H^2 h$ et $H^2 a$ (Tableau II)

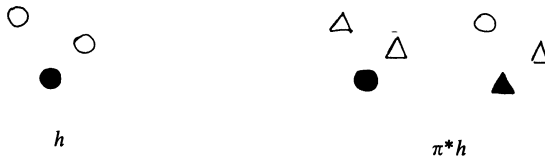
Nous nous proposons d'établir les relations

$$H^2 h = h^2 + \Sigma_1 \quad \text{et} \quad H^2 a = ha + \Sigma_2$$

ce qui justifiera les deux premières lignes du Tableau II, compte-tenu des calculs effectués au paragraphe précédent.

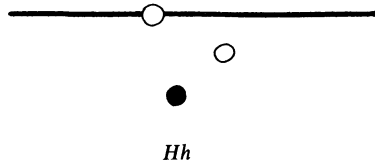
(a) Pour cela nous allons expliciter les cycles Hh et Ha .

Nous avons $Hh = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^* h)$ et $\pi^* h$ a été étudié en 2:



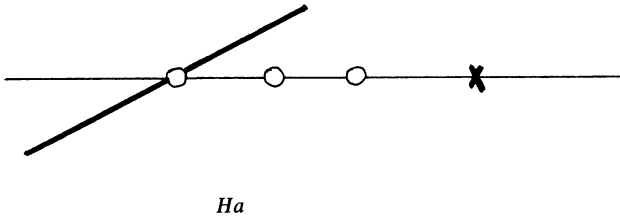
Seule la dernière composante est coupée par \tilde{H} suivant un cycle dont la projection

par π_* est



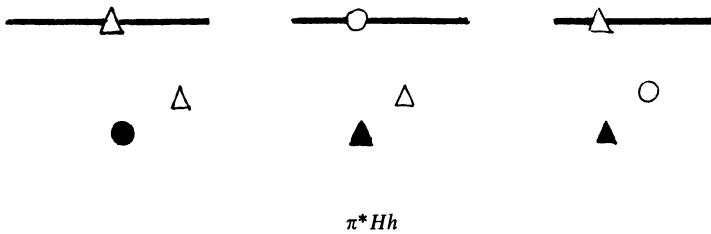
Nous venons de montrer que $Hh = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^* h)$ est le cycle formé des triplets dont un point est fixé, un autre décrit une droite fixe, le troisième étant quelconque.

De façon analogue, la formule $Ha = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^* a)$ jointe à la description de $\pi^* a$ vue en 2.iii) mène à la description suivante de Ha :



Ha est le cycle des triplets alignés avec un point fixe, dont l'un des points est sur une droite fixée.

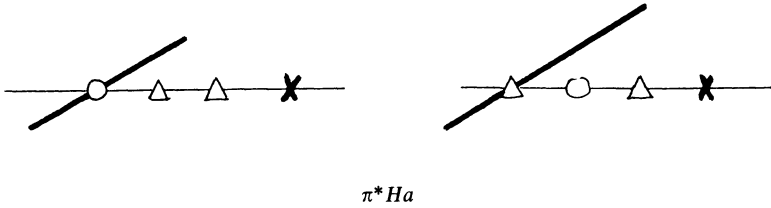
(b) Commençons par expliciter $\pi^* Hh$, d'après Hh décrit en a) ci-dessus.



Seules les deux dernières composantes sont coupées par \tilde{H} , la dernière donnant $\tilde{\Sigma}_1$ (voir 3). Par image directe sous π on obtient la relation cherchée

$$H^2 h = H \cdot Hh = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^* Hh) = h^2 + \Sigma_1.$$

Maintenant, explicitions π^*Ha :



Le cycle \tilde{H} coupe la dernière composante de π^*Ha suivant $\tilde{\Sigma}_2$ (défini en 3)). Par image directe sous π , on obtient la relation voulue

$$H^2a = H \cdot Ha = \pi_*(\tilde{H} \cdot \pi^*Ha) = ha + \Sigma_2$$

Le Tableau II est maintenant totalement justifié.

6. Les bases

Les cinq premières lignes de Tableau II formant une matrice de déterminant 1, nous avons montré le

THEOREME 2

- (a) Les cinq monômes H^2, HA, h, a, p forment une \mathbb{Z} -base de $\text{CH}^2(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$.
- (b) Les cinq monômes H^2h, H^2a, h^2, ha, hp forment une \mathbb{Z} -base de $\text{CH}^4(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$.

Exemple. L'expression de Σ_0 dans la base donnée de CH^4 est $\Sigma_0 = H^2h + H^2a - 2h^2 - 3ha - 2hp$; cela résulte du Tableau II par de l'algèbre linéaire élémentaire.

REMARQUE. Pour les calculs explicites, on aura intérêt à utiliser la base suivante (cf. Tableau II) de $\text{CH}^4(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$: $h^2, ha, hp, \Sigma_0, \Sigma_1$. (Voir Section VI pour des applications énumératives).

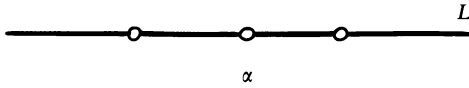
REMARQUE. $\{H^2, HA, A^2\}$ ne peut pas être complété en une \mathbb{Z} -base de CH^2 . En effet, quels que soient les cycles U, V dans CH^2 , le déterminant de la famille $\{H^2, HA, A^2, U, V\}$ dans la base donnée par le Théorème 2 sera toujours un multiple de 3, à cause de la relation $A^2 = 3a - HA$ vue en 1.

III. Base de CH^3

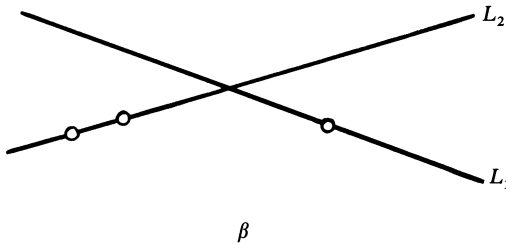
Nous introduisons cette fois-ci deux cycles de CH^3 notés α et β de telle sorte que $\{H^3, H^2A, Hh, Ha, \alpha, \beta\}$ soit une \mathbb{Z} -base de $\text{CH}^3(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}^6$.

1. Description des cycles α et β

On note α le cycle des triplets situés sur une droite fixée L (c'est le cycle associé à la sous-variété $\text{Hilb}^3 L$ dans $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$):

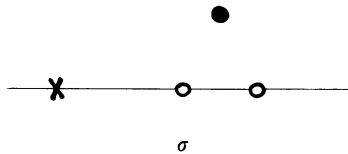


Notons β le cycle $\pi_*(\tilde{P}^2 \cdot \tilde{H})$ dont on vérifie qu'il se décrit comme suit: "un point du triplet est sur une droite fixée L_1 et les deux autres sur une droite fixée L_2 ".

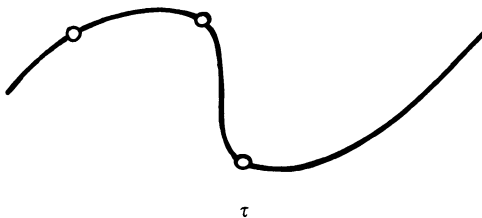


Introduisons encore deux cycles auxiliaires σ et τ utiles pour les calculs.

On note $\sigma = \pi_*(\tilde{P} \cdot \tilde{H}^2)$ qui se décrit par "un point du triplet est fixé et on impose aux deux autres d'être alignés avec un point fixe auxiliaire".



Enfin τ désignera le cycle des triplets situés sur une cubique fixée C (cycle associé à la sous-variété $\text{Hilb}^3 C \subset \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$)



2. Relations

Voici la liste des relations que nous seront utiles, certaines ayant déjà été signalées plus haut.

$$\mathcal{R}_1 \quad \boxed{P = A + H}$$

$$\mathcal{R}_2 \quad \boxed{\begin{array}{l} AP = 3a \\ A^2 = 3a - HA \end{array}}$$

$$\mathcal{R}_3 \quad \boxed{\begin{array}{l} Ap = 3\alpha \\ Pa = 3\alpha \\ Aa = 3\alpha - Ha \end{array}}$$

$$\mathcal{R}_4 \quad \boxed{\begin{array}{ll} P\alpha = 0 & H^2h = h^2 + \Sigma_1 \\ ap = 0 & H^2a = ha + \Sigma_2 \\ A\alpha = -H\alpha & H\beta = hp + \Sigma_0 \\ A\beta = ha & H\sigma = \Sigma_3 \\ H\alpha = ha & H\tau = 3\Sigma_4 \\ & p^2 = \Sigma_{00} \end{array}}$$

$$\mathcal{R}_5 \quad \boxed{\begin{array}{ll} h\alpha = 0 & p\alpha = 0 \\ h\beta = 0 & h\tau = 0 \\ a\alpha = 0 & p\sigma = 0 \\ a\beta = 0 & p\beta = \mathcal{C}_0 \\ a\sigma = 0 & h\sigma = \mathcal{C}_0 \end{array}}$$

$$\mathcal{R}_6 \quad \boxed{\begin{array}{ll} \alpha^2 = 0 & \alpha\tau = 1 \\ \alpha\beta = 0 & \beta^2 = 1 \\ \alpha\sigma = 0 & \beta\tau = 9 \\ \beta\sigma = 0 & \sigma^2 = 1 \\ \sigma\tau = 0 & \tau^2 = 84 \\ & a^3 = 0 \end{array}}$$

Toutes les relations précédentes s'obtiennent comme à la Section II, par applications répétées de la formule des projections. Par ailleurs, celles dont le second membre est nul sont évidentes géométriquement.

3. Un tableau d'accouplement $\text{CH}^3 \times \text{CH}^3$

L'accouplement entre les différents cycles de CH^3 que nous avons introduits va donner (via $\text{CH}^6 \simeq \mathbb{Z}$) le tableau suivant:

Tableau III

	Hh	Ha	α	β	σ	τ
H^3	3	6	1	3	3	27
H^2A	3	-3	-1	1	1	9
Hh	1	1	0	0	1	0
Ha	1	-1	0	0	0	3
α	0	0	0	0	0	1
β	0	0	0	1	0	9

La plupart des entrées (dont tous les zéros et les lignes α, β) sont déjà connues par examen du Tableau II (II.4) et des relations précédentes (vues en 2). Les entrées restantes se justifient par \mathcal{R}_4 et Tableau II.

Le Tableau III étant de déterminant 1, nous avons montré théorème

THEOREME 3. *Les six monômes $H^3, H^2A, Hh, Ha, \alpha, \beta$ forment une \mathbb{Z} -base de CH^3 ($\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$).*

Bien entendu, les six monômes $Hh, Ha, \alpha, \beta, \sigma, \tau$ forment également une \mathbb{Z} -base de $\text{CH}^3(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$.

4. Expression de σ, τ et Hp dans cette base

Afin de calculer plus loin toutes les relations numériques possibles dans $\text{CH}^6 \simeq \mathbb{Z}$, nous aurons besoin (en IV.1) d'exprimer les cycles σ, τ et Hp dans la base de CH^3 donnée par le Théorème 3.

Pour cela, on dresse le tableau d'accouplement suivant:

	Hh	Ha	α	β	σ	τ
σ	1	0	0	0	1	0
τ	0	3	1	9	0	84
Hp	1	0	0	1	0	9

Les deux premières lignes résultent soit de Tableau III, soit des relations \mathcal{R}_6 vues en 2.

Pour ce qui est de la ligne Hp , les entrées résultent des tableaux I et II et de \mathcal{R}_4 et \mathcal{R}_5 .

Ce tableau d'accouplement joint à Tableau III permet, par de l'algèbre linéaire élémentaire, de déduire les relations

$$\mathcal{R}'_3 \begin{cases} \tau = H^3 - 3Hh + 3\alpha + 6\beta \\ \sigma = -H^3 - H^2A + 5Hh + 2Ha - 6\alpha + 4\beta \\ Hp = H^3 + H^2A - 4Hh - Ha + 3\alpha - 3\beta. \end{cases}$$

IV. Autres relations numériques dans CH^6

Les Théorèmes 1, 2 et 3 des paragraphes précédents ont montré que H, A, h, a, p, α et β sont des générateurs de l'anneau gradué $CH^*(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$, de poids respectifs 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. Nous les appellerons "les" générateurs de l'anneau.

L'objet de ce paragraphe est de calculer tous les monômes de poids 6 en ces générateurs, c'est-à-dire tous les monômes correspondant à des O -cycles (identifiés à des nombres).

Un monôme (pas nécessairement de poids 6) en les générateurs sera dit *réduit* si la somme des trois degrés partiels en A, a et α est au plus 1 (par exemple $H^2Ap, H^3\alpha$ sont réduits, mais $HA\alpha, Aha$ ne le sont pas). Nous allons donner la table de tous les monômes réduits de poids 6, puis la table de tous les monômes non réduits (qui s'en déduit facilement comme on le verra plus loin).

	$H^6 = 15$	$H^2hp = 1$	$Ah\beta = 0$
	$H^5A = 15$	$H^2ap = 0$	$Ap\beta = 0$
	$H^4h = 3$	$H^2p^2 = 2$	$h^3 = 1$
	$H^4a = 6$	$HAh^2 = 1$	$h^2a = 0$
	$H^4p = 6$	$HAhp = 0$	$h^2p = 0$
(Réduits)	$H^3Ah = 3$	$HAp^2 = 0$	$hap = 0$
	$H^3Ap = 3$	$Hh\alpha = 0$	$hp^2 = 0$
	$H^3\alpha = 1$	$Hh\beta = 0$	$ap^2 = 0$
	$H^3\beta = 3$	$Ha\beta = 0$	$p^3 = 1$
	$H^2A\beta = 1$	$Hp\alpha = 0$	$\alpha\beta = 0$
	$H^2h^2 = 1$	$Hp\beta = 1$	$\beta^2 = 1$
	$H^2ha = 1$		

A part $H^6, H^5 A, H^4 p, H^3 Ap, H^2 p^2, HAp^2, Hp\beta, Ap\beta$ et p^3 tous les monômes réduits sont déjà calculés soit par les Tableaux II et III, soit par les relations III.2. Les neuf monômes restants se calculent par Tableau III, à l'aide de $\mathcal{R}_3, \mathcal{R}'_3, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_5, \mathcal{R}_6$.

(Non réduits)	$H^4 A^2 = 3$	$HA^2 \alpha = 1$	$A^2 ha = 1$
	$H^3 A^3 = -12$	$HA^2 \beta = -1$	$A^2 hp = 0$
	$H^3 Aa = -3$	$HAha = -1$	$A^2 a^2 = -1$
	$H^2 A^4 = 12$	$HAA^2 = 1$	$A^2 ap = 0$
	$H^2 A^2 a = 0$	$HAAp = 0$	$A^2 p^2 = 0$
	$H^2 A^2 h = 0$	$Ha\alpha = 0$	$Aa\alpha = 0$
	$H^2 A^2 p = -3$	$A^6 = -15$	$Aa\beta = 0$
	$H^2 A\alpha = -1$	$A^4 h = 6$	$Ah\alpha = 0$
	$H^2 a^2 = -1$	$A^4 a = -6$	$Ap\alpha = 0$
	$HA^5 = -3$	$A^4 p = -3$	$a^3 = 0$
	$HA^3 h = -3$	$A^3 \alpha = -1$	$ha^2 = 0$
	$HA^3 a = 3$	$A^3 \beta = 1$	$a^2 p = 0$
	$HA^3 p = 3$	$A^2 h^2 = -1$	$\alpha^2 = 0$

(a) D'après $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ et \mathcal{R}_4 on a

$$A^2 = 3a - HA, \quad Aa = 3\alpha - Ha \quad \text{et} \quad A\alpha = -H\alpha.$$

(b) De $AP = 3a(\mathcal{R}_2)$, on déduit $3a^2 = PAa$; on vient de voir que $Aa = 3\alpha - Ha$ donc

$$3a^2 = P(3\alpha - Ha) = -HPa$$

car $P\alpha = 0$ par \mathcal{R}_4 . Or $Pa = 3\alpha$ par \mathcal{R}_3 d'où $3a^2 = -3H\alpha$. Mais $CH^4(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$ est sans torsion, d'où

$$a^2 = -H\alpha = -ha$$

par \mathcal{R}_4 .

(c) Enfin $a\alpha = 0$ et $\alpha^2 = 0(\mathcal{R}_5, \mathcal{R}_6)$.

Les expressions précédentes de $A^2, Aa, A\alpha, a^2, a\alpha$ et α^2 permettent de calculer n'importe quel monôme de poids 6 en les générant, en se ramenant aux monômes réduits. Nous ne donnons pas le détail des calculs.

V. Monômes de poids < 6

Rappelons les \mathbb{Z} -bases formées de monômes explicitées pour CH^i ($\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$).

- $\text{CH}^1 : A, H$
- $\text{CH}^2 : H^2, HA, h, a, p$
- $\text{CH}^3 : H^3, H^2 A, Hh, Ha, \alpha, \beta$
- $\text{CH}^4 : H^2 h, H^2 a, h^2, ha, hp$
- $\text{CH}^5 : Hhp, Hh^2.$

Toutes les formules qui suivent sont obtenues à partir des deux tableaux précédents (§IV) donnant les monômes de poids 6; le résultat s’obtient par de l’algèbre linéaire élémentaire.

Donnons un exemple: proposons-nous d’exprimer le monôme $H^2 A^2$ dans la base $H^2 h, H^2 a, h^2, ha, hp$ de CH^4 . On obtient le tableau d’intersection suivant:

	$H^2 h$	$H^2 a$	h^2	ha	hp	$H^2 A^2$
H^2	3	6	1	1	1	3
HA	3	-3	1	-1	0	-12
h	1	1	1	0	0	0
a	1	-1	0	0	0	-0
p	1	0	0	0	0	-3

Les cinq premières colonnes s’obtiennent en consultant (par exemple) le Tableau II; la dernière en consultant le tableau des monômes non réduits à la Section IV. On trouve alors par résolution du système linéaire: $H^2 A^2 = -3H^2 h - 3H^2 a + 6h^2 + 18ha + 6hp$.

1. *Monômes de poids 2:*

$$A^2 = 3a - HA.$$

2. *Monômes de poids 3:*

$$\begin{aligned} HA^2 &= 3Ha - H^2 A \\ Aa &= 3\alpha - Ha \\ Ah &= Ha - 3\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= H^2 A - 6Ha + 9\alpha \\ Ap &= 3\alpha \\ Hp &= H^3 + H^2 A - 4Hh - Ha \\ &\quad + 3\alpha - 3\beta. \end{aligned}$$

3. Monômes de poids 4:

$$\begin{array}{ll}
 HA h = H^2 a - 3ha & HA a = 3ha - H^2 a \\
 HA p = 3ha & H\alpha = ha \\
 A^2 h = 6ha - H^2 a & A^2 a = -6ha + H^2 a \\
 A^2 p = -3ha & A\alpha = -ha \\
 A\beta = ha & a^2 = -ha \\
 ap = 0 & H^2 A^2 = -3H^2 h - 3H^2 a + 6h^2 \\
 & \quad + 18ha + 6hp \\
 HA^3 = 3H^2 h - 6h^2 - 9ha - 6hp & A^4 = -3H^2 h + 3H^2 a + 6h^2 \\
 & \quad - 9ha + 6hp \\
 H^4 = 6H^2 h - 3h^2 & H^3 A = 3H^2 h + 6H^2 a - 6h^2 \\
 & \quad - 18ha - 6hp \\
 H^2 p = 2H^2 h + 2H^2 a - 3h^2 & H\beta = H^2 h + H^2 a - 2h^2 - 3ha - hp \\
 & \quad - 6ha - 3hp \\
 & p^2 = H^2 h + H^2 a - 2h^2 - 2ha - 3hp
 \end{array}$$

4. Monômes de poids 5:

Ils sont de la forme $\lambda Hhp + \mu Hh^2$; nous laissons au lecteur intéressé le soin de calculer λ et μ grâce au paragraphe IV.

VI. Applications énumératives

Nous avons déjà donné dans [3] p. 94 des applications énumératives de ce qui précède. En voici deux autres.

1. La variété \mathcal{T}

Etant donnés deux pinceaux de courbes planes, cherchons combien de courbes de l'un sont osculatrices à une courbe de l'autre.

(a) Introduisons dans $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ la variété \mathcal{T} des triplets de support un point. On notera encore \mathcal{T} sa classe dans $\text{CH}^2(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$.

PROPOSITION. On a l'expression $\mathcal{T} = 3(-HA + h + a + p)$.

Cela résulte du tableau d'intersection

	h^2	ha	hp	Σ_0	Σ_1
\mathcal{T}	0	3	0	0	0

En effet, les quatre entrées nulles sont évidentes géométriquement (voir § II). L'intersection ensembliste entre \mathcal{F} et ha est formée d'un seul triplet t_0 ; sa multiplicité est 3 comme le montre le calcul suivant.

Soit x, y des coordonnées centrées en $\text{Supp } t_0$, l'axe des x correspondant à la droite du cycle ha . L'idéal de t_0 est (x^3, y) ; une carte de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^3$ au voisinage de t_0 est donnée par les coefficients dans l'idéal $(x^3 + 3ax^2 + 3bx + c, y + a'x^2 + b'x + c')$. Dans cette carte ha est donné par les équations $a' = b' = c' = c = 0$ et \mathcal{F} par $b = a^2, c = a^3$. L'intersection schématique $ha \cap \mathcal{F}$ a pour idéal $(a', b', c', a^3, b - a^2, c)$ qui est de multiplicité 3. De Tableau II résulte alors (par l'algèbre linéaire) l'expression $\mathcal{F} = 3(-HA + h + a + p)$.

(b) Soit \mathcal{H} un pinceau (paramétré par \mathbb{P}^1) de courbes de degré d dans \mathbb{P}^2 . On lui associe un cycle $\mathcal{P}_d \in \text{CH}^2(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$ de la façon suivante. Le pinceau est un sous-schéma relatif $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. On peut donc considérer le schéma de Hilbert relatif $\text{Hilb}^3(\mathcal{H}/\mathbb{P}^1) \subset \text{Hilb}^3(\mathbb{P}^2) \times \mathbb{P}^1$. Nous obtenons le cycle cherché \mathcal{P}_d par projection sur $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$. Il s'agit des "triplets situés sur une des courbes du pinceau". (Remarquer que $a = \mathcal{P}_1$). Le tableau d'intersection suivant est immédiat car (par la Remarque 1), les multiplicités sont toutes 1.

	h^2	ha	hp	Σ_0	Σ_1
\mathcal{P}_d	0	$\binom{d-1}{2}$	$\binom{d}{2}$	$d(d-1)$	d^2

Comme précédemment de Tableau II résulte l'expression

$$\mathcal{P}_d = \binom{d}{2} H^2 + (d-1)HA - \frac{(d-1)(d+2)}{2} h + a + (1-d)p.$$

(c) Si maintenant on considère deux pinceaux de courbes planes de degrés d_1 et d_2 le zéro-cycle $\mathcal{F} \cdot \mathcal{P}_{d_1} \cdot \mathcal{P}_{d_2}$ est de degré

$$\text{deg}(\mathcal{F} \cdot \mathcal{P}_{d_1} \cdot \mathcal{P}_{d_2}) = 3(d_1^2 + 4d_1d_2 + d_2^2 - 6d_1 - 6d_2 + 5).$$

Cette formule n'a de sens énumératif que si génériquement dans chaque pinceau les courbes sont lisses. La formule est alors un cas particulier d'une formule de Schubert ([10], p. 189) retrouvée par Roberts et Speiser [8].

2. La variété T

Soit T l'image du plongement de \mathbb{P}^2 dans $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ défini par $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}^2$ (où \mathfrak{M} est l'idéal d'un point). Calculons sa classe, encore notée T , dans $\text{CH}^4(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$. Tout

d'abord $Ta = THA = 0$, aucun triplet de T n'étant aligné. Par ailleurs on montrait $TH^2 = 9$ dans [3] p. 97, en utilisant la carte suivante de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ en l'idéal $(x, y)^2$: ce sont les coefficients u, v, u', v', u'', v'' dans l'idéal

$$I = (x^2 + ux + vy + w, xy + u'x + v'y + w', y^2 + u''x + v''y + w'')$$

où w, w', w'' sont définis par

- (1) $w = uv' + vv'' - u'v - v'^2$,
- (2) $w' = u'v' - u''v$,
- (3) $w'' = uu'' + u'v'' - u'^2 - u''v'$.

Dans cette carte, T est donné par les équations

$$u = 2v', \quad v = 0, \quad v'' = 2u', \quad u'' = 0$$

(loc. cit. p. 98).

(a) Calculons Th

Le cycle h est formé des triplets dont un point est fixé. Soit x, y des coordonnées centrées en ce point fixe, qui est donc d'idéal $\mathfrak{M} = (x, y)$. Les triplets de h vérifient $w = w' = w'' = 0$; l'intersection schématique de T avec h est donc donnée dans la carte en \mathfrak{M}^2 vue plus haut (grâce à (1), (2) (3)) par l'idéal

$$(u - 2v', v, v'' - 2u', v'^2, u'v', u'^2)$$

qui est de longueur 3. Comme ensemblistement $T \cap h$ est formé d'un seul triplet, il vient $Th = 3$.

(b) Calculons Tp

Pour cela utilisons le cycle auxiliaire \mathcal{P}_2 des triplets sur les coniques d'un pinceau (voir §1):

$$\mathcal{P}_2 = H^2 + HA - 2h + a - p$$

et calculons $T\mathcal{P}_2$. Une courbe est singulière si et seulement si elle contient un triplet de T . Ensemblistement $T \cap \mathcal{P}_2$ a trois éléments et chacun compte avec multiplicité 1: c'est le calcul qui suit. Soit $xy = \lambda$ l'équation du pinceau \mathcal{H} et cherchons les équations de $\text{Hilb}^3(\mathcal{H}/\mathbb{P}^1)$ dans la carte $u, v, u', v', u'', v'', \lambda$ de $(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2) \times \mathbb{P}^1$. Dire qu'un triplet est contenu dans la courbe \mathcal{H}_λ revient à affirmer l'inclusion $(xy - \lambda) \subset I$ ou encore $u'x + v'y + w' + \lambda \in I$. Au voisinage de T les triplets ne sont pas alignés et la condition est donc $u' = v' = w' + \lambda = 0$.

Notant q la projection de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ sur $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$, le cycle

$q^*T \cdot \text{Hilb}^3(\mathcal{X}/\mathbb{P}^1)$ correspond donc aux équations

$$\begin{aligned} u &= 2v' & u' &= 0 \\ v &= 0 & v' &= 0 \\ v'' &= 2u' & u'v' - u''v + \lambda &= 0 \\ u'' &= 0 \end{aligned}$$

et son degré est 1. Ainsi, par formule des projections, le degré de $T \cdot \mathcal{P}_2$ est 1. D'après l'expression de \mathcal{P}_2 vue plus haut, on a

$$T \cdot \mathcal{P}_2 = TH^2 + THA - 2TH + Ta - Tp,$$

d'où $Tp = 0$ (ce qui n'est pas du tout évident géométriquement).

(c) Par l'algèbre linéaire et le Tableau II on déduit la

PROPOSITION. On a l'égalité dans $\text{CH}^4(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$:

$$T = 3(h^2 + ha + hp).$$

Comme application énumérative, on trouve que le degré du O -cycle $T \cdot \mathcal{P}_d$ est $3(d-1)^2$: c'est le nombre de courbes singulières dans un pinceau (de courbes de degré d).

3. *Autres applications*

On laisse au lecteur le soin de se convaincre que \mathcal{T} et A se coupent transversalement, $\mathcal{T}A$ représentant les triplets alignés de support un point. Comme $\mathcal{T} = 3(-HA + h + a + p)$, grâce à la Section V, on voit que

$$\mathcal{T}a = 3(H^2A - 3Ha + 3\alpha).$$

De même si C est une courbe fixée de degré d dans \mathbb{P}^2 , on voit que la classe de $\text{Hilb}^3 C$ dans $\text{CH}^3(\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2)$ est donnée par

$$[\text{Hilb}^3 C] = \binom{d}{3} H^3 - 3 \binom{d}{3} Hh + d\alpha + d(d-1)\beta.$$

Cela résulte du tableau d'intersection suivant

	Hh	Ha	α	β	σ	τ
$[\text{Hilb}^3 C]$	0	$d \binom{d-1}{2}$	$\binom{d}{3}$	$d \binom{d}{2}$	0	$\binom{3d}{3}$

(et de Tableau III).

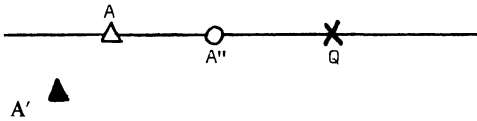
En particulier, le degré du O -cycle $\mathcal{T}.A. [\text{Hilb}^3 C]$ est $3d(d-2)$: c'est le nombre bien connu de tangentes d'inflexion de la courbe C .

VII. Annexe

Dans cette Annexe, nous montrons sur des exemples comment traiter en détail les multiplicités.

1. On veut par exemple prouver $\sigma^2 = 1$ comme annoncé en III.2.

On a $\sigma^2 = \pi_*(\pi^*\sigma.\tilde{P}.\tilde{H}^2)$. Notons Γ la composante suivante de $\pi^*\sigma$:



On a déjà vu que c'est la seule qui coupe $\tilde{P}.\tilde{H}^2$ (voir dessin de $\pi^*\sigma$ en III.2.h). Par définition, les doublets d dans (t, d) du cycle \tilde{P} doivent être alignés avec un point fixe que nous notons Q' .

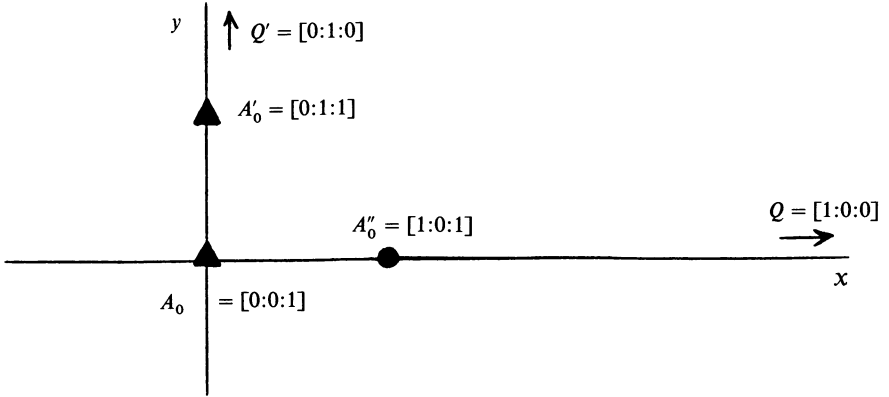
Choisissons des coordonnées projectives $[x:y:z]$ pour lesquelles

$$Q = [1:0:0] \quad Q' = [0:1:0] \quad \text{et} \quad A' = A'_0 = [0:1:1].$$

Le cycle \tilde{H}^2 impose au point simple $A'' = t - d$ d'être fixé; prenons $A''_0 = [1:0:1]$ pour ses coordonnées.

Avec ces notations, ensemblistement $\Gamma.\tilde{P}.\tilde{H}^2$ est formé de l'unique élément (t, d) où

$$\begin{cases} d \text{ est formé des deux points } A_0 = [0:0:1], A'_0 = [0:1:1] \\ t \text{ est formé des trois points } A_0, A'_0, A''_0 = [1:0:1]. \end{cases}$$



Un système de coordonnées locales de $\tilde{\text{Hilb}}^3 \mathbb{P}^2$ au voisinage de cette unique solution est donné par u, v, u', v', u'', v'' en choisissant comme points voisins de A_0, A'_0, A''_0 les points

$$A = [u:v:1] \quad A' = [u':1 + v':1] \quad A'' = [1 + u'':v'':1].$$

Dans ce système de coordonnées,

$$- \Gamma \text{ s'exprime par } \begin{cases} u' = v' = 0 \\ v = v'' \end{cases}$$

car d'une part $A' = A'_0$ et d'autre part la droite AA'' passe par Q .

- \tilde{P} s'exprime par $u = u'$ car la droite AA' doit passer par Q' .

- \tilde{H}^2 s'exprime par $u'' = v'' = 0$ car A'' doit être égal à A''_0 .

Les six équations ci-dessus prouvent que la multiplicité cherchée est 1.

2. Donnons un autre exemple de calcul de multiplicité. Soit $D \subset \text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ le diviseur des triplets *non simples*. Nous allons voir que son expression dans la base $\{H, A\}$ de CH^1 est

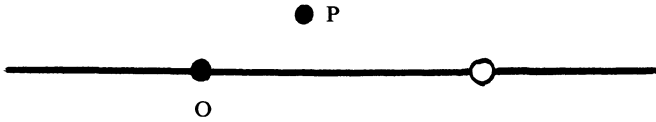
$$D = 2(H - A).$$

Cela résulte du tableau suivant

	H	A	D
\mathcal{C}_0	1	0	2
\mathcal{C}_1	1	1	0

dont les deux premières colonnes viennent du Tableau I (voir §I.3).

La relation $D \cdot \mathcal{C}_1$ est évidente géométriquement. Rappelons le dessin de \mathcal{C}_0



Nous voyons que $D \cap \mathcal{C}_0$ est formé d'un seul élément dont nous allons montrer qu'il compte avec multiplicité 2.

Choisissons pour cela des coordonnées inhomogènes x, y de \mathbb{P}^2 centrées en O , pour lesquelles la droite fixée dans \mathcal{C}_0 est l'axe Ox et le point P a les coordonnées $(0, 1)$. L'intersection ensembliste $D \cap \mathcal{C}_0$ est formée de l'unique triplet réunion de P et du doublet d'idéal (x^2, y) .

Une carte de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$ en ce triplet est donnée par (a, b, c, d, u, v) correspondant

- au point voisin $(u, 1 + v)$ de P ,
- à l'idéal $(x^2 + ax + b, y + cx + d)$ voisin du doublet.

Dans cette carte D est décrit par l'équation $a^2 - 4b = 0$. La courbe \mathcal{C}_0 a comme équations

$$\begin{cases} u = v = 0, & \text{car les triplets de } \mathcal{C}_0 \text{ contiennent } P, \\ b = d = 0, & \text{car les triplets de } \mathcal{C}_0 \text{ contiennent } O, \\ c = 0, & \text{car } y = 0 \text{ est l'équation de l'axe des } x. \end{cases}$$

Ces six équations ensemble engendrent un idéal de longueur 2.

Bibliographie

1. A. Collino, Evidence for a conjecture of Ellingsrud and Stromme on the Chow ring of $\text{Hilb}^d \mathbb{P}^2$, preprint, Turin.
2. G. Elencwajg et P. Le Barz, Détermination de l'anneau de Chow de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$, *C.R.A.S.*, t. 301 (1985) 635-638.
3. G. Elencwajg et P. Le Barz, Explicit computations in $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$, Colloque Sundance 1986, *Lecture Notes* 1311, 76-100.
4. G. Ellingsrud et S. Strømme, On the homology of the Hilbert Scheme of points in the plane, *Inv. Math.* 87 (1987) 343-352.
5. G. Ellingsrud et S. Strømme, On a cell decomposition of the Hilbert scheme of points in the plane, *Inv. Math.* 91 (1988) 365-370.
6. A. Grothendieck, Séminaire Bourbaki, exposé 221, IHP Paris (1961).
7. R. Mallavibarrena et I. Sols, A base of the homology groups of the Hilbert scheme of points in the plane *Comp. Math.*, à paraître.
8. J. Roberts et R. Speiser, Enumerative Geometry of triangles I, II, III, *Comm. Alg.* 12 (1984) 1213-1255; 14 (1986) 155-191; à paraître.
9. F. Rossellò, The Chow ring of $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^3$, Preprint Barcelone (1987).
10. H. Schubert, Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks, *Math. Ann.* 17 (1880) 153-212.