COMPOSITIO MATHEMATICA

SHANGQUAN BU

Deux remarques sur les espaces de Banach stables

Compositio Mathematica, tome 69, nº 3 (1989), p. 341-355
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1989__69_3_341_0>

Compositio Mathematica 69: 341-355, 1989

Deux remarques sur les espaces de Banach stables

SHANGQUAN BU
University of Wuhan, People's Republic of China (present address: U.E.R. de Mathématique et Informatique, Université Paris VII, 2 Place Jussieu, Tour 45–55, 5^e étage, F-75251 Paris Cédex 05, France)

Received 29 March 1988; accepted 20 September 1988

Abstract. Using the notion of ordinal index, we give a new proof of the Krivine–Maurey's theorem [7] "for every stable infinite dimensional Banach space X, there exists $1 \leqslant p < \infty$, such that for all $\varepsilon > 0$, X has a subspace $(1 + \varepsilon)$-isomorphic to l_p." We introduce the notion of universal l_p-type and show that for a separable stable infinite dimensional Banach space $(X, \| \ \|)$, there exists $1 \leqslant p < \infty$ and there exists an ultrafilter $(x_i)_{i\in I}$ on the unit sphere of X, such that for every stable norm ψ on X equivalent to $\| \ \|$, the type define on (X, ψ) by $x \to \lim_i \psi(x_i + x)$ is a non trivial l_p-type. All results are extended to the case of weakly stable Banach spaces.

Introduction

Les espaces de Banach stables ont été introduits par Krivine et Maurey [7] pour généraliser un résultat de Aldous [1] "tout sous-espace de dimension infinie de L^1 contient un sous-espace isomorphe à l_p pour un certain $p \geqslant 1$". Dans [7] les auteurs ont montré que tout espace de Banach stable de dimension infinie contient un sous-espace $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à l_p pour un certain $p \geqslant 1$, pour tout $\varepsilon > 0$ en utilisant la notion de classe conique et la notion de l_p-type. On va présenter dans la première partie de cette note une autre démonstration de ce résultat, pas forcément plus courte, mais plus directe et plus naturelle; la démonstration que l'on va présenter consiste à utiliser la notion d'indice; cette notion a été utilisée dans de nombreux cadres, notamment dans [3, 5] et [10]. On va noter comme d'habitude $\| \ \|_p$ la l_p-norme sur l_p ou l_p^n pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $n \in \mathbb{N}$ (pour $p = \infty$, on pense à c_0-norme, c_0 et l_∞^n respectivement). Soit $(X, \| \ \|)$ un espace de Banach stable séparable de dimension infinie, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $\varepsilon > 0$, on va définir

$$H_{\varepsilon,p}(X) = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n): \quad x_i \in X, \quad i \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\left\| \sum_{i \leqslant n} a_i x_i \right\| \Big/ \sqrt{1+\varepsilon} \leqslant \|a\|_p \leqslant \left\| \sum_{i \leqslant n} a_i x_i \right\| \sqrt{1+\varepsilon}$$

$$\left. \text{pour tout } a = (a_i)_{i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

On définira l'ordre naturel sur $H_{\varepsilon,p}(X)$, on aura donc la notion de dérivation et la notion d'indice (voir [4] par exemple); il est facile de voir que pour que l_p (dans le cas $p = \infty$, on pense à c_0) soit $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à un certain sous-espace de X, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de points de X, telle que l'on ait $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H_{\varepsilon,p}(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui revient à dire que la relation définie sur $H_{\varepsilon,p}(X)$ n'est pas bien fondée [4]. Le théorème de Kunen–Martin [4] nous donne une condition suffisante pour que ce soit le cas: il suffit que l'indice de $H_{\varepsilon,p}(X)$ soit égal à ω_1. On va montrer qu'il existe $1 \leqslant p \leqslant \infty$, tel que l'indice de $H_{\varepsilon,p}(X)$ est ω_1 pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui entraine donc le théorème de Krivine et Maurey puisqu'un espace de Banach isomorphe à c_0 ne peut pas être stable. Avec le même argument on va trouver aussi le résultat de Argyros, Negrepontis et Zachariades [2] "tout espace de Banach faiblement stable de dimension infinie contient un sous-espace $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à l_p pour un certain $p \geqslant 1$, ou à c_0, pour tout $\varepsilon > 0$". Dans la deuxième partie, on va étudier la notion de l_p-type universel sur NS (NS est l'ensemble des normes stables sur X équivalentes à $\| \ \|$ pour un espace de Banach stable $(X, \| \ \|)$); le résultat principal est le suivant: pour tout espace de Banach stable séparable de dimension infinie $(X, \| \ \|)$, il existe $p \geqslant 1$ et il existe un ultrafiltre $(x_i)_{i \in I}$ sur la sphère unité de $(X, \| \ \|)$, tels que pour toute norme stable ϱ sur X équivalente à $\| \ \|$, le type sur (X, ϱ) défini par $x \to \lim_i \varrho(x + x_i)$ soit un l_p-type; ceci va se généraliser aussi au cas des espaces de Banach faiblement stables séparables de dimension infinie.

Rappelons tout d'abord les principales définitions concernant la stabilité figurant dans [7]. On dira qu'un espace de Banach X est stable si quelles que soient les suites bornées $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et $(y_m)_{m \geqslant 1}$ de X et quels que soient les ultrafiltres $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ sur $\mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n,\mathscr{V}_1} \lim_{m,\mathscr{V}_2} \|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathscr{V}_2} \lim_{n,\mathscr{V}_1} \|x_n + y_m\|.$$

Une fonction σ définie sur X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est dite un type sur X, s'il existe une suite bornée $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d' éléments de X et un ultrafilter $\mathscr{V}$ sur $\mathbb{N}$ tels que l'on ait $\sigma(x) = \lim_{n,\mathscr{V}} \|x + x_n\|$ pour tout élément x de X; on dit alors que $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et $\mathscr{V}$ réalisent le type σ sur X. Le type σ est dit non trivial s'il n'est pas réalisé par une suite constante et un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$.

On munit l'espace $\mathfrak{F}(X)$ des types sur X la topologie de la convergence simple sur X. $\mathfrak{F}(X)$ est alors un espace topologique séparable métrisable localement compact si X est séparable. Si

$$\sigma(x) = \lim_{n,\mathscr{V}_1} \|x + x_n\| \quad \text{et} \quad \tau(x) = \lim_{m,\mathscr{V}_2} \|x + y_m\|$$

sont deux types sur X, le produit de convolution de σ et τ est défini par

$$\sigma * \tau(x) = \lim_{n,\mathscr{V}_1} \lim_{m,\mathscr{V}_2} \|x + x_n + y_m\|.$$

On définit le type $a\sigma$ pour $a \in \mathbb{R}$ en posant

$$(a\sigma)(x) = \lim_{m,\mathscr{V}_1} \|x + ax_n\|.$$

On dira qu'un type σ sur X est symétrique si $\sigma = -\sigma$. Si $1 \leqslant p < \infty$, on dira que σ est un l_p-type sur X si σ est symétrique non trivial et si $(a\sigma) * (b\sigma) = (a^p + b^p)^{1/p}\sigma$ pour tous réels positifs a et b. On vérifie sans peine que le produit de convolution est commutatif et associatif et que l'ensemble des types symétriques sur X forme un sous-ensemble fermé de $\mathfrak{F}(X)$. On peut aussi vérifier que le produit de convolution est séparément continu. Pour plus de détails concernant les espaces de Banach stables consulter [7].

I. α-Types

Soit X un espace de Banach stable séparable de dimension infinie, soit σ un type symétrique non trivial sur X; on note $[\sigma]$ l'ensemble des types sur X de la forme $(a_1\sigma) * (a_2\sigma) * \ldots * (a_n\sigma)$, où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels. Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on dit que l_p est représenté dans $[\sigma]$ s'il existe deux suites $(\sigma_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\sigma_{2,n})_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $[\sigma]$ avec $\sigma_{1,n}(0) = \sigma_{2,n}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, telles que l'on ait

$$\lim_n (a_1\sigma_{1,n}) * (a_2\sigma_{2,n}) = \lim_n \sigma_{1,n} \tag{$*$}$$

pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|a\|_p = 1$.

On va noter C_σ l'ensemble des p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, tels que l_p soit représenté dans $[\sigma]$; si on considère le modèle étalé sur X associé au type σ [7], un résultat de Krivine [6] (voir aussi [8]) nous assure que pour tout type symetrique non trivial σ sur X. C_σ est non vide (en fait on peut choisir $\sigma_{1,n} = \sigma_{2,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Remarquons que si σ est un type symétrique non trivial sur X et si τ est un type non trivial qui appartient à l'adhérence de $[\sigma]$, on a toujours $C_\tau \subseteq C_\sigma$; en effet, prenons $p \in C_\tau$, si $(\tau_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\tau_{2,n})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites de types réalisant la représentation de l_p dans $[\tau]$ comme dans $(*)$ et si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de X avec $\bigcup_{n\geqslant 1} X_n$ dense dans X, on aura que pour tout entier n, il existe un entier k_n tel que

$$|(a_1\tau_{1,k_n})*(a_2\tau_{2,k_n})(x) - \tau_{1,k_n}(x)| \leqslant 1/n$$

pour tout $x \in X_n$, $\|x\| \leqslant n$, pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|a\|_p = 1$. Mais puisque $\tau_{1,k_n} \in [\tau]$ et $\tau_{2,k_n} \in [\tau]$, on a alors que τ_{1,k_n} et τ_{2,k_n} appartiennent à l'adhérence de $[\sigma]$, car le produit de convolution est séparément continu et τ appartient à l'adhérence de $[\sigma]$. D'après la continuité séparée du produit de convolution, on peut trouver deux suites de types $(\sigma_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\sigma_{2,n})_{n\geqslant 1}$ éléments de $[\sigma]$ avec $\sigma_{1,n}(0) = \sigma_{2,n}(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, telles que

$$|(a_1\sigma_{1,n})*(a_2\sigma_{2,n})(x) - \sigma_{1,n}(x)| \leqslant 2/n$$

pour tout $x \in X_n$, $\|x\| \leqslant n$, et pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}$, $\|a\|_p = 1$. Par la densité de $\bigcup_{n\geqslant 1} X_n$ dans X, on voit que les suites $(\sigma_{1,n})_{n\geqslant 1}$ et $(\sigma_{2,n})_{n\geqslant 1}$ réalisent une représentation de l_p dans $[\sigma]$, on a donc $p \in C_\sigma$.

La proposition suivante est une autre approche de la notion de classe conique minimale [7].

Proposition I.1: *Soit X un espace de Banach stable séparable de dimension infinie; il existe un type symétrique non trivial σ sur X, tel que pour tout type non trivial τ appartenant à l'adhérence de $[\sigma]$ on ait $C_\tau = C_\sigma$.*

Démonstration de la proposition I.1: Supposons que la proposition est fausse; on va construire une suite transfinie de types symétriques $(\sigma_\alpha)_\alpha$ avec $\sigma_\alpha(0) = 1$ pour tout ordinal α, et de plus pour tous ordinaux $\alpha < \beta$, on a σ_β appartient à l'adhérence de $[\sigma_\alpha]$ et $C_{\sigma_\alpha} \neq C_{\sigma_\beta}$; on trouvera ainsi une contradiction, puisque $(C_{\sigma_\alpha})_\alpha$ doit être stationnaire à partir d'un certain instant. On prend tout simplement pour σ_0 un type symétrique non trivial avec $\sigma_0(0) = 1$. Supposons que la construction de σ_α est faite pour tout $\alpha < \alpha_0$; si $\alpha_0 = \alpha + 1$, prenons pour σ_{α_0} un des types non triviaux appartenant à l'adhérence de $[\sigma_\alpha]$ tel que $\sigma_{\alpha_0}(0) = 1$ et $C_{\sigma_{\alpha_0}} \neq C_{\sigma_\alpha}$; si α_0 est un ordinal limite et $\mathscr{V}$ est un ultrafiltre non trivial sur l'ensemble des ordinaux plus petits que α_0 plus fin que le filtre des sections, on pose $\sigma_{\alpha_0} = \lim_{\beta,\mathscr{V}} \sigma_\beta$;

puisque σ_{α_0} appartient à l'adhérence de $[\sigma_\alpha]$ pour tout $\alpha < \alpha_0$ et que la famille $(C_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$ est strictement décroissante, on a donc $C_{\sigma_{\alpha_0}} \neq C_{\sigma_\alpha}$ pour tout $\alpha < \alpha_0$, on termine ainsi la construction de $(\sigma_\alpha)_\alpha$, donc aussi la démonstration.

Pour la commodité d'écriture, si $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$, on écrit simplement $a \simeq_{1+\varepsilon} b$ au lieu de $a/\sqrt{1+\varepsilon} \leqslant b \leqslant a\sqrt{1+\varepsilon}$. Notre but est de montrer le

THEOREME I.2. [J.L. Krivine et B. Maurey [7]]: *Soit* $(X, \| \ \|)$ *un espace de Banach stable de dimension infinie; il existe* p, $1 \leqslant p < \infty$, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *d'éléments de* X *telle que pour toute suite réelle* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *nulle sauf pour un nombre fini de* n, *on ait*

$$\left\| \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n \right\| \simeq_{1+\varepsilon} \|a\|_p .$$

Puisque tout sous-espace d'un espace de Banach stable est stable, on peut supposer que X est séparable.

La démonstration de ce théorème utilisera la technique de l'indice, on donne ici une formulation simple de cette notion. Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $\varepsilon > 0$; on va noter comme on a introduit dans l'introduction

$$H_{\varepsilon,p}(X) = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n): \quad x_i \in X, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}, \right.$$

$$\left. \left\| \sum_{i\leqslant n} a_i x_i \right\| \simeq_{1+\varepsilon} \|a\|_p \quad \text{pour tout} \quad a = (a_i)_{i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

On définit l'ordre naturel sur $H_{\varepsilon,p}(X)$ par $(x_1, x_2, \ldots, x_n) < (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ si $n < m$ et si $x_i = y_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour H une partie de $H_{\varepsilon,p}(X)$, on va définir les dérivés de H par $H^0 = H$, et si H^α est défini pour tout ordinal $\alpha < \beta$, on définit H^β de la manière suivante:

- si $\beta = \alpha + 1$, on pose

$$H^\beta = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H^\alpha: \text{il existe } (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in H^\alpha \text{ tel que } (x_1, x_2, \ldots, x_n) < (y_1, y_2, \ldots, y_m)\}.$$

- si β est un ordinal limite, on pose

$$H^\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} H^\alpha .$$

Puisque les H^α sont décroissants ils doivent devenir stationnaires à partir d'un certain instant.

DEFINITION: Soit H un sous-ensemble non vide de $H_{\varepsilon,p}(X)$, soit α le plus petit ordinal γ tel que $H^{\gamma} = H^{\gamma+1}$; si $H^{\alpha} = \phi$, posons $h(H) = \alpha$, si $H^{\alpha} \neq \phi$, posons $h(H) = \omega_1$, où ω_1 est le premier ordinal non dénombrable; on dit alors que H est d'indice $h(H)$.

Remarquons que pour que l_p (dans le cas $p = \infty$, on pense à c_0 et de même pour après) soit $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à un sous-espace de X pour un certain p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $\varepsilon > 0$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de X telle que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H_{\varepsilon,p}(X)$ pour tout $n \geqslant 1$. Selon le langage courant, on dit dans ce cas là que la relation définie sur $H_{\varepsilon,p}(X)$ n'est pas bien fondée; le théorème de Kunen–Martin [4] nous dit qu'une relation analytique n'est pas bien fondée si son indice est ω_1; remarquons que la relation que l'on a mise sur $H_{\varepsilon,p}(X)$ est évidemment analytique (la vérification est immédiate); ainsi puisqu'un espace de Banach contenant c_0 ne peut pas être stable, on ramène la démonstration du théorème à l'assertion suivante: sous les hypothèses du théorème I.2 il existe p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, tel que $H_{\varepsilon,p}(X)$ est d'indice ω_1 pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarquons que si H_1 et H_2 sont deux sous-ensembles de $H_{\varepsilon,p}(X)$ avec $H_1 \subseteq H_2$, on a toujours que l'indice de H_2 est supérieur à celui de H_1, donc pour montrer l'assertion, il suffit de montrer qu'il existe p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des sous-ensembles de $H_{\varepsilon,p}(X)$ avec des indices arbitrairement proches de ω_1.

On fixe un type symétrique non trivial ϱ sur X vérifiant la conclusion de la proposition I.1; on fixe aussi un $p \in C_{\varrho}$, on suppose que $\varrho(0) = 1$ et que $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de X avec $\bigcup_{n \geqslant 1} X_n$ dense dans X.

DEFINITION: On dira qu'un type symétrique non trivial σ sur X est un α-type pour un certain ordinal $\alpha \leqslant \omega_1$, s'il vérifie la condition suivante: pour tout $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, et pour tout $\tau \in [\sigma]$ avec $\tau(0) = 1$, le sous-ensemble de $H_{\varepsilon,p}(X)$:

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon,N,\tau} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H_{\varepsilon,p}(X):& \\ &(a\tau)(x) \simeq_{1+\varepsilon} \|a(b_1x_1 + \cdots + b_nx_n) + x\| \\ &\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \quad |a| \leqslant 1, \quad x \in X_N, \quad \|x\| \leqslant N, \\ &\text{et pour tout } b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|b\|_p = 1\} \end{aligned}$$

est d'indice supérieur ou égal à α.

Le théorème I.2 découle immédiatement du lemme suivant:

LEMME I.3. *Sous les hypothèses du théorème I.1, pour tout ordinal* $\alpha \leqslant \omega_1$, *il existe un* α*-type.*

Démonstration du lemme I.3: On va construire une suite transfinie de types symétriques $(\sigma_\alpha)_{\alpha \leqslant \omega_1}$ telle que σ_α est un α-type et $\sigma_\alpha(0) = 1$ pour tout $\alpha \leqslant \omega_1$, et que pour tout $\alpha < \beta \leqslant \omega_1$, σ_β appartient à l'adhérence de $[\sigma_\alpha]$.

La construction sera faite par récurrence sur $\alpha \leqslant \omega_1$; on prend tout simplement $\sigma_0 = \varrho$, où ϱ est le type que l'on a fixé juste avant la définition de α-type; la propositions III.1 de [7] nous assure que $\sigma_0 = \varrho$ vérifie les conditions que l'on veut pour $\alpha = 0$ puisque pour $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ fixé, la boule fermée de centre 0 et de rayon N de X_N est un sous-ensemble compact de X_N, si $(x_i)_{i \in I}$ est un ultrafiltre sur X qui engendre le type σ_0, il existe alors $i_0 \in I$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leqslant 1$, pout tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, on a

$$(a\sigma_0)(x) \simeq_{1+\varepsilon} \|ax_{i_0} + x\|,$$

$$(a\sigma_0)(x) \simeq_{1+\varepsilon} \|-ax_{i_0} + x\|,$$

ce qui montre que $H_{\varepsilon,N,\sigma_0}$ n'est pas vide, l'indice de $H_{\varepsilon,N,\sigma_0}$ est donc supérieur ou égal à 0, c'est à dire que σ_0 est bien un 0-type. Supposons que la construction de σ_α est déjà faite pour tout $\alpha < \alpha_0$, selon α_0 on va distinguer en deux cas:

1. $\alpha_0 = \alpha + 1$

Par le choix de σ_0 et le fait que σ_α appartient à l'adhérence de $[\sigma_0]$, on sait que d'après la proposition I.1, il existe deux suites $(\tau_{1,n})_{n \geqslant 1}$ et $(\tau_{2,n})_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $[\sigma_\alpha]$ avec $\tau_{1,n}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, telles que pour tout $x \in X$, pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|a\|_p = 1$, on ait

$$\lim_n (a_1\tau_{1,n}) * (a_2\tau_{2,n})(x) = \lim_n \tau_{1,n}(x).$$

Si $\mathscr{V}$ est un ultrafitre sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet, on pose $\sigma_{\alpha_0} = \lim_{m,\mathscr{V}} \tau_{1,n}$; on va voir que σ_{α_0} vérifie les conditions que l'on veut. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, τ un type appartenant à $[\sigma_{\alpha_0}]$, $\tau = (a_1\sigma_{\alpha_0}) * (a_2\sigma_{\alpha_0}) * \ldots * (a_k\sigma_{\alpha_0})$ avec $\tau(0) = 1$; prenons ε_1 avec $(1 + \varepsilon_1)^4 = 1 + \varepsilon$. Puisque pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\lambda\|_p = 1$, et pour tout $x \in X$, on a

$$\sigma_{\alpha_0}(x) = \lim_{n,\mathscr{V}} (\lambda_1\tau_{1,n}) * (\lambda_2\tau_{2,n})(x),$$

un argument de compacité standard nous donne des entiers $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tels que

$$\{\mu((\lambda_1 a_1 \tau_{1,n_n}) * (\lambda_2 a_1 \tau_{2,n_1}))\} * \ldots * \{\mu((\lambda_1 a_k \tau_{1,n_k}) * (\lambda_2 a_k \tau_{2,n_k}))\}\ (x)$$

$$\simeq_{1+\varepsilon_1} (\mu\tau)(x)$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\lambda\|_p = 1$, et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$. Posons $\tau_i = (a_1\tau_{i,n_1}) * \ldots * (a_k \tau_{i,n_k})$ pour $i = 1, 2$; on a donc

$$\{\mu((\lambda_1\tau_1) * (\lambda_2\tau_2))\}\ (x) \simeq_{1+\varepsilon_1} (\mu\tau)(x) \tag{$**$}$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\lambda\|_p = 1$, et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$; quitte à remplacer τ_1 par $\tau_1/\tau_1(0)$ et $1 + \varepsilon_1$ par $(1 + \varepsilon_1)^2$ dans $(**)$, on peut supposer que $\tau_1(0) = 1$ et

$$\{\mu((\lambda_1\tau_1) * (\lambda_2\tau_2))\}\ (x) \simeq_{(1+\varepsilon_1)^2} (\mu\tau)(x)$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\lambda\|_p = 1$, et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$; Ici encore, un argument de compacité nous donne un entier K et un élément $x_0 \in X$ tels que $\|\mu x_0 + x\| \leqslant K$ et $\mu x_0 + x \in X_K$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$, et pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, et que

$$(\lambda_1 \mu\tau_1)(x + \lambda_2 \mu x_0) \simeq_{(1+\varepsilon_1)^3} (\mu\tau)(x) \tag{$***$}$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|\lambda\|_p = 1$, et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$; par la définition de τ_1, τ_1 appartient à $[\sigma_\alpha]$, mais par l'hypothèse de récurrence, σ_α est un α-type, on a donc que l'indice de $H_{\varepsilon_1,K,\tau_1}$ est supérieur ou égal à α, c'est à dire que l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H_{\varepsilon_1,p}(X):$$

$$(\nu\tau_1)(x) \simeq_{1+\varepsilon_1} \|\nu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n) + x\|,$$

$$\text{pout tout } \nu \in \mathbb{R},\quad |\nu| \leqslant 1,\quad x \in X_K,\quad \|x\| \leqslant K,$$

$$\text{et pour tout } \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|\beta\|_p = 1\}$$

est d'indice supérieur ou égal à α; par (***) et par les choix de ε_1 et K, on sait que pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H_{\varepsilon_1, K, \tau_1}$, on aura $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in H_{\varepsilon, N, \tau}$, on en déduit que l'indice de $H_{\varepsilon, N, \tau}$ est supérieur ou égal à $\alpha_0 = \alpha + 1$, ce qui montre que σ_{α_0} est un α_0-type.

2. α_0 est un ordinal limite

Soit $\mathscr{V}$ un ultrafiltre sur l'ensemble des ordinaux plus petits que α_0 plus fin que le filtre des sections, on pose $\sigma_{\alpha_0} = \lim_{a, \mathscr{V}} \sigma_\alpha$; on va voir que σ_{α_0} vérifie les conditions que l'on veut. On fixe $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $\tau = (a_1 \sigma_{\alpha_0}) * (a_2 \sigma_{\alpha_0}) * \ldots * (a_k \sigma_{\alpha_0})$ avec $\tau(0) = 1$, on va voir que l'indice de $H_{\varepsilon, N, \tau}$ est supérieur à α pour tout $\alpha < \alpha_0$; pour cela on fixe $\alpha < \alpha_0$ et ε_1 avec $(1 + \varepsilon_1)^5 = 1 + \varepsilon$. Puisque σ_α converge vers σ_{α_0} suivant $\mathscr{V}$, un argument de compacité nous donne des ordinaux $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k < \alpha_0$ tels que

$$\{\mu((a_1 \sigma_{\alpha_1}) * (a_2 \sigma_{\alpha_2}) * \ldots * (a_k \sigma_{\alpha_k}))\} (x) \simeq_{1+\varepsilon_1} (\mu\tau)(x)$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, et pout tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$. Mais puisque $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant k$, σ_{α_i} appartient donc à l'adhérence de $[\sigma_\alpha]$; ici encore un argument de compacité nous donne des types $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ appartenant à $[\sigma_\alpha]$ tels que l'on ait

$$\{\mu((a_1 \tau_1) * (a_2 \tau_2) * \ldots * (a_k \tau_k))\} (x) \simeq_{(1+\varepsilon_1)^2} (\mu\tau)(x)$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, et pout tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$; on pose alors

$$\gamma = (a_1 \tau_1) * (a_2 \tau_2) * \ldots * (a_k \tau_k); \quad \text{on a } \gamma \in [\sigma_\alpha] \text{ et}$$

$$(\mu\gamma)(x) \simeq_{(1+\varepsilon_1)^2} (\mu\tau)(x) \tag{****}$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, et pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$; quitte à remplacer γ par $\gamma/\gamma(0)$ et $(1 + \varepsilon_1)^2$ par $(1 + \varepsilon_1)^4$ dans (****), on peut supposer que $\gamma(0) = 1$ et

$$(\mu\gamma)(x) \simeq_{(1+\varepsilon_1)^4} (\mu\tau)(x)$$

pour tout $x \in X_N$, $\|x\| \leqslant N$, et pout tout $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant 1$. On se ramène ainsi à l'approximation de $(\mu\tau)(x)$ par celle de $(\mu\gamma)(x)$; on a $\gamma \in [\sigma_\alpha]$, puisque par l'hypothèse de récurrence σ_α est un α-type, l'indice de $H_{\varepsilon_1, N, \gamma}$ est donc supérieur ou égal à α; on en déduit que l'indice de $H_{\varepsilon,N,\tau}$ est supérieur ou égal à α, puisque α peut être un ordinal arbitrairement proche de α_0, on a donc que l'indice de $H_{\varepsilon,N,\tau}$ est supérieur ou égal à α_0, σ_{α_0} est donc bien un α_0-type.

On termine ainsi la construction de $(\sigma_\alpha)_{\alpha \leqslant \omega_1}$, donc la démonstration du lemme I.3, donc aussi celle du théorème I.2.

Dans [2], la notion d'espace de Banach faiblement stable a été introduite. Par définition un espace de Banach $(X, \|\ \|)$ est faiblement stable si pour tout sous-ensemble faiblement compact K de X, pour toutes suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de K, et pout tous ultrafiltres $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ sur $\mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n,\mathscr{V}_1} \lim_{m,\mathscr{V}_2} \|x_n + y_m\| = \lim_{m,\mathscr{V}_2} \lim_{n,\mathscr{V}_1} \|x_n + y_m\|.$$

Soit $(X, \|\ \|)$ un espace de Banach faiblement stable séparable de dimension infinie. Par définition $\mathfrak{F}_{wn}(X)$ est l'ensemble des types σ sur X tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ faiblement convergente vers zéro telle que pour tout $x \in X$, on ait $\sigma(x) = \lim_n \|x + x_n\|$ (la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est choisie de façon que la limite existe pour tout $x \in X$); on munit $\mathfrak{F}_{wn}(X)$ la topologie de la convergence simple sur X, alors $\mathfrak{F}_{wn}(X)$ devient un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}_+^X$ [2]; le produit de convolution de deux éléments de $\mathfrak{F}_{wn}(X)$ et la multiplication d'un élément de $\mathfrak{F}_{wn}(X)$ par un réel sont définis naturellement. Dans [2], les auteurs ont montré que le produit de convolution est commutatif et associatif, et si l_1 n'est isomorphe à aucun sous-espace de X, le produit de convolution est séparément continu de $\mathfrak{F}_{wn}(X) \times \mathfrak{F}_{wn}(X)$ dans $\mathfrak{F}_{wn}(X)$ (proposition I.19 de [2]); si nous admettons ces résultats, notre argument présenté ci-dessus permet aussi d'obtenir le résultat principal de [2]:

Théorème [Argyros, Negrepontis et Zachariades [2]]: *Soit X un espace de Banach faiblement stable séparable de dimension infinie; pout tout $\varepsilon > 0$, X admet un sous-espace $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à l_p pour un certain p, $1 \leqslant p < \infty$, ou à c_0.*

Démonstration du théorème: Remarquons que dans la démonstration du théorème I.2 on a seulement utilisé les propriétés suivantes: d'une part, le théorème de Krivine [6] s'applique à un type symétrique sur un espace de Banach quelconque; d'autre part, l'ensemble des types symétriques forme un sous-ensemble fermé de l'espace des types, et il est non réduit à $\{0\}$ si l'espace de Banach X est supposé de dimension infinie, l'ensemble des types symétriques est stable par produit de convolution et multiplication par un réel, le produit de convolution est commutatif et associatif, et il est séparément continu; si $(X, \|\ \|)$ est un espace de Banach faiblement stable séparable de dimension infinie, si l_1 n'est isomorphe à aucun sous-espace de X, alors si on restreint notre attention aux éléments symétriques de $\mathfrak{F}_{wn}(X)$, on aura toutes les propriétés sur les éléments symétriques de $\mathfrak{F}_{wn}(X)$ pour faire marcher la démonstration du théorème; d'autre part si l_1 est isomorphe à un certain sous-espace de X, on sait alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace de X $(1 + \varepsilon)$-isomorphe à l_1 (proposition 2.e.3 de [9]); on laisse les détails aux lecteurs.

II. l_p-Type universel

On considère dans ce paragraphe un espace de Banach stable séparable de dimension infinie $(X, \| \ \|)$. On va noter NS l'ensemble des normes stables sur X équivalentes à $\| \ \|$; on va introduire des notions semblables à la notion de type et la notion de produit de convolution.

Pour tout $x \in X$, on définit τ_x: $NS \times X \to \mathbb{R}_+$ la fonction $\tau_x(\psi, y) = \psi(x + y)$ pour tout $\psi \in NS$, et pour tout $y \in X$; τ_x est alors appelé le type sur NS réalisé par x. Posons $\hat{X} = \{\tau_x : x \in X\}$; si on munit $\mathbb{R}_+^{NS \times X}$ la topologie de la convergence simple sur $NS \times X$, la fermeture de $\hat{X}$ dans $\mathbb{R}_+^{NS \times X}$ est appelée l'espace des types sur NS, un type sur NS est donc une fonction τ: $NS \times X \to \mathbb{R}_+$ telle qu'il existe une famille bornée $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de X et un ultrafiltre $\mathscr{V}$ sur I tels que l'on ait $\tau(\psi, x) = \lim_{i, \mathscr{V}} \psi(x_i + x)$ pout tout $\psi \in NS$ et pour tout $x \in X$; on dit alors que le type τ est réalisé par $(x_i)_{i \in I}$ et $\mathscr{V}$. On vérifie facilement que l'espace des types sur NS est localement compact, en particulier, tout sous-espace K de l'espace des types sur NS tel que pour tout $\psi \in NS$ et pour tout $x \in X$ on ait $\sup_{\sigma \in K} \sigma(\psi, x) < \infty$ est relativement compact.

Soient maintenant σ et τ deux types sur NS réalisés respectivement par $(x_i)_{i \in I}$, $\mathscr{V}_1$, et $(y_j)_{j \in J}$, $\mathscr{V}_2$, on définit le produit de convolution de σ et τ par

$$\sigma * \tau(\psi, x) = \lim_{\iota, \mathscr{V}_1} \lim_{J, \mathscr{V}_2} \psi(x_i + y_j + x)$$

pout tout $\psi \in NS$, et pour $x \in X$. Puisque l'espace des types sur NS est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}_+^{NS \times X}$, on voit que $\sigma * \tau$ est encore un type sur NS puisqu'il est limite d'un ultrafiltre d'éléments de l'espace des types sur NS; il est aussi facile de vérifier que le produit de convolution ne dépend pas des représentations choisies et que le produit de convolution est commutatif et associatif. Soit σ un type sur NS, si σ est réalisé par $(x_i)_{i \in I}$ et $\mathscr{V}$, on définit la multiplication de σ par un réel a par $(a\sigma)(\psi, x) = \lim_{i, \mathscr{V}} \psi(ax_i + x)$, pour tout $\psi \in NS$ et pour tout $x \in X$, c'est encore un type sur NS. Un type σ sur NS est dit symétrique sur NS si $\sigma = -\sigma$, le type sur NS réalisé par la suite zéro est bien sûr un type symétrique sur NS; un type sur NS est dit non trivial s'il n'est pas réalisé par une suite constante. Remarquons que l'espace des types symétriques sur NS forme un sous-ensemble fermé de l'espace des types sur NS.

DEFINITION: Soit $1 \leqslant p < \infty$; un type σ sur NS sera dit un l_p-type universel sur NS si σ est symétrique non trivial et si pour tous réels positifs a et b, on a $(a\sigma) * (b\sigma) = (a^p + b^p)^{1/p}\sigma$.

Remarquons qu'il y a des liens entre les types du paragraph I et les types que l'on vient de définir; pour ne pas confondre, quand on parle d'un type, il faut préciser sur quoi l'on travaille. Remarquons aussi que pour tout type σ sur NS, la fonction $x \to \sigma(\psi, x)$ définit un type sur (X, ψ) pour tout $\psi \in NS$. Il est facile de voir que σ est symétrique (resp. l_p-type universel) sur NS si et seulement si les types correspondants sur (X, ψ) pour $\psi \in NS$ sont symétriques (resp. l_p-type). Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il y a toujours un l_p-type universel sur NS pour un certain p, $1 \leqslant p < \infty$, c'est à dire qu'il existe un ultrafiltre sur la sphère unité de $(X, \| \ \|)$ et il définit un l_p-type sur chaque (X, φ) pour $\varphi \in NS$; ceci exprime une structure uniforme sur un espace de Banach séparable de dimension infinie muni de différentes normes stables équivalentes.

THEOREME II.1: *Soit X un expace de Banach stable séparable de dimension infinie; alors il existe un p, $1 \leqslant p < \infty$, et un l_p-type universel sur NS.*

LEMME II.2: *Soit X un espace de Banach stable séparable de dimension infinie; alors il existe un type symétrique non trivial sur NS.*

Démonstration du lemme II.2. Puisque X est de dimension infinie, on sait qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ dans la sphère unité de $(X, \| \ \|)$ sans sous-suite convergente; soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet; si σ le type sur NS réalisé par $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et $\mathscr{F}$, on sait d'après [7] que le type $\sigma * (-\sigma)$ est un type symétrique non trivial sur NS, ce qui termine la démonstration.

Bien entendu, on peut numéroter les éléments de NS en une suite transfinie $(\psi_\alpha)_{\alpha \leqslant \omega}$, où ω est un ordinal; si $\psi \in NS$, on dit que deux types σ et τ sur (X, ψ) sont proportionnels s'il existe $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tel que pour tout $x \in X$ on ait $\sigma(x) = (a\tau)(x)$

LEMME II.3: *Soit X un espace de Banach stable séparable de dimension infinie; alors il existe un p, $1 \leqslant p < \infty$, tel que pour tout ordinal $\alpha \leqslant \omega$, il existe un type symétrique non trivial σ_α sur NS avec $\sigma_\alpha(\psi_0, 0) = 1$, tel que la fonction* *de X dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $x \to \sigma_\alpha(\psi_\beta, x)$ *soit un* l_p*-type non trivial sur* (x, ψ_β) *pour tout* $\beta \leqslant \alpha$, *et que pour tout* $\gamma \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \omega$, *les deux types sur* (X, ψ_γ) *définis par*

$$x \to \sigma_\alpha(\psi_\gamma, x)$$

$$x \to \sigma_\beta(\psi_\gamma, x)$$

soient proportionnels.

Démonstration du lemme II.3: On va construire les σ_α par récurrence sur $\alpha \leqslant \omega$.

1. $\alpha = 0$

Soit σ un type symétrique non trivial sur NS donné par le lemme II.2, on sait que d'après le résultat principal de [7], il existe $p \geqslant 1$, il existe $(a_{n,m})_{n \geqslant 1, m \leqslant k_n}$, $a_{n,m} \in \mathbb{R}$, $k_n \in \mathbb{N}$, et il existe un type τ sur NS avec $\tau(\psi_0, 0) = 1$ tel que

$$\lim_{n,\mathscr{F}} (a_{n,1}\sigma) * (a_{n,2}\sigma) * \ldots * (a_{n,k_n}\sigma) = \tau$$

et que la fonction $x \to \tau(\psi_0, x)$ soit un l_p-type sur (X, ψ_0), où $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet, puisque l'ensemble des types symétriques sur NS forme un sous-ensemble fermé, on en déduit que τ est symétrique sur NS, il reste à poser $\sigma_0 = \tau$.

2. On suppose que la construction de σ_θ est faite pour tout $\alpha < \alpha_0$; selon la nature de α_0, on va distinguer en deux cas différents:

a. $\alpha_0 = \alpha + 1$
L'hypothèse de récurrence nous donne un type symétrique non trivial σ_α sur NS tel que la fonction $x \to \sigma_\alpha(\psi_\beta, x)$ définit un l_p-type non trivial sur (X, ψ_β) pour tout $\beta \leqslant \alpha$, et $\sigma_\alpha(\psi_0, 0) = 1$; mais puisque la fonction $x \to \sigma_\alpha(\psi_{\alpha_0}, x)$ est un type non trivial symétrique sur (X, ψ_{α_0}), on sait que d'après [7] il existe $(a_{n,m})_{n \geqslant 1, m \leqslant k_n}$, $a_{n,m} \in \mathbb{R}$, $k_n \in \mathbb{N}$, et il existe un type ϱ sur NS avec $\varrho(\psi_0, 0) = 1$ tels que

$$\lim_{n,\mathscr{F}} (a_{n,1}\sigma_\alpha) * (a_{n,2}\sigma_\alpha) * \ldots * (a_{n,k_n}\sigma_\alpha) = \varrho$$

et que la fonction $x \to \varrho(\psi_{\alpha_0}, x)$ définit un l_q-type non trivial sur (X, ψ_{α_0}) pour un certain $q \geqslant 1$, où $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet, mais puisque ψ_{α_0} et $\| \ \|$ sont deux normes stables équivalentes sur X, on a forcément $q = p$; d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $\beta \leqslant \alpha$ le type $x \to \sigma_\alpha(\psi_\beta, x)$ est un l_p-type non trivial sur (X, ψ_β), on voit que d'après la définition de ϱ les deux types non triviaux sur (X, ψ_β) définis par

$$x \to \sigma_\alpha(\psi_\beta, x)$$

$$x \to \varrho(\psi_\beta, x)$$

sont proportionnels, donc si on pose $\sigma_{\alpha_0} = \varrho$ on a toutes les propriétés que l'on veut sur σ_{α_0}.

b. α_0 est un ordinal limite
On note I l'ensemble des ordinaux $\alpha < \alpha_0$; soit $\mathscr{V}$ un ultrafiltre sur I plus fin que le filtre des sections pour l'ordre naturel, on pose σ la limite des σ_α suivant $\mathscr{V}$, on a alors $\sigma(\psi_0, 0) = 1$.

Remarquons que puisque les σ_α sont symétriques sur NS pour tout $\alpha < \alpha_0$, σ est symétrique sur NS, et puisque pour tout $\beta \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_0$, les deux l_p-types sur (X, ψ_β) définis par

$$x \to \sigma_{\alpha_1}(\psi_\beta, x)$$

$$x \to \sigma_{\alpha_2}(\psi_\beta, x)$$

sont proportionnels, on voit que la fonction $x \to \sigma(\psi_\beta, x)$ définie sur (X, ψ_β) un l_p-type non trivial pour tout $\beta < \alpha_0$. On ramène ainsi le cas b au cas a; en utilisant le même procédé que a on trouvera un type σ_{α_0} sur NS qui a les propriétés voulues.

On termine ainsi la démonstration.

Remarquons que le théorème II.1 découle immédiatement du lemme II.3.

Notre argument présenté ci-dessus permet d'obtenir un résultat parallèle dans le cas des espaces séparables faiblement stables de dimension infinie. En fait, soit $(X, \| \ \|)$ un espace de Banach séparable faiblement stable de dimension infinie, notons NSF l'ensemble des normes sur X faiblement stables équivalentes à $\| \ \|$, $\mathfrak{F}_{nsf}(X)$ la fermeture dans $\mathbb{R}_+^{NSF \times X}$ de l'ensemble des fonctions $\hat{x}$ sur $NSF \times X$ définie par $\hat{x}(\psi, y) = \psi(x + y)$ pour tout $\psi \in NSF$ et pout tout $y \in X$, où $\mathbb{R}_+^{NSF \times X}$ est muni la topologie de la convergence simple sur $NSF \times X$, chaque élément de $F_{nsf}(X)$ est appelé donc un type NSF; $\mathfrak{F}_{nsf}(X)$ devient ainsi un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}_+^{NSF \times X}$.

Si on pose

$$A = \{\sigma \in \mathfrak{F}_{nsf}(X): \text{ pout tout } \psi \in NSF, \text{ il existe } \sigma_\psi \in \mathfrak{F}_{wn}(X)$$
$$\text{tel que pour tout } x \in X \text{ on ait } \sigma(\psi, x) = \sigma_\psi(x)\},$$

alors le produit de convolution de deux éléments de A et la multiplication d'un élément de A par un réel peuvent se définir de façon naturelle; alors il est facile de montrer que A est un sous-ensemble fermé de $\mathfrak{F}_{nsf}(X)$ et que A est stable par convolution et multiplication par un réel, de plus A est localement compact; on peut donc reproduire l'argument ci-dessus pour montrer la

PROPOSITION II.4: *Soit* $(X, \| \ \|)$ *un espace de Banach séparable faiblement stable de dimension infinie; on suppose que* l_1 *n'est isomorphe à aucun sous-espace de* X*; alors ou bien il existe* $p \geqslant 1$ *et un type* σ *sur NSF tels que la fonction* $x \to \sigma(\psi, x)$ *définit sur* (X, ψ) *un* l_p*-type non trivial pour chaque* $\psi \in NSF$*, ou bien il existe un type* τ *sur NSF tel que la fonction* $x \to \tau(\psi, x)$ *définit sur* (X, ψ) *un* c_0*-type [2] non trivial pour chaque* $\psi \in NSF$.

Je remercie très sincèrement B. Maurey pour ses encouragements et ses remarques importantes pendant ce travail.

References

1. D. Aldous: subspaces of L^1 via random measures, *Trans Amer Math Soc.* 258 (1981) 445–463.
2. S. Argyros, S. Negrepontis et Th. Zachariades: Weakly stable Banach spaces, *Israel Journal of Math.* 57 No: 1 (1987) 68–88.
3. J. Bourgain, H.P. Rosenthal et G. Schechtman: An ordinal L^p-index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of L^p, *Ann of Math. Ser 2*, 114 (1981) 193–228.
4. C. Dellacherie: Les dérivations en théorie descriptive des ensembles et le théorème de la borne, Séminaire de Proba XI, Université de Strasbourg. *Lecture Notes 581.* Springer (1977) pp. 34–46.
5. S. Guerre: Sur les espaces stables universels, *Studia Math.* T 81 (1985) 221–229.
6. J.L. Krivine: Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés, *Ann of Math.* 104 (1976) 1–29.
7. J.L. Krivine et B. Maurey: Espaces de Banach stables, *Israel Journal of Math.* 39 (1981) 273–295.
8. H. Lemberg: Nouvelle démonstration d'un théorème de J.L. Krivine sur la finie représentation de l_p dans un espace de Banach, *Israel Journal of Math.* 39 (1981) 341–348.
9. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri: Classical Banach spaces I, *Ergebnisse der Mathematik and ihrer Grenzgebiete 92*, Springer-Verlag (1977).
10. W. Szlenk: The non existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces, *Studia Math.* T 30 (1968) 53–61.