FRANÇOIS LAUBIE

Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux

Compositio Mathematica, tome 67, nº 2 (1988), p. 165-189

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__67_2_165_0>

Compositio Mathematica 67: 165–189 (1988)

Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux

FRANÇOIS LAUBIE
Département de Mathématiques 123, Rue Albert Thomas F-87060 Limoges Cedex, France

Received 6 June 1987; accepted 26 January 1988

Introduction

Dans cet article, p est un nombre premier fixé, "corps local" signifie corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait de caractéristique p et tous les plongements et automorphismes de corps valués que l'on considère sont supposés continus.

Soit K un corps local et soit v_K la valuation de K telle que $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$. Pour tout automorphisme σ de K on pose $i_K(\sigma) = \min_{v_K(a) \geqslant 0} v_K(\sigma(a) - a) - 1$; on dit que σ est sauvagement ramifié si $i_K(\sigma) \geqslant 1$.

Si K est un corps local d'inégale caractéristique, c'est-à-dire si $\operatorname{car}(K) = 0$, tout automorphisme sauvagement ramifié σ de K est d'ordre fini; le corps de ses invariants K^σ est donc un corps local et K est une extension cyclique de K^σ dont le plus petit saut de ramification est $i_K(\sigma)$.

Par contre, si K est un corps local d'égale caractéristique, il existe des automorphismes de K sauvagement ramifiés et d'ordre infini; le corps des invariants d'un tel automorphisme s'identifie au corps résiduel de K.

Dans [Sen 1], Shankar Sen a prouvé une conjecture de Grothendieck qui généralise le théorème de Hasse–Arf pour les extensions cycliques ([CL], ch. V, §7): pour tout automorphisme sauvagement ramifé σ d'un corps local K et pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $i_K(\sigma^{p^{n-1}}) \equiv i_K(\sigma^{p^n}) \bmod p^n$.

En fait, comme l'ont montré J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger, cette généralisation du théorème de Hasse–Arf provient d'une correspondance fonctorielle entre certains groupes abéliens d'automorphismes de corps locaux et certaines extensions abéliennes de corps locaux (cf. [Fon 1], [Fon 2], [F W 1], [F W 2], [Win 1], [Win 2], [Win 3], [Win 4]). La définition précise de ce foncteur est donnée au §1. Pour le moment contentons-nous d'exposer succinctement la situation.

Soit X un corps local de caractéristique p. Pour tout nombre réel $x \geqslant -1$, on désigne par $\mathrm{Aut}_x(X)$ le groupe des automorphismes σ de X tels que

$i_X(\sigma) \geqslant x$. Le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ des automorphismes de X est ainsi muni d'une filtration, appelée filtration de ramification, pour laquelle il est séparé et complet. Pour tout sous-groupe fermé G de $\mathrm{Aut}(X)$, on note $(G_x)_{x \geqslant -1}$ la filtration induite; pour que G soit un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(X)$ il faut et il suffit que, pour tout $x \geqslant -1$, G_x soit d'indice fini dans G et, lorsqu'il en est ainsi, G s'identifie au groupe profini $\varprojlim G/G_n$, n parcourant $\mathbb{N}$.

D'autre part, on appelle extension de Lie d'un corps local K une extension galoisienne infinie de K dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p-adique et dont l'extension résiduelle est finie; la numérotation inférieure des groupes de ramification des extensions de Lie est bien définie. A une extension de Lie L/K on sait associer canoniquement un corps local X de caractéristique p, appelé corps des normes de L/K, un sous-groupe compact G de $\mathrm{Aut}(X)$ et un isomorphisme Φ de G sur $\mathrm{Gal}(L/K)$ qui respecte la ramification, c'est-à-dire tel que $\Phi(G_x) = \mathrm{Gal}(L/K)_x$ pour tout $x \geqslant -1$.

Soit X un corps local de caractéristique p et soit G un sous-groupe compact topologiquement de type fini de $\mathrm{Aut}(X)$. On convient de dire que le couple (X, G) est l'image d'une extension de Lie s'il existe une extension de Lie dont le corps des normes s'identifie à X et le groupe de Galois à G par le procédé ci-dessus. A quelles conditions le couple (X, G) est-il l'image d'une extension de Lie?

A cause de ce que l'on sait sur la ramification des extensions de Lie (cf. plus loin : 1.1.2) la condition $\liminf_{x \to +\infty} x/(G : G_x) > 0$ est nécessaire. Dans [Win 2], J.-P. Wintenberger a conjecturé qu'elle est aussi suffisante et il l'a prouvé dans plusieurs cas particuliers; par exemple si le groupe G est abélien alors $\liminf_{x \to +\infty} x/(G : G_x) > 0$ et (X, G) est l'image d'une extension de Lie ([Win 3]). Nous montrerons que cela reste vrai quand G est un groupe de Lie p-adique résoluble non nécessairement abélien (cf. plus loin : 1.5.2).

Soit $\hat{U}_X^1$ le complété du groupe des unités principales U_X^1 de X pour la topologie définie par les groupes de normes ([CL], ch. XI, §5); c'est un groupe compact sur lequel G opère continûment; il coïncide avec U_X^1 dans le cas où le corps résiduel de X est fini ([CL], ch. XIV, §6). On désigne par $I_G \hat{U}_X^1$ l'adhérence du sous-groupe de $\hat{U}_X^1$ engendré par l'ensemble des $g(u) . u^{-1}$ où g parcourt G et où u parcourt $\hat{U}_X^1$.

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant: dans le cas où le corps résiduel de X est quasi-fini et où le groupe de Lie p-adique G est semi-simple, pour que (X, G) soit l'image d'une extension de Lie, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées: $\liminf_{x \to \infty} x/(G : G_x) > 0$ et le groupe $\hat{U}_X^1 / I_G \hat{U}_X^1$ n'est pas de torsion.

Nous donnons en outre une formulation équivalente de la conjecture de Wintenberger qui s'exprime exclusivement en termes de filtrations: soit X un corps local à corps résiduel quasi-fini et soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}_1(X)$, qui est un groupe de Lie p-adique simple; si $\hat{U}_X^1/I_G\hat{U}_X^1$ est un groupe de torsion alors $\liminf_{x\to+\infty} x/(G:G_x) = 0$.

Pour faciliter la lecture, on a réuni au §1 les notations et les résultats connus de la théorie des corps de normes de J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger qu'on utilisera par la suite. Ce § ne contient pas de démonstrations et se réfère presque exclusivement à [Win 2], [Win 3] et [Win 4].

La méthode d'attaque du problème est indiquée au §2 (cf. 2.1.6) dans lequel on étudie plus particulièrement la ramification des groupes d'automorphismes des corps de normes. Dans le §3 on décrit de le comportement de la théorie du corps de classes local vis-à-vis du "passage au corps de normes". Les preuves des résultats anoncés sont achevées au §4.

C'est J.-M. Fontaine qui m'a suggéré l'idée de la proposition 2.1.6; J.-P. Wintenberger m'a communiqué des démonstrations non publiées que j'utilise notament au §2; B. Diarra a relevé une correction à effectuer dans le manuscrit original. Je tiens ici à les en remercier.

§1. Survol de la théorie des corps de normes de Fontaine et Wintenberger

1.1. Extensions arithmétiquement profinies (APF)

(1.1.1) Si G est le groupe de Galois d'une extension galoisienne infinie d'un corps local, les groupes de ramification de l'extension sont définis en numérotation supérieure et se notent $(G^u)_{u\in[-1,+\infty[}$; si pour tout $u \geqslant -1$, G^u est d'indice fini dans G, on dit que l'extension est arithmétiquement profinie (en abrégé: APF) et on peut alors définir la fonction ψ_G de Hasse–Herbrand, $\psi_G(x) = x$ si $x \in [-1, 0]$, $\psi_G(x) = \int_0^x (G^0:G^t)\,\mathrm{d}t$ si $x \geqslant 0$, qui est un homéomorphisme de $[-1, +\infty[$ sur lui-même, la fonction ϕ_G de Hasse–Herbrand, qui est la bijection réciproque de ψ_G, et la numérotation inférieure des groupes de ramification $G_x = G^{\phi_G(x)}$ pour $x \in [-1, +\infty[$. Plus généralement une extension algébrique séparable L d'un corps local K est dite APF s'il existe une extension galoisienne APF de K qui contient L, (pour les détails voir [Win 1] et [Win 4]).

(1.1.2) On appelle extension de Lie d'un corps local K une extension galoisienne infinie de K dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p-adique et dont le groupe d'inertie est un sous-groupe ouvert du groupe de Galois.

Les extensions de Lie sont APF ([Sen 2], [Win 1] et [Win 2]); de plus si L/K est une extension de Lie de groupe de Galois G, on a:

$$0 < \liminf_{x \to +\infty} \frac{x}{(G_0 : G_x)} \leqslant \limsup_{x \to +\infty} \frac{x}{(G_0 : G_x)} < +\infty$$

lorsque $\mathrm{car}(K) = 0$ [Sen 2],

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(G_0 : G_x)} = +\infty \quad \text{lorsque } \mathrm{car}(K) = p \quad \text{([Win 1] et [Win 2]).}$$

1.2. Corps des normes d'une extension APF. ([Win 4], §2)

Pour toute extension L d'un corps local K, on désigne par $\mathscr{E}_{L/K}$ l'ensemble ordonné filtrant des extensions finies de K contenues dans L, par $\bar{K}$ le corps résiduel de K et par $\bar{L}/\bar{K}$ l'extension résiduelle de L/K. Pour $E \in \mathscr{E}_{L/K}$ on note v_E la valuation discrète de E telle que $v_E(E^*) = \mathbb{Z}$.

(1.2.1) Soit L/K une extension APF; on note $X_K^*(L)$ le groupe multiplicatif $\varprojlim_{E \in \mathscr{E}_{L/K}} E^*$ où, pour E' et E dans $\mathscr{E}_{L/K}$ tels que $E' \supset E$, l'application de transition de E'^* à E^* est la norme $N_{E'/E}$ relative à l'extension E'/E. Pour tous (x_E) et (y_E) dans $X_K^*(L)$, on pose $(x_E) + (y_E) = (z_E)$ avec $z_E = \varprojlim_{E' \in \mathscr{E}_{L/E}} N_{E'/E}(x_{E'} + y_{E'})$ pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/K}$.

Muni de cette addition et de la multiplication naturelle l'ensemble $X_K(L) = X_K^*(L) \cup \{0\}$ est un corps de caractéristique p.

Soit K_1 la plus grande extension modérement ramifiée de K contenue dans L; on a $K_1 \in \mathscr{E}_{L/K}$ et $\bar{K}_1 = \bar{L}$. Pour tout $x \in \bar{L}$ et tout $E \in \mathscr{E}_{L/K_1}$ on note x_E le représentant de Teichmüller de $x^{1/[E:K_1]}$ dans E; alors $N_{E'/E}(x_{E'}) = x_E$ pour tous $E, E' \in \mathscr{E}_{L/K_1}$ tels que $E \subset E'$, si bien que la famille $\{x_E\}_{E \in \mathscr{E}_{L/K_1}}$ définit un élément de $X_K(L)$ qu'on note $f_{L/K}(x)$. De plus pour tout élément $\alpha = \{\alpha_E\}_{E \in \mathscr{E}_{L/K}}$ de $X_K(L)$, on pose $v(\alpha) = v_{K_1}(\alpha_{K_1})$. Alors v est une valuation discrète sur le corps $X_K(L)$ pour laquelle celui-ci est complet et $f_{L/K}$ est un plongement de $\bar{L}$ dans $X_K(L)$ qui induit un isomorphisme de $\bar{L}$ sur le corps résiduel de $X_K(L)$.

Il s'ensuit que le corps $X_K(L)$ s'identifie au corps des séries formelles $\bar{L}((\pi))$ où π désigne une uniformisante de $X_K(L)$. Pour tout $x \in X_K(L)$, appelons x_E la projection de x dans $E \in \mathscr{E}_{L/K}$. Tout élément entier x de $X_K(L)$ s'identifie ainsi à la série entière f_x à coefficients dans $\bar{L}$ caractérisée par la propriété suivante: si, pour $E \in \mathscr{E}_{L/K_1}$, $f_{x,E}$ désigne la série dont les coefficients sont les racines $[E:K_1]$-ièmes de ceux de f_x et r_E le plus petit entier supérieur à $(1 - 1/p)\, i_E$ où i_E est le plus petit saut de ramification de l'extension L/E, alors on a $x_E \equiv f_{x,E}(\pi_E) \bmod \pi_E^{r_E}$.

(1.2.2) Soit maintenant L'/K' une autre extension APF de corps local et soit τ un plongement fini séperable de L dans L' tel que K' soit une extension finie de $\tau(K)$. Il existe alors un plongement $W(\tau)$ de $X_K(L)$ dans $X_{K'}(L')$ qui permet d'identifier $X_{K'}(L')$ à une extension finie séparable de $X_K(L)$ de degré $[L':\tau(L)]$.

Voici la construction de $W(\tau)$: l'ensemble $\mathscr{E}'$ des $E' \in \mathscr{E}_{L/K'}$ tels que l'application canonique de $\tau(L) \otimes_{\tau(L)\cap E'} E'$ dans L soit un isomorphisme, est un sous-ensemble ordonné cofinal de $\mathscr{E}_{L'/K'}$; par suite, pour tout $x = \{x_E\}_{E\in\mathscr{E}_{L/K}}$ dans $X_K(L)$, la famille des $y_{E'} = \tau(x_{\tau^{-1}(E')})$, E' parcourant $\mathscr{E}'$, est projective pour les normes et définit donc un élément $y = \{y_{E'}\}_{E'\in\mathscr{E}'}$ de $X_{K'}(L')$; on pose $W(\tau)(x) = y$.

(1.2.3) Dans le cas où $K' = K$ et où τ est un K-plongement de L dans L', $W(\tau)$ se note $X_K(\tau)$ ce qui permet de considérer X_K comme un foncteur de la catégorie dont les objets sont les extensions APF infinies de K et les flèches les K-plongements finis séparables dans la catégorie dont les objets sont les corps locaux de caractéristique p et les flèches les plongements finis séparables; le foncteur X_K est fidèle.

En particulier si l'extension L/K est galoisienne de groupe de Galois G, l'image $X_K(G)$ de G est un groupe d'automorphismes de $X_K(L)$. La filtration de ramification $(X_K(G)_x)_{x\geqslant -1}$ ayant déjà été définie dans l'introduction, on a $X_K(G_x) = X_K(G)_x$ pour tout nombre réel $x \geqslant -1$.

1.3. Ramification ([Win 4], §3.3)

(1.3.1) Soient X un corps local, π uniformisante de X et $v = v_X$ la valuation discrète sur X normalisée par $v(\pi) = 1$. Le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ des automorphismes continus de X opère par passage au quotient sur le corps résiduel $\bar{X}$ de X. On a noté $\mathrm{Aut}_0(X)$ le sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(X)$ formé des automorphismes qui opèrent trivialement sur $\bar{X}$. Si X est un corps local d'égale caractéristique, $\mathrm{Aut}_0(X)$ est un groupe infini et le corps des invariants de $\mathrm{Aut}_0(X)$ se réduit à $\bar{X}$ (cf. [Win 1], appendice).

Soit i_X la fonction d'ordre de la filtration de ramification de $\mathrm{Aut}(X)$ (voir l'introduction). Pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$ on a $i_X(\sigma) = -1$ si $\sigma \notin \mathrm{Aut}_0(X)$ et $i_X(\sigma) = v(\sigma(\pi)/\pi - 1)$ sinon.

Pour tout sous-groupe fermé G de $\mathrm{Aut}(X)$, la filtration de ramification $(G_x)_{x \geqslant -1}$ de G constitue un système fondamental de voisinages de l'élément neutre pour une topologie sur G appelée topologie de ramification; elle est induite sur G par la topologie de ramification de $\mathrm{Aut}(X)$. Pour que G soit compact pour cette topologie, il faut et il suffit que pour tout $x \geqslant -1$, G_x soit d'indice fini dans G; lorsqu'il en est ainsi, le groupe topologique G s'identifie au groupe profini $\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} G/G_i$

(1.3.2) Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(X)$; on définit la fonction ϕ_G de Hasse–Herbrand par formules habituelles: $\phi_G(x) = x$ si $x \in [-1, 0]$ et $\phi_G(x) = \int_0^x \mathrm{d}t/(G_0 : G_t)$ si $x \geqslant 0$. On dit que le sous-groupe compact G de $\mathrm{Aut}(X)$ et APF si $\lim_{x \to +\infty} \phi_G(x) = +\infty$; on définit alors la fonction ψ_G de Hasse–Herbrand comme la bijection réciproque de ϕ_G sur $[-1, +\infty[$ et la numérotation supérieure des groupes de ramification de G par $G^x = G_{\psi_G(x)}$ pour tout $x \in [-1, +\infty[$.

Soit H un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}(X)$ et soit σ un automorphisme de X qui appartient au normalisateur de H dans $\mathrm{Aut}(X)$. La restriction σ' de σ au corps des invariants X^H de H est un automorphisme de X^H et on a:

$$i_{X^H}(\sigma') = \frac{1}{\mathrm{Card}\, H_0} \sum_{h \in H} (i_X(\sigma h) + 1) = \phi_H\left(\max_{h \in H} i_X(\sigma h)\right).$$

Il en résulte que, si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(X)$ et si H est un sous-groupe fini distingué de G, alors le groupe quotient G/H s'identifie à un groupe d'automorphisme du corps des invariants X^H de H et on a $\phi_{G/H} = \phi_G \circ \psi_H$, $(G/H)_{\phi_H(x)} = G_x H/H$ et $(G/H)^x = G^x H/H$ pour tout $x \in [-1, +\infty[$; c'est une généralisation du théorème de Herbrand (voir, par exemple, [CL], ch. IV, §3).

Ceci est un exemple parmi d'autres des analogies que l'on constate entre la ramification des extensions galoisiennes APF des corps locaux et la ramification des groupes d'automorphismes APF des corps locaux. Cependant pour un groupe G d'automorphismes APF d'un corps local, la propriété suivante "les nombres entiers i tels que $G_i \neq G_{i+1}$ sont congrus entre eux modulo p" n'est pas vraie en général; elle est vraie lorsque $\liminf_{x \to +\infty} x/(G_0 : G_x) > 0$, [Lau].

1.4. Extensions séparables des corps de normes ([Win 4], §3)

Soit K un corps local et soit L une extension APF de K.

(1.4.1) Toute extension séparable finie F de L est une extension APF de K et $X_K(F)$ s'identifie à une extension séparable de $X_K(L)$ de degré $[F\colon L]$. Pour toute extension algébrique séparable M de L, on note $X_{L/K}(M)$ la limite inductive des $X_K(F)$ pour F parcourant $\mathscr{E}_{M/L}$.

Soient maintenant M et M' deux extensions algébriques séparables de L et soit τ un K-plongement de M dans M' tel que $\tau(L) = L$. Pour tout $F \in \mathscr{E}_{M/L}$, on note τ_F la restriction de τ à F; $X_K(\tau_F)$ est un isomorphisme de $X_K(F)$ sur $X_K(\tau(F))$ de sorte qu'en passant à la limite inductive sur les $F \in \mathscr{E}_{M/L}$ on obtient un plongement de $X_{L/K}(M)$ dans $X_{L/K}(M')$ qu'on note $X_{L/K}(\tau)$. Dans le cas où τ est un L-plongement de M dans M', $X_{L/K}(\tau)$ est un $X_K(L)$-plongement de $X_{L/K}(M)$ dans $X_{L/K}(M')$.

On peut ainsi considérer $X_{L/K}$ comme un foncteur de la catégorie dont les objets sont les extensions algébriques séparables de L et les flèches les L-plongements dans la catégorie dont les objets sont les extensions algébriques séparables de $X_K(L)$ et les flèches les $X_K(L)$-plongements. En fait le foncteur $X_{L/K}$ est une équivalence entre ces deux catégories.

En particulier si L_s est une clôture séparable de L alors $X_{L/K}(L_s)$ est une clôture séparable de $X_K(L)$ et $X_{L/K}(\mathrm{Gal}(L_s/L)) = \mathrm{Gal}(X_{L/K}(L_s)/X_K(L))$. Si, de plus, L/K est galoisienne, il existe un isomorphisme de groupes $\theta_{L/K}$ de $\mathrm{Gal}(L_s/K)$ sur le groupe $\mathscr{G}$ des automorphismes de $X_{L/K}(L_s)$ qui laissent stable $X_K(L)$ et dont la restriction à $X_K(L)$ appartient à $X_K(\mathrm{Gal}(L/K))$; cet isomorphisme fait commuter le diagramme à lignes exactes suivant:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(L_s/L) \arrow[r, "\text{incl.}"] \arrow[d, "\wr"', "X_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L_s/K) \arrow[r, "\mathrm{res}_L"] \arrow[d, "\wr"', "\theta_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L/K) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "X_K"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(X_{L/K}(L_s)/X_K(L)) \arrow[r, "\text{incl.}"] & \mathscr{G} \arrow[r, "\mathrm{res}_{X_K(L)}"] & X_K(\mathrm{Gal}(L/K)) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

(1.4.2) Soit M une extension algébrique séparable de L. L'extension M/K est APF si et seulement si l'extension $X_{L/K}(M)/X_K(L)$ l'est; dans ce cas $X_K(M)$ s'identifie à $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))$ et si, de plus, L/K est galoisienne alors le théorème de Herbrand (loc. cit.) peut s'écrire:

$$\mathrm{Gal}(L/K)_x \;=\; \mathrm{Gal}(M/K)_{\psi(x)}\,\mathrm{Gal}\,(M/L)/\mathrm{Gal}\,(M/L)$$

pour tout $x \in [-1, +\infty[$, où ψ désigne l'application de Hasse-Herbrand de l'extension $X_{L/K}(M)/X_K(L)$.

(1.4.3) Soit M une extension de L galoisienne sur K. Pour tout nombre réel $x \geqslant -1$ on a $X_{L/K}(\mathrm{Gal}(M/K)^{\phi_{L/K}(x)} \cap \mathrm{Gal}(M/L)) = \mathrm{Gal}(X_{L/K}(M)/X_K(L))^x$.

Remarquons que lorsque L/K est finie on a, d'après le théorème de Herbrand (loc. cit.) $\mathrm{Gal}(M/K)^{\phi_{L/K}(x)} \cap \mathrm{Gal}(M/L) = \mathrm{Gal}(M/L)^x$; ainsi on peut exprimer la propriété précédente en disant que le foncteur $X_{L/K}$ respecte la ramification.

1.5. Extensions de Lie

(1.5.1) On considère les catégories suivantes:
la catégorie $\mathscr{L}$: un objet de $\mathscr{L}$ est une extension de Lie L d'un corps local K; un morphisme de L/K dans L'/K' est un plongement séparable fini τ de L dans L' tel que K' soit une extension finie de $\tau(K)$;
la catégorie $\mathscr{C}$: un objet de $\mathscr{C}$ est la donnée d'un corps local X de caractéristique p et d'un sous-groupe compact G de $\mathrm{Aut}(X)$ qui est un groupe de Lie p-adique de dimension $\geqslant 1$ vérifiant en outre $\liminf_{x\to+\infty} x/(G:G_x) > 0$; un morphisme de (X, G) dans (X', G') est un plongement séparable fini j de X dans X' tel que, si l'on utilise j pour identifier X à un sous-corps de X', alors, pour tout $\sigma \in G'$, $\sigma(X) = X$ et l'application de restriction $G' \to \mathrm{Aut}(X)$ ainsi définie identifie l'image de G' à un sous-groupe ouvert de G;
la catégorie $\mathscr{L}^{ab}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{L}$ dont les objets sont les extensions de Lie abéliennes de corps locaux;
la catégorie $\mathscr{C}^{ab}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ dont les objets sont les objets (X, G) de $\mathscr{C}$ avec G abélien;
la catégorie $\mathscr{L}_p$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{L}$ dont les objets sont les extensions de Lie de corps locaux de caractéristique p;
la catégorie $\mathscr{C}_p$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ dont les objets sont les objets (X, G) de $\mathscr{C}$ tels que $\limsup_{x\to+\infty} x/(G_0:G_x) = +\infty$;
la catégorie $\mathscr{L}_0$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{L}$ dont les objets sont les extensions de Lie de corps locaux de caractéristique 0;
la catégorie $\mathscr{C}_0$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ dont les objets sont les objets (X, G) de $\mathscr{C}$ tels que $\limsup_{x\to+\infty} x/(G:G_x) < +\infty$.

En fait, tout couple (X, G) où X est un corps local de caractéristique p et où G est un sous-groupe abélien compact infini et topologiquement de type fini de $\mathrm{Aut}(X)$, est un objet de $\mathscr{C}^{ab}$; en outre, tout objet (X, G) de $\mathscr{C}_p$ satisfait à $\liminf_{x\to+\infty} x/(G:G_x) = +\infty$ [Win 3].

(1.5.2) Pour tout objet L/K de $\mathscr{L}$, on pose $W(L/K) = (X, G)$ avec $X = X_K(L)$ et $G = X_K(\mathrm{Gal}(L/K))$; compte-tenu de 1.2.2 cela définit un foncteur covariant W de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{C}$. Nous nous proposons d'établir les résultats ci-dessous:

THÉORÈME. *L'image essentielle de W contient tous les couples (X, G) formés d'un corps local X de caractéristique p et d'un sous-groupe compact G de $Aut(X)$ qui est un groupe de Lie p-adique résoluble de dimension finie non nulle.*

(1.5.3) On rappelle que pour tout objet (X, G) de $\mathscr{C}$, $\hat{U}_X^1$ désigne le complété du groupe des unités principales U_X^1 de X pour la topologie définie par les groupes de normes et $I_G \hat{U}_X^1$ le sous-groupe fermé de $\hat{U}_X^1$ engendré par l'ensemble des $g(u) \cdot u^{-1}$ où g parcourt G et u parcourt U_X^1; les groupes $\hat{U}_X^1 / I_G \hat{U}_X^1$ et $U_X^1 / I_G U_X^1$ coïncident dans le cas où le corps résiduel de X est fini.

THÉORÈME. *Pour qu'un objet (X, G) de $\mathscr{C}$ où G est un groupe de Lie p-adique semi-simple et où le corps résiduel de X est quasi-fini soit dans l'image essentielle de W, il faut et il suffit que le groupe $\hat{U}_X^1 / I_G \hat{U}_X^1$ ne soit pas de torsion.*

(1.5.4) En fait J.-P. Wintenberger a conjecturé que W est une équivalence de catégories entre $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$ [Win 2] et il a déjà démontré
- que W est pleinement fidèle [Win 3],
- qu'il établit par restriction une équivalence de catégories centre $\mathscr{L}^{ab}$ et $\mathscr{C}^{ab}$ [Win 3],
- qu'il établit par restriction une équivalence de catégories entre $\mathscr{L}_p$ et $\mathscr{C}_p$ ([Win 1], [Win 2]).

(1.5.5) Nous terminerons cet article en montrant comment le théorème 1.5.3 permet de donner un énoncé équivalent et, semble-t-il, plus facilement exploitable de la conjecture de Wintenberger.

On dit qu'un groupe de Lie p-adique compact G est simple s'il est de dimension $\geqslant 2$ et si, pour tout sous-groupe ouvert H de G, les sous-groupes distingués fermés non triviaux de H sont ouverts.

THÉORÈME. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(*i*) *le foncteur W est une équivalence de catégories entre $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}$;*
(*ii*) *il n'existe pas d'objet (X, G) de $\mathscr{C}$ où G est un groupe de Lie p-adique simple et où X est un corps local à corps résiduel quasi-fini, tel que le groupe $\hat{U}_X^1 / I_{G_1} \hat{U}_X^1$ soit de torsion.*

§2. $\mathbb{Z}_p$-Extensions des corps de normes

Précisons tout d'abord quelques notations naturelles: on note $\mathrm{Aut}(L/K)$ le groupe des automorphismes d'un objet L/K de la catégorie $\mathscr{L}$, c'est-à-dire le groupe des automorphismes de L qui laissent stable K; on note $\mathrm{Aut}(X, G)$ le groupe des automorphismes d'un objet (X, G) de la catégorie $\mathscr{C}$, c'est-à-dire le normalisateur de G dans le groupe $\mathrm{Aut}(X)$ des automorphismes de X (cf. 1.5.1). Enfin si (X, G) est un objet de $\mathscr{C}$ et si Y est une extension de X on note $\mathrm{Aut}_G(Y/X)$ le groupe des automorphismes de Y dont la restriction à X est un automorphisme de X qui appartient à G; si Y/X est un objet de $\mathscr{L}$, $\mathrm{Aut}_G(Y/X)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Y/X)$.

2.1. Extensions des objets de $\mathscr{C}$

(2.1.1) Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$ et soit H un sous-groupe fermé infini de G. Pour tout $x \geqslant -1$, on a $(H:H_x) = (G:G_x)/(G:G_xH) \leqslant (G:G_x)$. Par suite (Y, H) est un objet de $\mathscr{C}$.

(2.1.2) Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$ et soit Z une extension de Lie de Y de groupe de Galois H; H s'identifie à un groupe de'automorphismes du corps des normes $X_Y(Z)$ et comme le foncteur W est pleinement fidèle (1.5.2), $\mathrm{Aut}_G(Z/Y)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X_Y(Z), H)$.

Supposons que tout élément de G puisse se prolonger et un automorphisme de Z; on a alors la suite exacte:

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Aut}_G(Z/Y) \xrightarrow{\mathrm{res}_Y} G \longrightarrow 1$$

et on dit que le couple $(X_Y(Z), \mathrm{Aut}_G(Z/Y))$ est une extension de l'objet (Y, G) de $\mathscr{C}$.

On dit que $(X_Y(Z), \mathrm{Aut}_G(Z/Y))$ est une extension triviale (resp. une extension ramifiée, une $\mathbb{Z}_p$-extension) de (Y, G) si la suite exacte ci-dessus est scindée (resp. si Z/Y est une extension ramifiée, si Z/Y est une $\mathbb{Z}_p$-extension).

Pour tout groupe de Lie p-adique compact G, on note $[G, G]$ l'adhérence du sous-groupe de G engendré par ses commutateurs; dans le cas où G est semi-simple, $[G, G]$ est un sous-groupe ouvert de G.

(2.1.3) PROPOSITION. *Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$. On suppose que G est un groupe de Lie p-adique semi-simple. Alors, pour que (Y, G) soit dans l'image essentielle du foncteur W, il faut et il suffit que l'objet $(Y, [G_0, G_0])$ de $\mathscr{C}$ possède une $\mathbb{Z}_p$-extension triviale ramifiée.*

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Comme il est clair que tout corps local K possede une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée, cela résulte facilement du lemme suivant:

(2.1.4) LEMME. *Soient L une extension de Lie d'un corps local K et K_∞ une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K. On suppose que le groupe de Galois G de L/K est un groupe de Lie* p-adique *semi-simple et on note F le corps des invariants de $[G_0, G_0]$. Alors les extensions L/F et FK_∞/F sont linéairement disjointes et LK_∞/F est une extension de Lie totalement ramifiée.*

DÉMONSTRATION. Considérons l'extension algébrique non ramifiée maximale K_{nr} de K. Le groupe de Galois de $K_{nr}L/K_{nr}$ est G_0; c'est un groupe de Lie p-adique semi-simple. Il en résulte que $K_{nr}L \cap K_{nr}K_\infty$ est une extension cyclique finie de K_{nr} et donc que le groupe de Galois de $K_{nr}L/K_{nr}L \cap K_{nr}K_\infty$ contient $[G_0, G_0]$. Soit F le sous-corps de L invariant par $[G_0, G_0]$ et soit $E = FK_\infty$. Il est clair que $F_{nr} \supset K_{nr}L \cap K_{nr}K_\infty$ par conséquent E est une extension linéairement disjointe de L sur F et l'extension LE/F est totalement ramifiée. ■

Nous montrerons que la condition de la proposition 2.1.3 est aussi suffisante à la fin du présent §. En fait nous prouverons le résultat plus fort suivant:

(2.1.5) PROPOSITION. *Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$. Une condition suffisante pour que (Y, G) soit dans l'image essentielle du foncteur W est que l'objet (Y, G_n) de $\mathscr{C}$ possède une $\mathbb{Z}_p$-extension triviale ramifiée, pour un entier $n \geqslant 0$.*

REMARQUE. La condition de la proposition 2.1.6 est aussi nécessaire lorsque le corps résiduel de Y est quasi-fini ou algébriquement clos.

2.2. Dévissage des objets de $\mathscr{C}$

(2.2.1) LEMME (J.-P. Wintenberger). *Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$ et soit H un sous-groupe ouvert de G. Supposons qu'il existe une extension de Lie L' d'un corps local K' telle que $W(L'/K') = (Y, H)$. Alors il existe une extension de Lie L d'un corps local K telle que $W(L/K) = (Y, G)$.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer H par l'intersection I de ses conjugués et K' par L'^I, on peut supposer que H est distingué dans G; G est alors un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Y, H)$; par suite, comme le foncteur W est pleinement fidèle, G s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L'/K')$. Posons $L = L'$ et $K = L^G$. Comme le groupe quotient G/H est fini, K est un sous-corps complet de K', L est une extension de Lie de K de groupe de Galois G et $X_K(L)$ s'identifie à $X_{K'}(L')$; donc $W(L/K) = (Y, G)$. ■

(2.2.2) LEMME. *Soit* (Y, G) *un objet de* $\mathscr{C}$ *et soit* H *un sous-groupe distingué fermé de* G. *On suppose que tout couple* (X, Γ) *formé d'un corps local* X *de caractérisque* p *et d'un sous-groupe compact* Γ *de* $\mathrm{Aut}(X)$ *isomorphe à* G/H *en tant que groupe filtré, est dans l'image essentielle du foncteur* W. *Alors si l'objet* (Y, H) *est aussi dans l'image essentielle de* W, *il en est de même de* (Y, G).

DÉMONSTRATION (d'après J.-P. Wintenberger). On rappelle que $(G_x)_{x \geqslant -1}$ désigne la filtration de ramification de G (1.3). Il suffit de prouver le lemme avec l'hypothèse supplémentaire $G = G_1$ (2.2.1) que l'on suppose donc vérifiée désormais.

Soit L'/K' une extension de Lie telle que $W(L'/K') = (Y, H)$. Comme le foncteur W est pleinement fidèle et que H est distingué dans G, G s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L'/K')$ de telle sorte que G/H s'identifie à un groupe compact de $\mathrm{Aut}(K')$. Comme $G = G_1$ on a $(G/H)_1 = G/H$; par suite $\mathrm{Aut}_1(K')$ est un groupe infini et K' est un corps local de caractérisque p.

Maintenant il existe, par hypothèse, un corps local K et une extension de Lie M de K telle que $W(M/K) = (K', G/H)$; il existe de plus une extension galoisienne L de M avec un K'-isomorphisme de $X_{M/K}(L)$ sur L' (1.4.1) qui permet d'identifier ces deux corps.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $H_i = G_i \cap H$ avec H distingué dans G; il en résulte que H_i est aussi distingué dans G et donc que G est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Y, H_i)$. Comme le foncteur W est pleinement fidèle G s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L'/X_K(L^{H_i}))$. Il en résulte que L^{H_i} est une extension galoisienne de K de groupe de Galois isomorphe à G/H_i. Mais $\bigcap_{i \geqslant 0} H_i = \{1\}$; par suite $L = \bigcup_{i \geqslant 0} L^{H_i}$ est une extension galoisienne de K dont le groupe de Galois s'identifie à G. Comme les extensions M/K et L'/K' sont totalement ramifiées, l'extension L/K l'est aussi; donc L/K est un objet de $\mathscr{L}$. Enfin, d'après 1.4.2, on a $W(L/K) = (Y, G)$. ∎

(2.2.3) LEMME (J.-P. Wintenberger). *Soit* (Y, G) *un objet de* $\mathscr{C}$ *et soit* H *un sous-groupe distingué fermé de* G *tel que le groupe quotient* G/H *soit isomorphe à* $\mathbb{Z}_p$. *Si l'objet* (Y, H) *de* $\mathscr{C}$ *est dans l'image essentielle du foncteur* W *alors il en est de même de* (Y, G).

DÉMONSTRATION Compte-tenu de 1.5.4, c'est une conséquence immédiate du lemme 2.2.2. ∎

Ce résultat sera amélioré en 2.3.4.

2.3. Ramification des objets de $\mathscr{C}$ et de leurs extensions

(2.3.1) Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$; on rappelle que la fonction d'ordre de la filtration de ramification $(G_x)_{x \geqslant -1}$ de G est notée i_Y. Soit Z une extension galoisienne APF de Y et soit $\mathscr{G} = \mathrm{Aut}_G(Z/Y)$. En identifiant $\mathscr{G}$ à un groupe d'automorphismes du corps des normes X de Z/Y, on lui confère une filtration de ramification $(\mathscr{G}_x)_{x \geqslant -1}$ dont la fonction d'ordre est notée i_X.

LEMME. *Supposons que tout élément de G se prolonge en un automorphisme de Z; alors G s'identifie au groupe quotient $\mathscr{G}/\mathrm{Gal}(Z/Y)$ et pour tout $x \in [-1, +\infty[$ on a $G_x = \mathscr{G}_{\psi(x)}\mathrm{Gal}(Z/Y)/\mathrm{Gal}(Z/Y)$ où la fonction ψ de Hasse–Herbrand est relative à l'extension Z/Y.*

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \mathscr{G}$; on note $\bar{\sigma}$ l'image de σ dans $G = \mathscr{G}/\mathrm{Gal}(Z/Y)$, H le sous-groupe fermé de G engendré par σ et $\mathscr{H} = \mathrm{Aut}_H(Z/Y)$. Montrons que pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $H_x = \mathscr{H}_{\psi(x)}\mathrm{Gal}(Z/Y)/\mathrm{Gal}(Z/Y)$.

Lorsque H est un groupe fini cela résulte de 1.3.2. Lorsque H est infini il est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ et comme $\mathscr{H}/\mathrm{Gal}(Z/Y)$ est isomorphe à H, $(X, \mathscr{H})$ est un objet de $\mathscr{C}$ appartenant à l'image essentielle du foncteur W (2.2.3). Par le théorème de Herbrand (loc. cit.) et le fait que le foncteur W respecte la ramification (cf. 1.2.3 et 1.4.3), on en déduit que $H^x = \mathscr{H}^x\mathrm{Gal}(Z/Y)/\mathrm{Gal}(Z/Y)$ et que $H_x = \mathscr{H}_{\psi(x)}\mathrm{Gal}(Z/Y)/\mathrm{Gal}(Z/Y)$.

En termes de fonctions d'ordre de filtrations, on a prouvé que pour tout $\sigma \in \mathscr{G}$ on a $i_Y(\bar{\sigma}) = \phi(\sup_{\tau \in \mathrm{Gal}(Z/Y)} i_X(\sigma\tau))$ où ϕ désigne la bijection réciproque de ψ. Cela revient à dire que pour tout $x \in [-1, +\infty[$ on a $G_x = \mathscr{G}_{\psi(x)}\mathrm{Gal}(Z/Y)/\mathrm{Gal}(Z/Y)$. ■

(2.3.2) LEMME. *Toute $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée d'un objet de $\mathscr{C}$ (resp. de $\mathscr{C}_p$) est un objet de $\mathscr{C}$ (resp. de $\mathscr{C}_p$).*

DÉMONSTRATION. Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$ et soit Z une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de Y. Supposons que tout élément de G puisse se prolonger en un automorphisme de Z; alors le groupe $\mathscr{G} = \mathrm{Aut}_G(Z/Y)$ est extension de G par $\mathrm{Gal}(Z/Y)$. C'est donc un groupe de Lie p-adique; il s'agit de montrer que si on le considère comme un groupe d'automorphismes de $X_Y(Z)$ alors sa filtration de ramification vérifie la condition $\liminf_{x \to +\infty} x/(\mathscr{G} : \mathscr{G}_x) > 0$ et que si $\limsup_{x \to +\infty} x/(G : G_x) = +\infty$ alors $\limsup_{x \to +\infty} x/(\mathscr{G} : \mathscr{G}_x) = +\infty$.

Par hypothéses, la filtration de ramification de G est telle que $\liminf_{x \to +\infty} x/(G : G_x) > 0$. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(Z/Y)$ et identifions les groupes G et $\mathscr{G}/\Gamma$. D'après 2.3.1, pour tout $x \geqslant -1$, on a $(G : G_x) = (\mathscr{G} : \mathscr{G}_{\psi(x)}\Gamma)$, l'application ψ de Hasse–Herbrand étant relative à l'extension Z/Y. Comme, par ailleurs, on a $(\Gamma : \Gamma^x) = (\Gamma : \Gamma \cap \mathscr{G}_{\psi(x)}) = (\mathscr{G}_{\psi(x)}\Gamma : \mathscr{G}_{\psi(x)})$, il en résulte que

$$(G : G_x) = \frac{(\mathscr{G} : \mathscr{G}_{\psi(x)})}{(\Gamma : \Gamma^x)}$$

et donc que:

$$\frac{x}{(G : G_x)} = \alpha(x) \frac{\psi(x)}{(\mathscr{G} : \mathscr{G}_{\psi(x)})},$$

avec $\alpha(x) = x/\psi(x) \cdot (\Gamma : \Gamma^x)$.

Tout revient donc à montrer que $\alpha(x)$ reste borné quand $x \to +\infty$. Soit $u_0 < u_1 < \ldots < u_n < \ldots$ (resp. $i_0 < i_1 < \ldots < i_n < \ldots$) la suite des sauts supérieurs (resp. inférieurs) de ramification de la $\mathbb{Z}_p$-extension Z/Y. Pour tout $t \in]0, u_{n+1} - u_n]$ on a

$$\alpha(u_n + t) = \frac{u_n + t}{i_n + tp^{n+1}} \cdot p^{n+1} \leqslant \frac{u_n}{i_n} p^{n+1} + 1.$$

Il suffit donc de montrer que la suite $\alpha(u_n) = (u_n/i_n)p^n$ est bornée. Or, pour tout $n \geqslant 0$, on a $i_{n+1} - i_n = p^n(u_{n+1} - u_n)$ donc $i_n/p^n u_n = 1 - ((p-1)/p)r_n$ avec $r_n = u_{n-1}/u_n + u_{n-2}/u_n + \cdots + u_0/u_n$. Mais comme $\operatorname{car}(Y) = p$, on a $u_{n+1} \geqslant pu_n$ pour tout $n \geqslant 0$ (cf. par exemple [Fon 3], prop. 4.3); il s'ensuit que $r_n \leqslant 1/(p-1)$ et donc que $\alpha(u_n) \leqslant p/(p-1)$. ■

(2.3.3) LEMME. *Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$ et soit H un sous-groupe fermé infini de G. Si H n'est pas d'indice fini dans G alors (Y, H) est un objet de $\mathscr{C}_p$.*

DÉMONSTRATION. On sait déjà que (Y, H) est un objet de $\mathscr{C}$ (2.1.1). Il s'agit donc de montrer que $\limsup_{x \to +\infty} x/(H : H_x) = +\infty$.

Pour tout $x \geqslant -1$, on a $H_x = G_x \cap H$ donc $(H : H_x) = (G_x H : G_x) = (G : G_x)/(G : G_x H) \leqslant (G : G_x)$. Par suite si (Y, G) est déjà un objet de $\mathscr{C}_p$, il en est de même de (Y, H). Sinon, $\limsup_{x \to +\infty} x/(H : H_x)$ sera fini ou infini suivant que l'application $x \to (G : G_x H)$ est bornée ou non bornée. Si elle est bornée, elle est constante sur un intervalle $[x_0, +\infty[$ pour x_0 assez grand; pour tout $x \geqslant x_0$ on a alors $G_x H = G_{x_0} H$; mais H est fermé dans G donc $G_{x_0} \subset \bigcap_{x \geqslant x_0} G_x H = H$ et H est d'indice fini dans G. ■

(2.3.4) COROLLAIRE. *Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$. On suppose que G possède un sous-groupe distingué fermé H tel que G/H soit isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Alors (Y, G) est dans l'image essentielle du foncteur W.*

DÉMONSTRATION. Si H est fini la conclusion résulte de 1.5.4 directement; sinon d'après 2.3.3, (Y, H) est un objet de $\mathscr{C}_p$; d'après 1.5.4 il est dans l'image donc d'après 2.2.3, (Y, G) est aussi dans l'image essentielle de W. ∎

(2.3.5) *Preuve du théorème 1.5.2.* Un groupe de Lie p-adique résoluble de dimension $\geqslant 1$ possède un sous-groupe ouvert qui admet un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. La conclusion découle alors immédiatement de 2.2.1 et 2.3.4. ∎

(2.3.5) *Preuve de 2.1.6.* Soit (Y, G) un objet de $\mathscr{C}$. D'après le lemme 2.2.1, il suffit de prouver que si l'objet (Y, G) possède un $\mathbb{Z}_p$-extension triviale ramifiée alors il est dans l'image essentielle du foncteur W. Soit donc Z une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée du corps local Y; on note Γ son groupe de Galois et on suppose que le groupe $\mathscr{G} = \mathrm{Aut}_G(Z/Y)$ est l'extension triviale de groupes de G par Γ.

Soit X le corps des normes de Z/Y. Le foncteur W identifie $\mathscr{G}$ à un groupe d'automorphismes de X et (X, G) est un objet de $\mathscr{C}$ (2.3.2). Comme il y a un groupe quotient de $\mathscr{G}$ isomorphe à Γ, $(X, \mathscr{G})$ est dans l'image essentielle du foncteur W (2.3.4).

Soient donc K un corps local et M une extension de Lie de K telle que $X_K(M) = X$. Le foncteur W permet d'identifier les groupes $\mathscr{G}$ et $\mathrm{Gal}(M/K)$. Soit $L = M^\Gamma$; c'est une extension galoisienne de K dont le groupe de Galois s'identifie à G. Alors $\mathrm{Aut}_G(X_{L/K}(M)/X_K(L))$ s'identifie à $\mathrm{Aut}_G(Z/Y) = \mathscr{G}$ (1.4.1) et comme $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M)) = X_K(M) = X$ (1.4.2), $W(L/K)$ s'identifie à (Y, G). ∎

§3. Corps de normes et corps de classes

Sauf mention expresse du contraire, tout les corps locaux considerés dans ce § possèdent un corps résiduel quasi-fini (voir [CL], ch. XIII, §2).

Pour tout corps K, on désigne par K_a une pro-p-extension abélienne maximale de K et par A_K le groupe de Galois de K_a sur K.

Pour tout corps local K, on note $\bar{K}$ son corps résiduel, U_K^1 le groupe des unités principales de K, $\hat{K}^*$ le complété du groupe multiplicatif K^* de K pour la topologie définie par les groupes de normes d'indice une puissance de p et $\hat{U}_K^1$ l'adhérence de U_K^1 dans $\hat{K}^*$; K^* est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \bar{K}^* \times U_K^1$ et $\hat{K}^*$ à $\mathbb{Z}_p \times \hat{U}_K^1$. Lorsque le corps résiduel de K est fini, $\hat{K}^*$ s'identifie au complété p-adique $\varprojlim_n K^*/K^{*p^n} \simeq \mathbb{Z}_p \times U_K^1$ (voir [CL], ch. XIV, §6).

On note également K_{nr} une extension maximale non ramifiée de K et on rappelle que l'application de réciprocité d'Artin ω_K se prolonge en un isomorphisme de groupes compacts de $\hat{K}^*$ sur A_K.

3.1. Modules d'Iwasawa

(3.1.1) Soit L une extension galoisienne d'un corps local K et soit Γ son groupe de Galois. L'extension L_a/K est galoisienne et tout $\gamma \in \Gamma$ peut se prolonger en un automorphisme de L_a; de plus pour tout $\sigma \in A_L$ et pour tout prolongement $\tilde{\gamma}$ de γ en un automorphisme de L_a, $\tilde{\gamma}\sigma\tilde{\gamma}^{-1}$ est un élément de A_L qui ne dépend que de σ et de γ. Cela définit une opération de Γ sur A_L qui confère à A_L une structure de Γ-module. Le Γ-module A_L s'appelle le module d'Iwasawa de L/K et se note $Iw(L/K)$.

(3.1.2) Soit X un corps local de caractéristique p et soit γ un automorphisme de X sauvagement ramifié (c'est-à-dire tel que $i_X(\gamma) \geqslant 1$). On note Γ le sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}(X)$ engendré par γ. Si γ est d'ordre fini, Γ opère sur A_X en munissant A_X de la structure de Γ-module noté $Iw(X/X^\Gamma)$ en 3.1.1. Si γ est d'ordre infini alors Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ et d'après 1.5.4, il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension L d'un corps local K tel que $X = X_K(L)$. D'après 1.4.1, X_a s'identifie alors à $X_{L/K}(L_a)$ et $\mathrm{Aut}_\Gamma(X_a/X)$ à $\mathrm{Gal}(L_a/K)$. Il en résulte que $X_{L/K}$ induit un isomorphisme de Γ-modules de $Iw(L/K)$ sur A_X (où la structure de Γ-module de A_X est induite par sa structure naturelle de $\mathrm{Aut}(X)$-module).

(3.1.3) Soit toujours X un corps local de caractéristique p. Il est clair que l'action naturelle de $\mathrm{Aut}_1(X)$ sur X fournit une structure canonique de $\mathrm{Aut}_1(X)$-module compact sur le complété $\hat{X}^*$ de X^*. Soit Γ un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}_1(X)$. D'après la théorie du corps de classes local, l'application ω_X est un isomorphisme de Γ-modules de $\hat{X}^*$ sur A_X. Il résultera de (3.2.2) que ω_X est un isomorphisme de $\mathrm{Aut}_1(X)$-module.†

(3.1.4) Proposition. *Soit L une pro-p-extension galoisienne* APF *totalement ramifiée d'un corps local K. Identifions son groupe de Galois Γ à un groupe d'automorphismes du corps des normes $X_K(L)$; alors les Γ-modules $Iw(L/K)$ et $\widehat{X_K(L)}^*$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soient E_1 et $E_2 \in \mathscr{E}_{L/K}$ (cf. 1.2) tels que $E_1 \subset E_2$ et soient F_1 et F_1' des extensions finies de E_1 telles que $F_1 \subset F_1'$. On pose $F_2 = E_2F_1$ et $F_2' = E_2F_1'$. Le diagramme de Γ-modules suivants commute

$$\begin{array}{ccc} E_2^*/N_{F_2'/E_2}(F_2'^*) & \xrightarrow{\text{can.}} & E_2^*/N_{F_2/E_2}(F_2^*) \\ {\scriptstyle\text{norme}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\text{norme}}\big\downarrow \\ E_1^*/N_{F_1'/E_1}(F_1'^*) & \xrightarrow{\text{can.}} & E_1 N_{F_1/E_1}(F_1^*) \end{array}$$

† En fait, comme l'a remarqué le référé de cet article, ce résultat admet une preuve directe.

si bien que le Γ-module $X_K(L)^*$ s'identifie à la limite projective pour les normes des Γ-modules E^*, E parcourant $\mathscr{E}_{L/K}$.

Avec les mêmes hypothèses, on a le diagramme commutatif de Γ-modules suivant:

$$\begin{tikzcd}
\hat{E}_2^* \arrow[rr, "\omega_{E_2}"] \arrow[dd, "\text{norme}"'] & & A_{E_2} \arrow[d, hook, "\text{can}"] \\
& & \mathrm{Gal}(E_{2a}/E_1) \arrow[d, two heads, "\text{can}"] \\
\hat{E}_1^* \arrow[r, "\omega_{E_1}"] & \mathrm{Gal}(E_2E_{1a}/E_1)^{ab} \arrow[r, phantom, "="] & A_{E_1}
\end{tikzcd}$$

Ainsi par passage à la limite projective sur $E \in \mathscr{E}_{L/K}$, les isomorphismes ω_E définissent un isomorphisme de Γ-modules de $\varprojlim \hat{E}^*$ sur $\varprojlim A_E$, c'est-à-dire de $\widehat{X_K(L)}^*$ sur $Iw(L/K)$. ∎

L'isomorphisme de $\widehat{X_K(L)}^*$ sur $Iw(L/K)$ ainsi construit sera noté $\omega_{L/K}$.

3.2. Lois de réciprocité sur les corps de normes

(3.2.1) Soit K un corps local et soit L une pro-p-extension galoisienne APF totalement ramifiée de K. On note Γ son groupe de Galois; c'est un pro-p-groupe qu'on peut identifier à un groupe d'automorphismes du corps des normes $X = X_K(L)$. On a vu en 1.4.1 qu'il existe un isomorphisme de groupes $\theta_{L/K}$ de $\mathrm{Gal}(L_a/K)$ sur $\mathrm{Aut}_\Gamma(X_a/X)$ rendant commutatif le diagramme à lignes exactes suivant:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Iw(L/K) \arrow[r, "\text{incl}"] \arrow[d, "\chi_{L/K}"] & \mathrm{Gal}(L_a/K) \arrow[r, "\mathrm{res}_L"] \arrow[d, "\theta_{L/K}"] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\chi_K"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A_x \arrow[r, "\text{incl}"] & \mathrm{Aut}_\Gamma(X_a/X) \arrow[r, "\mathrm{res}_X"] & X_K(\Gamma) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que $\chi_{L/K}$ est un isomorphisme de Γ-modules.

(3.2.2) THÉORÈME. *Le diagramme suivant commute*:

$$\begin{tikzcd}
\hat{X}^* \arrow[rr, "\omega_X"] \arrow[dr, "\omega_{L/K}"'] & & A_X \\
& Iw(L/K) \arrow[ur, "\chi_{L/K}"'] &
\end{tikzcd}$$

En particulier ω_X *est un isomorphisme de* Γ*-modules.*

Avant de démontrer ce théorème donnons-en deux conséquences immédiates.

(3.2.3) Soit $I_\Gamma \hat{X}^*$ l'adhérence du sous-groupe de $\hat{X}^*$ engendré par les éléments de la forme $\gamma(x)x^{-1}$, γ parcourant Γ et x parcourant $\hat{X}^*$. Le résultat suivant se déduit aussitôt du théorème 3.2.2.

Corollaire 1. *L'ensemble des extensions abéliennes* Y *de* X *pour lesquelles* Γ *opère trivialement sur* $\mathrm{Gal}(Y/X)$ *possède un plus grand élément* Z *pour l'inclusion;* Z *contient* $X_{L/K}(L/K_a)$ *et* $\mathrm{Gal}(Z/X)$ *est l'image de* $\hat{X}^*/I_\Gamma \hat{X}^*$ *par l'homomorphisme induit par* ω_X.

(3.2.4) Dans le cas où L/K est une $\mathbb{Z}_p$-extension, la suite exacte:

$$1 \to \mathrm{Gal}(Z/X) \to \mathrm{Aut}(Z/Y) \to \Gamma \to 1$$

est scindée; donc $Z = X_{L/K}(K_a)$ et:

Corollaire 2. *Dans le cas où* Γ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}_p$, $Z = X_{L/K}(K_a)$ *est la plus grande des extensions abéliennes* Y *de telles que* $\mathrm{Aut}_\Gamma(Y/X)$ *soit l'extension triviale du groupe* Γ *par le groupe* $\mathrm{Gal}(Y/X)$.

3.3. Démonstration du théorème 3.2.2

(3.3.1) Soient K un corps local, L une pro-p-extension galoisienne APF totalement ramifiée de K, son groupe de Galois et X son corps des normes.

Jusqu'à la fin du §3, K_s désigne une clôture algébrique séparable de K contenant L, L_a une pro-p-extension abélienne maximale de L contenue dans K_s et L_{nr} l'extension LK_{nr} où K_{nr} est l'extension non ramifiée maximale de K contenue dans K_s.

Avec les notations précédentes, il s'agit de montrer que pour tout $x \in \hat{X}^*$ on a $X_{L/K}(\omega_{L/K}(x)) = \omega_X(x)$. Pour cela nous nous proposons de calculer séparément $\omega_X(x)$ et $\omega_{L/K}(x)$ au moyen du théorème de Dwork ([CL], ch. XIII, §5) dans le cas où $x \in \hat{U}_X^1$.

(3.3.2) Ces calculs nécessitent quelques rappels. Soit $\mathscr{F}$ le générateur canonique de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_s/\bar{K})$ qui confère au corps résiduel $\bar{K}$ de K une structure de corps quasi-fini ([CL], ch. XIII, §2). Le groupe de Galois de K_{nr} sur K s'identifie canoniquement à $\mathrm{Gal}(\bar{K}_s/\bar{K})$ si bien qu'on peut considérer $\mathscr{F}$ comme un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(K_{nr}/K)$. De même, comme

$L_{nr} = LK_{nr}$, $\mathrm{Gal}(L_{nr}/L)$ et $\mathrm{Gal}(K_{nr}/K)$ sont canoniquement isomorphes et on peut prolonger $\mathscr{F}$ en un générateur de $\mathrm{Gal}(L_{nr}/L)$. Or le foncteur $X_{L/K}$ est une équivalence de catégories qui respecte la ramification (cf. 1.4); donc $X_{L/K}(L_{nr})$ est l'extension maximale non ramifiée X_{nr} de X contenue dans la clôture séparable $X_s = X_{L/K}(K_s)$ de X et $X_{L/K}(\mathscr{F})$ est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(X_{nr}/X)$ tel que $X_{L/K}(\mathscr{F}) \circ f_{L/K} = f_{L/K} \circ \mathscr{F}$ où $f_{L/K}$ désigne le plongement canonique de $\bar{K}$ dans X (1.2.1).

(3.3.3) Explicitons $X_{L/K}(\sigma)$ pour $\sigma = \mathscr{F}$ et pour $\sigma \in Iw(L/K)$. Soit Y une extension abélienne finie de X contenue dans $X_{L/K}(L_a)$ et soit $\alpha \in Y$ un élément primitif de l'extension Y/X.

Il existe une unique extension abélienne finie M de L telle que $X_{L/K}(M) = Y$. Il existe $F \in \mathscr{E}_{L/K}$ et une extension abélienne finie M_F de F linéairement disjointe de L sur F telle que $M = LM_F$. Pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/F}$ on note M_E l'extension composée $EM_F \in \mathscr{E}_{M/F}$ et α_E la projection de $\alpha \in X_F(M)$ sur M_E; alors $\sigma(\alpha_E) \in M_E$ et $\sigma(\alpha_E)$ n'est autre que la projection sur M_E de $X_{L/K}(\sigma)(\alpha) \in Y = X_F(M)$ (cf. 1.4.1).

Considérons maintenant $x \in \hat{X}^*$ tel que $\sigma = \omega_{L/K}(x)$. Pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/F}$ on note x_E la projection de x sur $\hat{E}^*$. D'après la proposition 3.1.4, la projection sur $M_E \in \mathscr{E}_{M/F}$ de $X_{L/K}(\sigma)(\alpha)$ est égale à $(x_E, M_E/E)(\alpha_E)$ où $(\cdot, M_E/E)$ désigne l'application de réciprocité d'Artin relative à l'extension abélienne finie M_E/E et où $x_E \in \hat{E}^*$ peut être remplacé par sa projection sur E^*.

(3.3.4) Il s'agit donc de montrer que la projection sur $M_E \in \mathscr{E}_{M/F}$ de $(x, Y/X)(\alpha)$ est égale à $(x_E, M_E/E)(\alpha)$ pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/F}$.

Comme $X_{L/K}$ respecte la ramification, il est facile de voir que, par dévissage, il suffit de considérer les deux cas suivants: (i) l'extension Y/X est non ramifiée; (ii) l'extension Y/X est totalement ramifiée.

(3.3.5) Dans le cas (i), pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/F}$ l'extension M_E/E est non ramifiée et on a $(x_E, M_E/E) = \mathscr{F}^{v_E(x_E)}$ avec en plus $(x, Y/X) = X_{L/K}(\mathscr{F})^{v_X(x)}$ où, rappelons-le, v_E (resp. v_X) désigne la valuation de E (resp. de X) telle que $v_E(E^*) = \mathbb{Z}$ (resp. $v_X(X^*) = \mathbb{Z}$), (cf. [CL], ch. XIII, §4, prop. 13). Comme L/E est totalement ramifiée, on a $v_E(x_E) = v_X(x)$, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

(3.3.6) Supposons maintenant que l'extension Y/X soit totalement ramifiée; il en est alors de même des extensions M_E/E pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/F}$. On note E_{nr}^c le complété de l'extension maximale non ramifiée E_{nr} du corps local E; alors l'extension $M_{nr}^c = M(M_E)_{nr}^c$ ne dépend pas du choix de E dans $\mathscr{E}_{L/F}$ et le corps des normes de $M_{nr}^c/(M_F)_{nr}^c$ s'identifie à Y_{nr}^c. Pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/F}$, on considère une uniformisante π_E de $(M_E)^c_{nr}$ de sorte que la famille $\{\pi_E\}_{E\in\mathscr{E}_{L/F}}$ soit projective pour les normes et définisse ainsi une uniformisante π de Y^c_{nr}.

Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(M/L)$ tel que $X_{L/K}(\tau) = (x, Y/X)$; il s'agit de montrer que τ est la restriction à Y de $\sigma = \omega_{L/K}(x)$. Comme l'extension Y/X est totalement ramifiée les groupes de Galois de M^c_{nr}/L^c_{nr} et de M/L sont canoniquement isomorphes et τ est la restriction à M d'un L^c_{nr}-automorphisme de M^c_{nr} qu'on note encore τ. Par le théorème de Dwork ([CL], ch. XIII, §5, cor. au th. 2) il existe une unité $y \in Y^c_{nr}$ telle que

$$\frac{X_{L/K}(\tau)(\pi)}{\pi} = \frac{X_{L/K}(\mathscr{F})(y)}{y} \quad \text{et} \quad x^{-1} = N(y)$$

où N désigne la norme de l'extension Y^c_{nr}/X^c_{nr}; on en déduit que pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/F}$ on a

$$\frac{\tau(\pi_E)}{\pi_E} = \frac{\mathscr{F}(y_E)}{y_E} \quad \text{avec} \quad x_E^{-1} = N_E(y_E)$$

où y_E désigne la projection de y sur $(M_E)^c_{nr}$ et N_E la norme de l'extension $(M_E)^c_{nr}/E^c_{nr}$. Il en résulte, encore d'après le théorème de Dwork, que la restriction de τ à M_E coincide avec $(x_E, M_E/E)$ et donc que $\tau(\alpha) = \sigma(\alpha)$, ce qui achève la démonstration. ■

§4. Sur l'image essentielle de W

Soit X un corps local et soit G un sous-groupe compact topologiquement de type fini de $\mathrm{Aut}(X)$. On rappelle que $\hat{X}^*$ désigne le complété de X^* pour la topologique définie par les groupes de normes d'indice une puissance de p et que $\hat{U}^1_X$ est l'adhérence de U^1_X dans $\hat{X}^*$ de sorte que $\hat{X}^* \simeq \mathbb{Z}_p \times \hat{U}^1_X$. Soit $I_G\hat{X}^*$ l'adhérence du sous-groupe de $\hat{X}^*$ engendré par les éléments de la forme $g(x).x^{-1}$, $(g \in G, x \in \hat{X}^*)$. Si $G \subset \mathrm{Aut}_1(X)$ alors $I_G\hat{X}^*$ est un sous-groupe fermé de $\hat{U}^1_X$.

4.1. Fin de la preuve de 1.5.3

Soit (X, G) un objet de $\mathscr{C}$ où X est un corps local à corps résiduel quasi-fini et où G est un groupe de Lie p-adique semi-simple. Il s'agit de montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (X, G) soit dans l'image essentielle de W et que le groupe $\hat{U}^1_X/I_{G_1}\hat{U}^1_X$ ne soit pas de torsion.

(4.1.1) Nous montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc K un corps local et soit L une extension de Lie de K telle que $W(L/K) = (X, G_1)$. On identifie G_1 à $\mathrm{Gal}(L/K)$ et on désigne par F le corps des invariants de $[G_1, G_1]$; c'est une extension finie de K contenue dans L. Il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée K_∞ de K telle que LK_∞ soit une $\mathbb{Z}_p$-extension sur L et une extension de Lie totalement ramifiée sur F (2.1.4). Soit K_a la p-extension abélienne maximale de K; il est clair que $LK_\infty \subset LK_a$.

Passons au corps des normes: soit $Y = X_{L/K}(LK_\infty)$; c'est une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de $X_K(L) = X$ (1.4.3). Soit X_{nr} la p-extension maximale non ramifiée de X; c'est une $\mathbb{Z}_p$-extension de X contenue dans $X_{L/K}(LK_a)$; par suite $YX_{nr} \subset X_{L/K}(LK_a)$ et $\mathrm{Gal}(YX_{nr}/X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p^2$.

Comme au §3, on appelle ω_X l'isomorphisme de $\hat{X}^*$ sur le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne maximale X_a de X. Soit Z le corps des invariants de $\omega_X(I_{G_1}\hat{X}^*)$; Z contient $X_{L/K}(LK_a)$ et G_1 opère trivialement sur $\mathrm{Gal}(Z/X)$ (3.2.3). D'autre part $\omega_X(U_X^1) = \mathrm{Gal}(X_a/X_{nr})$ ([CL], ch. XV, §2); donc ω_X induit un isomorphisme de $\hat{U}_X^1/I_{G_1}\hat{X}^*$ sur $\mathrm{Gal}(Z/X_{nr})$. Mais il y a une $\mathbb{Z}_p$-extension de X_{nr} contenue dans Z: c'est YX_{nr}. Par conséquent le groupe $\hat{U}_X^1/I_{G_1}\hat{X}^*$ possède un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ et n'est donc pas de torsion; il en est évidemment de même du groupe $\hat{U}_X^1/I_G\hat{U}_X^1$. ■

(4.1.2). Achevons la preuve de 1.5.3. Soit (X, G) un objet de $\mathscr{C}$. On suppose que le corps résiduel de X est quasi-fini, que G est un groupe de Lie p-adique semi-simple et que le groupe $\hat{U}_X^1/I_{G_1}\hat{U}_X^1$ n'est pas de torsion. Tout revient à montrer qu'il existe un entier m tel que l'objet (X, G_m) de $\mathscr{C}$ possède une $\mathbb{Z}_p$-extension triviale ramifiée (2.1.5). Comme le sous-groupe de torsion de G est fini, on peut choisir m tel que G_m soit un pro-p-groupe sans torsion.

Remarquons que le groupe $\hat{U}_X^1/I_{G_m}\hat{X}^*$ n'est pars de torsion parce que:

(4.1.3) Lemme. *Le groupe $I_{G_m}\hat{X}^*/I_{G_m}\hat{U}_X^1$ est fini.*

Démonstration. Soit π une uniformisante de X. L'application de G_m dans $I_{G_m}\hat{X}^*/I_{G_m}\hat{U}_X^1$ induite par $g \mapsto g(\pi)\cdot\pi^{-1}$ ne dépend pas du choix de l'uniformisante π. On en déduit aussitôt que c'est un homomorphisme de groupes et que tout élément de $I_{G_m}\hat{X}^*/I_{G_m}\hat{U}_X^1$ est l'image d'un élément de la forme $g_1(\pi)\pi^{-1}\cdot g_2(\pi)\pi^{-1}\ldots g_k(\pi)\pi^{-1}$ avec $g_1, \ldots, g_k \in G_m$; or on voit facilement que $g_1(\pi)\pi^{-1}\ldots g_k(\pi)\pi^{-1} \equiv (g_1\ldots g_k)(\pi)\cdot(\pi)^{-1} \bmod I_{G_m}U_X^1$. Il en résulte que notre homomorphisme est surjectif et permet d'identifier $I_{G_m}\hat{X}^*/I_{G_m}\hat{U}_X^1$ à un quotient de $G_m/[G_m, G_m]$ qui est un groupe fini. ■

(4.1.4) Soit X_a la pro-p-extension abélienne maximale de X. L'application de réciprocité induit un isomorphisme de G-module $\hat{X}^*$ sur $\mathrm{Gal}(X_a/X)$ comme au §3. Soit Z le corps des invariants de $\omega_X(I_{G_m}\hat{X}^*)$; c'est une extension abélienne de X qui contient la pro-p-extension maximale non ramifiée X_{nr} de X et ω_X induit un isomorphisme de $\hat{U}_X^1/I_{G_m}\hat{X}^*$ sur $\mathrm{Gal}(Z/X_{nr})$. Comme $\hat{U}_X^1/I_{G_m}\hat{X}^*$ possède un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}_p$, il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension de X_{nr} contenue dans Z. On en déduit aussitôt qui'il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée Y de X contenue dans Z et il est clair que G_m opère trivialement sur son groupe de Galois. On en déduit une suite exacte centrale:

$$1 \to \mathrm{Gal}(Y/X) \to \mathrm{Aut}_{G_m}(Y/X) \to G_m \to 1$$

Par le théorème de Lévi–Malčev, la suite exacte d'algèbre de Lie correspondante est scindée; autrement dit, il existe un sous-groupe ouvert U de G_m tel que la suite exacte centrale suivante soit scindée:

$$1 \to \mathrm{Gal}(Y/X) \to \mathrm{Aut}_U(Y/X) \to U \to 1.$$

(On peut choisir $U = [G_m, G_m]$, voir [Har], 3.3.1).
On en déduit aussitôt que l'objet (X, U) de $\mathscr{C}$ possède une $\mathbb{Z}_p$-extension triviale ramifiée et donc que l'objet (X, G) de $\mathscr{C}$ est dans l'image essentielle de W. ■

(4.1.5) Remarque. Dans le cas général d'un objet (X, G) de $\mathscr{C}$, $\hat{U}_X^1/I_{G_1}\hat{X}^*$ peut être un groupe de torsion même si (X, G) est dans l'image essentielle de W: par exemple si $K = \mathbb{Q}_p$ et si L est la $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée de K alors on a $U_X^1 = I_G\hat{X}^*$ avec $X = X_K(L)$ et $G = G_1 = \mathrm{Gal}(L/K)$. On a cependant le résultat suivant:

(4.1.6) Proposition. *Soit (X, G) un objet de $\mathscr{C}$ tel que $(X, G) = W(L/K)$ où L/K est une extension de Lie. Supposons que le corps résiduel de X est fini. Si n est suffisamment grand alors $U_X/I_{G_n}\hat{X}^*$ n'est pas un groupe de torsion.*

Démonstration. Pour tout $E \in \mathscr{E}_{L/K}$ (1.2), la projection pr_E de X^* dans E^* applique U_X^1 dans U_E^1 (1.2.1) et $\hat{X}^*$ dans $\hat{E}^*$ (3.1.4). Si l'extension E/K est galoisienne, pr_E commute avec tout élément de G, donc $I_{G_E}\hat{X} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{pr}_E$ avec $G_E = X_K(\mathrm{Gal}(L/E))$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, appelons K_n le corps des invariants de $\mathrm{Gal}(L/K)_n$ posons $\mathrm{pr}_n = \mathrm{pr}_{K_n}$ et $U_n^1 = U_{k_n}^1$. Comme $G = \varprojlim G/G_n$, U_X^1 s'identifie à la limite projective des U_n^1 pour les normes et par suite à (un sous-groupe de) $\varprojlim_n U_X^1/(U_X^1 \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{pr}_n)$. Mais pour tout n, $U_X^1/U_X^1 \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{pr}_n)$ s'identifie à un sous-groupe de U_n^1. Or le sous-groupe de torsion de U_n^1 est le groupe cyclique fini des racines de l'unité d'ordre une puissance de p contenues dans K_n.

Comme le groupe U_X^1 n'est ni fini ni isomorphe à $\mathbb{Z}_p$, pour tout n assez grand, $U_X^1/(U_X^1 \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{pr}_n)$ n'est pas un groupe de torsion et comme il y a une surjection canonique de $U_X^1/I_{G_n}\hat{X}^*$ sur $U_X^1/(U_X^1 \cap \mathrm{Ker}\ \mathrm{pr}_n)$, $U_X^1/I_{G_n}\hat{X}^*$ n'est pas non plus un groupe de torsion. ■

4.2. Preuve de 1.5.5

Il suffit de montrer que (ii) ⇒ (i). Soit donc (X, G) un objet de $\mathscr{C}$. On commence par se ramener au cas où le corps résiduel de X est quasi-fini.

(4.2.1) Il existe un sur-corps k du corps résiduel $\bar{X}$ de X qui est un corps quasi-fini ([Mar], excercise 8). Soit Y le complété de l'extension $X \otimes_{\bar{X}} k$ de X; c'est le corps local de corps résiduel k obtenu par extension du corps résiduel de X. Fixons une uniformisante π de X; Y s'identifie à $k((\pi))$. Tout automorphisme sauvagement ramifié de X se prolonge donc de façon unique en un automorphisme sauvagement ramifié de Y. Ainsi le sous-groupe G_1 de G s'identifie à un groupe d'automorphismes de Y de sorte que (Y, G_1) soit un objet de $\mathscr{C}$.

(4.2.2) LEMME. *Supposons que (Y, G_1) soit dans l'image essentielle de W. Alors il en est de même de (X, G).*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que (X, G_1) est dans l'image essentielle de W (2.2.1).

Soit $\tilde{k}$ une clôture algébrique de k et soit Z le complété de $Y \otimes_k \tilde{k}$; Z est le complété d'une extension séparable maximale non ramifiée de Y. Comme précédemment G_1 s'identifie à un groupe d'automorphismes de Z faisant de (Z, G_1) un objet, de $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{G}$ le groupe des $\bar{X}$-automorphismes de $\tilde{k}$; comme $\bar{X}$ est un corps parfait, il coincide avec le corps des invariants de $\mathscr{G}$. En outre $\mathscr{G}$ s'identifie naturellement à un groupe d'automorphismes de Z laissant invariante l'uniformisante π de X. Cela fait de $\mathscr{G}$ un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Z, G_1)$ dont tout élément commute avec tout élément de G_1 et dont le corps des invariants est X.

Par hypothèse, il existe un corps local K' et une extension de Lie L' de K' telle que $W(L'/K') = (Y, G_1)$. Appelons K'' le complété d'une extension séparable maximale non ramifiée de K' et L'' l'extension composée $K''L'$; K'' est un corps local de corps résiduel $\tilde{k}$ et l'extension L' est linéairement disjointe de K'' sur K'. Par suite $\mathrm{Gal}(\tilde{k}/k)$ s'identifie à un groupe d'automorphismes de L'' (resp. de K'') dont le corps des invariants est L' (resp. K'). Comme le foncteur W est pleinement fidèle, $W(L''/K'')$ s'identifie à (Z, G_1).

Pour la même raison $\mathscr{G}$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(L''/K'')$ dont tout élément commute avec tout élément de $\mathrm{Gal}(L''/K'')$. Soit K l'adhérence dans K'' du sous-corps $K''^{\mathscr{G}}$ de K'' formés des éléments invariants par $\mathscr{G}$. Le corps K contient une uniformisante de K'': la projection sur K'' de l'uniformisante π de Z; K est donc un corps local à corps résiduel $\bar{X}$ et on a $K = K''^{\mathscr{G}}$.

Soit $\mathscr{E}''$ l'ensemble des extensions galoisiennes finies de K'' contenues dans L''. Pour tout $E' \in \mathscr{E}''$ on note π_E la projection de $\pi \in Z$ sur E'' et on pose $E = K(\pi_E)$. Comme E''/K'' est totalement ramifiée on a $E'' = K''(\pi_E)$; comme π_E est invariante par $\mathscr{G}$ on a $E \in E''^{\mathscr{G}}$ et donc $E \cap K'' = K$; comme tout élément de $\mathrm{Gal}(E''/K'')$ commute avec tout élément de $\mathscr{G}$, $\mathrm{Gal}(E''/K'')$ s'identifie à un groupe fini de K-automorphismes de E dont le corps des invariants est K. Il en résulte que E/K est galoisienne de groupe de Galois isomorphe à $\mathrm{Gal}(E''/K'')$. Par suite le corps $L = \bigcup_{E'' \in \mathscr{E}''} E$ est une extension galoisienne de K dont le groupe de Galois s'identifie à $\mathrm{Gal}(L''/K'')$ et on a $L = L''^{\mathscr{G}}$; or L''/K'' est totalement ramifiée; il en est donc de même de L/K et L/K est une extension de Lie.

Il est maintenant clair que $X_K(L) = X''^{\mathscr{G}} = X$ et donc que $W(L/K) = (X, G_1)$. ■

(4.2.3) Soit maintenant (X, G) un objet de $\mathscr{C}$ où X est un corps local à corps résiduel quasi-fini. Il s'agit de prouver que sous l'hypothèse (ii) de 1.5.5, (X, G) est dans l'image essentielle de W. On peut supposer que $G = G_1$ et que G n'est pas résoluble (1.5.2).

D'abord, quitte à remplacer G par un de ses sous-groupes ouverts, on a la décomposition de Lévi de G: $1 \to R \to G \to S \to 1$, où le radical R de G est un groupe de Lie p-adique résoluble et où S est un groupe de Lie p-adique semi-simple. Comme une algèbre de Lie semi-simple est produit direct d'algèbres de Lie simples, quitte à remplacer S par un de ses sous-groupes ouverts, il existe un quotient de S qui est un groupe de Lie simple. Finalement quitte à remplacer G par un de ses sous-groupes ouverts, il existe un sous-groupe distingué fermé H de G tel que G/H soit un groupe de Lie p-adique simple.

(4.2.4) On sait qu'il existe un corps local Y et une extension de Lie Z de Y telle que $W(Z/Y) = (X, H)$ (2.3.3). Comme le foncteur W est pleinement fidèle et que H est distingué dans G, G s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(Z/Y)$ de sorte que G/H s'identifie à un sous-groupe compact de $\mathrm{Aut}(Y)$. Comme $G = G_1$, on a $(G/H) = (G/H)_1$ donc Y est un corps local de caractéristique p.

Supposons que $(Y, G/H)$ soit un objet de $\mathscr{C}$. Alors par hypothèse $\hat{U}_Y^1/I_{G/H}\hat{U}_Y^1$ n'est pas un groupe de torsion et donc $(Y, G/H)$ est dans l'image essentielle de W (1.5.2). Il s'ensuit que (X, G) est aussi dans l'image essentielle de W: la démonstration du lemme 2.2.2 fonctionne sans changement.

Il ne reste plus qu'à démontrer le:

(4.2.5) LEMME. *Le couple* $(Y, G/H)$ *est un objet de* $\mathscr{C}$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que $\liminf_{x \to +\infty} x/(G/H:(G/H)_x > 0$. Or on a $(G/H)_x = G_{\psi(x)}H/H$ pour tout $x \geqslant -1$ où ψ désigne l'application de Hasse–Herbrand de l'extension Z/Y (2.3.1). Il en résulte que $(G:G_{\psi(x)}) = (G/H:(G/H)_x)(H:H^x)$ et donc que:

$$\frac{x}{(G/H:(G/H)_x)} = \frac{\psi(x)}{(G:G_{\psi(x)})} \cdot \alpha(x)$$

avec $\alpha(x) = x(H:H^x)/\psi(x)$. Mais pour tout $x \geqslant -1$, $\alpha(x) \geqslant 1$ parce que $\psi(x) = \int_0^x (H:H^t)\,\mathrm{d}t \leqslant x(H:H^x)$. Cela achève la démonstration. ∎

Bibliographie

[Fon 1] J.-M. Fontaine: Un résultat de Sen sur les automorphismes de corps locaux, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Paris (1969–1970) exposé n°. 6.

[Fon 2] J.-M. Fontaine: Corps de séries formelles et extensions galoisiennes de corps locaux, Séminaire de théorie des nombres de Grenoble, (1971–1972) pp. 28–38.

[Fon 3] J.-M. Fontaine: Groupes de ramification et représentations d'Artin, *Ann. Sci. E.N.S.*, 4e série, t. 4, fasc. 3 (1971) 337-392.

[FW 1] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger: Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C.R. Acad. Sc.*, t. 288, série A (1979) 367–370.

[FW 2] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger: Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux, *C.R. Acad. Sci.*, t. 288, série A (1979) 441–444.

[Har] M. Harris: p-adic représentations arising from descent on abelian varieties, *Comp. Math.* 39, fasc. 2 (1979) 177–245.

[Lau] F. Laubie: Groupes de Lie p-adiques et ramification, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1982–1983) exposé n°. 31.

[Mar] J. Martinet: Characters theory and Artin *L*-functions in *Algebraic Number Fields*, A. Frölich (ed.) London New York, San Francisco, Academic Press (1977) pp. 1–87.

[Sen 1] S. Sen: On automorphismes of local fields, *Ann. of Math.* 90 (1969) 33–46.

[Sen 2] S. Sen: Ramification in p-adic Lie extensions, *Inventiones Math.* 17 (1972) 44–50.

[CL] J.-P. Serre: *Corps Locaux*, 2e edn., Paris, Hermann (1968).

[Win 1] J.-P. Wintenberger: Automorphismes et extensions galoisiennes de corps locaux, Thèse de 3e cycle, Publication de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1978.

[Win 2] J.-P. Wintenberger: Extensions de Lie et groupes d'automorphismes des corps locaux de caractéristique p, *C.R. Acad. Sc.*, t. 288, série A (1979) 477–479.

[Win 3] J.-P. Wintenberger: Extensions et groupes d'automorphismes de corps locaux, *C.R. Acad. Sc.*, t. 290, série A (1980) 201-203.

[Win 4] J.-P. Wintenberger: Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications, *Ann. Sci. E.N.S.*, 4e série, t. 16 (1983) 59-89.