COMPOSITIO MATHEMATICA

MICHEL BAILLET
YVES DENIZEAU
JEAN-FRANÇOIS HAVET

Indice d'une espérance conditionnelle

Compositio Mathematica, tome 66, nº 2 (1988), p. 199-236
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__66_2_199_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica 66: 199–236 (1988)
© Kluwer Academic Publishers, Dordrecht – Printed in the Netherlands

Indice d'une esperance conditionnelle

MICHEL BAILLET, YVES DENIZEAU et
JEAN-FRANÇOIS HAVET
Université d'Orleáns, Departement de Mathématiques, B.P. 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France

Received 7 July 1987; accepted 19 November 1987

1. Introduction

La notion d'indice fini a été introduite par V.F.R. Jones ([13]) comme un invariant pour les sous-facteurs N d'un facteur M de type II_1. En munissant M d'une structure de N-module hilbertien grâce à l'espérance conditionnelle canonique, M. Pimsner et S. Popa ([17]) ont prouvé, si l'indice est fini, l'existence d'une base orthonormale finie dans M et ont calculé l'inverse de l'indice comme borne inférieure des $k > 0$ tels que $E\text{-}k\,\mathrm{Id}_M$ soit positive. Par la suite, H. Kosaki ([14]) a défini l'indice d'une espérance conditionnelle pour les facteurs de genre dénombrable en utilisant la théorie spatiale de A. Connes ainsi que la théorie des poids opératoriels de U. Haagerup, et J. Bion-Nadal ([2]) a étudié le cas où N est une sous-algèbre d'un facteur de type II_1. Dans ces deux cas les valeurs possibles de l'indice restent celles calculées par V.F.R. Jones. L'objet de cet article est la définition et l'étude de l'indice d'une espérance conditionnelle entre deux algèbres de von Neumann.

A l'origine du présent travail, il y a la recherche d'une autre présentation des correspondances entre deux algèbres de Von Neumann M et N introduites par A. Connes ([7]). Nous appelons M–N-correspondance un M–N-bimodule hilbertien, autodual, normal (Définition 2.1). Il résulte des travaux de M.A. Rieffel que les correspondances de M à N au sens de A. Connes et les M–N-correspondances sont associées fonctoriellement (Théorème 2.2).

Des exemples immédiats de M–N-correspondances sont obtenus à partir d'applications complètement positives de M dans N. Dans le cas d'une espérance conditionnelle normale fidèle E de M sur N, la M–N-correspondance associée est le séparé complété autodual X_E de M pour le produit scalaire $\langle m, m'\rangle = E(m^*m')$, l'action à gauche étant définie par la représentation de Gelfand–Segal $(\pi_E, \Lambda_E, \xi_E)$. Plus généralement on peut associer une M–N-correspondance à tout poids opératoriel normal semi-fini (Proposition 2.8). Si la sous-algèbre N est espérée, toutes les M–N-correspondances définies à partir des poids opératoriels normaux finis fidèles de M dans N sont équivalentes (Corollaire 2.16).

L'interprétation de la composée d'une M–N-correspondance X et d'une N–R-correspondance Y est simple: c'est le produit tensoriel $X \otimes_N Y$ (Proposition 2.9).

La caractérisation des modules hilbertiens autoduaux par une condition de compacité faible de leur boule unité (Proposition 1.7) nous permet d'établir que, pour une espérance conditionnelle E de M sur une sous-algèbre N, le N-module $\Lambda_E(M)$ est hilbertien autodual si et seulement si il existe une constante $K > 0$ telle que $K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ soit positive, où i désigne l'injection de N dans M (Proposition 3.3). Si ces conditions sont réalisées, on dit que E est faiblement d'indice fini. L'existence d'une constante $K > 0$ telle que $K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ soit complètement positive équivaut à la convergence ultrafaible de $\Sigma m_j m_j^*$ pour toute base orthonormale $(\Lambda_E(m_j))$ de X_E (Théorème 3.5). On dit alors que E est d'indice fini (fortement d'indice fini s'il existe une base finie), l'indice de E étant $\Sigma m_j m_j^*$, quantité indépendante de la base choisie. Cet indice est toujours un élément du centre de M mais n'est pas en général dans N (Exemple 3.7.(iii)), de plus sa norme est le plus petit K tel que $K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ soit complètement positive.

Si E est d'indice fini ou fortement d'indice fini, elle est évidemment faiblement d'indice fini. Nous ne savons pas si ces trois notions coïncident en général mais nous avons pu apporter une réponse positive dans la plupart des cas (Remarque 3.26). De plus si N est un facteur, deux espérances de $E(M, N)$ possèdent simultanément la même propriété d'indice fini (Corollaire 3.20); dans le cas général le même résultat est obtenu lorsqu'on se restreint aux espérances conditionnelles faiblement d'indice fini (Corollaire 3.16).

Si E est une espérance conditionnelle d'un facteur M sur un sous-facteur N, notre définition d'indice fini coïncide avec celle de H. Kosaki (Remarque 3.8) et notre formalisme nous permet de retrouver rapidement ses résultats, en particulier l'indice local (3.9). Dans le cas général, pour une espérance conditionnelle d'indice fini, nous obtenons un analogue de la construction de base de V.F.R. Jones et lorsque l'indice est à valeurs dans N (ce qui est vérifié si M est un facteur) toutes les espérances successives ainsi construites ont même indice que E (3.10). Si de plus l'indice est scalaire, ses valeurs possibles sont celles calculées par V.F.R. Jones (Corollaire 3.12).

Signalons encore quelques extensions de résultats déjà connus dans le cadre des algèbres de von Neumann de type II_1.

Soit E une espérance d'indice fini de $E(M, N)$.

– Si l'un des centres est de dimension finie il en est de même pour le commutant relatif $N' \cap M$ (Corollaire 3.19).

– Si N est proprement infinie et si M vérifie des hypothèses de séparabilité alors il est possible de faire une construction descendante (Proposition 3.28); dans le cas où l'indice de E est 2, M s'identifie au produit croisé de N par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Proposition 3.27).

§1. Preliminaires

Dans ce paragraphe sont rassemblées quelques propriétés importantes des N-modules hilbertiens autoduaux. Pour les propriétés de base, le lecteur peut se reporter notamment à [18] et [15]; nous ne détaillons ici que les résultats relatifs aux topologies s et σ, généralisations des topologies ultraforte et ultrafaible sur une algèbre de von Neumann.

1.1. Notations

Soient N une algèbre de von Neumann, X un N-module hilbertien (à droite); nous désignerons par $\mathbf{L}_N(X)$ l'algèbre des opérateurs N-linéaires continus sur X admettant un adjoint continu. Pour x et y dans X nous noterons $\theta_{x,y}$ l'opérateur de rang un sur X défini par $\theta_{x,y} = x.\langle y, \,.\,\rangle$. Lorsque X est autodual, l'ensemble des combinaisons linéaires de tels opérateurs est un idéal ultrafaiblement dense dans l'algèbre de von Neumann $\mathbf{L}_N(X)$.

Pour tout c appartenant au centre de N, l'homothétie (à droite) de rapport c sera notée $\varrho(c)$. Ces opérateurs constituent le centre de $\mathbf{L}_N(X)$.

Si X et Y sont deux N-modules hilbertiens, nous dirons qu'une application U de X dans Y est *orthogonale* si elle respecte les produits scalaires.

Pour tout $\phi \in N_*^+$ nous noterons X^ϕ l'espace de Hilbert séparé complété de X pour la forme sesquilinéaire $\phi \circ \langle\,.\,,\,.\,\rangle$ et Λ_ϕ l'application canonique de X dans X^ϕ. On a donc, pour tous x et y de X

$$\langle \Lambda_\phi(x), \Lambda_\phi(y)\rangle \;=\; \phi(\langle x, y\rangle).$$

1.2. Topologie σ

Soit X un N-module hilbertien autodual. W. Paschke a démontré qu'alors X est le dual d'un espace de Banach ([15, Proposition 3.8]). En effet, si on désigne par X^c l'espace vectoriel conjugué de X, on peut alors identifier X avec un sous-espace vectoriel faiblement fermé du dual du produit tensoriel projectif $X^c \hat{\otimes} N_*$ la dualité étant définie par

$$\langle y \otimes \omega, x\rangle = \omega(\langle y, x\rangle), \text{ pour tous } y \in Y^c, \omega \in N_* \text{ et } x \in X.$$

L'espace de Banach X apparaissant comme le dual de l'espace de Banach noté X_*, quotient de $X^c \hat{\otimes} N_*$ par le polaire de X, *une suite généralisée* (x_α) *de* X *converge vers* 0 *pour la topologie* $\sigma(X, X_*)$ *si et seulement si, pour toutes suites* (y_n) *de* X *et* (ω_n) *de* N_* *telles que* $\Sigma_n \|y_n\| \|\omega_n\| < \infty$, *on a* $\lim_\alpha \Sigma_n \omega_n \langle y_n, x_\alpha\rangle = 0$.

Plus généralement, soit X un N-module préhilbertien; nous désignerons par X_* le sous-espace du dual algébrique de l'espace vectoriel X, constitué des formes linéaires f pouvant s'écrire

$$f = \sum_{n\geq 0} \omega_n \langle y_n, .\rangle$$

avec y_n dans X, ω_n dans N_* et $\Sigma_{n\geq 0} \|\omega_n\| \|y_n\| < \infty$. Nous désignerons par σ *la topologie* $\sigma(X, X_*)$. On voit qu'en particulier *une suite généralisée bornée* (x_α) *converge vers* 0 *pour la topologie* σ *si et seulement si, pour tout* $\phi \in N_*^+$ *et tout* $y \in X$, *on a* $\lim_\alpha \phi(\langle y, x_\alpha\rangle) = 0$. Rappelons également que dans le cas où X autodual, W. Paschke a démontré que $\mathbf{L}_N(X)$ est une algèbre de von Neumann dont le prédual est un quotient de $X \hat{\otimes} X_*$ ([15, Remarque 3.9 et Proposition 3.10]). En particulier *une suite généralisée bornée* (B_α) *converge ultrafaiblement vers* 0 *dans* $\mathbf{L}_N(X)$ *si et seulement si, pour tous* x *et* y *de* X, *la suite* $\langle y, B_\alpha x\rangle$ *converge ultrafaiblement vers* 0 *dans* N.

1.3. Topologie s

Soit X un N-module préhilbertien. On appelle *topologie s* sur X la topologie définie par la famille de semi-normes (p_ϕ), avec $\phi \in N_*^+$, telles que

$$p_\phi(x) = (\phi(\langle x, x\rangle))^{1/2} = \|\Lambda_\phi(x)\|.$$

1.4. Proposition. *Soit X un N-module préhilbertien.*

(i) *La topologie s est plus fine que la topologie* σ.

(ii) *Si X est autodual, la topologie s est compatible avec la dualité* $\sigma(X, X_*)$.

(i) Soit $f \in X_*$; il existe une suite (ω_n) de N_* et une suite (y_n) de X telles que

$$f = \sum_{n\geq 0} \omega_n(\langle y_n, .\rangle) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \|\omega_n\| \|y_n\| < \infty.$$

Nous pouvons modifier la suite (y_n) de manière que f puisse s'écrire $f = \Sigma_{n\geqslant 0}\phi_n\langle y_n, .\rangle$ avec $\phi_n \in N_*^+$, $\|y_n\| = 1$ pour tout n et $\Sigma_{n\geqslant 0}\|\phi_n\| < \infty$. Soit $\phi = \Sigma_{n\geqslant 0}\phi_n$. Pour tout $x \in X$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \|\Lambda_\phi(y_n)\|\,\|\Lambda_{\phi_n}(x)\| \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 0} \|\phi_n\|^{1/2}(\phi_n(\langle x, x\rangle))^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{n\geqslant 0}\|\phi_n\|\right)^{1/2}\left(\sum_{n\geqslant 0}\phi_n(\langle x, x\rangle)\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{n\geqslant 0}\|\phi_n\|\right)^{1/2} p_\phi(x).
\end{aligned}$$

Donc f est continue pour la topologie s.

(ii) Soit maintenant g une forme linéaire sur X continue pour s et soit S la boule unité de X. On sait qu'alors g est continue pour σ si et seulement si $\ker g \cap S$ est fermé pour la topologie σ ([3, Ch. IV, §2, Théorème 5]). Comme $\ker g \cap S$ est un convexe, on voit donc que $g|_S$ est continue pour σ si et seulement si $\ker g \cap S$ est fermé pour la topologie de Mackey $\tau(X, X_*)$. Montrons que $g|_S$ est continue pour $\tau(X, X_*)$. Soit donc (x_α) une suite généralisée de S convergeant vers 0 pour la topologie $\tau(X, X_*)$ et soit $\phi \in N_*^+$ fixé. L'application L de (X, σ) dans $(X_*, \sigma(X_*, X))$ qui à y associe $L(y) = \phi(\langle y, .\rangle)$ est antilinéaire et continue. Par conséquent, l'image de S par L est un convexe, équilibré, compact pour la topologie $\sigma(X_*, X)$ et on a

$$(p_\phi(x_\alpha))^2 = \phi(\langle x_\alpha, x_\alpha\rangle) = L(x_\alpha)(x_\alpha) \leqslant \sup_{f\in L(S)} |f(x_\alpha)|.$$

La suite généralisée (x_α) converge donc vers 0 pour la topologie s et $g|_S$ est continue pour $\tau(X, X_*)$.

Remarque. Les convexes (donc en particulier les sous-modules de X) ont même adhérence pour les topologies s et σ.

1.5. LEMME. [16, Lemme 2.3]. *Soient Z un N-module préhilbertien et X son complété autodual. Alors Z est s-dense dans X.*

1.6. DÉFINITIONS. Soit X un N-module hilbertien. On appelle *système orthonormal* une famille (x_j) de vecteurs de X telle que $\langle x_j, x_k\rangle = 0$ si $j \neq k$ et

$\langle x_j, x_j \rangle = p_j$ soit un projecteur de N. On a alors $x_j = x_j . p_j$. Une *base orthonormale* est un système orthonormal tel que le sous-module engendré soit s-dense dans X. Tout vecteur de X s'écrit alors d'une manière unique $x = \Sigma x_j . b_j$ pour la topologie σ, avec b_j dans $p_j N$ (en fait $b_j = \langle x_j, x \rangle$) et $\langle x, x \rangle = \Sigma b_j^* b_j$ pour la topologie ultrafaible.

1.7. Proposition. *Soit X un N-module préhilbertien. Alors X est autodual si et seulement si sa boule unité fermée est compacte pour la topologie σ.*

Si X est autodual, il est le dual de l'espace de Banach X_* et sa boule unité fermée est donc compacte pour la topologie σ.

Réciproquement, supposons la boule unité fermée de X compacte pour la topologie σ. Remarquons d'abord que tout élément x de X admet une décomposition polaire $x = y|x|$, avec $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ et $y \in X$ tel que $\langle y, y \rangle$ soit le projecteur final de X; en effet, dans la démonstration de [15, Proposition 3.11], l'hypothèse qui intervient est la compacité de la boule unité de X pour la topologie σ. Le principe d'orthonormalisation de Gram–Schmidt s'applique donc dans X ([19, Lemme 6.7]).

Soit $\tau \in \mathbf{L}_N(X, N)$ fixé. Montrons que pour tout sous-module Z finiment engendré de X il existe un unique $x_z \in Z$ tel que pour tout $\zeta \in Z$, on ait $\langle x_z, \zeta \rangle = \tau(\zeta)$. Si $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base orthonormale de Z, posons $x_z = \Sigma_{k=1}^n y_k \tau(y_k)$. On a pour tout k

$$\langle x_z, y_k \rangle = \tau(y_k)\langle y_k, y_k \rangle = \tau(y_k).$$

La N-linéarité nous assure que x_z convient et l'unicité est immédiate. On a de plus

$$\|x_z\|^2 = \|\tau(x_z)\| \leqslant \|\tau\| \, \|x_z\|, \text{ donc } \|x_z\| \leqslant \|\tau\|.$$

On vérifie facilement que la suite généralisée (x_z) constituée d'éléments de la boule de rayon $\|\tau\|$ est de Cauchy pour la topologie σ et qu'elle converge donc vers un élément x de X. Pour tout $y \in X$, l'élément $\langle x, y \rangle$ de N est la limite ultrafaible de la suite généralisée $\langle x_z, y \rangle$, égale à $\tau(y)$ pour tout Z contenant y. Par suite, $\tau(y) = \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in X$, donc X est autodual.

On déduit alors assez facilement les résultats suivants, qui généralisent la situation des espaces de Hilbert (pour des démonstrations complètes voir [11, §1]).

1.8. CONSÉQUENCES. *Soit X un N-module hilbertien autodual.*

(i) *Un sous-module Z de X est autodual si et seulement si Z est fermé pour les topologies s et σ.*

(ii) *Il existe une bijection canonique entre les projecteurs de l'algèbre de von Neumann $\mathbf{L}_N(X)$ et les sous-modules s-fermés de X.*

(iii) *Un sous-ensemble de X est s-total si et seulement si son orthogonal est réduit à $\{0\}$.*

(iv) *Un opérateur N-linéaire sur X appartient à $\mathbf{L}_N(X)$ si et seulement si il est continu pour la topologie s (respectivement σ).*

(v) *X admet une base orthonormale* (voir [15, Théorème 3.12]).

(vi) *Si (x_i) est une base orthonormale de X et (b_j) est une famille d'éléments de N tels que $\Sigma\, b_i^* b_i$ converge ultra-faiblement dans N, alors $\Sigma\, x_j \,.\, b_j$ converge pour la topologie σ.*

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes. Soient N une sous-algèbre de von Neumann d'une algèbre de von Neumann M; nous désignerons ([10]) par $P(M, N)$ l'ensemble des poids opératoriels normaux fidèles semi-finis de M dans N et par $E(M, N)$ l'ensemble des espérances conditionnelles de $P(M, N)$. Lorsque $N = \mathbb{C}$, nous noterons $P(M)$ l'ensemble des poids normaux fidèles semi-finis sur M. La représentation de Gelfand-Segal d'un poids φ de $P(M)$ sera notée (H_φ, π_φ) et plus généralement nous conserverons les notations usuelles de la théorie de Tomita.

§2. Correspondances

Dans tout ce paragraphe M, N et R désignent des algèbres de von Neumann.

2.1. DÉFINITIONS. (i) Nous appellerons *M–N-correspondance* un M–N-bimodule autodual normal X ([19, Définition 5–1], la structure de M-module à gauche étant définie par la donnée d'un morphisme – unifère normal – d'algèbres de von Neumann de M dans $\mathbf{L}_N(X)$).

(ii) Nous dirons que deux M–N-correspondances sont *équivalentes* s'il existe un isomorphisme M–N-linéaire orthogonal de l'une sur l'autre.

Dans [7] A. Connes introduit la notion de correspondance de M à N. Rappelons sa terminologie. Un espace de Hilbert H est muni d'une structure de N-module à gauche par la donnée d'une représentation normale non dégénérée de N dans $\mathbf{L}(H)$. Nous dirons que H est un N-module à droite s'il est un N^0-module à gauche, où N^0 est l'algèbre opposée de N. Si H' et H'' sont deux espaces de Hilbert munis d'une structure de N-module à gauche, nous noterons $\mathrm{Hom}_N(H', H'')$ l'ensemble des opérateurs continus et N-linéaires de H' dans H''. Une *correspondance de M à N* est un espace de Hilbert muni d'une structure de M–N-bimodule.

Fixons une forme standard $(L^2(N), J, P)$ de N. Soit $\upsilon \in P(N)$. Nous noterons Λ_υ l'unique morphisme isométrique de N-modules de $\mathcal{N}_\upsilon = \{x;\ \upsilon(x^*x) < \infty\}$ dans $L^2(N)$ vérifiant $yJ\Lambda_\upsilon(y) \in P$ pour tout $y \in \mathcal{N}_\upsilon$. Nous prenons pour forme standard de N^0 le N^0–N^0-bimodule $L^2(N)$ avec même involution et même cône. Si υ^0 désigne le poids sur N^0 associé à υ, on voit que

$$\Lambda_{\upsilon^0}(y^0) = J\Lambda_\upsilon(y^*) \quad \text{pour tout} \quad y \in \mathcal{N}_{\upsilon^0} = \mathcal{N}_\upsilon^*.$$

Soit H un espace de Hilbert muni d'une structure de N-module à droite. Suivant A. Connes ([6, Définition 1]), si ξ est un vecteur υ^0-borné de H, nous noterons $A^{\upsilon^0}(\xi)$ l'élément de $\mathrm{Hom}_{N^0}(L^2(N), H)$ qu'il définit.

Le théorème suivant établit le lien entre la définition 2-1 et la notion de correspondance de M à N.

2.2. THÉORÈME. *Si H est un espace de Hilbert muni d'une structure de M–N-bimodule, alors le N-module hilbertien autodual $X_H = \mathrm{Hom}_{N^0}(L^2(N), H)$ a une structure canonique de M–N-correspondance. Réciproquement, si X est une M–N-correspondance, l'espace de Hilbert $X \otimes_N L^2(N)$ est canoniquement muni d'une structure de M–N-bimodule. De plus, ces deux constructions sont fonctorielles et réalisent une équivalence de catégories.*

La construction de X_H à partir d'une correspondance H de M à N résulte de [19, Théorème 6-5]. Réciproquement, si X est une M–N-correspondance, l'espace de Hilbert $X \otimes_N L^2(N)$ de la représentation induite de M.A. Rieffel ([19, Théorème 5-1]) est un N-module à gauche. L'action naturelle de N à droite est caractérisée par

$$(x \otimes \xi).b = x \otimes Jb^*J\xi \text{ où } x \in X,\ \xi \in L^2(N) \text{ et } b \in N.$$

De plus, l'application qui à x de X associe l'élément $\xi \mapsto x \otimes \xi$ de $\mathrm{Hom}_{N^0}(L^2(N), X \otimes_N L^2(N))$ réalise une équivalence de correspondances ([19, Proposition 6-10]).

Considérons maintenant un espace de Hilbert muni d'une structure de M–N-bimodule. Pour tous S, T de $\mathrm{Hom}_{N^0}(L^2(N), H)$ et ξ, η de $L^2(N)$, on a $\langle S \otimes \xi, T \otimes \eta\rangle = \langle S\xi, T\eta\rangle$. On peut donc définir une application orthogonale Φ de $X_H \otimes_N L^2(N)$ dans H telle que $\Phi(S \otimes \xi) = S\xi$. Soit $\upsilon \in P(N)$. Pour tout vecteur υ^0-borné ξ, l'opérateur $R^{\upsilon^0}(\xi)$ est dans X_H et $\xi \in \mathrm{Im}\, R^{\upsilon^0}(\xi)$ ([4, Proposition 1-3]). La densité des vecteurs υ^0-bornés dans H ([6, Lemme 2]) montre que Φ est à image dense, ce qui achève la démonstration.

2.3. LEMME. *Soient X un M–N-bimodule hilbertien autodual et Z un sous-module s-dense dans X. Alors X est une M–N-correspondance si et seulement si, pour $z \in Z$, l'application $m \mapsto \langle z, m\,.\,z\rangle$ est ultrafaiblement continue de la boule unité de M dans N.*

La condition nécessaire est évidente. Réciproquement, par polarisation on obtient la continuité ultrafaible de l'application $m \mapsto \langle z', m\,.\,z\rangle$ pour tous z et z' de Z. L'équicontinuité des opérateurs $x \mapsto m\,.\,x$ de X et la s-densité de Z dans X, nous permettent de conclure, pour tous x et y de X, à la continuité ultrafaible de l'application $m \mapsto \langle x, m\,.\,y\rangle$, de la boule unité de M dans N. La restriction à la boule unité de M de l'homomorphisme définissant la structure de M-module est donc ultrafaiblement continue (1.2) et X est une M–N-correspondance.

2.4. COROLLAIRE. *Si Z est un M–N-bimodule préhilbertien normal alors son complété autodual est une M–N-correspondance.*

2.5. DÉFINITIONS. Soient X une M–N-correspondance et $\xi \in X$.

Nous dirons que ξ est *totalisateur dans X* si l'ensemble $\{m\,.\,\xi\,.\,b\ ;\ (m, b) \in M \times N\}$ est s-total dans X.

Nous dirons que ξ est *séparateur* si, pour tout $m \in M$, l'égalité $m\,.\,\xi = 0$ implique $m = 0$.

Si N est une sous-algèbre de von Neumann de M, nous dirons que ξ est *central* si $b\,.\,\xi = \xi\,.\,b$ pour tout b de N.

2.6. EXEMPLES. (i) Considérons une application complètement positive normale P de M dans N. Nous noterons X_P la M–N-correspondance obtenue par séparation et complétion du produit tensoriel algébrique $M \odot N$ pour le produit scalaire

$$\langle m \otimes b, m' \otimes b'\rangle = b^*P(m^*m')b'.$$

Nous désignerons par π_P le morphisme canonique de M dans $\mathbf{L}_N(X_p)$, par Λ_p l'application canonique de $M.N$ dans X_p et ξ_p sera $\Lambda_p(1 \otimes 1)$. Nous dirons ([15, Théorème 5-2]) que (π_p, X_p, ξ_p) est la représentation de Gelfand-Segal associée à P.

Le vecteur ξ_p est totalisateur dans X_p et $P(m) = \langle \xi_p, m\,.\,\xi_p\rangle$ pour tout m de M. De plus ξ_p est séparateur si et seulement si P est fidèle.

(ii). Soient X une M–N-correspondance et $\xi \in X$. L'application P_ξ de M dans N qui à $m \in M$ associe $\langle \xi, m\,.\,\xi \rangle$ est complètement positive normale (lemme 2.3). De plus, si ξ est totalisateur, l'application induite par $m \otimes b \mapsto m\,.\,\xi\,.\,b$ réalise une équivalence de catégories entre X_{p_ξ} et X.

(iii) Soit ϱ un morphisme normal de M dans N. Pour chaque $m \in M$ la multiplication à gauche par $\varrho(m)$ fait du sous-N-module $\varrho(1)N$ de N une M–N-correspondance canoniquement équivalente à X_ϱ.

2.7. Poids opératoriels finis. *On suppose que N est une sous-algèbre de von Neumann de M.*

(i) *Soit P un Poids opératoriel normal fini de M dans N. Puisque P est N-linéaire, la M–N-correspondance X_P est le séparé complété autodual de M pour le produit scalaire $\langle m, m' \rangle = P(m^*m')$.*

(ii) *Soient X une M–N-correspondance et $\xi \in X$. Le vecteur ξ est central si et seulement si P_ξ est un poids opératoriel fini.*

(i) est immédiat.

(ii) Si ξ est central, on a pour tous b de N et m de M

$$P_\xi(b^*mb) = \langle b\,.\,\xi, mb\,.\,\xi \rangle = \langle \xi\,.\,b, m\,.\,\xi\,.\,b \rangle = b^*P_\xi(m)b.$$

Réciproquement si P_ξ est un poids opératoriel fini on a, pour tout b de N,

$$\langle \xi\,.\,b - b\,.\,\xi, \xi\,.\,b - b\,.\,\xi \rangle$$
$$= b^*P_\xi(1)b - b^*P_\xi(b) - P_\xi(b^*)b + P_\xi(b^*b) = 0.$$

Remarquons enfin qu'un vecteur central ξ de X définit une espérance conditionnelle de M sur N si et seulement si $\langle \xi, \xi \rangle = 1$.

Donnons maintenant une construction de Gelfand–Segal pour les poids opératoriels semi-finis normaux.

2.8. Proposition. *Soient N une sous-algèbre de von Neumann de M, et E un poids opératoriel normal semi-fini de M vers N.*

(i) *L'idéal à gauche $\mathcal{N}_E = \{x \in M;\ E(x^*x) \in N\}$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = E(x^*y)$ est un N-module préhibertien. Nous désignerons par X_E son complété autodual et par Λ_E l'application canonique de $\mathcal{N}_E$ dans X_E.*

(ii) *Pour tout m de M, il existe un unique opérateur $\pi_E(m)$ de $\mathbf{L}_N(X_E)$ tel que $\pi_E(m)\Lambda_E(x) = \Lambda_E(mx)$ pour tout x de $\mathcal{N}_E$. Le module X_E devient alors une M–N-correspondance.*

(iii) *Si E est fidèle la représentation π_E est injective.*

(i) est immédiat; montrons (ii). Pour tout m de M et tout x de $\mathcal{N}_E$ on a

$$\langle \Lambda_E(mx), \Lambda_E(mx) \rangle = E(x^*m^*mx) \leqslant \|m\|^2 < \Lambda_E(x), \Lambda_E(x) \rangle,$$

d'où l'existence de l'opérateur $\pi_E(m)$; de plus $\|\pi_E(m)\| \leqslant \|m\|$. Soit (m_i) une famille filtrante croissante dans M_+ de borne supérieure m. Pour tout x de $\mathcal{N}_E$ on a $E(x^*mx) = \sup_i E(x^*m_ix)$. Comme x^*mx appartient à $\mathcal{N}_E^*\mathcal{N}_E$, il en résulte que l'élément $E(x^*mx)$ de N_+ est limite ultrafaible de $E(x^*m_ix)$. On a alors

$$\langle \Lambda_E(x), \pi_E(m)\Lambda_E(x) \rangle = \lim_i \langle \Lambda_E(x), \pi_E(m_i)\Lambda_E(x) \rangle$$

ce qui, d'après le lemme 2.3, assure la normalité de π_E.

(ii) Supposons E fidèle. Soient $m \in M$ tel que $\pi_E(m) = 0$ et $\phi \in N_*^+$. Le poids $\psi = \phi \circ E$ est normal sur M donc ultrafaiblement semi-continu inférieurement ([9, Théorème 1.8]). On a alors, pour tout unité approchée (u_i) de $\mathcal{N}_E$,

$$\psi(m^*m) \leqslant \underline{\lim}\, \psi(u_i m^*mu_i) = \underline{\lim}\, \phi(\langle \pi_E(m)\Lambda_E(u_i), \pi_E(m)\Lambda_E(u_i) \rangle) = 0.$$

Ainsi $\phi \circ E(m^*m) = 0$ pour tout ϕ de N_* et m est nul.

Remarque. Les M–N-correspondances définies à partir d'un poids opératoriel fini sont caractérisées par l'existence d'un vecteur central et totalisateur. Un poids opératoriel de $P(M, N)$ non fini ne peut pas être déterminé par la donnée d'un seul vecteur de sa représentation de Gelfand-Segal; cependant, il est possible de généraliser la notion d'algèbre hilbertienne ([12]).

2.9. Proposition. *Soient X une M–N-correspondance et Y une N–R-correspondance.*

(i) *On définit sur le produit tensoriel algébrique $X \odot_N Y$ une structure de R-module préhilbertien séparé en posant*

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle y, \langle x, x' \rangle y' \rangle.$$

Son complété autodual, noté $X \otimes_N Y$ est une M–R–correspondance, l'action à gauche de M étant définie par $m \,.\, (x \otimes y) = m \,.\, x \otimes y$.

(ii) *Si X_0 (respectivement Y_0) est un N-sous-module s-dense de X (respectivement, un R-sous-module s-dense de Y) alors $X_0 \odot Y_0$ est s-dense dans $X \otimes_N Y$.*

Hormis la séparation, l'assertion (i) résulte du théorème 5-9 de [18] et du corollaire 2.4.

Soit $\Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ un élément de $X \odot_N Y$ de norme nulle. D'après le principe d'orthogonalisation ([19, Lemme 6-7]) nous pouvons supposer que les x_i sont deux à deux orthogonaux. De plus, chaque x_i admet une décomposition polaire $x_i = u_i \,.\, \langle x_i, x_i \rangle^{1/2}$ ([19, Proposition 6.4]). On a donc

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, \langle x_i, x_i \rangle y_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \langle x_i, x_i \rangle^{1/2} y_i, \langle x_i, x_i \rangle^{1/2} y_i \rangle .
\end{aligned}
$$

Par suite on a $\langle x_i, x_i \rangle^{1/2} y_i = 0$ soit

$$
0 = u_i \otimes \langle x_i, x_i \rangle^{1/2} y_i = x_i \otimes y_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.
$$

(ii) Il suffit de démontrer que tout tenseur élémentaire $x \otimes y$ de $X \odot_N Y$ est limite pour la topologie σ d'une suite généralisée d'élémente de $X_0 \odot_N Y_0$. Or, d'après le théorème de densité de Kaplansky pour les modules hilbertiens autoduaux ([21, Proposition 2.7] ou [11, Proposition 2.16]), il existe une suite généralisée (x_α) de X_0 (respectivement, (y_β) de Y_0) bornée en norme et convergeant vers x (respectivement, y) pour la topologie de Mackey. Pour tout u de X et tout v de Y on a:

$$
\begin{aligned}
&\langle u \otimes v, x \otimes y - x_\alpha \otimes y_\beta \rangle \\
&\quad = \langle u \otimes v, (x - x_\alpha) \otimes y \rangle + \langle u \otimes v, x_\alpha \otimes (y - y_\beta) \rangle \\
&\quad = \langle v, \langle u, x - x_\alpha \rangle y \rangle + \langle \langle u, x_\alpha \rangle^* v, y - y_\beta \rangle .
\end{aligned}
$$

La convergence pour la topologie σ de (x_α) vers x nous assure que le premier terme tend ultrafaiblement vers 0 et la convergence pour la topologie de Mackey de (y_β) vers y nous donne la convergence ultrafaible du deuxième terme vers 0.

2.10. DÉFINITION. Soient X une M–N-correspondance et Y une M–R-correspondance. Nous appellerons *composée* de X et Y la M–R-correspondance $X \otimes_N Y$ introduite dans la proposition précédente.

2.11. Remarque. On peut démontrer, via l'équivalence de catégories du théorème 2.2, que notre définition de la composée de deux correspondances coïncide avec celle de A. Connes ([7, §11]) et avec le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert ([20]). Dans le cas de correspondances définies à partir d'applications complètement positives, la composée ne coïncide pas en général avec la correspondance associée à l'application complètement positive composée; en effet si ϕ est un état sur N et si i désigne l'injection canonique de $\mathbb{C}$ dans N, on a

$$X_{\phi\ \iota} = \mathbb{C} \quad \text{et} \quad X_\iota \otimes_N X_\phi = H_\phi .$$

Cependant, nous avons les résultats suivants:

2.12. THÉORÈME. *Soient P et Q deux applications complètement positives normales respectivement de M dans N et de N dans R. Notons (X, ξ), (Y, η) et (Z, ζ) les couples de la représentation de Gelfand–Segal associés respectivement à P, Q et $Q \circ P$.*
L'homomorphisme algébrique de $M \odot R$ dans $(M \odot N) \odot (N \odot R)$ qui à $m \otimes r$ associe $(m \otimes 1) \otimes (1 \otimes r)$ définit un morphisme orthogonal U de Z dans $X \otimes_N Y$ tel que $U(\zeta) = \xi \otimes \eta$. Si P est un poids opératoriel fini, ou si Q est un morphisme alors U est une équivalence de correspondances.

La première assertion se vérifie de manière immédiate. Pour tous $m \in M$, $b \in N$ et $r \in R$ on a

$$\Lambda_P(m \otimes b) \otimes \Lambda_Q(1 \otimes r) = \Lambda_P(m \otimes 1) \otimes \Lambda_Q(b \otimes r)$$

et l'ensemble de ces vecteurs est s-total dans $X \otimes_N Y$ (Proposition 2.9.(ii)).
Dans le cas où P est un poids opératoriel fini on a

$$\begin{aligned} \Lambda_p(m \otimes b) \otimes \Lambda_Q(1 \otimes r) &= \Lambda_p(mb \otimes 1) \otimes \Lambda_Q(1 \otimes r) \\ &= mb \,.\, (\xi \otimes \eta) \,.\, r \end{aligned}$$

et dans le cas où Q est un morphisme

$$\begin{aligned} \Lambda_p(m \otimes 1) \otimes \Lambda_Q(b \otimes r) &= \Lambda_p(m \otimes 1) \otimes \Lambda_Q(1 \otimes Q(b)r) \\ &= m \,.\, (\xi \otimes \eta) \,.\, Q(b)r. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, l'image de U contient un sous ensemble s-total et U est une équivalence.

2.13. THÉORÈME. *Supposons $R \subset N \subset M$. Soient E dans $P(M, N)$ et G dans $P(N, R)$. Supposons de plus qu'il existe une famille filtrante croissante (F_i) de poids opératoriels normaux finis de N dans R majorés par G telle que, pour tout $b \in N_+$, on ait $G(b) = \sup_i F_i(b)$. L'isomorphisme algébrique canonique de $M \odot_N N$ sur M définit par restriction un homomorphisme de $\mathcal{N}_E \odot \mathcal{N}_G$ dans $\mathcal{N}_{G \circ E}$ qui se prolonge en une équivalence de correspondances entre $X_E \otimes_N X_G$ et $X_{G \circ E}$.*

Pour tous x, x' dans $\mathcal{N}_E$ et tous y, y' dans $\mathcal{N}_G$ il est clair que xy et $x'y'$ appartiennent à $\mathcal{N}_{G \circ E}$ et on a

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda_E(x) \otimes \Lambda_G(y), \Lambda_E(x') \otimes \Lambda_G(y') \rangle \\ &\quad = \langle \Lambda_G(y), \pi_E(\langle \Lambda_E(x), \Lambda_E(x') \rangle) \Lambda_G(y') \rangle \\ &\quad = G(y^* E(x^* x') y') \\ &\quad = \langle \Lambda_{G \circ E}(xy), \Lambda_{G \circ E}(x'y') \rangle. \end{aligned}$$

Il existe donc un opérateur orthogonal U de $X_E \otimes_N X_G$ dans $X_{G \circ E}$ tel que $U(\Lambda_E(x) \otimes \Lambda_G(y)) = \Lambda_{G \circ E}(xy)$ pour tous x de $\mathcal{N}_E$ et y de $\mathcal{N}_G$. Montrons qu'il est à image s-dense dans $X_{G \circ E}$.

Soit $z \in \mathcal{N}_{G \circ E}$. Alors $E(z^*z)$ admet dans N_+ une résolution spectrale ([10, I, Théorème 1.5]) telle que

$$E(z^*z) = \sup_n \left(\int_0^n t\,\mathrm{d}e_t + np \right).$$

Donc $G \circ E(z^*z) \geqslant nG(p)$. Puisque $G \circ E(z^*z)$ appartient à R_+, on a $G(p) = 0$, d'où $p = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le projecteur $f_n = e_n - e_{1/n}$ appartient à $\mathcal{N}_G$. Sinon il existerait $\omega \in R_*^+$ tel que $G(f_n)(\omega) = +\infty$. Or il existe un poids opératoriel normal fini F de N vers R, majoré par G tel que

$$F(f_n)(\omega) > n\,\omega(G \circ E(z^*z))$$

Mais

$$\begin{aligned} \omega(G \circ E(z^*z)) &\geqslant \omega(F \circ E(z^*z)) \\ &\geqslant E(z^*z)(\omega \circ F) \\ &\geqslant \int_0^\infty t\,\mathrm{d}\omega \circ F(e_t) \\ &\geqslant \int_{1/n}^n t\,\mathrm{d}\omega \circ F(e_t) \\ &\geqslant \frac{1}{n}\, w \circ F(f_n) \end{aligned}$$

d'où la contradiction. Posons $z_n = ze_nf_n = zf_n$. L'égalité

$$E(e_n z^* z e_n) = \int_0^n t\,\mathrm{d}e_t$$

montre que ze_n est dans $\mathcal{N}_E$. On peut donc écrire

$$U(\Lambda_E(ze_n) \otimes \Lambda_G(f_n)) = \Lambda_{G\ E}(z_n)$$

et comme

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_{G\ E}(z - z_n), \Lambda_{G\ E}(z - z_n)\rangle &= G \circ E((1 - f_n)z^*z(1 - f_n)) \\ &= G((1 - f_n)\,E(z^*z)(1 - f_n)) \\ &= G \circ E(z^*z) - G\left(\int_{1/n}^n t\,\mathrm{d}e_t\right),\end{aligned}$$

la suite $(\Lambda_{G\ E}(z_n))$ converge vers $\Lambda_{G\ E}(z)$ pour la topologie s, ce qui montre notre assertion.

Il reste à vérifier que U est M-linéaire à gauche. Or, pour tout $m \in M$, tout $x \in \mathcal{N}_E$ et tout $y \in \mathcal{N}_G$ on a

$$\begin{aligned}U(m\,.\,(\Lambda_E(x) \otimes \Lambda_G(y))) &= U(\Lambda_E(mx) \otimes \Lambda_G(y)) \\ &= (\Lambda_{G\ E}(mxy) \\ &= \pi_{G\ E}(m)U(\Lambda_E(x) \otimes \Lambda_G(y)).\end{aligned}$$

2.14. Corollaire. *Supposons $N \subset M$. Soient $E \in E(M, N)$ et $\phi \in P(N)$; posons $\psi = \varphi \circ E$. Alors, $X_E \otimes_N H_\varphi$ et H_ψ sont canoniquement isomorphes en tant que correspondances de M à N au sens de A. Connes. Autrement dit, $X_E \otimes_N L^2(N)$ est isomorphe à $L^2(M)$ considéré comme correspondance de M à N en restreignant à N l'action à droite de M.*

L'isomorphisme U construit dans le théorème précédent réalise une équivalence de M–$\mathbb{C}$-correspondances entre $X_E \otimes_N H_\varphi$ et H_ψ. Comme E est une espérance, $\mathcal{N}_\varphi$ est inclus dans $\mathcal{N}_\psi$ et H_φ s'identifie à un sous-espace de H_ψ. Pour tous $x \in M$, $y \in N$ et $\xi \in H_\varphi$ on a $J_\varphi \xi = J_\psi \xi$ et $\pi_\varphi(y)\xi = \pi_\psi(y)\xi$. De plus, pour y dans $\mathcal{N}_\varphi$ on a $U(\Lambda_E(x) \otimes \Lambda_\varphi(y) = \pi_\psi(x)\Lambda_\psi(y)$, d'où par continuité,

$$U(\Lambda_E(x) \otimes \xi) = \pi_\psi(x)\xi.$$

Par suite, pour tout $b \in N$, on a

$$\begin{aligned} U((\Lambda_E(x) \otimes \xi) \,.\, b) &= U(\Lambda_E(x) \otimes J_\varphi \pi_\varphi(b^*) J_\varphi \xi) \\ &= \pi_\psi(x) J_\varphi \pi_\varphi(b^*) J_\varphi \xi \\ &= \pi_\psi(x) J_\psi \pi_\psi(b^*) J_\psi \xi \\ &= J_\psi \pi_\psi(b^*) J_\psi \pi_\psi(x) \xi \\ &= U(\Lambda_E(x) \otimes \xi) \,.\, b. \end{aligned}$$

2.15. LEMME. *Toute M–N-correspondance définie par un poids opératoriel fini de $P(M, N)$ est équivalente à une M–N-correspondance définie par une espérance conditionnelle de $E(M, N)$.*

Soit (π_F, X_F, ξ_F) la représentation de Gelgand Segal associée à un poids opératoriel fini F de $P(M, N)$. La décomposition polaire de ξ_F dans X_F s'écrit $\xi_F = \eta_F \,.\, \langle \xi_F, \xi_F \rangle^{1/2}$ où $p = \langle \eta_F, \eta_F \rangle$ est le support de $\langle \xi_F, \xi_F \rangle$. Il est clair que η_F reste central, totalisateur et séparateur. De plus

$$F(1 - p) = \langle \xi_F, (1 - p)\xi_F \rangle = \langle \xi_F, \xi_F \rangle (1 - p) = 0.$$

Il en résulte que $\langle \eta_F, \eta_F \rangle = 1$. Notons E l'espérance conditionnelle associée au vecteur η_F. On vérifie immédiatement l'existence d'une équivalence U entre X_E et X_F telle que, pour $x \in M$,

$$U\Lambda_E(x) = \pi_F(x)\eta_F \quad \text{et} \quad U^*\Lambda_E(x) = \Lambda_E(x)\langle \xi_F, \xi_F \rangle^{1/2}.$$

2.16. COROLLAIRE. *Soit N une sous-algèbre de von Neumann espérée de M. Tout poids opératoriel fini de $P(M, N)$ détermine, à équivalence près, la même M–N-correspondance.*

L'assertion résulte du corollaire 2.14, du théorème 2.2 et du lemme précédent.

Nous terminons ce paragraphe par un lemme qui nous servira ultérieurement.

2.17. LEMME. *Soit P une application complètement positive normale de M dans N. L'application $M \mapsto \Lambda_p(m \otimes 1)$ est continue de M muni de la topologie normique (respectivement ultraforte; respectivement ultrafaible) dans X_P muni de la topologie normique (respectivement s; respectivement σ).*

La continuité normique est immédiate. Soit (m_ι) une suite généralisée convergeant ultrafortement vers 0. Alors, $(m_\iota^* m_\iota)$ converge ultrafaiblement vers 0, ainsi que

$$\langle \Lambda_P(m_\iota \otimes 1), \Lambda_P(m_\iota \otimes 1)\rangle = P(m_\iota^* m_\iota),$$

d'où la convergence de $(\Lambda_P(m_i \otimes 1))$ pour la topologie s.

Enfin, si une suite généralisée (m_ι) de M converge ultrafaiblement vers 0, il en est de même pour $(\pi_P(m_\iota))$ donc $(\Lambda_P(m_\iota \otimes 1)) = (\pi_P(m_\iota)\xi_P)$ converge vers 0 pour la topologie σ.

§3. Indice d'une espérance conditionnelle

Dans la suite on considère une sous-algèbre de von Neumann N d'une algèbre de von Neumann M. On désigne par i l'injection de N dans M et par X_i la N–M-correspondance associée.

Pour tout E fini de $P(M, N)$ on notera π_E, X_E, ξ_E les éléments de la représentation de Gelfand–Segal.

3.1. Lemme. *Soit E fini dans $P(M, N)$. Il existe une application $\mathbf{L}_N(X_E)$ – M-linéaire injective j_E du produit tensoriel algébrique $X_E \odot_N X_i$ dans l'algèbre $\mathbf{K}_N^0(X_E)$ des opérateurs de rang fini sur X_E telle que $j_E(\xi \otimes y) = \theta_{\xi, \Lambda_E(y^*)}$ pour tous ξ de X_E et y de M.*

L'existence de j_E vient de la N-bilinéarité de l'application qui à (ξ, y) de $X_E \times M$ associe $\theta_{\xi, \Lambda_E(y^*)}$. On vérifie immédiatement que j_E est $\mathbf{L}_N(X_E)$ – M-linéaire. Montrons que j_E est injective. Soit $u = \Sigma_k \zeta_k \otimes y_k$ tel que $j_E(u) = 0$. En passant à l'adjoint il vient pour tout j

$$0 = \sum_k \theta_{\Lambda_E(y_k^*), \zeta_k}(\zeta_l) = \sum_k \Lambda_E(y_k^*) \,.\, \langle \zeta_k, \zeta_l\rangle.$$

Par injectivité de Λ_E on en déduit $\Sigma_k y_k^* \langle \zeta_k, \zeta_l\rangle = 0$, d'où $\langle u, u\rangle = \Sigma_{k,l} y_k^* \langle \zeta_k, \zeta_l\rangle y_l = 0$.

3.2. Proposition. ([13, Propositions 3.1.4 et 3.1.5]). *Soit E fini dans $P(M, N)$. Désignons par e l'opérateur θ_{ξ_E, ξ_E}. On a pour tous x et y de M*

(i) $e\Lambda_E(x) = \Lambda_E(E(x))$.

(ii) $e\pi_E(x)e = \pi_E(E(x))e$.

(iii) $\pi_E(x)e\pi_E(y)^* = \theta_{\Lambda_E(x), \Lambda_E(y)}$.

De plus si E est une espérance conditionnelle on a

(iv) *e est un projecteur de $\mathbf{L}_N(X_E)$ de support central* 1.

(v) *Soit x dans M. Alors x est dans N si seulement si $\pi_E(x)$ et e commutent.*

(vi) *L'application $b \mapsto \pi_E(b)e$ définit un isomorphisme entre les algèbres de von Neumann N et $e\mathbf{L}_N(X_E)e$. La réciproque est l'application $T \mapsto \langle \xi_E, T\xi_E \rangle$.*

(vii) *Si nous identifions N et $e\mathbf{L}_N(X_E)e$ par l'isomorphisme précédent, l'application $\xi \mapsto \theta_{\xi,\xi_E}$ définit une équivalence de $\mathbf{L}_N(X_E)$–N-correspondances entre X_E et $\mathbf{L}_N(X_E)e$. Sa réciproque est l'application $T \mapsto T\xi_E$.*

L'assertion (i) est immédiate. Soient x et y dans M. On a $e\pi_E(x)e\Lambda_E(y) = \Lambda_E(E(xE(y))) = \Lambda_E(E(x)E(y)) = \pi_E(E(x))e\Lambda_E(y)$ et $\pi_E(x)e\pi_E(y)^* = \theta_{\pi_E(x)\xi_E,\pi_E(y)\xi_E} = \theta_{\Lambda_E(x),\Lambda_E(y)}$, d'où (ii) et (iii).

Supposons maintenant que E est une espérance conditionnelle. On vérifie immédiatement que e est un projecteur et que $e\xi_E = \xi_E$. D'après 1.1 il existe c dans $Z(N)$ tel que $\varrho(c)$ soit le support central de e dans $\mathbf{L}_N(X_E)$. On a alors

$$\Lambda_E(c) = \varrho(c)\xi_E = \varrho(c)e\xi_E = e\xi_E = \xi_E,$$

d'où $c = 1$ par injectivité de Λ_E.

(v) Soit x dans M. Si x appartient à N, pour tout y de M on a

$$e\pi_E(x)\Lambda_E(y) = \Lambda_E(E(xy)) = \Lambda_E(xE(y)) = \pi_E(x)e\Lambda_E(y)$$

d'où $e\pi_E(x) = \pi_E(x)e$.

Réciproquement, si $e\pi_E(x) = \pi_E(x)e$ alors

$$\Lambda_E(x) = \pi_E(x)\xi_E = \pi_E(x)e\xi_E = e\pi_E(x)\xi_E = \Lambda_E(E(x)).$$

Donc $E(x) = x$, c'est-à-dire x appartient à N.

(vi) L'application considérée est clairement un morphisme. De plus pour tout b de N et tout T de $e\mathbf{L}_N(X_E)e$ on a

$$\langle \xi_E, \pi_E(b)e\xi_E \rangle = b$$

et

$$\pi_E(\langle \xi_E, T\xi_E \rangle)e = \theta_{\xi_E, \langle \xi_E, T\xi_E \rangle, \xi_E} = eTe = T.$$

L'assertion (vii) se vérifie facilement.

3.3. PROPOSITION. *Soit E fini dans $P(M, N)$. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Il existe K dans $\mathbb{R}^+$ tel que $K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ soit une application positive*;

(ii) *Il existe K dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x de M_+ on ait $\|x\| \leqslant K\|E(x)\|$*;

(iii) *L'application Λ_E est bicontinue de M sur $\Lambda_E(M)$ pour les topologies normiques*;

(iv) *$\Lambda_E(M)$ est un N-module hilbertien*;

(v) *$\Lambda_E(M)$ est un N-module hilbertien autodual*;

(vi) *L'homomorphisme j_E de $X_E \odot_N X_\iota$ dans $\mathbf{K}_N^0(X_E)$ est un isomorphisme.*

Lorsque ces conditions sont réalisées, on a

$$\|\Lambda_E^{-1}\|^2 = \inf\{K \in \mathbb{R}^+;\ K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M \text{ positive}\}$$

$$= \inf\{K \in \mathbb{R}^+;\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \|x\| \leqslant K\|E(x)\|\}.$$

Posons

$$K_1 = \inf\{K \in \mathbb{R}^+;\ K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M \text{ positive}\}$$

$$K_2 = \inf\{K \in \mathbb{R}^+;\ \forall x \in M_+ \quad \|x\| \leqslant K\|E(x)\|\}.$$

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente et on a $K_2 \leqslant K_1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). La continuité normique de Λ_E résulte du lemme 2.17. Pour tout y de M on a

$$K\|\Lambda_E(y)\|^2 = K\|E(y^*y)\| \geqslant \|y^*y\| = \|y\|^2.$$

Donc Λ_E^{-1} est continu et $\|\Lambda_E^{-1}\|^2 \leqslant K_2$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit y dans M. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, posons:

$$b_n = (E(y^*y) + 1/n)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \xi_n = \Lambda_E(y \,.\, b_n).$$

On a

$$\|\xi_n\|^2 = \|b_n E(y^*y) b_n\| = \|E(y^*y)(E(y^*y) + 1/n)^{-1}\| \leqslant 1$$

et

$$b_n y^* y b_n \leqslant \|y b_n\|^2 \leqslant \|\Lambda_E^{-1}\|^2 \|\xi_n\|^2 \leqslant \|\Lambda_E^{-1}\|^2$$

D'où:

$$y^*y \leqslant \|\Lambda_E^{-1}\|^2(E(y^*y) + 1/n)$$

pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et

$$y^*y \leqslant \|\Lambda_E^{-1}\|^2 E(y^*y).$$

La propriété (i) est donc vérifiée et on a $K_1 \leqslant \|\Lambda_E^{-1}\|^2$. Nous avons obtenu l'équivalence des assertions (i) à (iii) ainsi que l'égalité $K_1 = K_2 = \|\Lambda_E^{-1}\|^2$.

(iii) $\Rightarrow$ (v). Désignons par S_1 la boule unité fermée de $\Lambda_E(M)$. Alors $S = \Lambda_E^{-1}(S_1)$ est incluse dans la boule fermée de rayon $\|\Lambda_E^{-1}\|$ de M, et est relativement compacte pour la topologie ultrafaible. Puisque Λ_E est continue (lemme 2.17), $S_1 = \Lambda_E(S)$ est relativement compacte pour la topologie σ. Comme S_1 est fermée pour cette topologie on voit que S_1 est compacte et que X est autodual (Proposition 1.7).

(v) $\Rightarrow$ (iv) est évident.

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Pour la norme définie par E et pour celle d'algèbre de von Neumann, M est un espace de Banach. Ces deux normes sont donc équivalentes.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Pour tout η de X_E il existe y dans M tel que $\eta = \Lambda_E(y)$ et donc pour tout ξ de X_E on a

$$\theta_{\xi,\eta} = \theta_{\xi,\Lambda_E(y)} = j_E(\xi \otimes y^*).$$

Donc j_E est surjective.

(vi) $\Rightarrow$ (v). Soient ξ dans X_F et $\xi = \eta \, . \, \langle\xi, \xi\rangle^{1/2}$ sa décomposition polaire. L'opérateur $\theta_{\eta,\eta}$ est de rang fini et autoadjoint. Donc il s'écrit:

$$\theta_{\eta,\eta} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{\xi_i,\Lambda_E(y_i^*)} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{\Lambda_E(y_i^*),\xi_i}.$$

Alors

$$\xi = \theta_{\eta,\eta}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_E(y_i^*)\langle\xi_i, \xi\rangle = \Lambda_E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^*\langle\xi_i, \xi\rangle\right).$$

3.4. Remarques. Supposons réalisées les conditions équivalentes de la proposition précédente.

(i) Pour tout T de $\mathbf{L}_N(X_E)$ il existe un unique $a \in M$ tel que $Te = \pi_E(a)e$: c'est l'unique a tel que $\Lambda_E(a) = T\xi_E$.

(ii) Pour tout y de $N' \cap M$, l'opérateur de multiplication à droite par y est continu et N-linéaire de M dans M. Il définit par bicontinuité de Λ_E un opérateur noté $\pi'_E(y)$ appartenant à $\mathbf{L}_N(X_E)$. Il est clair que $\pi'_E(y)$ commute à $\pi_E(M)$. Réciproquement, si T dans $\mathbf{L}_N(X_E)$ commute avec $\pi_E(M)$ alors l'élément a de l'assertion (i) appartient à $N' \cap M$ et $T = \pi'_E(a)$ car pour tout $x \in M$ on a:

$$T\Lambda_E(x) = T\pi_E(x)\xi_E = \pi_E(x)T\xi_E = \pi_E(x)\Lambda_E(a) = \pi'_E(a)\Lambda_E(x)$$

Le commutant de $\pi_E(M)$ dans $\mathbf{L}_N(X_E)$ est donc $\pi'_E(N' \cap M)$.

(Ce résultat est un cas particulier du théorème de commutation pour les N-algèbres hilbertiennes [12]).

(iii) D'après 1.8(v), il existe une famille (m_i) de M telle que $(\Lambda_E(m_i))$ soit une base orthonormale de X_E. On a alors en topologie ultrafaible

$$\mathrm{Id} = \sum_i \theta_{\Lambda_E(m_i),\Lambda_E(m_i)} = \sum_i \pi_E(m_i)e\pi_E(m_i^*).$$

3.5. THÉORÈME. *Soient E fini dans $P(M, N)$, et e l'opérateur de rang un associé. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe K dans $\mathbb{R}^+$ tel que $K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ soit complètement positive;*

(ii) *Il existe une famille (m_i) dans M telle que $\Sigma_i m_i m_i^*$ converge ultrafaiblement et telle que $(\Lambda_E(m_i))$ soit une base orthonormale de X_E;*

(iii) *Il existe un vecteur central η dans $X_E \otimes_N X_i$ tel que $\langle \eta, \xi_E \otimes 1\rangle = 1$;*

(iv) *Il existe F fini dans $P(\mathbf{L}_N(X_E), M)$ tel que $F(e) = 1$ (on identifie M avec $\pi_E(M)$);*

(v) *Il existe F fini dans $P(\mathbf{L}_N(X_E), M)$, tel que pour tous x et y de M;*

$$F(\theta_{\Lambda_E(x),\Lambda_E(y)}) = xy^*$$

(vi) *L'application j_E se prolonge en un isomorphisme algébrique $\mathbf{L}_N(X_E)$-M-linéaire j_E, de $X_E \otimes_N X_i$ sur $\mathbf{L}_N(X_E)$.*

Supposons les conditions précédentes réalisées. Alors
a) *Il y a unicité du vecteur η ainsi que du poids opératoriel F et*
$\|\eta\|^2 = \inf\{K \in \mathbb{R}^+;\ K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M \gg 0\}$;
b) *Pour toute base orthonormale $(\Lambda_E(m_i))$ de X_E, la famille $(\Lambda_F(\theta_{\Lambda_E(m_i),\xi_E}))$ est une base orthonormale de X_F, le vecteur η s'écrit $\eta = \Sigma_i \Lambda_E(m_i) \otimes m_i^*$ et on a*

dans $Z(M)$ les égalités.

$$F(\mathrm{Id}) = \langle \eta, \eta \rangle = \sum_l m_l m_l^*$$

c) *L'application $\Lambda_F \circ j_E$ est une équivalence de $\mathbf{L}_N(X_E)$-M-correspondances entre $X_E \otimes_N X_l$ et $X_F = \Lambda_F(\mathbf{L}_N(X_E))$, qui transforme η en $\Lambda_F(\mathrm{Id})$.*

(i) $\Rightarrow$ (iii). Nous pouvons définir une application τ de $\Lambda_E(M) \odot_N X_l$ dans M telle que si $\xi = \Sigma_{l=1}^n \Lambda_E(x_l) \otimes y_l$ on ait $\tau(\xi) = \Sigma_j x_j y_j$. Il est clair que τ est M–N-linéaire; montrons qu'elle est continue. L'image de la matrice positive $[x_k^* x_l]$ de $M_n(M)$ par l'application $(K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M) \otimes I_n$ est positive et il en résulte que

$$\sum_{k,l} y_k^*(x_k^* x_l) y_l \leqslant K \sum_{k,l} y_k^* E(x_k^* x_l) y_l;$$

c'est-à-dire: $\tau(\zeta)^* \tau(\zeta) \leqslant K\langle \zeta, \zeta \rangle$.

Par suite il existe η dans $X_E \otimes_N X_l$ tel que $\langle \eta, . \rangle$ soit le prolongement continu de τ. La M-linéarité à gauche de τ entraîne que η est central et on a $\langle \eta, \xi_E \otimes 1 \rangle = \tau(\xi_E \otimes 1)$.

Remarquons qu'alors $\|\eta\| = \|\langle \eta, . \rangle\| = \|\tau\| \leqslant K^{1/2}$, c'est-à-dire $\|\eta\|^2 \leqslant K$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $\zeta = \Sigma_{l=1}^n \Lambda_E(x_l) \otimes y_l$ dans $\Lambda_E(M) \odot_N X_l$. On a $\langle \eta, \zeta \rangle^* \langle \eta, \zeta \rangle \leqslant \|\eta\|^2 \langle \zeta, \zeta \rangle$, c'est à dire

$$\left(\sum_l x_l y_l\right)^* \left(\sum_l x_l y_l\right) \leqslant \|\eta\|^2 \sum_{k,l} y_k^* E(x_k^* x_l) y_l,$$

donc

$$\sum_{k,l} y_k^*(\|\eta\|^2 (i \circ E) - \mathrm{Id}_M)(x_k^* x_l) y_l \geqslant 0.$$

Par conséquent la matrice $[(\|\eta\|^2 (i \circ E) - \mathrm{Id}_M)(x_k^* x_l)]$ est positive dans $M_n(M)$ et $\|\eta\|^2 (i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ est complètement positive.

Nous avons donc obtenu l'équivalence de (i) et (iii) ainsi que la relation

$$\|\eta\|^2 = \inf\{K \in \mathbb{R}^+;\ K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M \geqslant 0\}.$$

Montrons maintenant que la condition (v) implique les conditions équivalentes de la proposition 3.3. Pour cela, il suffit de démontrer que $\Lambda_E(M)$ est normiquement fermé dans X_E. Soit (x_n) une suite de M telle que $(\Lambda_E(x_n))$ converge vers ξ dans X_E. La suite d'opérateurs $(\theta_{\Lambda_E(x_n), \xi_E})$ converge normiquement vers θ_{ξ,ξ_E}, donc $(x_n) = (F(\theta_{\Lambda_E(x_n),\xi_E}))$ converge normiquement dans M vers $F(\theta_{\xi,\xi_E})$. Par continuité de Λ_E il en résulte que ξ appartient à $\Lambda_E(M)$. Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'équivalence des assertions (ii) à (v).

(v) $\Rightarrow$ (ii). Considérons une base orthonormale $(\Lambda_E(m_j))$ de X_E. On a alors, d'après 3.4.(iii), $F(\mathrm{Id}) = \Sigma_j m_j m_j^*$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Posons $\xi_j = \Lambda_E(m_j) \otimes 1$. Il est clair que (ξ_j) constitue un système orthonormal de $X_E \otimes_N X_i$. Pour la topologie σ de $X_E \otimes_N X_i$ nous pouvons considérer le vecteur $\eta = \Sigma_j \xi_j \,.\, m_j^*$ (1.8.(vi)). Pour tout x de M, on a en topologie ultrafaible,

$$\langle \eta, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle = \sum_j \langle \xi_j \,.\, m_j^*, \quad \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle = \sum_j m_j \langle \Lambda_E(m_j), \Lambda_E(x)\rangle.$$

Par continuité de l'application Λ_E (lemme 2.17) il vient

$$\Lambda_E(\langle \eta, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle) = \sum_j \Lambda_E(m_j) < \Lambda_E(m_j), \Lambda_E(x)\rangle = \Lambda_E(x).$$

L'injectivité de Λ_E entraîne

$$\langle \eta, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle = x;$$

en particulier $\langle \eta \,.\, \xi_E \otimes 1\rangle = 1$. Montrons que η est central. Pour tous m et x dans M on a:

$$\langle m \,.\, \eta, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle = \langle \eta \,.\, \Lambda_E(m^*x) \otimes 1\rangle = m^*x$$

et

$$\langle \eta \,.\, m, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle = m^* \langle \eta \,.\, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle = m^*x.$$

Comme la famille des $\Lambda_E(x) \otimes 1$ est un ensemble s-total dans $X_E \otimes_N X_i$ (Proposition 2.9.(ii)) on a bien $\eta \,.\, m = m \,.\, \eta$ pour tout m de M.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Pour tous x et y dans M on a:

$$\begin{aligned}
\langle \theta_{\Lambda_E(y),\xi_E} \,.\, \eta, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle &= \langle \eta, \xi_E \,.\, \langle \Lambda_E(y), \Lambda_E(x)\rangle \otimes 1\rangle \\
&= \langle \eta \,.\, \xi_E \otimes 1\rangle \langle \Lambda_E(y), \Lambda_E(x)\rangle \\
&= \langle \Lambda_E(y), \Lambda_E(x)\rangle \\
&= \langle \Lambda_E(y) \otimes 1, \Lambda_E(x) \otimes 1\rangle
\end{aligned}$$

D'où

$$\theta_{\Lambda_E(y),\xi_E} \,.\, \eta = \Lambda_E(y) \otimes 1.$$

Le vecteur η est donc totalisateur pour la $\mathbf{L}_N(X_E)$-M-correspondance $X_E \otimes_N X_\iota$. Montrons qu'il est séparateur. Soit T dans $\mathbf{L}_N(X_E)$ tel que $T \cdot \eta = 0$. Il suffit de prouver que $T^*\Lambda_E(x) = 0$ pour tout x de M. Considérons une suite généralisée (x_α) telle que $(\Lambda_E(x_\alpha))$ converge vers $T^*\Lambda_E(x)$ pour la topologie s. Alors $(\Lambda_E(x_\alpha) \otimes 1)$ converge vers $T^*\Lambda_E(x) \otimes 1$ pour la topologie s car l'application de X_E dans $X_E \otimes_N X_\iota$ qui à ξ associe $\xi \otimes 1$, conserve les produits scalaires. Par suite on a

$$0 = \langle T\eta, \Lambda_E(x) \otimes 1 \rangle = \lim_\alpha \langle \pi_E(x_\alpha^*)\eta, \xi_E \otimes 1 \rangle = \lim_\alpha x_\alpha$$

car η est central, donc $T^*\Lambda_E(x) = \lim_\alpha \Lambda_E(x_\alpha) = 0$. Notons F le poids opératoriel fini de $P(\mathbf{L}_N(X_E), M)$ défini par η (cf. 2.7). On a alors: $F(e) = \langle \eta, \theta_{\xi_E, \xi_E} \cdot \eta \rangle = \langle \eta, \xi_E \otimes 1 \rangle = 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) résulte de $\theta_{\Lambda_E(x), \Lambda_E(y)} = \pi_E(x)e\pi_E(y^*)$.

Il reste à prouver l'équivalence de (vi) avec les autres assertions.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Soient x, y, x' et y' dans M on a:

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_F(j_E(x \otimes y)), \Lambda_F(j_E(x' \otimes y')) \rangle &= F(\theta_{\Lambda_E(y^*)\langle \Lambda_E(x), \Lambda_E(x') \rangle, \Lambda_E(y'^*)}) \\
&= y^* \langle \Lambda_E(x), \Lambda_E(x') \rangle y' \\
&= \langle \Lambda_E(x) \otimes y, \Lambda_E(x') \otimes y' \rangle.
\end{aligned}$$

Donc $\Lambda_F \circ j_E$ se prolonge en une application orthogonale et $\mathbf{L}_N(X_E)$ − M-linéaire de $X_E \otimes_N X_\iota$ dans X_F. Son image contient $\Lambda_F(\mathbf{K}_N^0(X_E))$ qui est σ-dense dans X_F. On a donc construit une équivalence de $X_E \otimes_N X_\iota$ sur X_F. Nous avons déjà montré que (v) implique $\Lambda_E(M) = X_E$. Pour vérifier (vi) il reste à montrer que $\Lambda_F(\mathbf{L}_N(X_E)) = X_F$. Soit $(\Lambda_E(m_k))$ une base orthonormale de X_E. Alors $(\Lambda_E(m_k) \otimes 1)$ est une base orthonormale de $X_E \otimes_\mathrm{N} X_\iota$ et si on pose

$$T_k = j_E(\Lambda_E(m_k) \otimes 1) = \theta_{\Lambda_E(m_k), \xi_E}$$

on obtient que $(\Lambda_F(T_k))$ est une base de X_F. On a alors

$$\sum_k T_k T_k^* = \sum_k \theta_{\Lambda_E(m_k), \langle \xi_E, \xi_E \rangle, \Lambda_E(m_k)} = \varrho(E(1))$$

suivant les notations de 1.1. Pour le poids opératoriel F la condition (ii) du théorème est satisfaite et on en déduit $\Lambda_F(\mathbf{L}_N(X_E)) = X_F$.

(vi) $\Rightarrow$ (iii). Soit $\eta = j_E^{-1}(\mathrm{Id})$. Comme j_E est $\mathbf{L}_N(X_E)$-M-linéaire on en déduit que η est central dans $X_E \otimes_N X_\iota$ et que

$$j_E(\xi_E \otimes 1) = e = j_E(e \cdot \eta).$$

Par suite $\langle \eta, \xi_E \otimes 1 \rangle = \langle \eta, e \cdot \xi_E \otimes 1 \rangle = \langle \xi_E \otimes 1, \xi_E \otimes 1 \rangle = 1$.

3.6. DÉFINITIONS. Soit E fini dans $P(M, N)$. Lorsque les conditions équivalentes de la proposition 3.3 sont vérifiées, E est dit *faiblement d'indice fini.* Lorsque les conditions du théorème 3.5 sont vérifiées, E est dit *d'indice fini* et on appelle alors indice de E, noté $\mathrm{Ind}(E)$, l'élément $\langle \eta, \eta \rangle = \Sigma m_j m_j^*$ de $Z(M)$. Si E est d'indice fini et si, de plus, X admet une base orthonormale finie, E est dit *fortement d'indice fini.*

3.7. Exemples

(i) Soit α une action d'un groupe G discret sur une algèbre de von Neumann N. Désignons par M le produit croisé $W^*(N, G, \alpha)$ et par E l'espérance conditionnelle canonique de M dans N. D'après [1, Théorème 1.2] il existe une famille d'unitaires (u_s) indexée par G telle que $(\Lambda_E(u_s))$ soit une base orthonormale de X_E. Par conséquent E est d'indice fini si et seulement si G est fini et on a alors $\mathrm{Ind}(E) = \mathrm{card}(G)$.

(ii) Soit $M = M_2(N)$. Identifions N à une sous-algèbre de von Neumann de M par l'isomorphisme canonique $b \mapsto \left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ et désignons par E l'espérance conditionnelle de M sur N telle que

$$E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}(a + d)$$

Si (e_{jk}) désignent les unités matricielles de M alors $(\sqrt{2}\Lambda_E(e_{jk}))$ est une base orthonormale de X_E et $\mathrm{Ind}(E) = 4$. Dans le cas où N est commutative on vérifie facilement que $2(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ est positive, et on voit donc que

$$\inf\{K \in \mathbb{R}^+ ;\ K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M \geqslant 0\} < \inf\{K \in \mathbb{R}^+ ;\ K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M \gg 0\}$$

(iii) Conservons les notations de l'exemple précédent et considérons la sous-algèbre de von Neumann P de M constituée des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ avec a et b dans N. Par restriction de E on obtient $E_0 \in E(P, N)$. Plus généralement, pour tout μ de $]-1, 1[$, soit $E_\mu \in E(P, N)$ tel que $E_\mu\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) = a + \mu b$. Alors X_{E_μ} admet pour base orthonormale $(\Lambda_{E_\mu}(\mathrm{Id}), \Lambda_{E_\mu}(m_\mu))$ avec $m_\mu = (1 - \mu^2)^{1/2}\left(\begin{smallmatrix} -\mu & 1 \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)$. Par suite $\mathrm{Ind}(E_\mu) = 2/(1 - \mu^2)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On remarque que pour $\mu \neq 0$ l'indice de E_μ n'appartient pas à N.

3.8. REMARQUE. Si E est d'indice fini, il est faiblement d'indice fini, mais $\|\Lambda_E^{-1}\|^2$ et $\|\mathrm{Ind}(E)\|$ peuvent différer, comme le montre l'exemple 3.7.(ii). Cependant, ces normes coïndicent lorsque N est proprement infinie (voir Proposition 3.28), autrement dit, dans ce cas, $K(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ est complètement positive si et seulement si elle est positive.

Dans le cas des facteurs de type II_1 et de l'espérance canonique, les travaux de Pimsner et S. Popa [17, Proposition 1.3 et Théorème 2.2] montrent que les notions d'indice définies en 3.6 sont équivalentes et qu'elles coïncident avec la définition de V.F.R. Jones.

Montrons que le théorème 3.5 généralise la situation envisagée par H. Kosaki [14]. Soient M et N deux facteurs, E une espérance conditionnelle de M sur N et φ un état normal fidèle sur N. Posons $\psi = \varphi \circ E$ et soit e_N le projecteur de $\mathbf{L}(H_\psi)$ tel que $e_N \Lambda_\psi(x) = \Lambda_\psi(E(x))$ pour tout x de M. La M–N-correspondance X_E et la représentation π_φ de N dans H_φ permettent, à l'aide de la représentation induite, de construire une représentation fidèle de M dans $\mathbf{L}(X_E \otimes_N H_\varphi)$, cet espace étant spatialement isomorphe à $\mathbf{L}(H_\psi)$ (Corollaire 2.14). On voit alors aisément qu'à $\pi_E(x)$ est associé $\pi_\psi(x)$ et qu'à e est associé e_N. Il en résulte que $\mathbf{L}_N(X_E)$ a pour image l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\psi(M)$ et e_N, c'est-à-dire $J_\psi N' J_\psi$, où N' désigne le commutant de N dans $\mathbf{L}(H_\psi)$. Le poids opératoriel E^{-1} de $P(N', M')$ se transporte donc en un poids opératoriel E' de $\mathbf{L}_N(X_E)$ dans M, tel que $E'(e) = 1$ (car $E^{-1}(J_\psi e_N J_\psi) = E^{-1}(e_N) = 1$).

Si E est d'indice fini au sens de H. Kosaki alors E' est fini et, d'après 3.5.(iv), E est d'indice fini au sens de 3.6. Réciproquement, si E est d'indice fini on voit, à l'aide de 3.4.(iii), que $E'(\mathrm{Id}) = \Sigma_j m_j m_j^*$, donc E est d'indice fini au sens de H. Kosaki et les valeurs de l'indice coïncident.

Dans ce contexte la remarque 3.4.(i) n'est autre que le lemme 3.3 de [14].

Nous montrons, dans les deux paragraphes suivants, comment retrouver l'indice local et la construction de base de V.F.R. Jones.

3.9. Indice local. Soient E dans $E(M, N)$ faiblement d'indice fini et p un projecteur non nul de $N' \cap M$. Puisqu'il existe K tel que $KE(p) \geqslant p$, l'élément $E(p)p$ est inversible dans $Z(N)p$. Notons α son inverse et pour tout x de pMp posons $E_p(x) = \alpha E(x)$. On vérifie aisément que E_p appartient à $E(pMp, pNp)$ et qu'elle est faiblement d'indice fini.

Supposons maintenant que E est d'indice fini et étudions l'indice de E_p. Remarquons tout d'abord que:

– l'opérateur $\pi_E(p)$ est le projecteur sur le sous-module $\Lambda_E(pM)$;

– l'opérateur $\pi'_E(p)$ défini en 3.4.(ii) est autoadjoint si et seulement si p appartient au centralisateur M_E de l'espérance E [5, définition 3.2 et corollaire 3.10];

– le projecteur Q sur l'image $\Lambda_E(Mp)$ de $\pi'_E(p)$ commute à $\pi'_E(M)$ et en particulier $\pi_E(p)Q$ est le projecteur sur $\Lambda_E(pMp)$.

Soit $(\Lambda_E(m_j))_{j\in I}$ une base orthonormale du sous-module $\Lambda_E(pMp)$, que nous complétons pour obtenir une base orthonormale $(\Lambda_E(m_j))_{j\in K}$ de $\Lambda_E(Mp)$ puis une base orthonormale $(\Lambda_E(m_j))_{j\in Y}$ de X_E. On vérifie facilement que $\Lambda_p(m_j E(p)^{1/2}))_{j\in I}$ est une base orthonormale de X_p (nous indexons par p les éléments de la représentation de Gelfand–Segal de E_p). On a alors:

$$\sum_{j\in I} m_j E(p)^{1/2} E(p)^{1/2} m_j^* \leqslant \|E(p)\| \sum_{j\in I} m_j m_j^*,$$

donc E_p est d'indice fini et $\mathrm{Ind}(E_p) \leqslant \|E(p)\|\ \mathrm{Ind}(E)$. En fait

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(E_p) &= F\left(\sum_{j\in I} \theta_{\Lambda_E(m_j E(p)),\Lambda_E(m_j)}\right)\\ &= F(\varrho(E(p))\pi_E(p)Q)\\ &= F(\varrho(E(p))Q)p.\end{aligned}$$

Dans le cas où N est un facteur on obtient:

$$\mathrm{Ind}(E_p) = E(p)F(Q)p.$$

Or

$$\pi'_E(p) = \sum_Y \theta_{\Lambda_E(m_j p),\Lambda_E(m_j)} = Q + \sum_{Y\setminus K} \theta_{\Lambda_E(m_j p),\Lambda_E(m_j)}$$

Donc $\mathrm{Ind}(E_p) \leqslant E(p)F(\pi'_E(p))p$.
On retrouve une inégalité analogue à celle de H. Kosaki ([14, Proposition 4.3]). Si de plus p appartient à M_E alors $Q = \pi'_E(p)$ et dans l'identification de la remarque 3.8, cet opérateur est associé à $\pi'_\psi(p)$ dans N'. D'où

$$\mathrm{Ind}(E_p) = E(p)F(\pi'_E(p)) \qquad \text{([14, Proposition 4.2]).}$$

3.10. Construction de base ([13, §3]). Soient E dans $E(M, N)$ d'indice fini et F le poids opératoriel défini dans le théorème 3.5. On a alors $\mathrm{Ind}(E) = F(\mathrm{Id}) \geqslant F(e) = 1$. Donc $\mathrm{Ind}(E)$ est inversible dans $Z(M)$ et nous pouvons définir E_1 dans $E(\mathbf{L}_N(X_E), M)$ par $E_1(T) = (\mathrm{Ind}(E))^{-1}F(T)$ pour tout T de $\mathbf{L}_N(X_E)$. Posons $z = \mathrm{Ind}(E)^{1/2}$. Si $(\Lambda_E(m_j))$ est une base orthonormale de X_E alors $(\theta_{\Lambda_E(m_j),\Lambda_E(z)})$ est une base orthonormale de X_{E_1} et on a

$$\begin{aligned}\sum_j \theta_{\Lambda_E(m_j),\Lambda_E(z)}\theta^*_{\Lambda_E(m_j),\Lambda_E(z)} &= \sum_j \theta_{\Lambda_E(m_j)\langle\Lambda_E(z),\Lambda_E(z)\rangle,\Lambda_E(m_j)}\\ &= \sum_j \theta_{\Lambda_E(m_j)\,.\,E(z^2),\Lambda_E(m_j)}\\ &= \varrho(E(\mathrm{Ind}(E))).\end{aligned}$$

Donç E_1 est d'indice fini et nous pouvons itérer notre construction. Nous obtenons ainsi pour tout n une algèbre de von Neumann M_n une espérance conditionnelle E_n et un projecteur e_n tels que $M_0 = M$, $M_1 = \mathbf{L}_N(X_E)$, $e_0 = e$, E_n appartient à $E(M_n, M_{n-1})$ et $M_{n+1} = \mathbf{L}_{M_{n-1}}(X_{E_n})$ est engendrée par M_n et e_n (nous identifions M_n et $\pi_{E_n}(M_n)$).

Dans le cas où l'indice de E est à valeurs dans $Z(N)$ – ce qui est en particulier réalisé quand M est un facteur – toutes les espérances conditionnelles E_n ont même indice que E.

3.11. LEMME ([14, Lemmes 5.1 et 5.2]; [13, Proposition 3.4.1]). *Soit E dans $E(M, N)$ d'indice fini telle que* $\operatorname{Ind}(E)$ *appartienne au centre de N. On a alors avec les notations du paragraphe précédent*

(i) *le projecteur e appartient au centralisateur de $E \circ E_1$;*

(ii) $e_1 e e_1 = \operatorname{Ind}(E)^{-1} e_1$;

(iii) $e e_1 e = \operatorname{Ind}(E)^{-1} e$.

(i) Pour tous x et y dand M on a

$$E \circ E_1(xeye) = E \circ E_1(xE(y)e) = E(xE(y)\operatorname{Ind}(E)^{-1})$$
$$= \operatorname{Ind}(E)^{-1} E(x)E(y)$$

et

$$E \circ E_1(exey) = E \circ E_1(eE(x)y) = E(\operatorname{Ind}(E)^{-1} E(x)y)$$
$$= \operatorname{Ind}(E)^{-1} E(x)E(y).$$

La densité ultrafaible dans $\mathbf{L}_N(X_E)$ des combinaisons linéaires des opérateurs de la forme xey nous assure le résultat.

(ii) Résulte de la proposition 3.2 (ii) appliquée à E_1.

(iii) La famille des $(\Lambda_{E_1}(xe))$ où x décrit M, étant totale dans X_{E_1} il suffit de vérifier l'égalité des opérateurs sur de tels vecteurs. On a

$$ee_1 e\Lambda_{E_1}(xe) = ee_1\Lambda_{E_1}(exe) = ee_1\Lambda_{E_1}(E(x)e)$$
$$= \Lambda_{E_1}(eE(x)\operatorname{Ind}(E)^{-1}) = \Lambda_{E_1}(exe \operatorname{Ind}(E)^{-1})$$
$$= \operatorname{Ind}(E)^{-1} e\Lambda_{E_1}(xe).$$

3.12. COROLLAIRE. *Soit E dans $E(M, N)$ d'indice fini telle que* $\mathrm{Ind}(E)$ *soit scalaire. Alors* $\mathrm{Ind}(E) \geqslant 4$ *ou bien il existe $n \geqslant 3$ tel que* $\mathrm{Ind}(E) = 4\cos^2 \pi/n$.

Posons $P_0 = \mathbb{C}$ et pour $n \geqslant 1$ soit P_n l'algèbre de von Neumann engendrée par $(1, e_0, \ldots e_{n-1})$. Nous définissons également un état τ_n sur P_n en restreignant $E \circ E_1 \ldots \circ E_n$. Il est clair que τ_{n+1} prolonge τ_n et l'assertion (i) du lemme précédent montre que pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ le projecteur e_k appartient au centralisateur de τ_n. Donc τ_n est une trace. La proposition 3.2.(v) et le lemme précédent assurent que pour la limite inductive des (P_n, τ_n), les hypothèses du théorème 4.1. de [13] sont satisfaites. On en déduit les valeurs possibles de l'indice.

3.13. REMARQUES. Soit E appartenant à $E(M, N)$.

(i) Si Q est une sous-algèbre de von Neumann de M et R une sous-algèbre de von Neumann de N telles que E définisse par restriction une espérance E' de $E(Q, R)$, alors E' est d'indice fini (resp. faiblement d'indice fini) dès que E possède la même propriété.

Ce résultat s'applique en particulier lorsqu'on considère l'espérance $E' \in E(N' \cap M, Z(N))$ déduite de E, mais aussi avec pour sous-algèbre de N le centralisateur d'un poids ϕ de $P(N)$ et pour sous-algèbre de M le centralisateur du poids $\phi \circ E$ de $P(M)$.

(ii) Supposons E d'indice fini; si P est une sous-algèbre de von Neumann de M contenant N alors il existe $G \in E(M, P)$. En effet, la restriction E' de E à P est d'indice fini et il existe E'_1 appartenant à $E(\mathbf{L}_N(X_{E'}), P)$. Désignons par j l'injection canonique de $X_{E'}$ dans X_E; on vérifie immédiatement que G défini par

$$G(x) = E'_1(j^* \pi_E(x) j) \quad \text{pour } x \in M, \text{ appartient à } E(M, P).$$

Etudions maintenant la composée de deux espérances conditionnelles.

3.14. PROPOSITION. *Soient $P \subset N \subset M$ trois algèbres de von Neumann, G_1 dans $E(M, N)$ et G_2 dans $E(N, P)$. Posons $E = G_2 \circ G_1$. Alors E est d'indice fini (respectivement, faiblement d'indice fini) si et seulement si G_1 et G_2 sont d'indice fini (respectivement, faiblement d'indice fini). De plus si E est d'indice fini et si* $\mathrm{Ind}(G_2)$ *appartient au centre de M, ce qui est le cas si N est un facteur alors*

$$\mathrm{Ind}(E) = \mathrm{Ind}(G_2) \,.\, \mathrm{Ind}(G_1).$$

Désignons par i_1 l'injection de N dans M, par i_2 celle de P dans N et posons $i = i_1 \circ i_2$. Nous noterons sans indice les objets de la représentation de

Gelfand–Segal de E et avec l'indice k ceux définis à partir de G_k. L'équivalence canonique de $X_1 \otimes_N X_2$ sur X sera notée U.

Supposons d'abord que G_1 et G_2 sont d'indice fini (respectivement faiblement d'indice fini). Il existe des réels K_1 et K_2 tels que $K_1(i_1 \circ G_1) - \mathrm{Id}_M$ et $K_2(i_2 \circ G_2) - \mathrm{Id}_N$ soient complètement positives (respectivement positives). Par composition avec i_1 et G_1 l'application $K_2(i_1 \circ i_2 \circ G_2 \circ G_1) - i_1 \circ G_1$ est complètement positive (respectivement positive), d'où $K_1 K_2(i \circ E) - \mathrm{Id}_M$ est complètement positive (respectivement positive).

Supposons que E est faiblement d'indice fini. Soit ζ dans X_1. Alors $U(\zeta \otimes \xi_2)$ appartient à $X = \Lambda(M)$ et il existe $x \in M$ tel que $\zeta \otimes \xi_2 = U^*\Lambda(x) = \Lambda_1(x) \otimes \xi_2$. Or

$$\|\zeta - \Lambda_1(x)\| = \|(\zeta - \Lambda_1(x)) \otimes \xi_2\| = 0,$$

donc $X_1 = \Lambda_1(M)$ et G_1 est faiblement d'indice fini. Par ailleurs G_2 est faiblement d'indice fini d'après la remarque 3.13.

Supposons maintenant que E est d'indice fini et montrons qu'il en est de même pour G_1. On a déjà remarqué que G_2 est d'indice fini. Soit η_2 le vecteur central de $X_2 \otimes_P X_{i_2}$ qui définit l'indice (Théorème 3.5). Posons $z = \mathrm{Ind}(G_2)^{-1}$ et $\zeta_2 = \eta_2 \,.\, z$. Alors $\langle \zeta_2, \zeta_2 \rangle = 1$ et pour tous x, x', y et y' de M on a

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_1(x) \otimes \zeta_2 \otimes y, \Lambda_1(x') \otimes \zeta_2 \otimes y' \rangle &= y^* \langle \zeta_2, \langle \Lambda_1(x), \Lambda_1(x') \rangle \,.\, \zeta_2 \rangle y' \\ &= y^* \langle \Lambda_1(x), \Lambda_1(x') \rangle y' \\ &= \langle \Lambda_1(x) \otimes y, \Lambda_1(x') \otimes y' \rangle.\end{aligned}$$

Nous pouvons donc définir une application orthogonale et $\mathbf{L}_N(X_1) - M$-linéaire V de $X_1 \otimes_N X_{i_1}$ dans $X_1 \otimes_N X_2 \otimes_P X_{i_2} \otimes_N X_{i_1}$, telle que $V(\Lambda_1(x) \otimes y) = \Lambda_1(x) \otimes \xi_2 \otimes y$ pour tous x et y de M.

En identifiant $X_1 \otimes_N X_2 \otimes_P X_{i_2} \otimes_N X_{i_1}$ avec $X \otimes_P X_i$ et $\mathbf{L}_P(X)$ avec $\mathbf{L}_P(X_1 \otimes_N X_2)$, nous obtenons en composant V avec $\Lambda_F \circ \bar{j}$ (Théorème 3.5.c), une application orthogonale $\mathbf{L}_N(X_1) - M$-linéaire notée W de $X_1 \otimes_N X_{i_1}$ dans $\Lambda_F(\mathbf{L}_P(X_1 \otimes_N X_2))$.

Soit (n_k) dans N telle que $(\Lambda_2(n_k))$ forme une base orthonormale de X_2. Alors $\zeta_2 = z \,.\, \Sigma_k \Lambda_2(n_k) \otimes n_k^*$. Par suite, $V(\xi_1 \otimes 1) = \xi_1 \otimes \zeta_2 \otimes 1$, qu'on identifie à $\Sigma_k \Lambda(zn_k) \otimes n_k^*$, est transformé par $\bar{j}$ en $\pi(z) \Sigma_k \theta_{\Lambda(m_k), \Lambda(n_k)}$, lui-même identifié à $\pi_1(z)e_1 \otimes \mathrm{Id}$. Pour tous x et y de M on a donc

$$W(\Lambda_1(x) \otimes y) = \Lambda_F(\pi_1(x)\pi_1(z)e_1\pi_1(y) \otimes \mathrm{Id}) = \Lambda_F(\theta_{\Lambda_1(xz), \Lambda_1(y^*)} \otimes \mathrm{Id})$$

L'opérateur W étant orthogonal, son image est σ-fermée dans X_F. De plus F étant d'indice fini, la bicontinuité de Λ_F nous assure que l'image de W est $\Lambda_F(\mathbf{L}_N(X_1)\otimes \mathrm{Id})$. Par injectivité de Λ_F et de l'application $T\mapsto T\otimes \mathrm{Id}$ de $\mathbf{L}_N(X_1)$ dans $\mathbf{L}_p(X_1\otimes_N X_2)$, on construit donc un isomorphisme $\mathbf{L}_N(X_1)$ – M-linéaire de $X_1\otimes_N X_{t_1}$ sur $\mathbf{L}_N(X_1)$ qui à $\Lambda_1(x)\otimes y$ associe $\theta_{\Lambda_1(xz),\Lambda_1(y^*)}$. En composant à droite avec $\varrho_1(z^{-1})\otimes \mathrm{Id}$, qui à $\Lambda_1(x)\otimes y$ associe $\Lambda_1(xz^{-1})\otimes y$, nous obtenons un isomorphisme $\mathbf{L}_N(X_1)$-M-linéaire de $X_1\otimes_N X_{t_1}$ sur $\mathbf{L}_N(X_1)$, qui prolonge j_1. Donc G_1 est d'indice fini.

Calculons maintenant les valeurs des indices. Soit η_1 le vecteur central de $X_1\otimes_N X_{t_1}$ qui définit l'indice de G_1. On a (Théorème 3.5) $\mathrm{Id} = \bar{j}_1(\eta_1)$ et

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \eta_1, \xi_1\otimes 1\rangle = \langle(\varrho_1(z)\otimes \mathrm{Id})W^*\Lambda_F(\mathrm{Id}), \xi_1\otimes 1\rangle \\ &= \langle W^*\Lambda_F(\mathrm{Id}), \Lambda_1(z)\otimes 1\rangle = \langle \Lambda_F(\mathrm{Id}), \Lambda_F(\pi_1(z^2)e_1\otimes \mathrm{Id})\rangle \\ &= z^2F(e_1\otimes \mathrm{Id}). \end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Ind}(G_2) = F(e_1\otimes \mathrm{Id}).$$

Puisque W commute avec $\varrho_1(z)\otimes \mathrm{Id}$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(G_1) &= \langle \eta_1, \eta_1\rangle = \langle(\varrho_1(z)\otimes \mathrm{Id})W^*\Lambda_F(\mathrm{Id}), (\varrho_1(z)\otimes \mathrm{Id})W^*\Lambda_F(\mathrm{Id})\rangle \\ &= \langle \Lambda_F(\mathrm{Id}), \Lambda_F(\varrho_1(z^2)\otimes \mathrm{Id})\rangle = F(\varrho_1(\mathrm{Ind}(G_2)^{-1})\otimes \mathrm{Id}) \end{aligned}$$

Dans le cas où $\mathrm{Ind}(G_2)$ appartient à $Z(M)$ on a

$$\pi_1(\mathrm{Ind}(G_2)) = \varrho_1(\mathrm{Ind}(G_2))$$

et donc

$$\mathrm{Ind}(E) = F(\pi_1(\mathrm{Ind}(G_2))\,.\,\varrho_1(\mathrm{Ind}(G_2)^{-1})\otimes \mathrm{Id})$$

c'est-à-dire $\mathrm{Ind}(E) = \mathrm{Ind}(G_2)\mathrm{Ind}(G_1)$.

La fin de ce paragraphe va être consacrée à l'étude de cas où les différentes notions d'indice fini coïncident.

3.15. Proposition. *Soit E dans $E(M, N)$. Pour tout $a\in N'\cap M$, de support final* 1 *et tel que $E(a^*a) = 1$, définissons $E_a = E(a^*\,.\,a)$.*

(i) *E_a appartient à $E(M, N)$.*

(ii) *Si E est faiblement d'indice fini, alors pour tout E' de $E(M, N)$ il existe $a \in N' \cap M$ tel que $E' = E_a$.*

(iii) *Soit E' dans $E(M, N)$. Si E possède l'une des trois propriétés – être faiblement d'indice fini, d'indice fini ou fortement d'indice fini –, alors E' possède la même propriété si et seulement si il existe a inversible tel que $E' = E_a$.*

(i) est immédiat.

(ii) Soit E' dans $E(M, N)$. Désignons par U une équivalence de M–N-correspondances entre X_E et $X_{E'}$ (corollaire 2.16). Il existe a dans M tel que $U^*\xi_{E'} = \Lambda_E(a) = a \,.\, \xi_E$. Comme $\xi_{E'}$ est central, il en résulte que a appartient à $N' \cap M$ et pour tout x de M on a

$$\langle \xi_{E'}, x \,.\, \xi_{E'} \rangle = \langle U^*\xi_{E'}, U^*(x \,.\, \xi_{E'}) \rangle = \langle \Lambda_E(a), x\Lambda_E(a) \rangle;$$

c'est-à-dire $E'(x) = E(a^*xa)$. La fidélité de E' implique que le support final de a est 1 et on a $E(a^*a) = E'(1) = 1$.

(iii) Si $E' = E_a$ avec a inversible, l'application qui à $\Lambda_E(x)$ associe $\Lambda_{E'}(xa^{-1})$ définit une équivalence de correspondances entre X_E et $X_{E'}$. Donc E et E' possèdent simultanément la même propriété d'indice fini.

Réciproquement supposons que E et E' sont faiblement d'indice fini et reprenons l'équivalence U de (ii). Il existe alors a' dans M tel que

$$U^*\xi_E = \Lambda_{E'}(a') = a' \,.\, \xi_{E'}$$

et on a

$$\Lambda_E(1) = U^*(a' \,.\, \xi_{E'}) = a' \,.\, U^*(\xi_{E'}) = \Lambda_E(a'a)$$

et

$$\Lambda_{E'}(1) = U(a \,.\, \xi_{E'}) = a' \,.\, U(\xi_{E'}) = \Lambda_E(a a')$$

Donc a est inversible.

3.16. Corollaire. *S'il existe E dans $E(M, N)$ d'indice fini (respectivement, fortement d'indice fini) alors, pour toute autre espérance conditionnelle E' de $E(M, N)$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *E' est faiblement d'indice fini;*

(ii) *E' est d'indice fini (respectivement, fortement d'indice fini).*

3.17. Proposition. *Soient N une algèbre de von Neumann de dimension finie et E dans $E(M, N)$, faiblement d'indice fini. Alors M est de dimension finie et donc E est fortement d'indice fini.*

Supposons que M ne soit pas de dimension finie. Il existe alors une suite (p_n) de projecteurs non nuls décroissant ultrafaiblement vers 0. Par suite $(E(p_n))$ converge ultrafaiblement vers 0 dans N qui est de dimension finie. Donc $(E(p_n))$ converge normiquement vers 0 dans N, c'est-à-dire $(\Lambda_E(p_n))$ converge vers 0 dans X_E. Par continuité de Λ_E^{-1}, la suite (p_n) converge normiquement vers 0, ce qui est impossible.

3.18. Corollaire. *Soit E dans $E(M, N)$, faiblement d'indice fini. Si $Z(N)$ est de dimension finie alors $N' \cap M$ et $Z(M)$ sont de dimension finie.*

On applique la proposition précédente à la restriction de E à $N' \cap M$.

3.19. Corrollaire. *Soit E dans $E(M, N)$, d'indice fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$N' \cap M$ est de dimension finie;*

(ii) *$Z(M)$ est de dimension finie;*

(iii) *$Z(M)$ est de dimension finie.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente et (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte du corollaire précédent.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si E est d'indice fini, il existe E_1 d'indice fini de $\mathbf{L}_N(X_E)$ dans M. Le centre de N, qui est isomorphe au centre de $\mathbf{L}_N(X_E)$, est de dimension finie d'après le corollaire précédent.

Remarque. Ce corollaire généralise [2, corollaire 1.22].

3.20. Corollaire. *Si N est un facteur et si $E \in E(M, N)$ est faiblement d'indice fini (respectivement d'indice fini, respectivement fortement d'indice fini) alors toute autre espérance E' de $E(M, N)$ est faiblement d'indice fini (respectivement d'indice fini, respectivement fortement d'indice fini).*

Il suffit d'appliquer le corollaire 3.18 puis la proposition 3.15.

3.21. Lemme. *Soit $E \in E(M, N)$ faiblement d'indice fini. Si e est équivalent à* Id *dans $\mathbf{L}_N(X_E)$, il existe a dans M tel que $\Lambda_E(a)$ soit une base orthonormale de X_E avec $E(a^*a) = 1$. On a alors $x = aE(a^*x)$ pour tout x de M et* $\mathrm{Id} = \pi_E(a)e\pi_E(a)^*$. *Par suite E est fortement d'indice fini et* $\mathrm{Ind}(E) = aa^*$.

Soit $u \in \mathbf{L}_N(X_E)$ tel que $u^*u = e$ et $uu^* = \mathrm{Id}$. Soit $a \in M$ tel que $ue = \pi_E(a)e$ (Remarque 3.4.(i)). On a alors $u = \pi_E(a)e$ et par suite

$$\theta_{\Lambda(a),\Lambda(a)} = \pi_E(a)e\pi_E(a)^* = uu^* = \mathrm{Id}$$

et

$$\pi_E(E(a^*a))e \;=\; e\pi_E(a^*a)e \;=\; u^*u \;=\; e$$

Donc $E(a^*a) = 1$ (Remarque 3.4.(i)).

3.22. PROPOSITION. *Soit $E \in E(M, N)$ faiblement d'indice fini. Si N est proprement infinie et si M admet une représentation fidèle dans un espace séparable, alors X_E admet une base orthonormale constituée d'un seul vecteur et par suite E est fortement d'indice fini.*

L'hypothèse de séparabilité implique que l'algèbre $\mathbf{L}_N(X_E)$ est de genre dénombrable. D'après la proposition 3.2, le projecteur e est de support central 1 et l'algèbre réduite $e\mathbf{L}_N(X_E)e$ isomorphe à N. Donc e est proprement infini et équivalent à 1 ([8, Chap. III §8.6 Corollaire 5]). Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent.

3.23. LEMME. *Soit $E \in E(M, N)$. Si N est finie, M semi-finie et $N' \cap M$ de dimension finie, alors M est finie.*

Soit φ une trace fidèle sur N et τ une trace de $P(M)$. Il existe h non singulier affilié à M tel que $\varphi \circ E = \tau(h\,.)$. Pour tout x de N on a

$$x \;=\; \sigma_t^{\varphi}(x) \;=\; \sigma_t^{\varphi\circ E}(x) \;=\; h^{it}xh^{-it}.$$

Ainsi h est affilié à l'algèbre de dimension finie $N' \cap M$. Il est donc inversible et τ est finie.

3.24. LEMME. *Soit $E \in E(M, N)$ faiblement d'indice fini. Si M et N sont des facteurs de type II_1, alors E est fortement d'indice fini.*

D'après le corollaire 3.20 toute espérance de $E(M, N)$ est faiblement d'indice fini. Considérons la trace normalisée φ sur N, la trace normalisée τ sur M et désignons par E_0 l'espérance conditionnelle telle que $\tau = \varphi \circ E_0$. D'après ([17, Théorème 2.2 et Proposition 1.3]) E_0 est fortement d'indice fini et il en est de même pour E.

3.25. COROLLAIRE. *Soit $E \in E(M, N)$ d'indice fini. Si N est un facteur de type II_1 et M un facteur, alors E est fortement d'indice fini et M est de type II_1.*

Soit E_1 l'espérance conditionnelle de $\mathbf{L}_N(X_E)$ dans M, définie par la construction de base. D'après le corollaire 3.19, $M' \cap \mathbf{L}_N(X_E)$ est de dimension finie. Puisque N est de type II il en est de même pour $\mathbf{L}_N(X_E)$ et le lemme 3.23 montre que $\mathbf{L}_N(X_E)$ est finie. Par suite M est finie et il suffit d'appliquer le lemme précédent.

3.26. REMARQUES. Les résultats précédents nous assurent que nos trois notions d'indice fini coïncident dans les cas suivants:

- N est de dimension finie (3.17);
- N est proprement infinie avec des hypothèses de séparabilité (3.22);
- N est un facteur de type II_1 et M est un facteur semi-fini (3.18, 3.23, 3.24).

Si N est un facteur de type II_1 et M un facteur, E est d'indice fini si et seulement si E est fortement d'indice fini (3.25); mais si on suppose seulement E faiblement d'indice fini, nous ne savons pas encore exclure le cas où M pourraît être de type III.

Dans le cadre des facteurs de type II_1, V.F.R. Jones démontre que si l'indice de N dans M est fini alors on peut faire une construction descendante ([13, Corollaire 3.19]) et il en déduit que si l'indice est 2 alors M est un produit croisé de N par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrons que ces résultats sont conservés dans le cas où N est proprement infinie.

3.27. PROPOSITION. *Soit E dans $E(M, N)$ d'indice* 2. *Si N est proprement infinie et si les hypothèses de séparabilité de la proposition* 3.22 *sont satisfaites, alors M s'identifie à un produit croisé de N par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Soit a dans M tel que $(\Lambda_E(a))$ soit une base orthonormale de X_E avec $E(a^*a) = 1$. On a $aa^* = 2$ et par suite $u = a^*a - 1$ est un unitaire hermitien tel que $E(u) = 0$. Il en résulte que $[\Lambda_E(1), \Lambda_E(u)]$ est un système orthonormal de X_E tel que $1 + uu^* = \mathrm{Ind}(E)$; par conséquent c'est une base orthonormale et tout x de l'algèbre M se décompose sous la forme $x = E(x) + uE(u^*x)$. L'automorphisme involutif Adu laisse N globalement invariant et M s'identifie au produit croisé de N par l'action Adu.

3.28. PROPOSITION. *Soit $E \in E(M, N)$ d'indice fini. Si N est proprement infinie et si les hypothèses de séparabilité de la proposition* 3.22 *sont satisfaites alors il existe une sous-algèbre de von Neumann P de N, une espérance conditionnelle E_0 de $E(N, P)$ et un isomorphisme γ de M sur $\mathbf{L}_p(X_{E_0})$ tel que $\gamma|_N = \pi_{E_0}$. Dans le cas où* Ind(E) *appartient à N, on retrouve E en appliquant la construction de base à E_0. Si de plus l'indice est scalaire on a*:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(E) &= \inf\{K \in R_+^*;\ K(i\circ E) - \mathrm{Id}_M \gg 0\}\\ &= \inf\{K \in R_+^*;\ K(i\circ E) - \mathrm{Id}_M \geqslant 0\}\\ &= \max\{\|E(f)\|^{-1};\ f \text{ projecteur non nul de } M\}.\end{aligned}$$

Soit $a \in M$, tel que $\Lambda_E(a)$ soit une base orthonormale de X_E avec $E(a^*a) = 1$. Posons $z = \mathrm{Ind}(E)^{1/2}$ et notons q le projecteur $z^{-2}a^*a$. Désignons par α l'isomorphisme de $\mathbf{L}_N(X_E)$ sur N tel que $\alpha(T) = \langle \Lambda_E(a), T\Lambda_E(a)\rangle$ pour tout T dans $\mathbf{L}_N(X_E)$. On construit P et E_0 en transportant par α l'espérance conditionnelle E_1 de la construction de base. On démontre alors facilement que:

- $P = \{E(a^*xa);\ x \in M\}$
- $E_0(b) = E(z^{-2}a^*aba^*a)$ pour tout $b \in N$
- $\Lambda_{E_0}(E(za))$ est une base orthonormale de X_{E_0}
- $\mathrm{Ind}(E_0) = E(\mathrm{Ind}(E))$
- $\mathbf{L}_p(X_{E_0})$ s'identifie à P par l'isomorphisme β tel que $\beta(S) = \langle \Lambda_{E_0}(E(za)), S\Lambda_{E_0}(E(za))\rangle$ pour tout $S \in \mathbf{L}_p(X_{E_0})$.
  Pour tout $b \in N$ on a alors:

$$\beta(\pi_{E_0}(b)) = E_0(E(a^*z)E(bza)) = E(z^{-2}a^*aE(a^*z)E(bza)a^*a)$$

$$= E(a^*ba) = \alpha(\pi_E(b))$$

et

$$\beta(e_0) = E_0(E(a^*z))E_0(E(za)) = E(z^{-1}a^*a^*a)E(z^{-1}a^*aa)$$

$$= E(z^{-1}a^*a^*aE(a^*z^{-1}aa)) = E(z^{-2}a^*a^*aa)$$

$$= \alpha(\pi_E(q)).$$

Ainsi $\gamma = \beta^{-1}\circ\alpha|_{\pi_E(M)}$ est un isomorphisme de M sur $\mathbf{L}_p(X_{E_0})$ tel que $\gamma(b) = \pi_{E_0}(b)$ pour tout $b \in N$ et $\gamma(q) = e_0$.

Supposons que $\mathrm{Ind}(E)$ appartient à N et désignons par G_1 l'espérance conditionnelle de la construction de base appliquée à E_0. On a

$$E(q) = \mathrm{Ind}(E)^{-1} = E(\mathrm{Ind}(E))^{-1} = \mathrm{Ind}(E_0)^{-1} = G_1(e_0).$$

Tout élément de $\mathbf{L}_p(X_{E_0})$ s'écrivant $\pi_{E_0}(y)e_0\pi_{E_0}(y')$ on a donc

$$G_1 \circ \gamma = E.$$

Dans le cas où l'indice est scalaire, l'égalité $E(q) = \mathrm{Ind}(E)^{-1}$ permet de conclure.

3.29. Remarques. Reprenons la situation de la proposition précédente.

L'algèbre de von Neumann N est engendrée par P et q. La construction de P, q et E_0 n'est pas canonique mais est unique à isomorphisme intérieur près; en effet, toute autre base à un élément de X_E est de la forme $\Lambda_E(au)$ où u est un unitaire de N.

Pour toute espérance E_μ de l'exemple 3.7.(iii) on a $E_\mu(\mathrm{Ind}(E_\mu)) = 2$. Si on applique successivement à E_μ la construction descendante puis la construction de base on obtient alors une espérance d'indice 2. Ceci prouve que si l'indice de E n'appartient pas à N, on ne retrouve pas nécessairement E.

Remerciements

Nous tenons à remercier Madame C. Anantharaman-Delaroche pour les intéressantes discussions que nous avons eues avec elle.

Bibliographie

1. P.L. Aubert: Théorie de Galois pour une W^*-algèbre, *Comment Math. Helvetici*, 51 (1975) 411–433.
2. J. Bion-Nadal: Von Neumann subalgebras of a Type II_1 factor: correspondances and property *T*, Preprint.
3. N. Bourbaki: *Espaces vectoriels topologiques*, Chapitre IV, Hermann, Paris.
4. F. Combes: Systèmes hilbertiens à gauche et représentation de Gelfand-Segal. Operator algebras and groups representations, *Monographs and Studies in Mathematics* 17, Pitman (1984) 77–108.
5. F. Combes and C. Delaroche: Groupe modulaire d'une espérance conditionnelle dans une algèbre de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France* 103 (1975) 385–426.
6. A. Connes: On the spatial theory of von Neumann algebras, *J. Funct. Analysis*, 35 (1980) 153–164.
7. A. Connes: Correspondances, Notes manuscrites (1980).
8. J. Dixmier: *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, (1969).
9. U. Haagerup: Normal weights on W^*-algebras, *J. Funct. Analysis* 19 (1975) 302–317.
10. U. Haagerup: Operator valued weights in von Neumann algebras I, *J. Funct. Analysis* 32 (1979) 175–206; II, *J. Funct. Analysis* 33 (1979) 339–361.
11. J.F. Havet: Calcul fonctionnel continu dans les modules hilbertiens autoduaux, Preprint, Orléans.
12. J.F. Havet: N-algèbres hilbertiennes, Preprint, Orléans.
13. V.F.R. Jones: Index for subfactors, *Inventionnes Math.* 72 (1983) 1–25.
14. H. Kosaki: Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors, *J. Funct. Analysis* 66 (1986) 123–140.
15. W.L. Paschke: Inner product modules over B^*-algebras, *Trans. Am. Math. Soc.* 182 (1973) 443–468.
16. W.L. Paschke: Inner product modules arising from compact automorphism groups on von Neumann algebras, *Trans Am. Math. Soc.* 224 (1976) 87–102.

17. M. Pimsner and S. Popa: Entropy and index for subfactors, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 19 (1986) 57–106.
18. M.A. Rieffel: Induced representations of C^*-algebras, *Adv. Math.* 13 (1974) 176–257.
19. M.A. Rieffel: Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras, *J. Pure Appl. Algebra* 5 (1974) 51–96.
20. J.L. Sauvageot: Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert, *J. Operator Theory* 9 (1983) 237–252.
21. H. Zettl: A Characterisation of Ternary rings of operators, *Adv. Math.* 48 (1983) 117–143.