COMPOSITIO MATHEMATICA

A. LEGRAND

Caractérisation des opérations d'algèbres sur les modules différentiels

Compositio Mathematica, tome 66, nº 1 (1988), p. 23-36

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1988__66_1_23_0>

Compositio Mathematica 66: 23-36 (1988)

Caractérisation des opérations d'algèbres sur les modules différentiels

A. LEGRAND

Laboratoire d'analyse sur les variétés, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31602 Toulouse Cédex, France

Received 22 April 1987; accepted in revised form 20 October 1987

Abstract. Let Λ be an associative algebra with unity and M_* a Λ-differential graded module. To M_* we associate a class

$$\theta(M_*) \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(H_*(M_*), H_*(M_*))$$

which characterizes the "2-quasi isomorphism class" of M_*. This construction, applied to the singular complex of a G-space X, where G is a discrete group, gives a class $\theta(X)$ which determines the second differential of the spectral sequence of the equivariant homology of X. In the special case of the $\mathbb{N}$-structure determined by X equipped with an endomorphism f such that $H_*(f) = 1$, the class $\theta(f)$ is in $\mathrm{Ext}^{1,-1}(H_*(X), H_*(X))$ and defines an obstruction for f to be an nth power. An action of $\mathbb{Z}_p$ on a surface X yields $\theta(X) \in H^2(\mathbb{Z}_p, \mathrm{Hom}\,(H_1(X), H_2(X)))$ which classifies the action up to quasi-isomorphism.

AMS classification: 54H15, 55N91, 55R20, 55R40, 55T10.

Introduction

Notre but est le calcul de la différentielle d_2 de la suite spectrale d'homologie équivariante de Borel

$$H_*(G, H_*(X)) \Rightarrow H_*(EG \times_G X)$$

du G-espace X, G étant un groupe discret. Rappelons que cette suite spectrale généralise la suite spectrale du revêtement de Cartan–Leray.

Plus généralement au §1 on étudie l'opération (à gauche) d'une algèbre unitaire Λ sur un module différentiel M_*. Il en résulte des classes caractéristiques [déf. 2]

$$\theta_q(M_*) \in \mathrm{Ext}_\Lambda^2(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$$

de la relation de "2-quasi isomorphisme" [déf. 1], et un théorème de classification pour les Λ-modules différentiels gradués [théorème 1].

Les relations vérifiées par le module $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$ et par les classes $\theta_q(M_*)$ sont précisées au §2.

Lorsque k est héréditaire et Λ k-projective, on a une suite exacte [prop. 1]

$$H^2(\Lambda, \mathrm{Hom}\,(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$$

$$\xrightarrow{\varphi} H^1(\Lambda, \mathrm{Ext}\,(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))).$$

La projection $\theta'_q(M_*) = \varphi(\theta_q(M_*))$ est la q^e classe primaire de M_* [déf. 3] qui peut être construite à partir d'une suite exacte de coefficients universels [théorème 2]. Elle se représente par un cocycle déduit d'un k-scindage ϱ de la suite exacte de Λ-modules [prop. 2.1]

$$0 \to H_{q+1}(M_*) \to Z'_{q+1}(M_*) \xrightarrow{\mathrm{d}} B_q(M_*) \to 0.$$

D'autre part [prop. 2.2], si $H_*(M_*)$ est k-projectif, la q^e classe secondaire $\theta_q(M_*)$ est l'image d'une classe unique dans $H^2(\Lambda, \mathrm{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)))$ représentée par un cocycle construit à partir de ϱ et d'un k-scindage de

$$0 \to B_q(M_*) \to Z_q(M_*) \to H_q(M_*) \to 0.$$

Des applications aux G-espaces sont données au §3.

Dans le cas de la $\mathbb{N}$-structure sur X déterminée par un endomorphisme $f\colon X \to X$ les classes $\theta_q(f)$ sont dans $H^1(\mathbb{N}, \mathrm{Ext}\,(H_q(X), H_{q+1}(X)))$ et vérifient une formule additive, [prop. 3]

$$\theta_q(g \circ f) = H_{q+1}(g)\theta_q(f) + \theta_q(g)H_q(f).$$

Il en résulte que lorsque f induit l'identité sur $H_*(X)$, $\theta_q(f)$ alors dans $\mathrm{Ext}\,(H_q(X), H_{q+1}(X))$, représente une première obstruction à ce que f soit une puissance n^e.

Du théorème de classifications on déduit qu'une G-structure sur une surface X est déterminée à quasi-isomorphisme près par $\theta_1(X)$. En particulier la classe d'une opération de $\mathbb{Z}_p$ sur le tore s'identifie à la pente (rationnelle) d'une translation [prop. 4].

On calcule au §4 la différentielle de la suite spectrale d'homologie de produits tensoriels $C_* \otimes_\Lambda M_*$ en fonction de $\theta_*(M_*)$ [Théorème 3]. En corollaire on obtient la différentielle

$$\mathrm{d}_2\colon H_p(G, H_q(X, k)) \to H_{p-2}(G, H_{q+1}(X, k))$$

de la suite spectrale d'homologie équivariante du G-space X.

Au niveau des notations, les produits tensoriels, les foncteurs Hom, Ext dépourvu d'indice inférieur sont relatifs à l'anneau k, sinon l'anneau considéré est rappelé en indice.

I. 2-Classification des Λ-modules différentiels gradués

Soit Λ une algèbre unitaire associative sur un anneau commutatif k. Dans toute la suite on écrira Λ-mdg pour Λ-module différentiel gradué ou simplement mdg si $\Lambda = k$. En tronquant les Λ-mdg nous allons définir la relation "r-quasi-isomorphe". Pour $r = +\infty$ c'est la relation quasi-isomorphe habituelle. Pour $r = 1$, cette relation équivaut à avoir des Λ-modules gradués d'homologie isomorphes. Pour $r = 2$, nous introduirons des classes caractéristiques conduisant à un théorème de classification.

Soit M_* un Λ-mdg dont on désigne respectivement les Λ-modules gradués cycle, bord, homologie et conoyau de la différentielle par Z_*, B_*, H_* et $Z'_* = M_*/B_*$. Pour des entiers $-\infty \leqslant r, s \leqslant +\infty$, on note $\tau_r M_*$ et $\tau^s M_*$ les Λ-mdg tels que:

$$(\tau_r M_*)_p = 0 \quad \text{si} \quad p < r; \quad (\tau_r M_*)_r = Z_r;$$

$$(\tau_r M_*)_p = M_p \quad \text{si} \quad p > r$$

$$(\tau^s M_*)_p = M_p \quad \text{si} \quad p < s-1; \quad (\tau^s M_*)_{s-1} = Z'_{s-1};$$

$$(\tau^s M_*)_p = 0 \quad \text{si} \quad p \geqslant s.$$

Pour $r < s$, on pose $\tau_r^s = \tau_r \circ \tau^s = \tau^s \circ \tau_r$. L'homologie $H_i(\tau_p^{p+r} M_*)$ coïncide avec $H_i(M_*)$ dans la "r-tranche" $p \leqslant i < p + r$ et est nulle sinon. Regroupons toutes les r-tranches $\tau_p^{p+r} M_*$ en un Λ-bigradué différentiel. Pour cela, on pose

$$J_{p,q}^r(M_*) = (\tau_p^{p+r} M_*)_{p+q}$$

la différentielle étant celle des $\tau_p^{p+r} M_*$, $p \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a:

$$J_{*,*}^1(M_*) = H_*; \quad J_{p,0}^2(M_*) = Z_p; \quad J_{p,1}^2(M_*) = Z'_{p+1}.$$

DÉFINITION 1. Deux Λ-mdg sont r-quasi-isomorphes si les Λ-bigradués $J_{*,*}^r$ associés sont quasi-isomorphes.

Pour définir les classes caractéristiques de la relation 2-quasi-isomorphe nous utiliserons la classification des extensions de Λ-modules gradués donnée par les bigradués dérivés $\mathrm{Ext}_\Lambda^{**}$, [2].

Considérons les suites exactes suivantes associées au Λ-mdg M_*.

$$e'(M_*) \;=\; 0 \to H_* \to Z'_* \to B_* \to 0;$$

$$e(M_*) \;=\; 0 \to B_* \to Z_* \to H_* \to 0. \tag{I.1}$$

DÉFINITION 2. La classe caractéristique seconde du Λ-mdg M_* est la classe

$$\theta(M_*) \;=\; [e'(M_*)] \cup [e(M_*)] \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(H_*(M_*),\, H_*(M_*))$$

cup-produit des classes $[e'(M_*)] \in \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B_*, H_*)$ et $[e(M_*)] \in \mathrm{Ext}_\Lambda^1(H_*, B_*)$ des extensions $e'(M_*)$ et $e(M_*)$.

Un facteur $(-1)^{pp'}$ différenciant le cup-produit et la composition de Yoneda, cette classe est l'opposée de la classe $[e''(M_*)]$ de la 2-extension.

$$e''(M_*) \;=\; 0 \to H_* \to Z'_* \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_* \to H_* \to 0.$$

Elle ne dépend que de la classe de 2-quasi-isomorphisme de M_*.

Pour chaque q, $\theta(M_*)$ détermine une classe

$$\theta_q(M_*) \in \mathrm{Ext}_\Lambda^2(H_q(M_*),\, H_{q+1}(M_*))$$

qu'on appellera $q^{\text{ème}}$-*classe caractéristique seconde*. Si l'homologie de M est finie $\theta(M_*)$ est la somme des $\theta_q(M_*)$.

Notons h_*: $\mathrm{Ext}_\Lambda^{**}(K_*, K_*) \to \mathrm{Ext}_\Lambda^{**}(K'_*, K'_*)$ le transport défini par le Λ-isomorphisme $h_*\colon K_* \to K'_*$ lorsqu'on pose $h_*(\xi) = h\xi h^{-1}$.

THÉORÈME 1 (2-classification des Λ-mdg)

i) *Soient M_* et N_* deux* Λ-mdg *et h: $H_*(M_*) \to H_*(N_*)$ un isomorphisme de Λ-modules gradués. Alors M_* et N_* sont 2-quasi-isomorphes si, et seulement si*

$$h_*\theta(M_*) \;=\; \theta(N_*).$$

ii) *Soit K_* un Λ-module gradué vérifiant que pour tout q tel que K_{q+1} et K_{q+2} sont non nuls, alors la dimension Λ-projective de K_q est au plus 2. Alors pour* *tout* $\theta \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(K_*, K_*)$ *il existe une* Λ-mdg M_* *tel que* $H_*(M_*) = K_*$ *et* $\theta(M_*) = \theta$

Un Λ-mdg dont l'homologie est concentrée en degrés q et $q + 1$ vérifie trivialement la condition ii). Donc

COROLLAIRE. *Soit* K_* *un module gradué concentré en degrés* q *et* $q + 1$. *L'ensemble des classes de quasi-isomorphismes de* Λ-mdg M_*, *tels qu'en tant que* Λ-*modules gradués* $H_*(M_*) = K_*$, *est en bijection avec*

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^2(K_q, K_{q+1}).$$

Démonstration du théorème 1

i) Soit K_* un Λ-module gradué. A toute double extension

$$e'' = 0 \to K_* \to W'_* \xrightarrow{\delta} W_* \to K_* \to 0.$$

représentant une classe $[e''] \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(K_*, K_*)$ on associe le bigradué différentiel $J_{**}(e'')$ tel que:

$$J_{p,0}(e'') = W_p; \quad J_{p,1}(e'') = W'_{p+1}; \quad J_{p,q}(e'') = 0 \quad \text{si} \quad q \neq 0, 1$$

de différentielle δ: $J(e'')_{p,0} \to J(e'')_{p,1}$ et d'homologie $K_* \oplus K_*$.

Maintenant soient u: $K_* \to L_*$ un isomorphisme de Λ-modules gradués et $[e''_1] \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(L_*, L_*)$. Les bigradués $J(e'')$ et $J(e''_1)$ sont quasi-isomorphes au dessus de u si, et seulement si,

$$[e''_1] = u[e'']u^{-1}.$$

On obtient

i) en appliquant ceci avec $e'' = e''(M_*)$, $e''_1 = e''(N_*)$ et $u = h$.

ii) La condition ii) entraine qu'il existe une suite exacte de Λ-modules gradués

$$0 \to U_* \to V_* \to K_* \to 0$$

vérifiant

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(V, K) = 0 = \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(U, U).$$

En effet, soit un entier q
a) si $K_q = 0$, on prend $V_q = 0$ (et $U_q = 0$)
b) si $K_{q+1} = 0$, on prend $V_q = H_q$ (et $U_q = 0$)
c) sinon on prend une résolution de K_q sur Λ

$$0 \to U_q \to V_q \to K_q \to 0$$

avec V_q Λ-projectif et dim $\mathrm{proj}_\Lambda U_q = (\dim \mathrm{proj}_\Lambda K_q) - 1$.
On a le diagramme de suites exactes longues associées

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{Ext}_\Lambda^{1,-1}(U_*, V_*) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 = \mathrm{Ext}_\Lambda^{1,-1}(V_*, K_*) & \to & \mathrm{Ext}_\Lambda^{1,-1}(U_*, K_*) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(K_*, K_*) & \to & \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(V_*, K_*) = 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathrm{Ext}_\Lambda^{2,-1}(U_*, U_*) = 0 & & & & \end{array}$$

La classe θ se relève en une classe $\alpha \in \mathrm{Ext}_\Lambda^{1,-1}(U_*, V_*)$. Un représentant

$$0 \to V_* \to M_* \xrightarrow{e} S\,U_* \to 0$$

($(SU)_{p+1} = U_p$) détermine un Λ-module gradué M_* sur lequel on définit la diffèrentielle

$$d\colon M_* \to SU_* \to SV_* \to SM_* \simeq M_*.$$

On a évidemment

$$\theta(M_*) = \theta.$$

II. *k*-projectivité – classes primaires – représentation

Etant donné un Λ–Λ bimodule J, on désigne par $H^*(\Lambda, J)$ la cohomologie de Hochschild de Λ à coefficients dans J, [5]. La proposition suivante généralise la proposition de [3].

PROPOSITION 1. *Supposons que Λ soit k-projectif (k héréditaire). Soient K et L des Λ-modules. On a une longue suite exacte fonctorielle*

$$\ldots \to H^{n-2}(\Lambda, \mathrm{Ext}\,(K, L)) \to H^n(\Lambda, \mathrm{Hom}\,(K, L)) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}_\Lambda^n(K, L)$$

$$\to H^{n-1}(\Lambda, \mathrm{Ext}(K, L)) \to \ldots$$

Démonstration. Soient P_* une résolution Λ–Λ-projective de Λ et Q_* une résolution Λ-projective de K. Comme Λ est k-projectif, Q_* est k-projectif ([3], II, Prop. 5.3). La formule de Künneth montre que $P_* \otimes_\Lambda Q_*$ est une résolution de K. La formule d'associativité

$$\mathrm{Hom}\,(P_* \underset{\Lambda}{\otimes} Q_*, L) \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda\,\Lambda}(P_*, \mathrm{Hom}\,(Q_*, L))$$

montre que l'exactitude de $\mathrm{Hom}_{\Lambda\,\Lambda}(P_*, --)$ et de $\mathrm{Hom}\,(Q_*, -)$ entraine celle de $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_* \otimes_\Lambda Q_*, -)$ et donc que $P_* \otimes_\Lambda Q_*$ est Λ-projectif. D'autre part filtrons le second membre de cette formule par le degré de P_*. On obtient une suite spectrale commençant en $H^p(\Lambda, \mathrm{Ext}^q(K, L))$. L'anneau k étant héréditaire, celle-ci est concentrée sur les lignes $q = 0$ et $q = 1$. Elle converge vers $\mathrm{Ext}^*_\Lambda(K, L)$ qui est l'homologie du premier membre de la formule d'associativité. De cette suite spectrale, on tire la suite exacte cherchée.

Une dérivation $\partial\colon \Lambda \to J$ du Λ–Λ bimodule J vérifie $\partial(\lambda\mu) = \lambda(\partial\mu) + \partial\lambda(\mu)$. C'est une dérivation *intérieure* s'il existe $j \in J$ tel que $\partial\lambda = \lambda j - j\lambda$. Le module des dérivations modulo les dérivations intérieures est canoniquement isomorphe à $H^1(\Lambda, J)$.

Considérons une extension de Λ-modules

$$e = 0 \to L \to E \underset{\varrho}{\rightleftarrows} K \to 0$$

scindable sur k. Tout k-scindage ϱ détermine une dérivation $\Lambda \xrightarrow{\tilde{\varrho}} \mathrm{Hom}\,(K, L)$ qui est le défaut $\lambda \to \lambda\varrho - \varrho\lambda$ de ϱ par rapport à l'opération de Λ. En associant à cette extension la classe dans $H^1(\Lambda, \mathrm{Hom}\,(K, L))$ de cette dérivation, on définit une bijection entre les classes d'équivalence d'extensions k-scindables de Λ-modules et $H^1(\Lambda, \mathrm{Hom}\,(K, L))$. On vérifie facilement que l'image par φ (cf. prop. 1) de la classe de la dérivation $\tilde{\varrho}$ est la classe $[e] \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, L)$ de l'extension e.

La classe seconde $\theta_q(M_*)$ détermine donc une classe

$$\theta'_q(M_*) \in H^1(\Lambda, \mathrm{Ext}\,(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))).$$

DÉFINITION 3 (Λ k-projective sur k héréditaire). On appelle $\theta'_q(M_*)$ la qème classe caractéristique primaire du Λ-mdg M_*.

Donnons maintenant une représentation des classes caractéristiques introduites. Si M_* est k-projectif en tant que module gradué alors $B_*(M_*)$

l'est également et l'extension $e'(M_*)$, (I.1), est scindable sur k. Elle définit une classe $[[e'_q(M_*)]]$ dans $H^1(\Lambda, \operatorname{Hom}(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*)))$. De plus, à partir de la suite exacte $e(M_*)$, (I.1), on obtient une projection naturelle

$$\operatorname{Hom}(B_q(M), H_{q+1}(M)) \to \operatorname{Ext}(H_q(M), H_{q+1}(M)). \tag{II.2}$$

Si de plus Λ et $H_*(M_*)$ sont k-projectifs, alors $e(M_*)$ représente une classe $[[e_q(M_*))]] \in H^1(\Lambda, \operatorname{Hom}(H_q(M), B_q(M))$ et modulo l'isomorphisme φ, on a:

$$\theta_q(M_*) \;=\; [[e'_q(M_*)]] \cup [[e_q(M_*)]]$$

où $\cup$ désigne le cup-produit en cohomologie de Hochschild relativement au produit naturel $\operatorname{Hom}(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \otimes \operatorname{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \to \operatorname{Hom}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$.

PROPOSITION 2. *Soit M_* un Λ-mdg k-projectif en tant que module gradué.*

1. *L'image de la dérivation $\lambda \to \lambda\varrho - \varrho\lambda$ par le morphisme φ représente $\theta'_q(M_*)$.*
2. *Si Λ et $H_*(M_*)$ sont k-projectifs, $\theta_q(M_*)$ qui est alors dans $H^2(\Lambda$, Hom $(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)))$ est représenté par le 2-cocycle $(\lambda, \mu) \to (\lambda\varrho - \varrho\lambda)(\mu\sigma - \sigma\mu)$ où σ est un k-scindage de $e(M_*)$.*

Dans le cas où le module gradué sous-jacent au Λ-mdg M_* est k-projectif, on peut définir directement les classes primaires. En effet, considérons la suite exacte des coefficients universels:

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \to H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*))$$
$$\to \operatorname{Hom}(H_{q+1}(M_*), H_{q+1}(M_*)) \to 0.$$

C'est une suite exacte k-scindable de Λ–Λ-bimodules. Elle détermine une longue suite exacte en cohomologie de Hochschild de Λ. Notons

$$\partial_q \colon H^0(\Lambda, \operatorname{Hom}(H_{q+1}(M_*), H_{q+1}(M_*)))$$
$$\to H^1(\Lambda, \operatorname{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)))$$

l'opérateur bord associé.

THÉORÈME 2. *Soit* M_* *un* Λ-mdg, *les modules* Λ *et* M_* *étant k-projectifs* (*k héréditaire*), *alors*:

$$\partial_q(1) \; = \; -\theta'_q(M).$$

Remarquons que l'existence de $\partial_q(1)$ suppose la k-projectivité de M_* mais pas celle de Λ.

Démonstration du théorème 2. Considérons une suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ de Λ–Λ-bimodules k-scindables. Soient $a'' \in H^0(\Lambda, A'')$ (i.e., a'' est un élément invariant de A'') et $a \in A$ dont l'image est a''. Soit ∂: $H^0(\Lambda, A'') \to H^1(\Lambda, A')$ l'opérateur bord associé à cette suite exacte. Alors $\partial a''$ est représenté par la dérivation $\lambda \to \lambda a - a\lambda$. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \arrow[r] \arrow[d] & Z^{q+1}(\mathrm{Hom}(M_*, H_{q+1}(M_*)) \arrow[d] & \\
\mathrm{Ext}(H_q(M_*), H_{q+1}(M_*)) \arrow[r] & H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_{q+1}(M_*), H_{q+1}(M_*))
\end{tikzcd}$$

Soit γ: $M_{q+1} \to H_{q+1}(M_*)$ le $(q + 1)$-cocycle tel que $\gamma(m) = (1 - \varrho d)\bar{m}$ où $\bar{m} \in Z'_{q+1}(M_*)$ est la classe de m. La classe $[\gamma] \in H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*))$ de γ est un relèvement de $1_{H_{q+1}(M_*)}$.

La dérivation $\lambda \to \lambda\gamma - \gamma\lambda$ de $Z^{q+1}(\mathrm{Hom}\,(M_*, H_{q+1}(M_*)))$ est l'image de la dérivation $\lambda \to -(\lambda\varrho - \varrho\lambda)$ de $\mathrm{Hom}\,(B_q(M_*), H_{q+1}(M_*))$. Son image dans $H^{q+1}(M_*, H_{q+1}(M_*))$ représente $\partial_q(1_{H_{q+1}(M_*)})$.

Le théorème 2 se déduit alors de la proposition 2.

III. Applications aux G-espaces

Soient G un monoïde et X un G-espace. On prend pour Λ l'algèbre libre $k(G)$. Nous allons appliquer les résultats des paragraphes précédents au Λ-mdg formé par le complexe singulier $C_*(X, k)$ de X à coefficients dans k.

Considérons l'opération du monoïde $\mathbb{N}$ des entiers naturels de générateur un endomorphisme f: $X \to X$. On appellera classes caractéristiques de f celles du $\mathbb{N}$-espace associé. En particulier, on associe à f des classes caractéristiques

$$\theta_q(f, k) \in H^1(\mathbb{N}, \mathrm{Ext}\,(H_q(X, k), H_{q+1}(X, k)))$$

où Ext $(H_q(X, k), H_{q+1}(X, k))$ est un $\mathbb{N}$–$\mathbb{N}$-bimodule par $H_*(f)$ et rappelons ([3], X, prop. 4.1) que la cohomologie de $\mathbb{N}$ est la même que celle de $\mathbb{Z}$.

En utilisant la représentation donnée dans le 1èr énoncé de la proposition 2, on vérifie que les classes $\theta_q(f, k)$ sont additives dans le sens suivant:

PROPOSITION 3. *Pour f, g endomorphismes de X, on a*:

$$\theta_q(g \circ f, k) = H_{q+1}(g)\theta_q(f, k) + \theta_q(g, k)H_q(f).$$

Notons Aut* X le groupe des automorphismes de l'espace X induisant l'indentité au niveau de l'homologie. Pour f, $g \in \mathrm{Aut}^*(X)$, $\theta_q(f, k)$ et $\theta_q(g, k)$ sont dans Ext $((H_q(X, k), H_{q+1}(X, k))$ et vérifient

$$\theta_q(g \circ f, k) = \theta_q(g, k) + \theta_q(f, k).$$

En particulier:

Etant donné un entier p l'équation $u^p = f$, ne peut avoir des solutions dans Aut* X, *que si pour tout anneau k, $\theta_*(f, k)$ est divisible par p.*

Indiquons la représentation topologique de $\theta_q(f)$ (signalée par Adams). Soit C_f le fibré sur S^1 obtenu en identifiant par f les faces $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ de $X \times [0, 1]$. L'espace X s'identifie à $X \times \{0\}$ et la longue suite exacte de la paire (C_f, X) se scinde en suites exactes

$$0 \to H_{q+1}(X) \to H_{q+1}(C_f) \to H_{q+1}(\Sigma X) = H_q(X) \to 0$$

représentant l'extension $\theta_q(f, k)$.

Donnons un exemple de classe caractéristique seconde d'un endomorphisme. Soit $P^2(\mathbb{R})$ avec sa décomposition cellulaire naturelle obtenue en ajoutant à S^1 par $z \to z^2$ une cellule de dimension 2. Désignons par X le CW-complexe obtenu en recollant deux exemplaires de $P^2(\mathbb{R})$ le long de S^1 et par f l'automorphisme échangeant les deux exemplaires de $P^2(\mathbb{R})$ et induisant une symétrie de S^1 par rapport à un de ses diamètres.

On a $H_1(X, Z) = \mathbb{Z}_2$, $H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_*(f) = 1$ et en appliquant la proposition 2 au $\mathbb{Z}$-complexe associé à la décomposition cellulaire de X, on montre que $\theta_1(f, \mathbb{Z})$ est la classe non nulle de Ext $(H_1(X, \mathbb{Z}), H_2(X, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_2$, en particulier f ne peut être un carré.

Maintenant considérons le tore $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Les opérations de $\mathbb{Z}_p$ sur T telles que le $\mathbb{Z}_p$-module $H_*(T, \mathbb{Z})$ soit trivial, sont classifiées par leur classe

$$\theta_1 \in H^2(\mathbb{Z}_p, \operatorname{Hom}(H_1(T, \mathbb{Z}), H_2(T, \mathbb{Z}))),$$

c'est-à-dire θ_1 est dans $(\mathbb{Z}_p)^2$, et on a:

PROPOSITION 4. *Toute opération de $\mathbb{Z}_p$ sur $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induisant l'identité sur $H_*(T, k)$ et de classe $\theta_l = (m, n) \in (\mathbb{Z}_p)^2$ est quasi-isomorphe sur $\mathbb{Z}$, à l'opération engendrée par la translation de vecteur $(m/p, n/p)$.*

IV. Différentielle de la suite spectrale d'homologie équivariante de Borel

Borel, [1], associe à chaque G-espace X l'homologie équivariante $H_*(E(G) \times_G X, k)$ où $E(G) \to B(G) = K(G, 1)$ est le revêtement universel. Cette homologie notée $H_*^G(X, k)$ est limite d'une suite spectrale

$$E^2_{**} = H_*(G, H_*(X, k)) \Rightarrow H_*^G(X, k). \qquad \text{(IV.1)}$$

Nous allons montrer que la différentielle d_2 de cette suite spectrale est donnée par les classes caractéristiques secondes du G-espace X.

Soit un revêtement principal $G \to P \to P/G$. Notons toujours Λ l'algèbre libre $k(G)$ de générateur G, M_* le Λ-mdg à gauche $C_*(X, k)$ et C_* le Λ-mdg à droite $C_*(P, k)$. Les Λ-mdg $C_*(P \times_G X, k)$ et $C_* \otimes_\Lambda M_*$ sont quasi-isomorphes, [2].

Désignons par F_* la filtration sur $C_* \otimes M_*$ par le degré de C_*. Cette filtration détermine une suite spectrale

$$E^2_{**} = H_*(C_* \otimes H_*(M_*)) \qquad \text{(IV.2)}$$

convergeant vers $H_*(C_* \otimes_\Lambda M_*)$ et qui est isomorphe à la suite spectrale de Serre du fibré $P \times_G X \to P/G$.

De manière générale, cette suite spectrale existe pour C_* Λ-mdg à droite, projectif en tant que Λ-module, et M_* Λ-mdg à gauche. Elle converge en particulier si C_* et M_* sont gradués positivement ce que nous supposerons dans la suite.

Soient H_* et K_* des Λ-modules à gauche gradués et I_*^* une résolution Λ-injective de K_*. Le morphisme naturel

$$\operatorname{Hom}_\Lambda^*(H_*, I_*^*) \otimes C_* \underset{\Lambda}{\otimes} H_* \to C_* \underset{\Lambda}{\otimes} I_*^*$$

induit un produit

$$\sqcap\colon \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{**}(H_*, K_*) \otimes H_*(C_* \underset{\Lambda}{\otimes} H_*) \to H_*(C_* \underset{\Lambda}{\otimes} K_*).$$

Nous allons utiliser une autre définition de la classe caractéristique seconde. Considérons I_*^* une résolution Λ-injective de $H_*(M_*)$ et notons F^* la filtration sur $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_*, I_*^*)$ par le degré de résolution. La suite spectrale associée commence en

$$F_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{p,q}(H_*(M_*), H_*(M_*)).$$

En particulier, on a $F_2^{0,0} = \mathrm{Hom}_{\Lambda}^{0}(H_*(M_*), H_*(M_*))$, et l'image de $1 \in F_2^{0,0}$ par la différentielle ∂_2 de cette suite spectrale est une classe $\partial_2(1)$ dans $\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{2,-1}(H_*(M_*), H_*(M_*))$.

Proposition 5. *La classe $\partial_2(1)$ est l'opposée de la classe caractéristique seconde du Λ-mdg M_*.*

Démonstration. Notons $K^{p,q} = \mathrm{Hom}_{\Lambda}^{q}(M_*, I_*^p)$ et désignons par $f^{p,q}$ un élément de $K^{p,q}$. Soient d′ et d″ les différentielles de K^{**} telles que

$$(-1)^p\, \mathrm{d}'' f^{q,q} = \mathrm{d} \circ f^{p,q} + (-1)^{q+1} f^{p,q} \circ \mathrm{d}$$

$$\mathrm{d}' f^{p,q} = \beta^p \circ f^{p,q}$$

où $\beta^j\colon I_*^j \to I_*^{j+1}$ est le morphisme de résolution. Classiquement, on peut représenter un élément z de $F_2^{p,q}$ par $f = f^{p,q} + f^{p+1,q-1}$ vérifiant

$$\mathrm{d}'' f^{p,q} = 0$$

$$\mathrm{d}' f^{p,q} + \mathrm{d}'' f^{p+1,q-1} = 0$$

et $\mathrm{d}' f^{p+1,q-1}$ représente $\partial_2(z)$. Appliquons ceci pour $(p, q) = (0, 0)$ et notons f^0 pour $f^{0,0}$ et f^1 pour $f^{1,-1}$. Le système précédent devient

$$f^0 \circ d = 0$$

$$\beta^0 \circ f^0 - f^1 \circ \mathrm{d} = 0.$$

Si f^0 représente 1 alors $f^2 = \beta^1 \circ f^1$ représente $\partial_2(1)$. Les relations entre f^0, f^1, f^2 entrainent qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_*(M_*) \arrow[r] & I_*^0 \arrow[r, "\beta^0"] & I^1 \arrow[r, "\beta^1"] & I_*^2 \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & H_*(M_*) \arrow[r] \arrow[u, "="'] & Z'(M_*) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\bar{f}_0"'] & Z_*(M_*) \arrow[r] \arrow[u, "\bar{f}_1"'] & H_*(M_*) \arrow[r] \arrow[u, "\bar{f}_2"'] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ sont induites par f_0, f_1, f_2. L'application $\bar{f}_2$ représente donc $e''(M_*)$ c'est-à-dire $-\theta(M_*)$.

La différentielle d_2 de la suite spectrale IV.2 vérifie

THÉORÈME 3. *Soient C_* un Λ-mdg à droite et M_* un Λ-mdg à gauche, C_* étant Λ-projectif en tant que Λ-module. La différentielle*

$$\mathrm{d}_2\colon H_*(C_* \otimes H_*(M_*)) \to E_*(C_* \otimes H_*(M_*))$$

de la suite spectrale associée à la filtration de $C_* \otimes M_*$ par le degré de C_* est le $\sqcap$-produit par la classe caractéristique seconde de M_*.

COROLLAIRE. *La différentielle* $\mathrm{d}_2\colon H_p(G, H_q(X, k)) \to H_{p-2}(G, H_{q+1}(X, k))$ *de la suite spectrale d'homologie équivariante du G-espace X est le $\sqcap$-produit par la classe $\theta_q(X)$.*

Démonstration du théorème 3. Soit $'F_*$ la filtration sur $C_* \otimes_\Lambda I_*^*$ telle que

$$'F_r(C_* \underset{\Lambda}{\otimes} I_*^*) = \sum_{i-j=r} C_i \underset{\Lambda}{\otimes} I_*^j.$$

La suite spectrale associée dégénère et sa différentielle $'\mathrm{d}_2$ est nulle. Le morphisme

$$\varepsilon\colon \mathrm{Hom}_\Lambda^*(M_*, I_*^*) \otimes C_* \underset{\Lambda}{\otimes} M_* \to C_* \underset{\Lambda}{\otimes} I_*^*$$

tel que $\varepsilon(u \otimes c \otimes m) = (-1)^{\deg c \deg u} c \otimes u(m)$ vérifie $\varepsilon(F^p \otimes F_q) \subset {}'F_{q-p}$. Le morphisme ε induit donc un produit des suites spectrales et, pour

$$c \in H_*(C_* \underset{\Lambda}{\otimes} H_*(M_*)),$$

on a

$$0 = {}'\mathrm{d}_2(1 \sqcap c) = \partial_2(1) \sqcap c + 1 \sqcap \mathrm{d}_2(c).$$

La proposition 5 entraîne donc le théorème 3.

References

1. A. Borel, Seminar on transformation groups, *Annals of Math. Studies* 46 (1960).
2. E.H. Brown, Twisted tensor product, *Ann. of Math.* 69 (1959) 223–246.
3. H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Math. Series (1956).
4. A. Legrand, Classes associées à un Π-module différentiel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, 296 (1983) 749–752.
5. S. MacLane, *Homology*, Springer Verlag (1963).