COMPOSITIO MATHEMATICA

L. BREEN

Biextensions alternées

Compositio Mathematica, tome 63, nº 1 (1987), p. 99-122

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__63_1_99_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica 63: 99–122 (1987)
© Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht – Printed in the Netherlands

Biextensions alternées

L. BREEN
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau cedex, France

Received 24 June 1986; accepted in revised form 21 January 1987

1. Introduction

Une façon commode d'étendre a des situations plus générales la notion de polarisation d'une variété abélienne A, est de considérer plutôt la biextension de $A \times A$ par G_m associée à celle-ci. On considère le plus fréquemment dans ce contexte les biextensions symétriques: celles-ci proviennent de faisceaux inversibles L sur A, et sont décrites par des applications $f: A \to A^t$ de A dans sa variéte duale (notées classiquement φ_L) telles que $f^t: A^{tt} \to A^t$ s'identifie à f via l'isomorphisme de bidualité $A \xrightarrow{\sim} A^{tt}$. De telles biextensions ont d'agréables propriétés d'additivité et de descente par rapport à A, qui raffinent celles satisfaites par une biextension quelconque. Enfin, lorsque la variété A est définie sur $\mathbb{C}$ par la donnée d'un réseau $\Lambda \subset V$, une telle biextension symétrique est entièrement décrite par une forme alternée $e: \Lambda \wedge \Lambda \to \mathbb{Z}$, qui n'est autre, dans le cas où la biextension provient d'un faisceau inversible L, que la forme de Riemann associée à L.

Le but du présent travail est d'étudier les biextensions antisymétriques. Au sens naif, ce sont celles qui correspondent a des applications $f: A \to A^t$ telles que f^t s'identifie à $-f$. Nous montrons ici que l'on peut introduire en toute généralité une structure un peu plus forte, celle de biextension alternée, qui diffère de la précédente par des phénomènes liés à la multiplication par 2. Nous commençons par en donner une interprétation homotopique, analogue à celle formulée dans [1] pour les biextensions symétriques, et qui sous-tend l'étude des propriétés de ces objects. Nous élucidons ensuite les relations entre la définition naive et la définition renforcée, et examinons les propriétés d'additivité et de descente de ces objects. On en déduit notamment, dans le cas des variétés abéliennes définies sur $\mathbb{C}$, que de telles biextensions correspondent a des applications quadratiques $f: \Lambda \to \mathbb{Z}$ (ou si l'on veut, a des applications bilinéaires symétriques $e: \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$

Ce travail a été effectué dans le cadre de l'unité associée au C.N.R.S. no. 169.

de type II) alors que la notion naive ne fournirait que des applications bilinéaires symétriques quelconques. La partie la plus élaborée de ce travail est consacrée à définir algébriquement, dans le cas où la base est quelconque, une famille d'applications quadratiques f_n qui coincident, pour A définie sur $\mathbb{C}$, avec les réductions modulo n de l'application f définie ci-dessus par voie transcendante. Ces applications f_n sont les analogues, dans cette situation alternée, des "e_n-pairings" définis par Weil à partir d'un homomorphisme f: $A \to A'$. Elles satisfont d'ailleurs à des relations entre elles tout à fait similaires à celles qui lient les e_n. Dans une dernière partie de ce texte, nous montrons à titre d'application comment les notions développées ici permettent de réinterpréter les résultats obtenus récemment par K. Ribet [16]. C'est un plaisir de le remercier ici pour les conversations que nous avons eues à ce propos. Je remercie également A.K. Bousfield pour des discussions concernant les foncteurs dérivés de l'algèbre extérieure.

1. Biextensions antisymétriques et alternées

Soient A, B, C trois groupes abéliens dans un topos T. On désigne, comme c'est l'usage, par BIEXT(A, B; C) la catégorie de Picard[1] des biextensions de $A \times B$ par C (voir [13], [10] exposés VII et VIII). Soit E une telle biextension et $\sigma^*E \in$ BIEXT(B, A; C) la biextension induite par le morphisme de permutation des facteurs σ: $B \times A \to A \times B$. Si $A = B$, on définit la biextension symétrisée de E par $F = E \otimes \sigma^*E$.[2] C'est, de manière canonique, une biextension symétrique de $A \times A$ par C, c'est-à-dire qu'elle est munie d'un morphisme de biextensions ξ_E: $\sigma^*F \to F$ satisfaisant à la condition de compatibilité suivante: la restriction $\Delta^*\xi_E$ de ξ_E par le morphisme diagonal Δ: $A \to A \times A$ doit coïncider avec l'isomorphisme évident v: $\Delta^*\sigma^*F \to \sigma^*F$ découlant de l'identité $\sigma\Delta = \sigma$ (voir [1] §1.4).

DÉFINITION 1.1. On appelle biextension antisymétrique de $A \times A$ par C une paire (E, φ_E), où E est une biextension de $A \times A$ par C et φ_E est une trivialisation de $E \otimes \sigma^*E$ en tant que biextension symétrique.

On notera AS(A, C) la catégorie de Picard de ces objects. La condition de compatibilité de φ_E à la structure de symétrie sur $E \otimes \sigma^*E$ s'exprime également d'une autre manière. En effet, la donnée de φ_E équivaut à celle d'un morphisme de biextensions ψ_E: $\sigma^*E \to E^{-1}$ (qui fait de E une biextension antisymétrique en un sens naif), satisfaisant à la condition de compatibilité suivante, analogue à celle imposée ci-dessus aux biextensions symétriques:

on requiert que $\sigma^*\psi_E\colon E \to \sigma^*E^{-1}$ coïncide avec le morphisme $(\psi_E)^{-1}$ induit par ψ_E.

Nous allons maintenant raffiner la notion de biextension antisymétrique en introduisant celle de biextension alternée. Commençons par rappeler que si L est un C-torseur cubiste[3] sur A, et qu'en outre L est un torseur symétrique (c'est à dire muni d'un isomorphisme $\lambda\colon i^*L \to L$ où $i\colon A \to A$ est l'application inverse), alors il existe une bonne notion de compatibilité entre la structure de symétrie et la structure cubiste de L.[4] Elle est résumée en disant que L est munie d'une Σ-structure ou encore, que L est un Σ-objet (on se reportera à [1] Définition 5.4 et Théorème 5.2 pour deux définitions en forme de la Σ-structure). Un exemple naturel d'un tel objet est fourni par la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soit E une biextension de $A \times A$ par C et ΔE le A torseur sur C, image inverse de E par l'application diagonale. Alors ΔE est muni d'une Σ-structure canonique.*

Le lecteur trouvera une démonstration de cette assertion dans [1] (Proposition 5.7). Bornons nous ici à la rendre plausible en observant que le torseur ΔE est bien symétrique: en effet, pour tout point x de A, on peut considérer la fibre $(\Delta E)_x$ au-dessus de x. On a alors, avec la notation évidente,

$$(\Delta E)_x \;=\; E_{x,x} \;\simeq\; E^{-1}_{x,-x} \;\simeq\; E_{-x,-x} \;=\; (\Delta E)_{-x}$$

les isomorphismes non triviaux provenant de chacune des deux lois d'inverse partielle de E. Cette identification des fibres de ΔE en x et en $-x$ fournit la donnée de symétrie $\lambda\colon i^*\Delta E \to \Delta E$ sur ΔE.

Définition 1.3. On appelle biextension alternée de A par C une paire (E, η_E), où E is une biextension de $A \times A$ par C et η_E est une trivialisation de ΔE compatible à sa Σ-structure canonique.

On notera $\mathrm{ALT}(A, C)$ la catégorie de Picard de ces objets.

Proposition 1.4. *Une biextension alternée de $A \times A$ par C est, de manière canonique, une biextension antisymétrique de $A \times A$ par C.*

En effet, pour toute biextension E de $A \times A$ par C, on dispose (par [1] 1.2.9) d'un isomorphisme canonique de biextensions symétriques

$$\Lambda\Delta E \simeq E \otimes \sigma^*E \tag{1.1}$$

où, pour tout C-torseur L sur A, ΛL désigne le torseur $m_A^*L \otimes p_1^*L^{-1} \otimes p_2^*L^{-1}$ sur $A \times A$ (où $m_A, p_1, p_2\colon A \times A \to A$ désignent la loi de groupe et les deux projections), la structure de biextension du terme de gauche étant celle définie par la structure cubiste mentionnée sur ΔE. La trivialisation $\Lambda(\eta_E)$ du terme de gauche en fournit une du terme de droite qui définit la structure d'antisymétrie de E souhaitée.

Avant d'effectuer une comparison complète entre les notions de biextension antisymétrique et alternée, on peut déjà se convaincre qu'elles ne coincident pas en général, en examinant les biextensions de ce type dont les biextensions sous jacentes sont triviales. Les énoncés suivants résultent des définitions précédentes.

PROPOSITION 1.5. *La donnée d'une biextension alternée* $(0, \varphi)$ *dont la biextension sous-jacente* 0 *est triviale équivaut à celle d'une application quadratique* $\varphi\colon A \to C$.[5] *Deux biextensions alternées* $(0, \varphi)$ *et* $(0, \psi)$ *de ce type sont isomorphes si et seulement si on a la relation*

$$\varphi(x) - \psi(x) = h(x, x)$$

pour tout $x \in A$, *où* h *est un morphisme bilinéaire de* $A \times A$ *vers* C.

PROPOSITION 1.6. *La donnée d'une biextension antisymétrique* $(0, \varphi)$ *dont la biextension sous jacente* 0 *est triviale équivaut à celle d'une application bilinéaire symétrique* $\varphi\colon A \times A \to C$. *Deux telles biextensions* $(0, \varphi)$ *et* $(0, \psi)$ *sont isomorphes si et seulement si on a la relation*

$$\varphi(x, y) - \psi(x, y) = h(x + y, x + y) - h(x, x) - h(y, y)$$

pour $h\colon A \times A \to C$ *bilinéaire.*

On retrouve bien, dans ce cas particulier, la Proposition 1.4, puisqu'une application quadratique induit une application bilinéaire symétrique. Il est bien clair que la réciproque est fausse en général: ainsi l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire symétrique non nulle $\varphi\colon \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$ ne provient pas d'une application quadratique $\psi\colon \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$. Par contre dès que l'expression $\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x, x)$ acquiert un sens, elle définit une application quadratique associée à φ. C'est notamment le cas si C ou A sont uniquement 2-divisibles.

Revenons au cas général et donnons deux exemples qui illustrent la notion de biextension alternée.

EXEMPLES 1.7

i) Soit E une biextension de $A \times A$ par C. On appelle antisymétrisée de E la biextension $F = E \otimes \sigma^*E^{-1}$. Celle-ci est de manière canonique une biextension alternée de $A \times A$ par C, sa restriction $\Delta E \otimes \Delta\sigma^*E^{-1} \simeq \Delta E \otimes \Delta E^{-1}$ à la diagonale étant canoniquement trivialisée.

ii) Soit A une variété abélienne définie sur un corps algébriquement clos k. On suppose que C est le groupe multiplicatif G_m. Il est bien connu que dans ce cas là, une biextension E de $A \times A$ par G_m (où encore, dans un langage plus ancien, une correspondance divisorielle sur $A \times A$), s'identifie à un morphisme f: $A \to A^t$ de la variété A vers sa duale (voir [10] VII 2.9.6.1). Dans ce cas l'homomorphisme $g = f - f^t$ (où la transposée f^t de f est l'application $A \simeq A^{tt} \to A^t$ induite à partir de f par dualité) correspond à la biextension alternée obtenue à partir de E par antisymétrisation. Dans le même ordre d'idées, voici une description approximative de ce qu'est une biextension alternée de $A \times A$ par G_m (pour la rendre précise, il faudrait lui ajouter quelques énoncés de compatibilité). Soit g: $A \to A^t$ un homomorphisme antisymétrique, c'est à dire tel que $g^t = -g$. La biextension qui lui correspond est donc également antisymétrique. Pour qu'elle soit alternée il faut en outre choisir pour tout $x \in A$ (une fois fixé, pour chaque point $y \in A^t$, un G_m-torseur $L(y)$ dans la classe de y) un point $u(x)$ dans la fibre de $L(\varphi(x))$ au-dessus de x, ces choix étant effectués de manière compatible lorsque x varie.

Passons à une comparaison plus approfondie des catégories ALT(A, C) AS(A, C). Elle repose sur le lemme suivant.

LEMME 1.8. *Soit L un C-torseur sur A muni d'une Σ-structure. Alors le choix d'une trivialisation de ΛL comme biextension symétrique fait de L une extension commutative de A par C dont l'image inverse 2_A^*L par le morphisme de multiplication par deux 2_A: $A \to A$ est munie d'une section canonique c_A qui la trivialise comme extension.*

Dans le cas où A est une variété abélienne et $C = G_m$ ceci est une assertion assez familière: si L est un faisceau inversible symétrique sur A, et que sa classe dans le groupe de Néron-Severi est nulle, alors L correspond à un élément d'ordre deux de la variété duale de A. Dans le cas général, le lemme s'obtient en appliquant le foncteur Rhom(–, C [1]) au triangle distingué

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] L\,\mathrm{Sym}^2 A \arrow[rr] & & L\Gamma^2 A \arrow[dl] \\ & A \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/2 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

introduit dans [1] §8, et en utilisant l'interprétation catégorique des sommets du triangle induit qui y est donnée. De manière plus terre à terre, on constate que trivialiser ΛL comme biextension symétrique équivaut à choisir une loi de groupe commutative sur L qui en fait une extension de A par C. Par ailleurs, la Σ-structure de L fournit un isomorphisme de symétrie $i^*L \simeq L$, tandis que la loi d'inverse de L montre que $i^*L \simeq L^{-1}$. On en déduit une trivialisation de L^2, c'est à dire, puisque L est une extension, de 2^*L. Nous omettons ici la vérification que c_A trivialise 2^*L comme extension.

Proposition 1.9. *L'application identique $(E, \eta_E) \to (E, \eta_E)$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie* ALT(A, C) *et la catégorie des paires (E, λ_E) où E est une biextension antisymétrique de $A \times A$ par C et λ_E est une trivialisation de l'extension ΔE, telle que le diagramme suivant commute:*

$$\begin{tikzcd} & \Delta E \arrow[d, shift left] \\ A \arrow[ur, "c_E"] \arrow[r, "2"'] & A \arrow[u, shift left, "\lambda_E"] \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Cette proposition est une conséquence du Lemme 1.8. appliqué au Σ-objet ΔE associé par la Proposition 1.2 à la biextension E. En effet, pour une biextension E fixée, la structure antisymétrique correspond, via (1.1), à une trivialisation de la biextension symétrique $\Lambda\Delta E$, tandis qu'une structure alternée serait donnée par une trivialisation du Σ-objet ΔE. Le Lemme 1.8 montre bien que cette dernière n'est autre qu'une trivialisation de ΔE du type indiqué dans l'énoncé de la proposition.

Remarques 1.10

i) Lorsque A est uniquement 2-divisible, la donnée de λ_E equivaut à celle de c_E. Dans ce cas, les notions de biextensions antisymétrique et alternée coïncident.
ii) Puisque $\Delta E \in \mathrm{Ext}^1(A, C)$, il revient au même de se donner une trivialisation telle que c_E de $2^*\Delta E$ ou une trivialisation de $(\Delta E)^2$. Lorsque C est 2-divisible (par exemple $C = G_m$), ΔE est donc naturellement un torseur sur A sous le groupe ${}_2C$ des points d'ordre 2 de C. Dans ce cas la proposition est encore vraie si l'on désigne par λ_E une trivialisation de ΔE dans $\mathrm{Ext}^1(A, {}_2C)$. Dans le même ordre d'idées, si on prend C quelconque mais A 2-divisible, la théorie de la descente pour les extensions associées à la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_2A \longrightarrow A \xrightarrow{2} A \longrightarrow 0$$

montre que c'est la nullité d'un homomorphisme de ${}_2A$ vers C qui détermine la possibilité de donner à une biextension antisymétrique E

une structure alternée. Sous l'hypothèse de 2-divisibilité de A qui vient d'être faite, une telle structure alternée sera unique si elle existe.

iii) Nous n'utiliserons pas dans la suite de ce travail la proposition 1.9, dont l'importance est en partie psychologique: elle permet au lecteur qui n'est pas amateur de Σ-structures et notamment du recours à la délicate proposition 1.2, de s'affranchir en apparence de celle-ci, en appelant biextension alternée de $A \times A$ par C une paire (E, λ_E) du type mentionné dans l'énoncé de la proposition 1.9.

2. Propriétés

Les biextensions alternées ont des propriétés d'additivité et de descente tout à fait analogues à celles des torseurs cubistes. La raison profonde en est qu'elles possèdent une interprétation homotopique parallèle à celle donnée dans [1] §8 pour les biextensions symétrique et les objects cubistes. En effet, pour tout groupe abélien libre (ou plus généralement $\mathbb{Z}$-plat) de T, on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Gamma_2 A \xrightarrow{i} A \otimes A \xrightarrow{j} \Lambda^2 A \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

où $\Gamma_2 A$(resp. $\Lambda^2 A$) désigne la composante de degré 2 de l'algèbre à puissances divisées (resp. de l'algèbre extérieure) associée au $\mathbb{Z}$-module A, les flèches étant définies par

$$\begin{aligned} i(\gamma_2(a)) &= a \otimes a \\ j(a \otimes b) &= a \wedge b \end{aligned}$$

(en effet, pour A $\mathbb{Z}$-libre, on sait que $\Gamma_2 A$ s'identifie aux élements de $A \otimes A$ invariants par l'action du groupe symétrique qui permute les facteurs, voir [2] exposé 8 §4). On dispose donc, pour un groupe abélien quelconque A, d'un triangle distingué

$$\begin{tikzcd} L\Gamma_2 A \arrow[rr] & & A \overset{L}{\otimes} A \arrow[dl] \\ & L\Lambda^2 A \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

les foncteurs dérivés non additifs $L\Gamma_2$ et $L\Lambda^2$ étant appliqués au groupe A placé en degré zéro. Il en résulte, pour tout groupe abélien C, un triangle distingué

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Rhom}(L\Lambda^2 A, C[1]) \arrow[dl] & \\
\mathrm{Rhom}(A \overset{L}{\otimes} A, C[1]) \arrow[rr] & & \mathrm{Rhom}(L\Gamma_2 A, C[1]). \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Celui-ci permet d'interpréter les objets de la catégorie de Picard correspondant par [4] XVIII Proposition 1.4.15 au complexe de longueur 1 $\tau_{\leqslant 0}\mathrm{Rhom}(L\Lambda^2 A, C[1])$ ($\tau_{\leqslant 0}$ désignant comme dans [4] le foncteur de troncation), en termes des catégories de Picard associées aux deux autres sommets du triangle (2.2). Ces dernières sont connues: ce sont respectivement, par [10] VII Théorèmes 3.6.4 et [1] Théorème 8.9, la catégorie des biextensions de $A \times A$ par C et celle des Σ-objects sur A de groupe structural C. Puisque l'application i du diagramme (2.1) est l'application diagonale, il suffit de se reporter à la Définition 1.3 pour arriver à la conclusion suivante, que l'on comparera à [1] Proposition 8.4 et Théorème 8.9.

PROPOSITION 2.1. *La catégorie de Picard associée au complexe* $\tau_{\leqslant 0}\mathrm{Rhom}(L\Lambda^2 A, C[1])$ *est équivalente à celle des biextensions alternées de* $A \times A$ *par* C.

REMARQUE. Un énoncé similaire donne une interprétation du champ de Picard associé à $\tau_{\leqslant 0}\mathrm{Rhom}(L\Lambda^2 A, C[1])$.

La propriété d'additivité suivante (on devrait plutôt dire: de quadraticité) d'une biextension alternée repose en dernière analyse, compte tenu de la proposition précédente, sur la quadraticité du foncteur $A \to \Lambda^2 A$. On peut également la démontrer de manière directe, ou encore la déduire des énoncés d'additivité correspondants pour les biextensions et les Σ-objets de [1] (1.2.4) et Théorème 5.9. On considère la paire de foncteurs additifs F et G:

$$\mathrm{ALT}(A \times B, C) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathrm{ALT}(A, C) \times \mathrm{ALT}(B, C) \times \mathrm{BIEXT}(A, B; C) \tag{2.3}$$

définis par

$$F(E) = (i_A \times i_A)^*E, \quad (i_B \times i_B)^*E, \quad (i_A \times i_B)^*E$$

$$G(E_1, E_2, E_3) = (p_A \times p_A)^*E_1 \otimes (p_B \times p_B)^*E_2 \otimes H$$

où p_A et p_B désignent les projections de $A \times B$ sur chacun des facteurs, i_A et i_B les injections correspondantes, et H est l'antisymétrisée de la biextension $(p_A \times p_B)^*E_3$.

PROPOSITION 2.2. *Les foncteurs F et G sont quasi-inverses.*

On en déduit, de la même manière que pour les théorèmes de descente pour les objets cubistes ou les Σ-objets ([1] Proposition 3.10 et 5.10), l'énoncé suivant:

PROPOSITION 2.3. *Soit* $0 \to A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{v} A_3 \to 0$ *une suite exacte de groupes abéliens de T. Alors la catégorie* $\mathrm{ALT}(A_3, C)$ *équivaut à celles des triples* (E, s, t) *où E est un objet de* $\mathrm{ALT}(A_2, C)$ *et s* (resp. t) *une trivialisation de u^*E dans* $\mathrm{ALT}(A_1, C)$ (resp. de $(u \times 1)^*E$ *dans* $\mathrm{BIEXT}(A_1, A_2; C)$) *telles que les sections s et* $(1 \times u)^*t$ *de l'objet u^*E de* $\mathrm{BIEXT}(A_1, A_1; C)$ *coincident.*

REMARQUES 2.4

i) Les énoncés des Propositions 2.2 et 2.3 restent vrais si on les affaiblit en remplaçant partout les biextensions alternées par des biextensions antisymétriques.

ii) Les biextensions symétriques jouissent de propriétés d'additivité et de descente tout à fait analogues à celles qui viennent d'être énoncées par les biextensions alternées. Nous les énonçons ici à titre de comparaison, alors qu'elles auraient pu figurer dans [1]: on définit une paire de foncteurs

$$S(A \times B; C) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} S(A; C) \times S(B; C) \times \mathrm{BIEXT}(A \times B; C)$$

(où $S(A; C)$ désigne la catégorie des biextensions symétriques de $A \times A$ par C) en posant

$$F(E) = \big((i_A \times i_A)^*E, \quad (i_B \times i_B)^*E, \quad (i_A \times i_B)^*E\big)$$

$$G(E_1, E_2, E_3) = (p_A \times p_B)^*E_1 \otimes (p_B \times p_B)^*E_2 \otimes H$$

où H est la symétrisée (au sens de [1] Exemple 1.5 iii) de la biextension $(p_A \times p_B)^*E_3$. Ces foncteurs F et G sont quasi-inverses et on en déduit, pour toute suite exacte $0 \to A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{v} A_3 \to 0$ de T, un théorème de descente pour les biextensions symétrique dont l'énoncé est identique à celui de la Proposition 2.3, chaque catégorie telle que $\mathrm{ALT}(A, C)$ étant remplacée par la catégorie $S(A, C)$ correspondante.

iii) La proposition précédente indique comment définir un élément de $\mathrm{ALT}(A., C)$, (resp. $S(A., B)$) où $A. = [A_1 \xrightarrow{u} A_0]$ est un complexe de longueur 1 de groupes abéliens de T (concentré en degrés $[-1, 0]$). C'est la donnée d'un triple (E, s, t) avec $E \in \mathrm{ALT}(A_0, C)$ (resp. $S(A_0, C)$) et s(resp. t) une trivialisation de u^*E dans $\mathrm{ALT}(A_1, C)$ (resp. de

$(u \times 1)^*\Lambda E$ dans $\mathrm{BIEXT}(A_1, A_0; C)$) satisfaisant à condition de compatibilité indiquée dans la Proposition 2.3. De même, si $B. = [B_1 \to B_0]$ est un complexe du même type, on sait par [4] ce qu'est un élément de $\mathrm{BIEXT}(A., B., C)$. Enfin, un objet de $\mathrm{CUB}(A., C)$) (resp. $\Sigma(A., C)$) peut être défini de manière tout à fait analogue, en partant du théorème de descente pour les objets cubistes ou les Σ-objets de [1] rappelé ci-dessus: c'est la donnée d'un triple (L, s, t) avec L un objet de $\mathrm{CUB}(A_0, C)$ (resp. $\Sigma(A_0, C)$), s une trivialisation de u^*L dans $\mathrm{CUB}(A_1, C)$ (resp. $\Sigma(A_1, C)$), t une trivialisation de $(u \times 1)^*\Lambda(L)$ dans $\mathrm{BIEXT}(A_1, A_0; C)$, tels que $\Lambda(s)$ et $(1 \times u)^*t$ se correspondent par l'isomorphisme $\Lambda(u^*E) \simeq (u \times u)^*\Lambda E$. Les objets cubistes sur un complexe $A.$ associé à un 1-motif au sens de [5], (munis d'une condition supplémentaire de positivité) sont considérés sous une forme un peu cachée par C.-L. Chai dans [3] §3 sous le vocable de "ample sheaf data".

iv) Les propositions énoncées jusqu'ici pour les objets de $\mathrm{ALT}(A, C)$ demeurent valable lorsque le groupe A est remplacé par un complexe $A. = [A_1 \to A_0]$. Ainsi, se donner un objet de $\mathrm{ALT}(A., C)$ équivaut à se donner un objet E de $\mathrm{BIEXT}(A., A.; C)$ muni d'une trivialisation de Δ^*E dans $\Sigma(A., C)$ (on laisse comme exercice la définition de l'application diagonale Δ^*: $\mathrm{BIEXT}(A., A., C) \to \Sigma(A., C)$). Les autres énoncés qui précèdent s'étendent sans difficulté à cette situation, notamment les Propositions 2.1–2.3.

Il existe une manière légèrement différente d'énoncer la Proposition 2.3 et l'assertion correspondante pour les biextensions symétriques:

PROPOSITION 2.5 *Sous les hypothèses de la Proposition* 2.3, *la catégorie* $\mathrm{ALT}(A_3, C)$ *équivaut à celles des paires* (E, t), *où* E *est un objet de* $\mathrm{ALT}(A_2, L)$ *et* t *une trivialisation de* $(u \times 1)^*E$ *dans* $\mathrm{BIEXT}(A_1, A_2; C)$, *telle que* $\Delta^*(1 \times u)^*t$ *coincide avec la trivialisation* $\eta_{u^*\mathrm{E}} = u^*\eta_E$ *de* $\Sigma(A_1, C)$ *induite par la structure alternée de* E.

En effet, pour que la section $s = (1 \times u)^*t$ de $(u \times u)^*E$ trivialise $(u \times u)^*E$ comme biextension alternée, il faut et il suffit que sa restriction à la diagonale coincide avec $u^*\eta_E$.

Pour énoncer la propriété correspondante pour les biextensions symétriques, on commence par remarquer qu'il revient au même de se donner un objet $(E, \xi_E\colon \sigma^*E \to E)$ de $S(A, C)$ ou une biextension E munie d'une trivialisation ξ_E de son antisymétrisée $E \otimes \sigma^*E^{-1}$ dans $\mathrm{ALT}(A, C)$ (et non dans $\mathrm{AS}(A, C)$ car on impose à ξ_E la condition de compatibilité rappelée au début du §1). Si on applique cette observation à la trivialisation $s = (1 \times u)^*t$ de la biextension $(u \times u^*)E$, on constate que s

trivialise $(u \times u)^*E$ dans $S(A_1, C)$ si et seulement si $s \otimes (\sigma^* s)^{-1}$ coincide avec $u^*\xi_E$. On a donc:

PROPOSITION 2.6. *Sous les hypothèses de la Proposition* 2.3, *la catégorie* $S(A_3, C)$ *équivaut à celle des paires* (E, t), *où* (E, ξ_E) *est un objet de* $S(A_2, C)$ *et t une trivialisation de* $(u \times 1)^*E$ *dans* $\mathrm{BIEXT}(A_1, A_2; C)$, *telle que l'antisymétrisée de la trivialisation* $(1 \times u)^*t$ *de* u^*E *coincide avec sa trivialisation dans* $\mathrm{ALT}(A_1, C)$ *induite par la structure de symétrie de E.*

Soit A une variété abélienne, définie sur $\mathbb{C}$ comme quotient d'un espace vectoriel V par un réseau Λ. Les Propositions 2.5 et 2.6 permettent d'obtenir de manière très économique la description suivante des biextensions symétriques (resp. alternées) de $A \times A$ par G_m.

PROPOSITION 2.7. *La catégorie des biextensions symétriques* (*resp. antisymétriques, resp. alternées*) *de* $A \times A$ *équivaut à la catégorie discrète dont les objets sont les objets sont les applications alternées* (*resp. symétriques* $\mathrm{e}^E\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}(1)^6$ (*resp. les applications quadratiques* $f^E\colon \Lambda \to \mathbb{Z}(1)$).

REMARQUES 2.8

i) L'assertion concernant les biextensions symétriques est ultra-classique: dans un autre langage, elle exprime le fait qu'à une classe ξ dans le groupe de Néron-Severi de A est associée une forme de Riemann e_ξ. Elle peut d'ailleurs être directement déduite de l'assertion correspondante pour les biextensions générales de $A \times A$ par G_m: on sait en effet par [5] 10.2.3.4 b) qu'une biextension de $A \times A$ par G_m est décrite, lorsque A est définie sur $\mathbb{C}$, par une application linéaire $e_\Lambda\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$. En outre, par loc.cit. Remarque 10.2.4, celle-ci est antisymétrique (resp. symétrique) lorsque E est symétrique (resp. antisymétrique). Or, puisque $\mathbb{Z}$ est sans 2-torsion, un tel e_Λ antisymétrique est nécessairement alterné.
ii) La remarque précédente permet de préciser le contenu réel de la Proposition 2.7: c'est l'assertion que la forme symétrique e_Λ associée à E provient, pour E alternée, d'une forme quadratique (ou encore, l'assertion que la forme e_Λ est de type II dans la terminologie de [17] V 1.3.4).

LEMME 2.9. *Toute biextension symétrique* (*resp. alternée*) *E de l'espace vectoriel V par* G_m *est triviale.*

En effet, on sait par [5] $(10.2.3.2)_{\mathrm{an}}$ que la biextension sous-jacente à E est triviale. Aussi, en vertu de la Proposition 1.5 et de son analogue dans le cas symétrique, E est-elle décrite par une application alternée $g\colon V \otimes V \to G_m$ (resp. une application quadratique $h\colon V \to G_m$). Mais E nécessairement triviale, car cette application est l'antisymétrisée d'une application bilinéaire

g_1: $V \otimes V \to G_m$ (resp. est la restriction à la diagonale d'une application bilinéaire h_1: $V \otimes V \to G_m$), puisque V est uniquement 2-divisible.

La Proposition 2.7 est maintenant facile à démontrer (on se contentera d'examiner le cas alterné, le cas symétrique étant traité de manière similaire). La catégorie ALT(A, G_m) est discrète, puisque tout automorphisme d'une biextension alternée E est décrit par un morphisme alternée $A \times A \to G_m$, qui est nécessairement nul. En vertu de la Proposition 2.3 et du Lemme 2.9, un objet de ALT(A, G_m) muni d'une trivialisation dans ALT(V, G_m) est décrit par un morphisme bilinéaire φ: $\Lambda \otimes V \to G_m$ tel que $\varphi(\lambda, \lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et un tel morphisme φ est de la forme exp (ψ) avec ψ: $\Lambda \otimes V \to G_a$ tel que $\psi(\lambda, \lambda) \in \mathbb{Z}(1)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. L'application quadratique souhaitée est alors définie par $f_\Lambda(\lambda) = \psi(\lambda, \lambda)$. Inversement, soit f_Λ: $\Lambda \to \mathbb{Z}(1)$ une telle application quadratique et ψ_1 l'application bilinéaire associée. Elle se prolonge par $\mathbb{C}$-linéarité en ψ_1: $\Lambda \otimes V \to \mathbb{C}$ et l'application φ: $\Lambda \otimes V \to G_m$ définie par

$$\varphi(\lambda, v) \;=\; \exp\left(\tfrac{1}{2}\psi_1(\lambda, v)\right)$$

décrit l'objet de ALT(A, G_m) qui correspond à f_Λ.

Remarque 2.10. La biextension sous-jacente à E est décrite par la paire d'application (φ, φ_1) où φ_1: $V \otimes \Lambda \to G_m$ est définie par $\varphi_1(v, \lambda) = \varphi(\lambda, v)^{-1}$. En se reportant à la définition dans [5] Lemme 10.2.3.4 de l'application e_Λ: $\Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}(1)$ correspondant à E, on constate que

$$e_\Lambda(\lambda_1, \lambda_2) \;=\; \psi(\lambda_1, \lambda_2) + \psi(\lambda_2, \lambda_1).$$

e est donc bien l'application bilinéaire associée à f_Λ.

3. Réalisation de Tate

Soit une extension E de $A \times B$ par C. A E est associée une famille d'applications bilinéaires

$$e_n^E\colon {}_nA \times {}_nB \to {}_nC \quad (n \in \mathbb{N})$$

reliées entre elles par les relations

$$e_{nm}(x, y) \;=\; e_n(mx, y) \quad x \in {}_{nm}A, \quad y \in {}_nB \tag{3.1}$$

$$e_{nm}(x, y) \;=\; e_n(x, my) \quad x \in {}_nA, \quad y \in {}_{nm}B \tag{3.2}$$

pour toute paire d'entiers n, m (voir [10] exposé VIII (2.1.11.1)). Ces applications sont définies géométriquement de la manière suivante (voir

[5] 10.2.5):[7] les 2 lois de groupes partielles sur E, itérées n fois, définissent une paire d'isomorphismes canoniques de biextensions

$$\alpha_n^E\colon E^n \to (1 \times n)^*E \tag{3.3}$$

$$\beta_n^E\colon E^n \to (n \times 1)^*E \tag{3.4}$$

(cf. [1] 4.1). Considérons l'application composée

$$(n \times 1)^*E \xrightarrow{\beta_n^{-1}} E^n \xrightarrow{\alpha_n} (1 \times n)^*E \tag{3.5}$$

Sa source (resp. son but) est canoniquement trivialisé sur $({}_nA \times B)$ (resp. $A \times {}_nB$). Ainsi la flèche (3.5), restreinte à ${}_nA \times {}_nB$, est un morphisme entre des biextensions triviales, elle est donc donnée par la multiplication par une fonction $e_n^E(\ ,\ )$. Supposons que A soit définie sur $\mathbb{C}$ et s'exprime comme quotient V/Λ. Comme on l'a rappelé plus haut, une biextension E de $A \times A$ par G_m est alors décrite par une application $e^E\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}(1)$ définie par voie transcendante, et dont on sait par [5] Prop. 10.2.6 que la réduction modulo n s'identifie avec l'accouplement e_n^E. On a vu (Proposition 2.7) que les propriétés de symétrie de E étaient reflétées par celle de e^E, et elles le sont également (dans le cas général) par celles des e_n (voir [10] VIII Corollaire 2.2.12). L'énoncé de la Proposition 2.7 rend alors très plausible l'assertion suivante.

THÉORÈME 3.1. *Soit E une biextension alternée de $A \times A$ par C. Elle définit une famille d'applications quadratiques*

$$f_n^E\colon {}_nA \to C$$

satisfaisant aux propriétés suivantes:

i) *L'application bilinéaire associée à f_n^E est l'application bilinéaire (symétrique) $e_n^E(\ ,\ )$ définie par la biextension (antisymétrique) sous-jacente à E.*

ii) *Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a les relations*

$$f_{nm}(x) = [f_n(x)]^m \quad x \in {}_nA \tag{3.6}$$

$$[f_{nm}(x)]^m = f_n(mx) \quad x \in {}_{mn}A. \tag{3.7}$$

iii) *Sous les hypothèses de la Proposition 2.6, f_n^E s'obtient par réduction modulo n de l'application quadratique f^E.*

REMARQUES

i) Les relations 3.1 et 3.2 imposent, compte tenu de i), des relations supplémentaires aux f_n, notamment

$$\frac{f_{nm}(x+y)}{f_{nm}(x)f_{nm}(y)} = \frac{f_n(mx+y)}{f_n(mx)f_n(y)} \quad x \in {}_{nm}A, \quad y \in {}_nA$$

$$\frac{f_{nm}(x+y)}{f_{nm}(x)f_{nm}(y)} = \frac{f_n(x+my)}{f_n(x)f_n(my)} \quad x \in {}_nA, \quad y \in {}_{nm}A$$

ii) En vertu de la Proposition 1.4, et de [10] VIII Corollaire 2.2.12, e_n^E est symétrique. Le théorème est donc évident si on se limite aux entiers n impairs. Une autre manière de l'exprimer est la suivante: sous l'hypothèse que E est alternée, l'application quadratique $f_n\colon x \to e_n(x, x)^{1/2}$ a un sens intrinsèque.

La construction des applications f_n^E n'est pas difficile. On a en effet vu que l'application α_n^E (3.3) définit une trivialisation $s = s_n^E = (\alpha_n^E)^{-1}$ de $E^n|_{A \times {}_nA}$, a fortiori de $E^n|_{{}_nA \times {}_nA}$. Ainsi, pour $E \in \mathrm{ALT}(A, C)$, $E^n|_{{}_nA \times {}_nA}$ est une biextension alternée de biextension sous-jacente trivialisée par s. En vertu de la Proposition 1.5, elle est donc décrite par une application quadratique f_n^E.

Explicitons cette dernière: la structure alternée de E est définie par une trivialisation η_E de ΔE. Les sections Δs_n^E et η_E^n de $\Delta E^n|_{{}_nA}$ dans $\Sigma({}_nA, C)$ diffèrent par application quadratique f_n^E, c'est à dire que f_n est caractérisée par

$$\eta_E^n(x) = f_n^E(x)\Delta s_n^E(x) \quad \forall x \in {}_nA. \tag{3.8}$$

EXEMPLE 3.2. Soit E une biextension de $A \times A$ par C, et $F = E \otimes \sigma^*E^{-1}$ son antisymétrisée, munie de la structure alternée indiquée en 1.7 i). On a alors la relation

$$f_n^F(x) = e_n^E(x, x) \quad \forall x \in {}_nA. \tag{3.9}$$

REMARQUE 3.3. L'identité (3.9) est compatible avec l'énoncé du Théorème 3.1 et les propriétés bien connues de e_n^E. En effet, le terme de droite de (3.9) définit par bilinéarité de e_n une application quadratique, et les propriétés (3.1)–(3.2) impliquent les propriétés correspondantes (3.6)–(3.7) pour f_n^F. Enfin l'application bilinéaire associée à l'application f_n^F définie par (3.9) est la symétrisée de $e_n^E(\ ,\ )$, c'est à dire e_n^F compte tenu de la relation bien connue

$$e_n^{\sigma^*E}(x, y) \;=\; e_n^E(y, x)^-$$

entre le e_n-pairing associé à E et celui de σ^*E (voir [10] Prop. 2.1.11 i et [5] 10.2.4 à ce propos).

Démontrons maintenant l'identité (3.9). La trivialisation η_F de ΔF qui définit la structure alternée de F est donnée par la trivialisation canonique de $\Delta E \otimes \Delta\sigma^*E^{-1} \simeq \Delta E \otimes \Delta E^{-1}$. Par ailleurs, l'isomorphisme $\alpha_n^F \colon F^n \to (1 \times n)^*F$ de type (3.3) associée $F = E \otimes \sigma^*E^{-1}$ est définie par $\alpha_n^F = \alpha_n^E \otimes (\alpha_n^{\sigma^*E})^{-1}$. Mais, puisque la structure de biextension de σ^*E est définie en échangeant les lois partielles t_1 et t_2 (voir [1] 1.4), on a la relation

$$\alpha_n^{\sigma^*E} \;=\; \sigma^*\beta_n E.$$

A α_n^F est associée une section $s = (\alpha_n^F)^{-1}$ de $F^n|_{{}_nA \times {}_nA}$ qui est donc définie par $s = (\alpha_n^E)^{-1} \otimes s^*\beta_n^E$. La formule (3.8) qui définit f_n^F devient maintenant

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; f_n^F(x)\ \Delta(\alpha_n^E)^{-1} \otimes \Delta(\sigma^*\beta_n^E) \\ &=\; f_n^F(x)\ \Delta[(\alpha_n^E)^{-1} \otimes \beta_n^E](x) \end{aligned} \tag{3.10}$$

c'est à dire $1 = f_n^F(x)\, e_n^E(x, x)^{-1}$ comme on le constate en se reportant à la définition de e_n^E rappelée ci-dessus.

La première partie du théorème 3.1 est maintenant facile à démontrer: la Proposition 2.2, appliquée à l'objet $(m_A \times m_A)^*E$ de $\mathrm{ALT}(A \times A, C)$ (m_A désignant comme toujours la loi de groupe de A), définit un morphisme canonique dans $\mathrm{ALT}(A \times A, C)$

$$(m_A \times m_A)^*E \simeq (p_1 \times p_1)^*E \otimes (p_2 \times p_2)^*E \otimes F$$

où F est l'antisymétrisée de la biextension $(p_1 \times p_2)^*E \in \mathrm{BIEXT}(A^2, A^2; C)$. Par fonctorialité en E de la construction de f_n^E, on en déduit les relations

$$f_n^E(x+y) = f_n^E(x) f_n^E(y) f_n^F(x,y)$$

Mais la relation (3.9) montre que

$$\begin{aligned} f_n^F(x,y) &= e_n^{(p_1 \times p_2)^*E}((x,y),(x,y)) \\ &= e_n^E(x,y) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Passons à la partie ii) (la vérification de iii) est, comme en [5], laissée au lecteur). Les identités (3.6) et (3.7) se démontrent de manière tout à fait analogue aux identités (3.1) et (3.2) (mais n'en sont pas des conséquences formelles!). La première se démontre en observant que l'associativité de la loi de groupe partielle $\underset{1}{+}$ entraîne la relation $[(\underset{1}{+})^n]^m = \underset{1}{+}nm$, c'est à dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd} (E^n)^m \arrow[r, "(\alpha_n^E)^m"] \arrow[d, equal] & {[(1 \times n)^*E]^m} \arrow[d, "\alpha_m^{(1\times n)^*E}"] \\ E^{nm} \arrow[r, "\alpha_{nm}^E"'] & (1 \times nm)^*E \end{tikzcd}$$

commute. Soit c_n la trivialisation canonique de $(1 \times n)^*E|_{A \times {}_nA}$ comme biextension. Par fonctorialité, la flèche verticale de droite envoie $(c_n)^m$ vers $(1 \times m)^*c_n = c_{nm}$ d'où résulte l'identité suivante entre les sections telles que $s_n^E = (\alpha_n^E)^{-1}c_n$:

$$(s_n^E)^m = s^E_{nm|A \times {}_nA} \tag{3.11}$$

Par ailleurs, la structure alternée sur E^n étant définie par la section η_E^n de ΔE^n, la relation

$$(\eta_E^n)^m = \eta_E^{nm} \tag{3.12}$$

entre les sections de ΔE^{nm} est trivialement satisfaite. La relation (3.6) résulte de la comparison de ces deux identités, compte tenu de (3.8).

Passons maintenant à la démonstration (3.7). Considérons la flèche

$$\gamma_m^E\colon (m \times m)^*E \xrightarrow{(1\times m)^*\beta_m^{-1}} (1 \times m)^*E^m \xrightarrow{\alpha_m^{-1}} E^{m^2} \tag{3.13}$$

qui correspond à la multiplication par m par rapport à chacune des deux lois de groupe partielle sur E. Elevée à la puissance n, elle définit une flèche

$$\gamma_m^{E^n}\colon (m \times m)^*E^n \to (E^{mn})^m \tag{3.14}$$

qui envoie $(m \times m)^*s_n^E$ vers la section (s_{nm}^E) de (E^{mn}) au-dessus de $A \times {}_{nm}A$. On dispose par ailleurs de la section η_E^n de ΔE^n, qui trivialise ΔE^n comme Σ-objet.

Pour comparer la section induite $m^*(\eta_E^n)$ avec la section η_E^{mn} de $(\Delta E)^{mn}$, on fait appel au lemme suivant:

Lemme 3.4. *Soit $L \in \Sigma(A, C)$. Il existe alors une famille canonique d'isomorphismes*

$$\varphi_n^L\colon n^*L \to L^{n^2} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

En outre, si L provient d'une biextension E, alors on a la relation

$$\varphi_n^{\Delta E} = \Delta^*\gamma_n^E \tag{3.16}$$

(la flèche γ_n étant définie en (3.13)).

Remarque 3.5. L'existence d'une flèche φ_n^L pour L cubiste symétrique est bien connue: on peut la définir comme composée de l'application $n^*L \simeq L^{n(n+1)/2} \otimes i^*L^{n(n-1)/2}$ déduite de la structure cubiste et de l'isomorphisme induit par la symétrie de L (voir [14] chapitre II, §6 Cor. 3). Le contenu réel de l'énoncé du lemme est donc la relation (3.16). La démonstration en étant un peu délicate, nous la reléguons en appendice (pour une construction moins satisfaisante de φ_n^L, voir [1] (6.1.8)).

Le Lemme 3.4 étant admis, la vérification de la relation (3.7) n'offre pas de difficulté. En effet, la fonctorialité en L de la flèche φ_m^L montre que l'isomorphisme (3.15)

$$\varphi_m^{\Delta E}\colon m^*\Delta E \to (\Delta E)^{m^2}$$

envoie la section $m^*\eta_E$ vers $(\eta_E)^{m^2}$. L'identité (3.8) qui définit f_n induit l'identité suivante entre des sections de $m^*\Delta E^n|_{mnA}$:

$$m^*\eta_E^n \;=\; (m^*f_n)(m^*\Delta s_n^E) \;=\; (m^*f_n)\Delta(m \times m)^* s_n^E$$

En la transportant par la flèche $\varphi_m^{\Delta E^n} = \Delta^*\gamma_n^{E^n}$, elle induit donc l'identité

$$(\eta_E^n)^{m^2} \;=\; (m^*f_n)(\Delta s_{nm})^m \tag{3.17}$$

entre des sections de $\Delta E^{mn^2}|_{mnA}$. Mais si l'on élève à la puissance m l'identité de type (3.8) qui définit f_{mn}, trouve une relation

$$\eta_E^{nm2} \;=\; (f_{nm}^E)^m(\Delta s_{nm}^E)^m. \tag{3.18}$$

L'identité (3.7) s'obtient en comparant (3.17) et (3.18).

Remarque 3.6

i) Le Théorème 3.1 peut être précisé en partant de la description homologique des biextensions alternées donnée dans la Proposition 2.1. On dispose en effet d'une suite exacte du coefficient universel (voir [1] 9.7.1)

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda^2 A, C) \to \mathrm{Ext}^1(L\Lambda^2 A, C) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(L_1\Lambda^2 A, C)$$
$$\to \mathrm{Ext}^2(\Lambda^2 A, C) \to \dots \tag{3.19}$$

Le foncteur dérivé non-additif $L_1\Lambda^2 A$ (pour un groupe abélien A placé en degré 0) mériterait d'être mieux connu. A ma connaissance, il a été évalué pour la première fois par J.R. Dennett [7], qui montre qu'il est isomorphe au groupe ΩA introduit par Eilenberg–MacLane en [9] §13. On peut également le décrire à partir de la formule de décalage de Bousfield-Quillen (voir [15] 7.21, [12] 4.3.2.1 (i)) qui fournit un isomorphisme canonique

$$L_1\Lambda^2 A \simeq L_3\,\mathrm{Sym}^2(A[1]). \tag{3.20}$$

Or, par [8] Satz 4.16, le terme de droite de (3.20) est un facteur direct du troisième groupe d'homologie (à coefficients entiers) $H_3 A$ du groupe abélien A. Ce groupe a été calculé par R. Hamsher [11] et G. Decker [6], qui en décrivent notamment le facteur direct ΩA. En fait, il est beaucoup plus efficace de construire directement un isomorphisme $\Omega A \simeq L_1 \Lambda^2 A$ de manière analogue à ce qui a été fait dans [1] Proposition 9.5 pour $L_1 \Gamma_2 A$. Nous ne le ferons pas ici puisque c'est essentiellement le travail fait sous une forme géométrique dans la démonstration du Théorème 3.1. Le lien entre celui-ci et la discussion précédente est en effet le suivant: la flèche g de (3.19) s'identifie à l'application

$$\mathrm{Alt}(A, C) \to \mathrm{Hom}(\Omega A, C) \tag{3.21}$$

qui, a la classe d'isomorphisme de la biextension E, associe la famille f_n^E d'applications définies par le Théorème 3.1 (la description de ΩA donnée dans [9] §13 implique en effet que la famille des f_n définit une flèche de ΩA vers C).

ii) On laisse au lecteur le soin d'étendre au cas des 1-motifs le Théorème 3.1: du point de vue homologique, il subsiste une flèche de type g (3.19) pour A remplacé par un complexe de longueur 1 $M. = [X \to G]$, et il ne reste plus qu'à calculer et interpréter sa source et son but. Or on a déjà vu dans la Remarque 2.4 iii) ce qu'était un élément de $\mathrm{ALT}(M., C)$, tandis que la construction (10.2.5) de [5] permet de deviner que la réalisation de Tate d'une telle biextension, consiste dans le cas où $C = G_m$(avec les notations de [5]) en une famille de flèches quadratiques

$$f_n\colon T_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(M) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$$

pour lesquelles les applications bilinéaires associées sont les flèches

$$e_n\colon T_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(M) \otimes T_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(M) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$$

définies par l'objet de $\mathrm{BIEXT}(M., M., G_m)$ sous-jacent.

4. A propos d'un théorème de K. Ribet

Dans l'article [16], Ribet part d'un homomorphisme $f = A \to A'$, A étant une variété abélienne définie sur un corps k. Il lui associe alors, pour tout point $a \in A$, une extension G de A par G_m dont la classe dans A' est $f(a) - f^t(a)$, f^t désignant la transposée de f. En outre, G est munie d'une point privilégié P'', situé dans la fibre de G au-dessus de a. A f correspond, pour un entier fixé $n \geqslant 0$, une application

$$\psi_f \colon S(A) \to \mu_n \tag{4.1}$$

où $S(A)$ désigne l'ensemble des tenseurs symétriques de rang 2 dans ${}_nA \otimes {}_nA$.

La discussion de l'Exemple 1.7 i), ii) permet d'interpréter cette construction: à f correspond une biextension E de $A \times A$ par G_m, donc une biextension antisymétrisée F, qui est de manière naturelle une biextension alternée de $A \times A$ par G_m. La fibre de F au-dessus de $\{a\} \times A$ est le torseur G de [16], muni du point P'' décrit par la structure alternée de F. Enfin, ψ_f n'est autre que l'application quadratique $f_n^F(x) = e_n^E(x, x)$ décrite en (3.9). En effet, cette dernière est un homomorphisme $f_n \colon \Gamma_2({}_nA) \to \mu_n$, ou même, $f_n \colon \Gamma_2({}_nA) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mu_n$, soit encore une application quadratique ${}_nA \to \mu_n$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules:

$$f_n \colon \Gamma_2^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA) \to \mu_n. \tag{4.2}$$

Mais ${}_nA$ est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ module libre et, comme on l'a rappelé plus haut, pour tout R-module libre N, $\Gamma_2^R(N)$ s'identifie aux tenseurs invariants dans $N \otimes N$ d'où l'identification souhaitée de la source de (4.2) avec celle de (4.1).

Le résultat principal de [16] montre comment reconstruire à partir de ψ_f une certaine suite exacte courte obtenue en appliquant le foncteur $T = T_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ à G. Nous en esquissons, pour terminer, une interprétation homotopique, sans nous préoccuper cependant d'effectuer une comparaison détaillée entre la construction proposée ici et celle de [16]. On prendra donc garde que les signes, notamment, peuvent varier d'une construction à l'autre.

Soit F une biextension alternée de $A \times A$ par G_m. Elle est donc définie par une flèche $L\Lambda^2 A \to G_m[1]$ qui induit, par réduction modulo n au sens dérivé, une flèche $L\Lambda^2 A \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n \to G_m \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\,[1]$, soit encore une flèche

$$L\Lambda^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(A \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to G_m \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[1]. \tag{4.3}$$

Le contenu essentiel du théorème de Ribet est l'assertion que la classe dans $\mathrm{Ext}^1(L\Lambda^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(A \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), G_m \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de cette flèche est déterminée par l'application quadratique (4.2). Ceci peut se démontrer de la manière suivante. Compte tenu des isomorphismes

$$A \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq {}_nA[1]$$

$$G_m \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n[1]$$

résultant de la divisibilité de A et de G_m, il s'agit de caractériser le groupe $\mathrm{Hom}(L\Lambda^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA[1]), \mu_n[2])$. Mais la formule du décalage de [12] 4.3.2.1 ii (il s'agit ici de la formule duale de celle utilisée dans (3.20)) fournit un quasi-isomorphisme

$$L\Lambda^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA[1]) \simeq L\Gamma^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA)[2]$$

d'où des isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1(L\Lambda^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(A \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n), G_m \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}(L\Gamma^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA)[2], \quad \mu_n[2]) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(L\Gamma^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA), \mu_n) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(L_0\Gamma^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA), \mu_n) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(\Gamma^2_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}({}_nA), \mu_n)
\end{aligned}$$

qui montrent que la classe de la flèche (4.3) est bien décrite par une application quadratique de type (4.2). Nous ne chercherons pas à vérifier que celle-ci est bien la flèche (3.9).

Notes

1. Pour cette notion, voir [4] définition 1.4.2.
2. On notera par $\otimes$ plutôt que par Λ le produit contracté de deux torseurs.
3. Cette terminologie, due à L. Moret-Bailly, désigne un C-torseur sur A munis d'une structure du cube au sens de [1].
4. On prendra garde qu'il ne suffit pas de demander que le morphisme λ soit compatible aux structures cubistes.
5. On rappelle que ceci désigne une application telle que l'application induite $(x, y) \to \varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)$ soit bilinéaire, et telle que $\varphi(x) = \varphi(-x)$ pour tout x.
6. Rappelons que l'on désigne par $\mathbb{Z}(1)$ le sous-groupe $2\pi i\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$.
7. On adopte ici les conventions de signe [5].

Appendice

Nous démontrons ici le Lemme 3.4. La flèche (3.15) $\varphi_n^L \colon n^*L \to L^{n^2}$ peut se définir par récurrence sur n, en partant de $\varphi_1 = id$. On suppose alors φ_n construite et on considère l'isomorphisme canonique de biextensions (3.3)

$$\alpha_n \colon (1 \times n)^*\Lambda L \to \Lambda L^n.$$

défini par la structure cubiste de L. Par restriction à la diagonale, on en déduit un morphisme de Σ-objets $\psi_n \colon (n + 1)^*L \otimes L^{-1} \otimes (n^*L) \to \Delta\Lambda L^n$, soit encore, en faisant usage du morphisme $t_L \colon \Delta\Lambda B \to L^2$ qui décrit la Σ-structure de L, une flèche composée

$$(n + 1)^*L \xrightarrow{\psi_n} \Delta\Lambda L^n \otimes n^*L \otimes L \xrightarrow{t_L^n \otimes 1} L^{2n} \otimes n^*L \otimes L. \tag{A1}$$

On définit alors φ_{n-1} en composant celle-ci avec la flèche déduite de φ_n. La compatibilité annoncée, dans le cas oú $L = \Delta E$, se démontre en partant de l'observation que les différentes flèches γ_n définies par (3.13) peuvent se déduire l'une de l'autre par un procédé inductif du même type que celui qui a caractérisé les φ_n: on part de l'isomorphisme canonique dans $\mathrm{BIEXT}(A \times A, A \times A, C)$ associé à la biextension E

$$\partial_E \colon \Lambda E \to (p_1 \times p_2)^*E \times s^*(p_1 \times p_2)^*E \tag{A2}$$

(∂_E est noté ∂_E^{-1} dans [1] (1.2.7) et expliqué dans [1] (1.2.5), (1.2.6)). L'image inverse de ∂_E par la fléche $(1, n) \times (1, n) \colon A^2 \to A^4$ est un isomorphisme (de torseurs)

$$\chi_n \colon ((n + 1) \times (n + 1))^*E \otimes E^{-1} \otimes (n \times n)^*E^{-1}$$
$$\to (1 \times n)^*E \otimes (n \times 1)^*E$$

d'où, en composant avec $\alpha_n^{-1} \otimes \beta_n^{-1}$, une flèche

$$(n + 1) \times (n + 1)^*E \xrightarrow{\chi_n} (1 \times n)^*E \otimes (n \times 1)^*E \otimes (n \times n)^*E \otimes E$$
$$\xrightarrow{\alpha_n^{-1} \otimes \beta_n^{-1} \otimes 1} E^{2n} \otimes (n \times n)^* E \otimes E \tag{A3}$$

L'énoncé de compatibilité annoncé entre les flèches γ_n (3.13) est le suivant: si l'on compose à droite la flèche (A3) avec la flèche déduite de γ_n, on trouve la flèche γ_{n+1}. Ceci découle de la description explicite de ∂_E (et donc de χ_n) donnée dans [1] p. 6, en termes des lois de groupes partielles $+_1$ et $+_2$ de E: les flèches α_n, β_n correspondant à la "multiplication par n" relativement aux lois en question. La compatibilité mentionnée exprime la manière de multiplier par rapport à chacune des lois par $(n + 1)$, (la multiplication par n étant donnée) et elle résulte immédiatement de l'associativité des lois en question et de leur compatibilité entre elles; aussi omettrons nous de la vérifier ici.

Il est maintenant facile de vérifier, par récurrence sur n, que la restriction $\Delta\gamma_n$ de l'application (3.13) à la diagonale coincide avec la flèche φ_n (3.15) dans le cas où $L = \Delta E$. En effet, compte tenu de l'énoncé de compatibilité entre les γ_n, et du procédé récurrent de définition des φ_n, il suffit, en appliquant l'hypothèse de récurrence, de vérifier que la restriction à la diagonale de la flèche (A3) coincide avec la flèche (A1). Pour cela, on observe tout d'abord que l'on dispose d'un isomorphisme de biextensions

$$\gamma_E\colon \Lambda\Delta E \to E \wedge s^*E$$

qui est déduit de (A2) par restriction à la diagonale (voir [1] (1.2.9), où il est noté γ_E^{-1}). En particulier, par fonctorialité en F du morphisme $\alpha_n^F\colon F^n \to (1 \times n)^*F$ associé en (3.3) à une biextension F, le diagramme suivant de C-torseurs sur $A \times A$ commute:

$$\begin{array}{ccc}
(1 \times n)^*\Lambda\Delta E & \xrightarrow{(1 \times n)^*\gamma_E} & (1 \times n)^*(E \otimes s^*E) \\
\big\downarrow{\scriptstyle (\alpha_n^{\Lambda\Delta E})^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle (\alpha_n^E) \otimes (\alpha_n^{s^*E})^{-1}} \\
(\Lambda\Delta E)^n & \xrightarrow{(\gamma_E)^n} & E^n \otimes s^*E^n.
\end{array}$$

Lorsqu'on le restreint à la diagonale $\Delta\colon A \to A \times A$, il exprime l'identification souhaitée entre la restriction de la flèche (A3) à la diagonale et la flèche (A1).

Bibliographie

1. L. Breen: *Fonctions thêta et théorème du cube. Lecture Notes in Mathematics* 980. Springer, Berlin, Heidelberg New-York, Tokyo (1983).
2. H. Cartan: *Algèbres de Eilenberg-MacLane et homotopie. Séminaire Cartan 1954–55* (7ème année). Paris (1956).
3. C.-L. Chai: *Compactification of Siegel Moduli schemes*, Thèse, Havard (1984).
4. P. Deligne: Exposé XVIII de "Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–64" (SGA 4) dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier. *Théorie des topos*

et cohomologie étale des schémas, tome 3. *Lecture Notes in Mathematics* 305. Springer, Berlin, Heidelberg, New-York (1973).

5. P. Deligne: Théorie de Hodge III. *Publ. Math. IHES* 44 (1975) 5–77.
6. G. Decker: *The integral homology algebra of an Eilenberg-MacLane space*. Thèse de l'Université de Chicago, 1974, non publiée.
7. J.R. Dennett: *A functorial description of* $\pi_n L^2 K(A, q)$. Thèse de M.I.T., Juin 1965, non publiée.
8. A. Dold et D. Puppe: Homologie nicht-additiven functoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier* 11 (1961) 201–312.
9. S. Eilenberg et S. MacLane: On the groups $H(\Pi, n)$ II. *Ann. Math.* 70 (1954) 49–139.
10. A. Grothendieck: *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, 1967–69 (SGA 7) I. *Lecture Notes in Mathematics* 288. Springer, Berlin, Heidelberg, New-York (1972).
11. R. Hamsher: *Eilenberg-MacLane algebras and their computation*. Thèse de l'Université de Chicago, 1974, non publiée.
12. L. Illusie: *Complexe cotangent et deformation I*. *Lecture Notes in Mathematics* 239. Springer, Berlin, Heidelberg, New-York (1971).
13. D. Mumford: Biextensions of formal groups. Dans: *Proceedings of the Bombay Colloqium on Algebraic Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics 4. Oxford University Press, London (1968).
14. D. Mumford: *Abelian Varieties*. Oxford University Press (1970).
15. D. Quillen: *Notes on the homology of commutative rings, M.I.T.* (1968).
16. K. Ribet: *Cohomological realisation of a family of 1-motives*. *J. Number Theory* 25 (1987) 152–161.
17. J.-P. Serre: *Cours d'Arithmétique, P.U.F.* (1970).