COMPOSITIO MATHEMATICA

F. GUILLÉN

Une relation entre la filtration par le poids de Deligne et la filtration de Zeeman

Compositio Mathematica, tome 61, nº 2 (1987), p. 201-227
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1987__61_2_201_0>

Compositio Mathematica 61: 201–227 (1987)

Une relation entre la filtration par le poids de Deligne et la filtration de Zeeman

F. GUILLÉN
Dpt. Matemàtiques, E.T.S.E.I.B., Univ. Politècnica de Catalunya, Diagonal, 647, 08028 Barcelona, Spain

Received 7 November 1985; accepted 10 May 1986

Introduction

Dans [Deligne, 1971, 1974] Deligne a introduit pour toute variété algébrique complexe X une filtration W, appelée filtration par le poids, sur les groupes de cohomologie de X à coefficients dans $\mathbb{Q}$

$$0 = W_{-1} \subset W_0 \subset \ldots \subset W_{2i} = H^i(X)$$

telle que $W_{i-1} = 0$ (resp. $W_i = H^i(X)$) si X est lisse (resp. compacte).

D'après [Deligne, 1980] (voir aussi [Beilinson et al., 1982]) cette filtration est invariante dans une famille topologiquement triviale et on se pose alors la question de l'invariance topologique de W. Par exemple pour une courbe il est aisé de voir que la réponse est affirmative, et pour les surfaces compactes la réponse est aussi affirmative comme ont prouvé [Steenbrink et Stevens, 1984].

Pour les variétés qui sont réunion de variétés lisses de la même dimension et qui se coupent transversalement, [McCrory, 1983] a montré que si on définit la filtration par le poids sur l'homologie par dualité

$$W^q H_i(X) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}\left(H^i(X)/W_{q-1}, \mathbb{Q}\right)$$

on a que

$$S^{2N-i-q} H_i(X) = W^{i-q} H_i(X)$$

où $N = \dim X$ et S est la filtration de Zeeman (voir (3.1)). Puisque cette filtration est un invariant topologique, on en déduit l'invariance topologique de la filtration par le poids dans ce cas aussi. En général ces filtrations ne sont pas égales. Par exemple si X est le cône dans $\mathbb{P}^3$ sur une cubique plane lisse, McCrory a remarqué que $S^1 H_3 X \neq W^3 H_3 X$. Il a prouvé aussi que si X est une hypersurface compacte on a l'inclusion

$$S^{2N-i-q} H_i(X) \subset W^{i-q} H_i(X)$$

et il a conjecturé cette relation pour toute variété compacte X, ce qui donnerait une borne topologique pour W en général. Cependant des exemples dans le cas local donnés par [Steenbrink et Stevens, 1984] semblent indiquer que la filtration W n'est pas un invariant topologique.

L'objet de cet article est de prouver la conjecture de McCrory. La démonstration repose sur la comparaison des filtrations S et W à niveau des complexes de faisceaux, c'est-à-dire sur une certaine encarnation du complexe dualisant $\mathbb{D}_X^{\cdot}$. Puisque la filtration de Zeeman est, à un dècalage près, la filtration canonique τ, elle est définie sur une encarnation quelconque de $\mathbb{D}_X^{\cdot}$, et notre problème est donc d'obtenir une encarnation de $\mathbb{D}_X^{\cdot}$ sur laquelle la filtration par le poids soit définie d'une manière suffisamment contrôlable. On peut obtenir cette encarnation à partir d'une hyperrésolution simpliciale $X_{\cdot}$ de X telle que la dimension de la partie non dégénerée en dimension i de $X_{\cdot}$, $N_i X_{\cdot}$, vérifie

$$\dim N_i X_{\cdot} \leqslant \dim X - i.$$

L'existence de telles hyperrésolutions a été obtenue par V. Navarro Aznar à partir des hyperrésolutions cubiques (voir [Guillén et al., 1982]).

Le contenu de l'article est le suivant. Dans le §1 on introduit le formalisme des objets simpliciaux stricts et on donne la construction de Dold-Puppe qui associe à tout objet simplicial strict un objet simplicial ordinaire (avec morphismes de dégénérescence), et qui, dans le cas d'une catégorie abélienne, a la même cohomologie que l'objet de départ. Dans le §2 on donne la construction originale de V. Navarro Aznar des hyperrésolutions cubiques. Finalement dans le §3 on prouve la conjecture enoncée plus haut.

Conventions

Dans tout l'article un schéma separé, réduit et de type fini sur $\mathbb{C}$ s'appellera simplement schéma. Si X est un schéma, un faisceau sur X sera toujours un faisceau pour la topologie de l'espace analytique associé à X.

1. Théorie de Hodge et schémas simpliciaux stricts

1.1. Objets simpliciaux stricts

1.1.1. Notations. On utilisera les notations suivantes.

- $\boldsymbol{A}^0$ = catégorie opposée d'une catégorie $\boldsymbol{A}$.
- $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ = catégorie des foncteurs de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$.

  Désignons par n et k des entiers $\geqslant -1$.
- (Δ^+) = catégorie simpliciale augmentée. Les objets sont les ordinaux finis $\Delta_n = [0, n]$, pour $n \geqslant 0$ et $\Delta_{-1} = \emptyset$, et les morphismes sont les applications croissantes entre les Δ_n.

- $\delta_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ est l'injection croissante telle que $i \notin \delta_i(\Delta_n)$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$.
- $s_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$ est la surjection croissante telle que $s_i(i) = s_i(i+1)$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$.
- $(\Delta) =$ catégorie simpliciale. C'est la sous-catégorie pleine de (Δ^+) d'objets les Δ_n $(n \geqslant 0)$.
- $(\Delta^+)_k =$ catégorie simpliciale augmentée k-tronquée. C'est la sous-catégorie pleine de (Δ^+) d'objets les Δ_n $(k \geqslant n)$.
- $(\Delta)_k = (\Delta^+)_k \cap (\Delta)$.
- $(\Delta^+_{\mathrm{mon}}) =$ catégorie simpliciale stricte augmentée. C'est la sous-catégorie de (Δ^+) avec les mêmes objets que (Δ^+), mais avec morphismes croissants injectifs.
- (Δ_{mon}), $(\Delta^+_{\mathrm{mon}})_k$, $(\Delta_{\mathrm{mon}})_k$ sont les intersections de $(\Delta^+_{\mathrm{mon}})$ avec (Δ), $(\Delta^+)_k$ et $(\Delta)_k$ respectivement.

1.1.2. Si A est une catégorie, les objets de $((\Delta)^0, A)$ s'appellent objets simpliciaux de A. Les objets simpliciaux de A^0 s'appellent aussi objets cosimpliciaux de A. Si $X. : (\Delta)^0 \to A$ est un objet simplicial de A, on pose $X_n = X.(\Delta_n)$, $\delta_i = X.(\delta_i)$ et $s_i = X.(s_i)$. On a un langage analogue pour les autres cas.

1.1.3. Soit A une catégorie et S un objet de A. On a une définition évidente d'objet simplicial (resp. simplicial strict, ...) constant égal a S. Un objet simplicial (resp. ...) de A augmenté vers S est un morphisme a: $X. \to S.$. Nous identifierons les objets simpliciaux (resp. ...) augmentés vers S, $a : X. \to S.$ aux objets simpliciaux augmentés (resp. ...) $X^+_.$ tels que $X^+_.(\Delta_{-1}) = S$. Ces objets seront designés par une notation du type $a : X. \to S$.

1.1.4. Si A est une catégorie on a un foncteur d'oubli

$$\big((\Delta)^0, A\big) \to \big((\Delta_{\mathrm{mon}})^0, A\big)$$

et des foncteurs analogues pour (Δ^+), $(\Delta^+)_k$ et $(\Delta)_k$.

1.1.5. Si A possède un objet initial e on a un foncteur naturel

$$\big((\Delta_{\mathrm{mon}})^0_k, A\big) \to \big((\Delta_{\mathrm{mon}})^0, A\big)$$

qui a tout objet simplicial strict k-tronqué $X_k.$ de A associe l'objet simplicial strict $X.$ de A défini par

$$X_n = \begin{cases} X_n^k & \text{si} \quad n \leqslant k, \\ e & \text{si} \quad n > k. \end{cases}$$

On a un foncteur analogue pour $(\Delta^+_{\mathrm{mon}})_k$.

1.1.6. Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie abélienne. On dénote par $\boldsymbol{C}^{\cdot}(\boldsymbol{A})$ (resp. $\boldsymbol{C}_{\cdot}(\boldsymbol{A})$) la catégorie des complexes $X^{\cdot}$ (resp. $X_{\cdot}$) de $\boldsymbol{A}$ avec diférentielle de degré $+1$ (resp. -1). On a un foncteur

$$\sim\ :\big((\Delta_{\text{mon}})^0, \boldsymbol{A}\big) \to \boldsymbol{C}_{\cdot}(\boldsymbol{A})$$

$$\big(\text{resp.}\ \sim\ :((\Delta_{\text{mon}}), \boldsymbol{A}\big) \to \boldsymbol{C}^{\cdot}(\boldsymbol{A})\big)$$

défini pour un objet simplicial (resp. cosimplicial) strict $X_{\cdot}$ (resp. $X^{\cdot}$) de $\boldsymbol{A}$ par

$$\tilde{X}_n = X_n \quad (\text{resp. } \tilde{X}^n = X^n)$$

avec la différentielle $d = \Sigma(-1)^i \delta_i$.

1.2. Transformé de Dold-Puppe d'un objet simplicial strict

1.2.1. Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie avec des coproduits finis. Nous allons définir un foncteur

$$K_{\cdot} : \big((\Delta_{\text{mon}})^0, \boldsymbol{A}\big) \to \big((\Delta)^0, \boldsymbol{A}\big)$$

analogue au transformé de Dold-Puppe d'un complexe d'une catégorie abélienne (voir [Illusie, 1971] (I.1.3.1)), et que nous appellerons aussi transformé de Dold-Puppe.

Soit $X_{\cdot}$ un objet simplicial strict de $\boldsymbol{A}$, alors pour $n \geqslant 0$ on définit

$$K_n(X_{\cdot}) = \coprod_p \coprod_s X_{p,s}$$

où $0 \leqslant p \leqslant n$, s parcourt l'ensemble $D(n, p)$ des morphismes croissants et surjectifs de Δ_n dans Δ_p, et $X_{p,s} = X_p$ pour tout $s \in D(n, p)$. Il reste à définir les morphismes de $K_{\cdot}(X_{\cdot})$. Soit $u : \Delta_m \to \Delta_n$ un (Δ)-morphisme. Si $s \in D(n, p)$ alors il existe un unique carré commutatif (fig. 1)

$$\begin{array}{ccc} \Delta_m & \xrightarrow{u} & \Delta_n \\ t\downarrow & & \downarrow s \\ \Delta_q & \xrightarrow{v} & \Delta_p \end{array}$$

Fig. 1.

où $t \in D(m, q)$ et v est injectif. Alors le morphisme $K_{\cdot}(X_{\cdot})(u)$ envoie la composante $X_{p,s}$ de $K_n(X_{\cdot})$ dans la composante $X_{q,t}$ de $K_m(X_{\cdot})$ par le morphisme $X_\cdot(v)$. On obtient de cette façon un objet simplicial $K_\cdot(X_\cdot)$ de $\boldsymbol{A}$. On a un morphisme d'inclusion

$$X_\cdot \to K_\cdot(X_\cdot) \tag{1.2.1.1}$$

d'objets simpliciaux stricts de $\boldsymbol{A}$.

Si $X_\cdot$ est muni d'une augmentation $a\colon X_\cdot \to S$, alors on obtient une augmentation $K(a)\colon K_\cdot(X_\cdot) \to S$ qui est compatible avec l'inclusion (1.2.1.1).

1.2.2. Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie avec produits finis on peut définir un foncteur

$$K_{\text{op}}^{\cdot}\colon ((\Delta_{\text{mon}}),\, \boldsymbol{A}) \to ((\Delta),\, \boldsymbol{A})$$

d'une façon duale.

1.2.3. Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie abélienne. D'après [MacLane, 1975], on considère pour tout objet simplicial $X_\cdot$ de $\boldsymbol{A}$ le complexe normalisé $N_\cdot(X_\cdot)$. Il s'obtient de la façon suivante. Soit pour $n \geqslant 0$, $D_n(X_\cdot) = \Sigma\ \mathrm{Im}(s_i\colon X_{n-1} \to X_n)$. On a que $d(D_n(X_\cdot)) \subset D_{n-1}(X_\cdot)$ pour la différentielle (1.1.6), $D_\cdot(X_\cdot)$ est donc un sous-complexe de $\tilde{X}_\cdot$. On définit

$$N_\cdot(X_\cdot) = \tilde{X}_\cdot / D_\cdot(X_\cdot).$$

D'après [MacLane, 1975] (VIII.6), la projection

$$\tilde{X}_\cdot \to N_\cdot(X_\cdot)$$

est une équivalence homotopique de complexes.

1.2.4. Dualement on a pour un objet cosimplicial $X^\cdot$ de $\boldsymbol{A}$ le sous-complexe $N_{\text{op}}^{\cdot}(X^\cdot)$ de $\tilde{X}^\cdot$ défini par

$$N_{\text{op}}^{n}(X^\cdot) = \cap\, \mathrm{Ker}\big(s_i\colon X^n \to X^{n-1}\big)$$

et l'inclusion

$$N_{\text{op}}^{\cdot}(X^\cdot) \to \tilde{X}^\cdot$$

est une équivalence homotopique.

1.2.5. La relation entre les foncteurs $K_\cdot$ et $N_\cdot$ est la suivante. Soit $X_\cdot$ un objet simplicial strict d'une catégorie abélienne $\boldsymbol{A}$, alors l'inclusion (1.2.1.1) induit un isomorphisme de complexes

$$\tilde{X}_\cdot \simeq N_\cdot K_\cdot(X_\cdot).$$

D'après (1.2.3) on a que l'inclusion de complexes

$$\tilde{X}_{\cdot} \to K_{\cdot}(X_{\cdot})^{\sim}$$

est une équivalence homotopique.

On a des résultats duals pour le cas cosimplicial.

1.3. Cohomologie des espaces topologiques simpliciaux stricts

Dans ce no. A dénotera un anneau commutatif de coefficients.

1.3.1. Un espace topologique simplicial (compact, relativement propre) est un objet simplicial de la catégorie des espaces topologiques (compacts, avec morphismes propres). Une augmentation $a: X_{\cdot} \to X$ d'un espace topologique simplicial s'appelle propre si chaque morphisme $a_n: X_n \to X$ est propre. On a un langage analogue pour le cas simplicial strict.

1.3.2. Soit X un espace topologique, on dénotera par $\mathscr{C}^{\cdot}$ le foncteur 'résolution canonique flasque de Godement'.

Si $f: X \to Y$ est un morphisme d'espaces topologiques, on a un morphisme de faisceaux sur Y

$$A_Y \to f_* A_X.$$

Ce morphisme induit un morphisme

$$\mathscr{C}^{\cdot}(A_Y) \to f_*(\mathscr{C}^{\cdot} A_X). \tag{1.3.2.1}$$

1.3.3. Soit $a: X_{\cdot} \to X$ un espace topologique simplicial strict augmenté vers X. On obtient un complexe de faisceaux cosimplicial strict $a_* \mathscr{C}^{\cdot} A_{X_{\cdot}}$ sur X de la façon suivante. On associe à chaque $n \geqslant 0$ le complexe $a_{n*} \mathscr{C}^{\cdot} A_{X_n}$, et à chaque morphisme $\delta: \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ de (Δ_{mon}) le morphisme

$$\delta: a_{n*} \mathscr{C}^{\cdot} A_{X_n} \to a_{n+1*} \mathscr{C}^{\cdot} A_{X_{n+1}}$$

obtenu par application du foncteur a_{n*} au morphisme

$$\mathscr{C}^{\cdot} A_{X_n} \to \delta_* \mathscr{C}^{\cdot} A_{X_{n+1}}$$

induit par $\delta: X_{n+1} \to X_n$.

On dénote par $\mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot}}$ le complexe simple associé au complexe double $(a_* \mathscr{C}^{\cdot} A_{X_{\cdot}})^{\sim}$ (voir 1.1.6). On a un morphisme de faisceaux

$$A_X \to \mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot}}.$$

Si X est réduit à un point, on dénote par $\mathbb{R}\,\Gamma A_{X.}$ le complexe obtenu ci-dessus, et par

$$H^i(X.\,,\,A) = R^i\Gamma A_{X.}$$

sa cohomologie i-ème.

1.3.4. Avec les notations de (1.3.3) le complexe de faisceaux $\mathbb{R}\,a_*A_{X.}$ est muni de la filtration L induite par l'index cosimplicial

$$L^q\mathbb{R}\,a_*A_{X.} = \sum_{p \geqslant q} a_{p*}\mathscr{C}^{\boldsymbol{\cdot}}A_{X_p}.$$

La filtration L induit une filtration sur la cohomologie $H^*(X.\,,\,A)$ qu'on dénote aussi par L.

1.3.5. Avec les notations de (1.3.3), si on considère l'espace topologique simplicial $K.(X.)$ (voir (1.2.1)), le morphisme d'inclusion (1.2.1.1) induit un morphisme de complexes de faisceaux cosimpliciaux sur X

$$K(a)_*\mathscr{C}^{\boldsymbol{\cdot}}A_{K.(X.)} \to a_*\mathscr{C}^{\boldsymbol{\cdot}}A_{X.}\,. \tag{1.3.5.1}$$

On remarque qu'il existe une identification évidente

$$K(a)_*\mathscr{C}^{\boldsymbol{\cdot}}A_{K.(X.)} \simeq K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\mathrm{op}}\big(a_*\mathscr{C}^{\boldsymbol{\cdot}}A_{X.}\big)$$

et compte tenu de (1.2.5), (1.3.5.1) est une équivalence homotopique. On a donc un quasiisomorphisme

$$\mathbb{R}\,K(a)_*A_{K.(X.)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\,a_*A_{X.}$$

et, en particulier, un isomorphisme

$$H^*(K.(X.),\,A) \xrightarrow{\sim} H^*(X.\,,\,A).$$

1.3.6. Définition. Soit $a: X. \to X$ un espace topologique simplicial strict augmenté. On dit que a est de descente cohomologique si le morphisme

$$A_X \to \mathbb{R}\,a_*A_{X.}$$

(voir (1.3.3)) est un quasiisomorphisme pour tout anneau A.

Dans le cas que $X.$ soit un espace topologique simplicial, la définition antérieure coïncide avec celle de [Deligne, 1971] (5.3.2).

D'après (1.3.5) on a la propriété suivante:

1.3.7. PROPOSITION. *Soit $a: X_{\cdot} \to X$ un espace topologique simplicial strict augmenté. Alors a est de descente cohomologique si et seulement si $K(a): K_{\cdot}(X_{\cdot}) \to X$ est de descente cohomologique.*

1.4. Homologie des espaces topologiques simpliciaux stricts

Pour simplifier l'exposition, compte tenu des applications envisagées, on va supposer que A est un corps et que les espaces topologiques sont localement compacts. On sait que tout faisceau flasque de A-modules est automatiquement injectif.

1.4.1. Soit X un espace topologique, d'après [Borel et Moore, 1960] le complexe de prefaisceaux

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_A\left(\Gamma_c(U, \mathscr{C}^{\cdot}A_X), A\right)$$

est un complexe de faisceaux flasques, donc injectifs, denoté par $\mathbb{D}^{\cdot}(A_X)$. Ce complexe s'appelle le complexe dualisant de X (voir [Borel et Moore, 1960] et [Verdier, 1965]).

Si $f: X \to Y$ est un morphisme propre d'espaces topologiques et on considère les sections à support compact sur tout ouvert U de Y dans le morphisme (1.3.2.1) on obtient un morphisme

$$\Gamma_c(U, \mathscr{C}^{\cdot}A_Y) \to \Gamma_c(U, f_*\mathscr{C}^{\cdot}A_X) = \Gamma_c\left(f^{-1}U, \mathscr{C}^{\cdot}A_X\right)$$

dont le morphisme dual s'identifie à un morphisme

$$f_*\mathbb{D}^{\cdot}(A_X)(U) \to \mathbb{D}^{\cdot}(A_Y)(U)$$

qui définit donc un morphisme de faisceaux

$$f_*\mathbb{D}^{\cdot}(A_X) \to \mathbb{D}^{\cdot}(A_Y).$$

1.4.2. Soit $a: X_{\cdot} \to X$ un espace topologique simplicial strict relativement propre augmenté vers X. On obtient un complexe de faisceaux simplicial strict $a_*\mathbb{D}^{\cdot}(A_{X_{\cdot}})$ sur X de la façon suivante. On associe à chaque $n \geqslant 0$ le complexe $a_{n*}\mathbb{D}^{\cdot}(A_{X_n})$ et à chaque morphisme $\delta: \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ de (Δ_{mon}) le morphisme

$$\delta: a_{n+1*}\mathbb{D}^{\cdot}\left(A_{X_{n+1}}\right) \to a_{n*}\mathbb{D}^{\cdot}\left(A_{X_n}\right)$$

obtenu par application du foncteur a_{n*} au morphisme

$$\delta_*\mathbb{D}^{\cdot}\left(A_{X_{n+1}}\right) \to \mathbb{D}^{\cdot}\left(A_{X_n}\right)$$

induit par $\delta: X_{n+1} \to X_n$.

On dénote par $\mathbb{R}\, a_* \mathbb{D}^{\cdot} A_{X.}$ le complexe simple associé au complexe double $(a_* \mathbb{D}^{\cdot}(A_{X.}))^{\widetilde{}}$, c'est-à-dire, la composante n-ème de $\mathbb{R}\, a_* \mathbb{D}^{\cdot} A_{X.}$ est

$$\sum_{j-i=n} a_* \mathbb{D}^j (A_{X_i}).$$

On a un morphisme de complexes de faisceaux

$$\mathbb{R}\, a_* \mathbb{D}^{\cdot} A_{X.} \to \mathbb{D}^{\cdot} A_X .$$

Si X est réduit à un point on dénote par $\mathbb{R}\Gamma \mathbb{D}^{\cdot} A_{X.}$ le complexe obtenu ci-dessus, et par

$$H_i(X.\,,\, A) = R^{-i} \Gamma \mathbb{D}^{\cdot} A_{X.}$$

sa cohomologie $(-i)$-ème.

1.4.3. Avec les notations de (1.4.2) $\mathbb{R}\, a_* \mathbb{D}^{\cdot} A_{X.}$ est munie de la filtration M induite par l'index simplicial

$$M_q \mathbb{R}\, a_* \mathbb{D}^{\cdot} A_{X.} = \sum_{p \geqslant q} a_{p*} \mathbb{D}^{\cdot} A_{X_p}.$$

La filtration M induit une filtration sur l'homologie $H_*(X.\,,\, A)$ qu'on dénote aussi par M.

D'après le théorème de dualité (voir [Verdier, 1965]), on en déduit la propriété suivante

1.4.4. Proposition. *Soit $a: X \to Y$ un morphisme propre d'espaces topologiques, alors le complexe de faisceaux sur Y*

$$U \mapsto \mathrm{Hom}^{\cdot}_A(\Gamma_c(U,\, a_* \mathscr{C}^{\cdot} A_X),\, A)$$

est un complexe de faisceaux flasques qui est une encarnation de l'objet $\mathbb{R}\, \mathscr{H}om^{\cdot}_{A_Y}(\mathbb{R}\, a_* A_X,\, \mathbb{D}^{\cdot} A_Y)$ de la catégorie derivée des complexes de faisceaux sur Y.

On obtient aussitôt le résultat suivant.

1.4.5. Proposition. *Soit $a: X. \to \bar{X}$ une augmentation propre d'un espace topologique simplicial strict. On a un isomorphisme*

$$\mathbb{R}\, \mathscr{H}om^{\cdot}_{A_X}\big((\mathbb{R}\, a_* A_{X.}\,,\, L),\, \mathbb{D}^{\cdot}(A_X)\big) \simeq \big(\mathbb{R}\, a_* \mathbb{D}^{\cdot}(A_{X.}),\, M\big)$$

dans la catégorie derivée filtrée des complexes de faisceaux sur X. En particulier si X *se réduit à un point, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_A\big(H^*(X_., A)/L^{q+1}H^*(X_., A), A\big) \simeq M_q H_*(X_., A)$$

pour tout q.

1.4.6. COROLLAIRE. *Avec les notations et hypothèses de* (1.4.5), *si en plus a est de descente cohomologique, on a un isomorphisme*

$$H_*(X_., A) \simeq H_*(X, A).$$

1.5. Remarques sur la théorie de Hodge mixte

On donne ici quelques remarques sur la théorie de Hodge mixte de Deligne (voir [Deligne, 1971]), à propos des schémas simpliciaux stricts. On se borne à des questions nécessaires par la suite.

1.5.1. Un schéma simplicial (lisse) est un objet simplicial de la catégorie des schémas (lisses). On dit qu'une augmentation $a\colon X_. \to X$ d'un schéma simplicial est une hyperrésolution simpliciale de X si $X_.$ est lisse et a est propre et de descente cohomologique. On utilisera des expressions analogues pour le cas simplicial strict.

1.5.2. La notion de complexe de Hodge mixte (CHM pour abréger) cohomologique donnée dans [Deligne, 1971] (8.1.11) pour les schémas simpliciaux, s'adapte d'une façon évidente au cas d'un schéma simplicial strict $X_.$ et, si on suppose que $X_.$ est lisse et compact, alors d'une façon analogue à celle de [Deligne, 1971] (8.1.12) on obtient que

$$\mathfrak{C}(X_.) = \big(\mathbb{Z}_X, \mathbb{Q}_{X_.}, (\Omega^{\cdot}_{X_.}, F)\big)$$

est un CHM cohomologique sur $X_.$.

D'après [Deligne, 1971] (8.1.13) on a donc que $\mathbb{R}\Gamma^{\cdot}\mathfrak{C}(X_.)$ est un CHM DG. Le résultat fondamental [Deligne, 1971] (8.1.15) montre que

$$\big(\mathbb{R}\Gamma\mathbb{Z}_{X_.}, (\mathbb{R}\Gamma\mathbb{Q}_{X_.}, L), (\mathbb{R}\Gamma\Omega^{\cdot}_{X_.}, L, F)\big)$$

est donc un CHM qui muni les groupes de cohomologie $H^{\cdot}(X_., \mathbb{Z})$ d'une structure de Hodge mixte (SHM pour abréger).

1.5.3. Soit $X_.$ un schéma simplicial strict compact et lisse et $K_.(X_.)$ le transformé de Dold-Puppe (voir (1.2) de $X.$, alors le morphisme (1.2.1.1) induit un morphisme de CHM.

$$\mathbb{R}\Gamma\mathfrak{C}(K.(X.)) \to \mathbb{R}\Gamma\mathfrak{C}(X.)$$

qui est bijectif sur les groupes de cohomologie. D'après [Deligne, 1971] (2.3.5) on obtient des isomorphismes de SHM

$$H^i(K.(X.), \mathbb{Z}) \simeq H^i(X., \mathbb{Z}).$$

De la fonctorialité de la SHM des schémas simpliciaux définie par Deligne, et de [Deligne, 1971] (2.3.5), on en déduit la propriété suivante

1.5.4. LEMME. *Soit $X.$ un schéma simplicial et $a: X. \to X$ une augmentation de descente cohomologique, alors l'isomorphisme induit sur les groupes de cohomologie*

$$H^i(X, \mathbb{Z}) \to H^i(X., \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme de SHM.

La conséquence de (1.5.3) et (1.5.4) pour les schémas simpliciaux stricts est la suivante.

1.5.5. PROPOSITION. *Soit $X. \to X$ une hyperrésolution simpliciale stricte de X, alors l'isomorphisme induit sur les groupes de cohomologie*

$$H^i(X, \mathbb{Z}) \to H^i(X., \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme de SHM. En particulier on a

$$W_q H^i(X, \mathbb{Q}) \simeq L^{-q+i} H^i(X., \mathbb{Q}).$$

1.5.6. Soit X un schéma compact et considérons les groupes d'homologie de X, $H_i(X, \mathbb{Q})$. La dualité

$$H_i(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(H^i(X, \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$$

permet définir d'une façon naturelle une SHM sur $H_i(X, \mathbb{Q})$, duale à celle de $H^i(X, \mathbb{Q})$.

Nous nous intéressons seulement pour la filtration par le poids, qui est définie par

$$W^q H_i(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\left(H^i(X, \mathbb{Q})/W_{q-1}H^i(X, \mathbb{Q}), \mathbb{Q}\right).$$

On va obtenir maintenant la filtration W à niveau de complexes de faisceaux.

Ce qu'on cherche est une encarnation du complexe dualisant $\mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X)$ munie d'une filtration qui induise la filtration W sur l'homologie. D'après (1.5.5) et (1.5.5), ceci s'obtient à partir du résultat suivant.

1.5.7. Proposition. *Soit $X_{\cdot} \to X$ une hyperrésolution simpliciale stricte d'un schéma compact X, alors on a*

$$M_q H_i(X, \mathbb{Q}) = W^{-q+i} H_i(X, \mathbb{Q}).$$

2. Les hyperrésolutions cubiques de Navarro Aznar

Dans ce paragraphe on va exposer une construction dûe à V. Navarro Aznar (voir [Guillén et al., 1982]) qui fournit pour tout schéma X une hyperrésolution simpliciale stricte $X_{\cdot}$ de X telle que

$$\dim X_n \leqslant \dim X - n$$

2.1. Objets cubiques

2.1.1. Soit $\square_0^+$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné Δ_1, c'est-à-dire, $\square_0^+$ a deux objets 0 et 1 et un unique morphisme non identique $0 \to 1$.

Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie, la donnée d'un foncteur

$$\square_0^+ \to \boldsymbol{A}$$

est équivalente à la donnée d'un morphisme

$$f : X_0 \to X_1$$

de $\boldsymbol{A}$.

2.1.2. Soit n un entier $n \geqslant 0$, et soit $\square_n^+ = (\square_0^+)^{n+1}$ la catégorie produit de $n+1$ facteurs égaux à $\square_0^+$. On identifiera les objets de $\square_n^+$ avec les applications de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ dans l'ensemble $\{0, 1\}$. Si α est un objet de $\square_n^+$ on définit $|\alpha|$ par

$$|\alpha| = \alpha(0) + \cdots + \alpha(n).$$

L'objet $0 = (0, \ldots, 0)$ est l'objet initial de $\square_n^+$.

La sous-catégorie pleine de $\square_n^+$ obtenue par suppression de l'objet initial $(0, 0, \ldots, 0)$ se note $\square_n$.

On conviendra que $\square_{-1}^+ = \square_0$.

2.1.3. Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie. Les objets de $((\square_n)^0, \boldsymbol{A})$ (resp. $((\square_n^+)^0, \boldsymbol{A})$) s'appellent objets n-cubiques (resp. augmentés) de $\boldsymbol{A}$. Les objets n-cubiques de $\boldsymbol{A}^0$ s'appellent aussi objets n-cocubiques de $\boldsymbol{A}$.

Si $X.:(\square_n)^0 \to \boldsymbol{A}$ est un objet n-cubique de $\boldsymbol{A}$ et $\alpha \in \mathrm{Ob}\,\square_n$ on dénote par X_α l'objet $X.(\alpha)$. Ces objets X_α sont les sommets de $X.$.

Si $f.: X. \to Y.$ est un morphisme d'objets n-cubiques et $\alpha \in \mathrm{Ob}\,\square_n$ on dénote par $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ le morphisme $f.(\alpha)$.

2.1.4. Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie et S un objet de $\boldsymbol{A}$. Soit $S.$ l'objet n-cubique de $\boldsymbol{A}$ constant égal à S. Si $X.$ est un objet n-cubique de $\boldsymbol{A}$, une augmentation de $X.$ vers S est un morphisme d'objets n-cubiques $a.: X. \to S.$.

On identifiera les augmentations $a.: X. \to S.$ avec les objets n-cubiques augmentés $X_.^+$ tels que $X_0^+ = S$. On dénotera cette situation par $a: X. \to S$.

2.1.5. Si $\boldsymbol{A}$ est la catégorie des espaces topologiques, schémas, groupes, etc, ..., un objet n-cubique de $\boldsymbol{A}$ s'appelle aussi espace topologique n-cubique, etc, ... Si $X.$ est un schéma n-cubique tel que tous les sommets X_α sont lisses (sur $\mathbb{C}$), on dira que $X.$ est lisse.

2.1.6. Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie avec coproduits finis. Nous allons associer un objet simplicial strict n-tronqué $\phi.X.$ à tout objet n-cubique $X.$ de $\boldsymbol{A}$. Pour ceci on considère la catégorie $(\Delta_{\mathrm{mon}})/\Delta_n$ dont les objets sont les morphismes $\alpha: \Delta_p \to \Delta_n$ de (Δ_{mon}), et morphismes évidents. Chaque objet α de $(\Delta_{\mathrm{mon}})/\Delta_n$ est determiné biunivoquement par son image dans Δ_n. Par ailleurs, si on identifie $\square_n$ avec l'ensemble ordonné des parties de $\{0, 1, \dots, n\}$, on obtient un isomorphisme de catégories

$$\square_n \simeq (\Delta_{\mathrm{mon}})/\Delta_n .$$

Maintenant on a un foncteur source

$$\phi : \square_n \to (\Delta_{\mathrm{mon}})_n$$

qui associe à $\alpha: \Delta_p \to \Delta_{\mathrm{n}}$ sa source Δ_p et qui associe à tout morphisme (Fig. 2)

$$\begin{tikzcd} \Delta_p \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \Delta_q \arrow[dl, "\beta"] \\ & \Delta_n & \end{tikzcd}$$

Fig. 2.

de α dans β, le morphisme $\delta: \Delta_p \to \Delta_q$. On définit le foncteur

$$\phi.: \big((\square_n)^0, \boldsymbol{A}\big) \to \big((\Delta_{\mathrm{mon}})_n^0, \boldsymbol{A}\big)$$

qui assigne à un objet n-cubique $X.$ de $\boldsymbol{A}$ l'objet $\phi.(X.)$ tel que si $\Delta_p \in \mathrm{Ob}(\Delta_{\mathrm{mon}})_n$ alors

$$\phi_p X. = \coprod_{\phi\alpha = p} X_\alpha$$

et si $\delta : \Delta_p \to \Delta_q$ est un morphisme de $(\Delta_{\mathrm{mon}})_n$ alors $\phi_{\cdot}(X_{\cdot})(\delta)$ est le coproduit des morphismes

$$X_\alpha \to X_{\alpha \circ \delta}, \quad \alpha \in \mathrm{Ob}(\Delta_{\mathrm{mon}})/\Delta_n, \quad \phi(\alpha) = q.$$

Si $X_{\cdot}^+$ est un objet n-cubique augmenté, défini par une augmentation $a : X_{\cdot} \to S$ d'un objet n-cubique $X_{\cdot}$, alors on a que l'objet simplicial strict n-tronqué $\phi_{\cdot}X_{\cdot}$ est muni d'une augmentation $\phi(a) : \phi_{\cdot}X_{\cdot} \to S$, qu'on identifie à un objet simplicial strict n-tronqué augmenté $\phi_{\cdot}(X_{\cdot})^+$.

On a une construction duale $\phi_{\mathrm{op}}^{\cdot}$ pour le cas cocubique.

2.1.7. Voici un exemple pour $n = 2$. Si $X_{\cdot}^+$ est l'objet 2-cubique augmenté défini par le diagramme suivant (Fig. 3),

$$\begin{tikzcd}
X_{111} \arrow[rrr, "\delta_2"] \arrow[dr, "\delta_1"] \arrow[ddd, "\delta_0"'] & & & X_{110} \arrow[dl, "\delta_1"'] \arrow[ddd, "\delta_0"] \\
& X_{101} \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_0"'] & X_{100} \arrow[d, "\delta_0"] & \\
& X_{001} \arrow[r, "\delta_0"] & X_{000} & \\
X_{011} \arrow[ur, "\delta_0"] \arrow[rrr, "\delta_1"] & & & X_{010} \arrow[ul, "\delta_0"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 3.

alors $\phi(X_{\cdot})^+$ est l'objet simplicial strict 2-tronqué augmenté

$$\begin{tikzcd}
X_{111} \arrow[r, shift left=2, "\delta_0"] \arrow[r, "\delta_1" description] \arrow[r, shift right=2, "\delta_2"'] & X_{110} \sqcup X_{101} \sqcup X_{011} \arrow[r, shift left=1, "\delta_0"] \arrow[r, shift right=1, "\delta_1"'] & X_{100} \sqcup X_{010} \sqcup X_{001} \arrow[r, "\delta_0"] & X_{000}
\end{tikzcd}$$

2.2. Espaces topologiques cubiques irréductibles

2.2.1. Dans cette section les espaces topologiques n-cubiques seront augmentés où non, et nous les appellerons simplement espaces topologiques cubiques, l'entier n étant omis.

2.2.2. Soit $X_{\cdot}$ un espace topologique cubique. On sous-espace (resp. ouvert, fermé) de $X_{\cdot}$ est un espace topologique cubique $Y_{\cdot}$ muni d'un morphisme

$Y_. \to X_.$ tel que pour chaque sommet α le morphisme $Y_\alpha \to X_\alpha$ soit un sous-espace (resp. ouvert, fermé). La réunion $Y_.^1 \cup Y_.^2$ et l'intersection $Y_.^1 \cap Y_.^2$ de deux sous-espaces $Y_.^1$ et $Y_.^2$ de $X_.$ se définit sommet à sommet d'une façon évidente.

2.2.3. On dit qu'un espace topologique cubique $X_.$ est irréductible s'il est non vide et si la réunion de deux sous-espaces fermés différents de $X_.$ est toujours différent de $X_.$. Un sous-espace irréductible maximal de $X_.$ s'appelle composante irréductible de $X_.$. Tout espace topologique cubique est la réunion de ses composantes irréductibles.

Il est aisé de montrer la propriété suivante, qui donne une idée assez claire de la situation.

2.2.4. PROPOSITION. *Soit $X_.$ un espace topologique cubique, alors $X_.$ est irréductible si et seulement s'il existe un sommet α, appellé maximum, tel que X_α est irréductible et pour chaque β on a que si* $\mathrm{Hom}(\beta, \alpha) = \emptyset$ *alors X_β est vide et dans le cas contraire $X_\alpha \to X_\beta$ est dominant (il a une image dense).*

2.2.5. D'après la proposition (2.2.4) on peut vérifier que les composantes irréductibles d'un espace topologique cubique $X_.$ sont les sous-espaces irréductibles $Y_.$ de $X_.$ tels que le sommet maximum Y_α de Y soit une composante irréductible de X_α et pour tout morphisme $\alpha \to \beta$ l'adhérence de l'image de $X_\beta \to X_\alpha$ ne contient pas Y_α.

2.2.6. Soit $X_.$ un espace topologique cubique et $\{X_.^i\}_{i \in I}$ la famille de ses composantes irréductibles. Pour tout sommet α on dénote par I_α l'ensemble des classes d'équivalence des index $i \in I$ tels que $X_\alpha^i \neq \emptyset$, par la relation

$$i \sim j \Leftrightarrow X_\alpha^i = X_\alpha^j.$$

On obtient alors une décomposition irrédondante

$$X_\alpha = \bigcup_{i \in I_\alpha} X_\alpha^i$$

qui dépend de $X_.$.

2.2.7. Définition. Soit $X_.$ un espace topologique cubique, on appelle dimension de $X_.$ le maximum des dimensions des sommets X_α.

2.3. Résolution d'un schéma cubique

Dans cette section on applique la convention 2.2.1.

2.3.1. Définition. Soit $X_.$ un schéma cubique, on dit qu'un morphisme $f_. : \tilde{X}_. \to X_.$ est une résolution de $X_.$ si

i) Il existe une bijection $\sigma : I(\tilde{X}_\cdot) \to I(X_\cdot)$ entre les ensembles des composantes irréductibles telle que pour chaque sommet α, σ induit une bijection $I_\alpha(\tilde{X}_\cdot) \to I_\alpha(X_\cdot)$.
ii) Si $i \in I_\alpha(\tilde{X}_\cdot)$ alors f_α applique $\tilde{X}_\alpha^i$ sur $X_\alpha^{\sigma(i)}$, et la restriction

$$f_\alpha^i : \tilde{X}_\alpha^i \to X_\alpha^{\sigma(i)}$$

est une modification propre.
iii) Le schéma cubique $\tilde{X}_\cdot$ est lisse.

La preuve du théorème d'existence de résolutions utilise évidemment le théorème d'Hironaka et en plus les constructions élémentaires suivantes.

2.3.2. Lemme. *Soit $a : X' \to X$ un morphisme dominant de schémas irréductibles et $f : \tilde{X} \to X$ une modification propre, alors il existe une modification propre $\tilde{X}' \to X'$ et un morphisme surjectif $\tilde{X}' \to \tilde{X}$ qui rendent commutatif le diagramme suivant* (*Fig.* 4).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \to & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{a} & X \end{array}$$

Fig. 4.

Démonstration. Soit U un ouvert dense de X tel que $f^{-1}U \to U$ soit un isomorphisme, alors $a^{-1}U$ est un ouvert dense de X' et on définit $\tilde{X}'$ comme d'adhérence de $a^{-1}U \times_X \tilde{X}$ dans $X' \times_X \tilde{X}$.

2.3.3. Remarque. Avec les hypothèses de (2.3.2), si $\tilde{X}' \to X'$ est une modification propre, il existe au plus un morphisme $\tilde{X}' \to \tilde{X}$ qui rend commutatif la Fig. 4.

2.3.4. Lemme. *Soit $\{f_i : X_i \to X;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une famille finie de modifications propres d'un schéma irréductible X, alors il existe une modification propre $f : \tilde{X} \to X$ qui factorise toutes les f_i* (*Fig.* 5).

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \to & X_i \\ f\searrow & & \swarrow f_i \\ & X & \end{array}$$

Fig. 5.

Démonstration. Elle est analogue à celle de (2.3.2).

2.3.5. THÉORÈME. *Soit $X_{.}$ un schéma cubique, alors il existe une résolution $f_{.}: \tilde{X}_{.} \to X_{.}$ de $X_{.}$.*

Démonstration. Nous allons définir $\tilde{X}_\alpha$ par récurrence sur l'entier $|\alpha|$. Si α est tel que $|\alpha|$ est minimum, on choisit pour chaque $i \in I_\alpha$ une résolution $\tilde{X}^i_\alpha \to X^i_\alpha$ de X^i_α et on définit $\tilde{X}_\alpha$ par

$$\tilde{X}_\alpha = \bigsqcup_{i \in I_\alpha} \tilde{X}^i_\alpha. \tag{2.3.5.1}$$

Soit α arbitraire, et supposons que $\tilde{X}_\beta$ est déjà défini pour chaque β tel que $|\beta| < |\alpha|$. Soit $i \in I_\alpha(X_{.})$. Pour chaque $\beta \neq \alpha$ tel qu'il existe un morphisme $\beta \to \alpha$ on peut trouver, d'après (2.3.2) un diagramme commutatif (Fig. 6),

$$\begin{array}{ccc} W^i_\beta & \to & \tilde{X}^i_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^i_\alpha & \to & X^i_\beta \end{array}$$

Fig. 6.

tel que $W^i_\beta \to X^i_\alpha$ soit une modification propre. D'après (2.3.4) il existe une modification propre $W^i \to X^i_\alpha$ telle que, pour tout $\beta \neq \alpha$ avec $\beta \to \alpha$, elle rend commutatif le diagramme suivant (Fig. 7)

$$\begin{array}{ccc} W^i & \to & W^i_\beta \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X^i_\alpha & \end{array}$$

Fig. 7.

donc on obtient des diagrammes commutatifs (Fig. 8.)

$$\begin{array}{ccc} W^i & \to & \tilde{X}^i_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^i_\alpha & \to & X^i_\beta \end{array}$$

Fig. 8.

Soit finalement $\tilde{X}^i_\alpha \to W^i$ une résolution, alors on a un morphisme $\tilde{X}^i_\alpha \to X^i_\alpha$, qui est une résolution de X^i_α, et alors on définit $\tilde{X}_\alpha$ par (2.3.5.1). Les schémas $\tilde{X}_\alpha$ sont munis de morphismes $\tilde{X}_\alpha \to \tilde{X}_\beta$ pour chaque morphisme $\beta \to \alpha$, qui, d'après (2.3.3), définissent un schéma cubique $\tilde{X}_{.}$. Alors $\tilde{X}_{.}$ est une résolution de $X_{.}$.

2.4. Hyperrésolutions

On applique la convention 2.2.1, sauf en cas de mention contraire.

La construction suivante permet de réaliser un procès inductif de résolution.

2.4.1. Définition. On dit qu'un schéma cubique $Z_.$ est un carré résolvent si $Z_.$ est défini par un carré cartésien (Fig. 9)

$$\begin{array}{ccc} Z_{\cdot 11} & \to & Z_{\cdot 10} \\ \downarrow & & \downarrow f_. \\ Z_{\cdot 01} & \to & Z_{\cdot 00} \end{array}$$

Fig. 9.

où les flèches horizontales sont des immersions fermées et $f_.$ est une résolution de $Z_{\cdot 00}$ qui induit un isomorphisme

$$Z_{\cdot 10} - Z_{\cdot 11} \xrightarrow{\sim} Z_{\cdot 00} - Z_{\cdot 01}.$$

2.4.2. Proposition. *Soit $f_. : \tilde{X}_. \to X_.$ une résolution d'un schéma cubique $X_.$, alors il existe un carré résolvent $Z_.$ tel que $Z_{\cdot 0} = (f_. : \tilde{X}_. \to X_.)$ et*

$$\dim Z_{\cdot 1} < \dim X_. .$$

Démonstration. Il suffit de définir le sous-espace fermé $Z_{\alpha 01}$ de X_α pour tout sommet α de $X_.$. Ce sous-espace doit contenir le plus petit fermé Δ_α de X_α en dehors duquel $f_\alpha : \tilde{X}_\alpha \to X_\alpha$ est un isomorphisme et, en outre, $Z_{\cdot 01}$ doit être un schéma cubique. La définition optimale de $Z_{\cdot 01}$ est donc la suivante. Si $|\alpha|$ est maximum, on définit $Z_{\alpha 01} = \Delta_\alpha$, et pour $|\alpha|$ arbitraire, par récurrence sur $|\alpha|$, on peut définir

$$Z_{\alpha 01} = \Delta_\alpha \cup \bigcup_\beta \overline{\mathrm{Im}(Z_{\beta 01} \to X_\alpha)}$$

où la réunion s'étend aux β tels qu'il existe un morphisme $\alpha \to \beta$.

2.4.3. Définition. Soit $X_.$ un schéma m-cubique augmenté ($m \geqslant -1$) et supposons qu'on a

i) Un schéma $(m+2)$-cubique augmenté $X_.^1$ qui est un carré résolvent avec $X_. = X_{\cdot 00}^1$.
ii) Pour i, $1 \leqslant i < s$, un schéma $(m+i+2)$-cubique augmenté $X_.^{i+1}$ qui est un carré résolvent avec $X_{\cdot 1}^i = X_{\cdot 00}^{i+1}$.

iii) Le schéma $(m+s)$-cubique augmenté $X^s_{\cdot 1}$ est lisse.
Alors on construit un schéma $(m+s+1)$-cubique augmenté $Z_\cdot$ par récurrence sur s.

Si $s=1$, $Z_\cdot = X^1_\cdot$. Si $s=2$ on définit

$$Z_\cdot = r\left(X^1_\cdot,\ X^2_\cdot\right)$$

de telle façon que pour tout $\alpha \in \square^+_{m+1}$ on a

$$Z_{\alpha 00} = X^1_{\alpha 0}$$

$$Z_{\alpha\beta} = X^2_{\alpha\beta},\quad \text{si } \beta \in \square_1.$$

Si $s>2$ on définit

$$Z_\cdot = r\left(X^1_\cdot,\ X^2_\cdot, \dots, X^{s-1}_\cdot,\ X^s_\cdot\right) = r\left(r\left(X^1_\cdot,\ X^2_\cdot, \dots, X^{s-1}_\cdot\right),\ X^s_\cdot\right).$$

On dira que $Z_\cdot$ est une hyperrésolution cubique augmentée de $X_\cdot$.

2.4.4. Théorème. *Soit $X_\cdot$ un schéma m-cubique, alors il existe une hyperrésolution cubique augmentée de $X_\cdot$,*

$$Z_\cdot = r\left(X^1_\cdot, \dots, X^s_\cdot\right)$$

telle que

$$\dim X^i_{\cdot 1} \leqslant \dim S_\cdot - i,\quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Démonstration. Nous allons prouver le théorème par récurrence sur $\dim X_\cdot$. Si $\dim X_\cdot = 1$ alors le théorème se déduit de (2.3.5) et (2.4.2). Supposons que $\dim X_\cdot > 1$. D'après (2.3.5) et (2.4.2) il existe un carré résolvent $X^1_\cdot$ tel que $X_\cdot = X^1_{\cdot 00}$ et

$$\dim X^1_{\cdot 1} \leqslant \dim X_\cdot - 1.$$

Par l'hypothèse de récurrence il existe une hyperrésolution cubique augmentée de $X^1_{\cdot 1}$,

$$Z^1_\cdot = r\left(X^2_\cdot, \dots, X^s_\cdot\right)$$

telle que

$$\dim X^i_{\cdot 1} \leqslant \dim X^1_{\cdot 1} - (i-1) \leqslant \dim X_\cdot - i,$$

alors l'hyperrésolution cubique augmentée

$$Z_{\bullet}=r\left(X_{\bullet}^{1},\ldots,X_{\bullet}^{s}\right)$$

vérifie le théorème.

Nous nous intéressons au cas $m=-1$, dans lequel on donne la définition suivante.

2.4.5. Définition. Soit X un schéma et $\mathrm{X}_{\bullet}$ un schéma n-cubique muni d'une augmentation $a:\mathrm{X}_{\bullet}\rightarrow\mathrm{X}$, tel que le schéma n-cubique augmenté associé $\mathrm{X}_{\bullet}^{+}$ soit une hyperrésolution cubique augmentée de X, alors on dira que $\mathrm{X}_{\bullet}$, ou $a:\mathrm{X}_{\bullet}\rightarrow\mathrm{X}$, est une hyperrésolution cubique de X.

2.4.6. COROLLAIRE. *Soit X un schéma, alors il existe une hyperrésolution cubique $X_{\bullet}$ de X telle que*

$$\dim X_{\alpha}\leqslant\dim X-|\alpha|+1$$

pour tout sommet α.

2.5. Descente cohomologique des hyperrésolutions cubiques

Dans cette section on prouve que le schéma simplicial strict défini par une hyperrésolution cubique $X_{\bullet}$ d'un schéma X est de descente cohomologique sur X, on peut alors obtenir la structure de Hodge mixte de X à partir de celle de $X_{\bullet}$.

2.5.1. D'abord on établit quelques notations. Si $X_{\bullet}$ est un espace topologique n-cubique, $a: X_{\bullet}\rightarrow X$ une augmentation sur un espace topologique X et A un anneau, alors on peut construire, d'une façon analogue à celle de (1.3.2), le complexe n-cocubique de faisceaux sur X, $a_{*}\mathscr{C}^{\bullet}A_{X_{\bullet}}$, qui est muni d'une augmentation

$$A_{X}\rightarrow a_{*}\mathscr{C}^{\bullet}A_{X_{\bullet}}. \tag{2.5.1.1}$$

Si $X_{\bullet}^{+}$ est l'espace topologique n-cubique augmenté associé à $a: X_{\bullet}\rightarrow X$ (voir (2.1.4)) on a un complexe n-cocubique coaugmenté de faisceaux sur X, $a_{*}\mathscr{C}^{\bullet}A_{X_{\bullet}^{+}}$ qui s'identifie avec (2.5.1.1).

D'ailleurs on peut considérer les foncteurs $\phi_{\bullet}$ et $\phi_{\mathrm{op}}^{\bullet}$, et on obtient une identification

$$\phi(a)_{*}\mathscr{C}^{\bullet}A_{\phi_{\bullet}(X_{\bullet})}\simeq\phi_{\mathrm{op}}^{\bullet}\left(a_{*}\mathscr{C}^{\bullet}A_{X_{\bullet}}\right).$$

On notera par $\mathbb{R}\, a_* A_{X.}$ le complexe de faisceaux sur X défini comme le complexe simple du double complexe $\phi^{\cdot}_{\mathrm{op}}(a_* \mathscr{C}^{\cdot} A_{X.})^{\sim}$ et $\mathbb{R}\, a_* A_{X.^+}$ dénotera le cône du morphisme

$$A_X \to \mathbb{R}\, a_* A_{X.}$$

2.5.2. Définition. Avec les notations antérieures (2.5.1) on dit que $a: X_{\bullet} \to X$ est de descente cohomologique si $\mathbb{R}\, a_* A_{X.^+}$ est acyclique pour tout anneau A.

Il résulte aussitôt la propriété suivante.

2.5.3. Proposition. *Avec les notations* (2.5.1), $a: X_{\bullet} \to X$ *est de descente cohomologique si et seulement si* $\phi(a): \phi.(X.) \to X$ *est de descente cohomologique.*

On donne ci-après une version du théorème du changement de base pour un morphisme propre (voir [Saint-Donat, 1972] (4.1.1)).

2.5.4. Lemme. *Soit* $f: \tilde{X} \to X$ *un morphisme propre d'espaces topologiques,* Y *un sous-espace fermé de* X *et* $\tilde{Y} = f^{-1} Y$. *On suppose que* f *induit un isomorphisme*

$$f: \tilde{X} - \tilde{Y} \xrightarrow{\sim} X - Y.$$

Alors l'espace topologique 1-*cubique augmenté vers* X (*Fig.* 10)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \to & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array}$$

Fig. 10.

est de descente cohomologique.

Démonstration. Il s'agit de prouver que le complexe simple associé au carré commutatif de complexes de faisceaux sur X (Fig. 11)

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^{\cdot} A_X & \xrightarrow{\phi} & \mathscr{C}^{\cdot} A_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_* \mathscr{C}^{\cdot} A_{\tilde{X}} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & f_* \mathscr{C}^{\cdot} A_Y \end{array}$$

Fig. 11.

est acyclique. On considère l'ouvert $U = X - Y \simeq \tilde{X} - \tilde{Y}$ et les inclusions $j: U \to X$ et $\tilde{j}: U \to \tilde{X}$, alors ϕ et $\tilde{\phi}$ sont surjectifs et leurs noyaux vérifient

$$\mathrm{Ker}\ \phi = j_! \mathscr{C}^{\cdot} A_U$$

$$\mathrm{Ker}\ \tilde{\phi} = f_* \tilde{j}_! \mathscr{C}^{\cdot} A_U.$$

On a donc Ker ϕ = Ker $\tilde{\phi}$, ce qui entraîne l'acyclicité de la Fig. 11.

2.5.5. THÉORÈME. *Soit X un schéma et $a: X_{\cdot} \to X$ une hyperrésolution cubique de X* (*voir* (2.4.5)), *alors a est de descente cohomologique.*

Démonstration. Soit $X_{\cdot}^{+}$ le schéma cubique augmenté associé a $a: X_{\cdot} \to X$ et supposons que

$$X_{\cdot}^{+} = r\left(X_{\cdot}^{1}, \ldots, X_{\cdot}^{s}\right)$$

alors nous allons prouver le théorème par récurrence sur s. Si $s = 1$, alors le théorème résulte de (2.5.4). Si $s = 2$, alors on a un carré commutatif (Fig. 12)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot}^{+}} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot}^{2}} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\ \mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot 0}^{1}} & \xrightarrow{\psi'} & \mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot 00}^{2}} \end{array}$$

Fig. 12.

de complexes de faisceaux sur X où ϕ et ϕ' sont les projections naturelles. On voit aisément que

$$\mathrm{Ker}\ \phi = \mathrm{Ker}\ \phi'.$$

D'ailleurs, $X_{\cdot 00}^{2} = X_{\cdot 1}^{1}$ et d'après (2.5.4) $\mathbb{R}f_* A_{X_{\cdot}^{1}}$ est acyclique, donc ψ' est un quasiisomorphisme. Il résulte que ψ est un quasiisomorphisme. D'après (2.5.4) on obtient que $\mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot}^{2}}$ est acyclique, donc $\mathbb{R} a_* A_{X_{\cdot}^{+}}$ est acyclique, ce qui démontre le théorème dans ce cas. Si $s > 2$, on peut appliquer le même argument à la situation

$$X_{\cdot}^{+} = r\left(r\left(X_{\cdot}^{1}, \ldots, X_{\cdot}^{s-1}\right), X_{\cdot}^{s}\right)$$

où $r(X_{\cdot}^{1}, \ldots, X_{\cdot}^{s-1})$ sera acyclique par l'hypothèse de récurrence.

D'après (2.4.6) et (2.5.5) et les constructions (1.1.5) et (2.1.6), on obtient le résultat suivant:

2.5.6. COROLLAIRE. *Pour tout schéma X il existe une hyperrésolution simpliciale stricte $X_{\cdot} \to X$ de X telle que pour tout $n \geqslant 0$*

$$\dim X_n \leqslant \dim X - n.$$

3. Preuve de la conjecture

3.1. Soit X un schéma compact, on se ramène à [McCrory, 1983] pour la définition et les propriétés géometriques de la filtration de Zeeman S sur l'homologie rationnelle de X. On utilisera uniquement la caractérisation suivante de S. Si τ est la filtration canonique (voir [Deligne, 1971] (1.4.6)) du complexe dualisant $\mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X)$ et si nous dénotons aussi par τ la filtration induite sur l'hypercohomologie de $\mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X)$, on a que

$$\tau_q H_i(X, \mathbb{Q}) = S^{-i-q} H_i(X, \mathbb{Q}).$$

On rappelle que pour X lisse et de dimension pure N la dualité de Poincaré donne un isomorphisme induit par une orientation

$$\mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X) \simeq \mathbb{Q}_X[2N]$$

dans la catégorie derivée de complexes de faisceaux sur X.

On utilisera dorénavant la filtration canonique qui a l'avantage d'être définie sur toutes les encarnations du complexe dualisant.

3.2. LEMME: *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme propre d'un schéma lisse X et de dimension $\leqslant N$ dans un schéma arbitraire Y, alors on a que*

$$R^i f_* \mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X) = 0 \quad si\ i < -2N.$$

Démonstration Soit $y \in Y$, alors la fibre au dessus de y du faisceaux $R^i f_* \mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X)$ vérifie

$$R^i f_* \mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X)_y \simeq H^i\big(f^{-1}y, \mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{Q}_X) \mid f^{-1}y\big) \simeq H^i\big(f^{-1}y, \mathbb{Q}[2N]\big)$$

$$= H^{2N+i}\big(f^{-1}y, \mathbb{Q}\big)$$

qui est nulle si $2N + i < 0$.

3.3. On donne ci-après un lemme sur les complexes doubles qui est un élément clef dans la démonstration du théorème principal.

Soit $K^{\cdot\cdot}$ un complexe double de modules sur un anneau commutatif, avec différentielles partielles

$$d' : K^{pq} \to K^{p+1,q}, \quad d'' : K^{pq} \to K^{p,q+1}$$

telles que $d'd'' + d''d' = 0$ et soit $d = d' + d''$ la différentielle totale. Considérons sur le complexe simple associé $s^{\cdot}K$ les filtrations croissantes suivantes.

D'abord la filtration M qu'induit le deuxième degré et qui est définie par

$$M_p s^{\cdot}K^{\cdot} = \sum_{j \geqslant -p} K^{\cdot j}.$$

En outre la filtration canonique τ, définie par

$$\tau_p s^n K = \begin{cases} s^n K, & \text{si} \quad n < p \\ \mathrm{Ker}\colon s^n K \to s^{n+1} K, & \text{si} \quad n = p \\ 0, & \text{si} \quad n > p \end{cases}$$

et finalement la filtration F somme des antérieures, définie par

$$F_p = M_p + \tau_{p+r}$$

où r est un entier fixé.

Lemme: *Si le complexe double $K^{\cdot\cdot}$ vérifie les conditions*
a) *Il existe un entier j_0 tel que $K^{\cdot j} = 0$ si $j \geqslant j_0$,*
b) *$H^i(K^{\cdot j}, d') = 0$ si $i + 2j < r$,*
alors le morphisme de complexes filtrés

$$\iota : (s^{\cdot}K, M) \to (s^{\cdot}K, F)$$

induit par l'identité de $s^{\cdot}K$ est un quasi-isomorphisme filtré.

Démonstration On doit prouver que pour tout entier q le morphisme d'inclusion $M_q \to F_q$ est un quasi-isomorphisme.

On considère sur les complexes M_q et F_q les filtrations induites par M, c'est-à-dire,

$$M_p(M_q) = M_q \cap M_p$$

$$M_p(F_q) = F_q \cap M_p$$

et on va prouver que le morphisme de complexes filtrés

$$(M_q, M) \to (F_q, M)$$

induit un quasi-isomorphisme sur les gradués. Compte tenu de l'hypothèse a), ceci démontrera le lemme. Le problème revient donc à prouver que pour tout couple d'entiers p, q on a un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{Gr}_p^M(M_q) \to \mathrm{Gr}_p^M(F_q).$$

Si $p \leqslant q$, c'est évident. Pour $p > q$ on a que

$$\mathrm{Gr}_p^M(M_q) = M_q \cap M_p / M_q \cap M_{p-1}$$

est nulle. Donc il suffit de montrer que

$$\mathrm{Gr}_p^M(F_q) = F_q \cap M_p / F_q \cap M_{p-1}$$

est acyclique.

Soit $z \in F_q \cap M_p$ un répresentant d'un cocycle de $F_q \cap M_p / F_q \cap M_{p-1}$. On peut supposer que z est homogène de degré total n, avec $n \leqslant q + r$. Soit z_0 la composante bihomogène de z de bidegré $(n+p, -p)$, alors $d'z_0$ est la composante de bidegré $(n+p+1, -p)$ de dz. Par hypothèse on a $dz \in M_{p-1} \cap F_q$, donc $d'z_0 = 0$. D'après la condition b) on a

$$H^{n+p}(K^{\cdot,-p}, d') = 0$$

puisque $(n+p) - 2p < r$. Il existe alors $y \in K^{n+p-1,-p}$ tel que $d'y = z_0$. Le degré total de y est $n-1$, on a donc $y \in M_p \cap F_q$. Soit maintenant $z_1 = z - dy$. Il résulte aussitôt que $z_1 \in M_{p-1} \cap F_q$ donc la classe de cohomologie de z dans $(M_p \cap F_q)/(M_{p-1} \cap F_q)$ est nulle, ce qui prouve le lemme.

3.4. THÉORÈME: *Soit X un schéma compact de dimension N et $a: X_\cdot \to X$ une hyperrésolution simpliciale stricte telle que* dim $X_n \leqslant N - n$. *Alors les filtrations induites sur l'hypercohomologie*

$$H_*(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{H}^{-*}(X, \mathbb{R}a_*\mathbb{D}^\cdot(\mathbb{Q}_{X_\cdot}))$$

par les filtrations M (voir (1.4.3)) *et canonique τ du complexe* $\mathbb{R}a_*\mathbb{D}^\cdot(\mathbb{Q}_{X_\cdot})$ *vérifient la rélation*

$$\tau_{q-2N} H_*(X, \mathbb{Q}) \subset M_q H_*(X, \mathbb{Q}).$$

Démonstration. Soit $\mathscr{K}^{\cdot\cdot}$ le complexe double de faisceaux sur X défini par

$$\mathscr{K}^{ij} = a_{-j*}\mathbb{D}^i(\mathbb{Q}_{X_{-j}})$$

et soit $r = -2N$. Alors il résulte du lemme (3.3) que l'identité de $s^{\cdot}\mathscr{K}$ induit un quasi-isomorphisme filtré

$$(s^{\cdot}\mathscr{K}, M) \to (s^{\cdot}\mathscr{K}, F)$$

Si on applique le foncteur $R^i\Gamma(X, \ )$ d'hypercohomologie on obtient un isomorphisme sur les gradués

$$\mathrm{Gr}_q^M H_*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_q^F H_*(X, \mathbb{Q})$$

d'où on déduit que $M_q H_*(X, \mathbb{Q}) = F_q H_*(X, \mathbb{Q})$ c'est-à-dire $\tau_{q-2N} H_*(X, \mathbb{Q}) \subset M_q H_*(X, \mathbb{Q})$.

On a, comme conséquence de (2.5.6), (3.4), (1.5.7) et (3.1):

3.5. Corollaire: *Soit X un schéma compact de dimension N, alors la filtration S de Zeeman et la filtration W par le poids de Deligne sur l'homologie de X vérifient la rélation*

$$S^{2N-i-q} H_i(X, \mathbb{Q}) \subset W^{i-q} H_i(X, \mathbb{Q})$$

pour tout i, q.

3.6. Remarque. On peut simplifier la démonstration de (3.4) en évitant l'utilisation du lemme (3.3), si on considère pour chaque sommet Z de $X_.$ l'encarnation (fonctorielle) du complexe $\mathbb{D}^{\cdot}(\mathbb{R}_Z)$ donnée par le complexe des courants $\mathscr{D}_Z^{\cdot}$ sur la variété differentiable associée à Z. En effet, de la relation

$$\mathscr{D}_Z^i = 0 \quad \text{si } i < -2 \dim Z$$

il résulte aussitôt que

$$\tau_{q-2N} \mathbb{R}\, a_* \mathscr{D}_{X.}^{\cdot} \subset M_q \mathbb{R}\, a_* \mathscr{D}_{X.}^{\cdot},$$

ce qui prouve le théorème sur l'homologie à coefficients réels, et donc aussi pour les coefficients rationnels.

3.7. Remarque. Pour X une variété algébrique sur un corps algébriquement clos quelconque, Deligne a defini dans [Deligne, 1980] (5.3.5) une filtration par le poids sur la cohomologie l-àdique $H^*(X, \mathbb{Q}_l)$. D'ailleurs on a aussi un complexe dualisant pour la topologie étale, et on peut demander si la relation fournie par le théorème (3.4) est encore vraie dans ce cas. La preuve qu'on vient de donner, en utilisant le lemme (3.3), resterait valable si on disposait de la résolution des singularitées en caractéristique positive.

Reconnaissance

Je dois exprimer ma reconnaissance à V. Navarro Aznar qui m'a suggeré l'idée de la démonstration de la conjecture en janvier 1982, et qui m'a permis d'exposer ses résultats encore non publiés. Mes remerciements aussi à J. Ferrer, P. Pascual et F. Puerta et au referee pour ses comentaires utiles.

Références

Beilinson, A.A., Bernstein, J. et Deligne, P.: Faisceaux Pervers, dans *Analyse et topologie sur les espaces singuliers* (I). *Soc. Math. de France, Astérisque* 100 (1982).

Borel A. et Moore, J.C.: Homology theory for locally compact spaces. *Mich. Math. Journal* 7 (1960) 137–159.

Deligne, P.: Théorie de Hodge II, III. *Publ. Math. IHES* 40 (1971) 5–58, 44 (1974) 5–77.

Deligne, P.: La conjecture de Weil II. *Publ. Math. IHES* 52 (1980) 137–152.

Guillén, F., Navarro Aznar, V. et Puerta, F: *Théorie de Hodge via schémas cubiques.* Universitat Politècnica de Catalunya (1982).

Illusie, L.: *Complexe cotangent et déformations* I. *Springer Lecture Notes* 239 (1971).

MacLane, S.: *Homology*. Third Printing. Springer Verlag, Heidelberg (1975).

McCrory, C.: On the topology of Deligne's weight filtration. *Proc. Symp. Pure Math.* 40 (1983) 217–226.

Saint-Donat, B. (d'après des notes de P. Deligne): Techniques de descente cohomologique, dans *Théorie des Topos et cohomologie étale des schémas*, t.2. *Springer Lecture Notes* 270 (1972).

Steenbrink, J.H.M. et Stevens, J.: Topological invariance of the weight filtration. *Indagat. Math.* 46 (1984) 63–76.

Verdier, J.L.: Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. *Sem Bourbaki*, 18e année 65/66, n. 300. (1965).