

COMPOSITIO MATHEMATICA

X. BENVENISTE

Un résultat sur les faces du cône des 1-cycles effectifs

Compositio Mathematica, tome 60, n° 2 (1986), p. 187-208

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__60_2_187_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN RÉSULTAT SUR LES FACES DU CÔNE DES 1-CYCLES EFFECTIFS

X. Benveniste

Introduction

Dans tout ce qui suit toutes les variétés qui apparaissent seront définies sur \mathbb{C} .

DÉFINITION 0-1: Soient V une variété irréductible et projective, et D un diviseur de Cartier. Nous dirons que D est numériquement positif si pour toute courbe irréductible C sur V , on a $D \cdot C \geq 0$.

DÉFINITION 0-2: Soit X une variété normale et projective de dimension d n'ayant que des singularités canoniques au sens de [R-1]. Soit r le p.p.c.m. des indices des singularités de X . Notons ω_X le faisceau dualisant de X et soit $\omega_X^{[r]}$ le bidual de $\omega_X^{\otimes r}$. Nous appellerons \mathbb{Q} -diviseur canonique et noterons K_X l'élément de $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$ dont la classe est celle de $(1/r)\omega_X^{[r]}$.

DÉFINITION 0-3: Soit X une variété projective de dimension d . On note $NE(X)$ l'enveloppe convexe des 1-cycles effectifs dans le dual de $NS(X) \otimes \mathbb{R}$.

Le théorème suivant apparaît comme un complément au résultat de J. Kollar obtenu dans [Ko]:

THÉORÈME 0: Soient X une variété normale projective de dimension d n'ayant que des singularités canoniques au sens de [R-1], Y une variété normale et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel. Soit L un diviseur ample sur Y et notons E l'ensemble des points $x \in X$ où f n'est pas un isomorphisme. Supposons que $-K_X|_E$ soit numériquement positif. Alors l'ensemble formé des $Z \in \overline{NE}(X)$ vérifiant $K_X \cdot Z \leq 0$ et $f^*(L) \cdot Z = 0$ est un cône convexe polyédral dont les faces sont en nombre fini et sont définies par des éléments de $NS(X)$.

Qu'il nous soit permis de remercier M. Reid de nous avoir suggéré la forme du Théorème 0 à partir du Théorème 3-1.

Pour tout nombre réel x nous notons $\lceil x \rceil$ le plus petit entier $\geq x$ (round up). Le symbole \equiv désigne l'équivalence rationnelle entre diviseurs.

1. Quelques rappels et notations

Dans ce qui suit, V désigne une variété projective définie sur \mathbb{C} , n'ayant que des singularités canoniques. Soit k l'un des corps \mathbb{Q} ou \mathbb{R} . On notera K_V le \mathbb{Q} -diviseur canonique de V et $NS_k(V)$ le k -espace vectoriel $NS(V) \otimes k$.

Soient W une variété normale et projective et $f: V \rightarrow W$ un morphisme birationnel. Dans ce qui suit, k désigne \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou \mathbb{R} ; notons $N_k^1(V, W)$ le quotient de $NS_k(V)$ par l'image de $f^*(\text{Pic}(W))$. Notons aussi dans $\text{Hom}_k(NS_k(V), k)$, $N_{1,k}(V, W)$ l'orthogonal de l'image de $f^*(\text{Pic}(W))$ dans $NS_k(V)$. (Kawamata note $N_k^1(V, W)$ et $N_{1,k}(V, W)$ sous la forme $N^1(V/W)$ et $N_1(V/W)$). Nous notons aussi $g: NS_k(V) \rightarrow N_k^1(V, W)$ la projection naturelle. Soit E l'ensemble formé des points de V où f n'est pas un isomorphisme local.

REMARQUE 1-1: Pour tout $D \in NS_k(V)$ le fait que $D|_E$ soit numériquement positif ne dépend que de la classe $g(D)$.

REMARQUE 1-2: Soit $F_{\mathbb{R}}$ le sous-espace vectoriel de $NS_{\mathbb{R}}(V)$ formé des éléments $D \in NS_{\mathbb{R}}(V)$ tels que pour toute courbe $C \subset E$, on ait $D \cdot C = 0$. Alors $F_{\mathbb{R}}$ provient d'un sous-espace vectoriel $F_{\mathbb{Q}}$ de $NS_{\mathbb{Q}}(V)$ par extension des scalaires.

D'après Kawamata [K] et Viehweg [V], on a:

THÉORÈME 1-1: Soient V une variété lisse et projective définie sur \mathbb{C} , de dimension d , $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs lisses et irréductibles à croisements normaux, $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres rationnels de $[0, 1[$, L un élément de $NS_{\mathbb{Q}}(V)$ numériquement positif vérifiant $L^d > 0$. Soit D un élément de $\text{Pic}(V)$ dont la classe dans $NS_{\mathbb{Q}}(V)$ vérifie:

$$D = L + \sum_{i \in I} a_i E_i.$$

Alors pour tout $p < d$, on a: $H^p(V, \mathcal{O}_V(-D)) = 0$.

D'après Shokurov [S] on a:

THÉORÈME 1-2: Soient V une variété lisse et projective, P un diviseur numériquement positif, $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de diviseurs lisses et irréductibles à croisements normaux, $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres

rationnels de $[0, 1]$, L un \mathbb{Q} -diviseur ample, A un diviseur effectif à support les diviseurs E_i , tels que l'on ait dans $NS_{\mathbb{Q}}(V)$:

$$P + A = K_V + L + \sum_{i \in I} a_i E_i.$$

Alors pour m assez grand on a: $\chi(\mathcal{O}_V(mP + A)) \neq 0$.

D'après Kawamata [K-1], on a:

THÉORÈME 1-3: Soient V une variété projective n 'ayant que des singularités canoniques, et P un diviseur numériquement positif sur V . On suppose que $P - K_V$ est un diviseur numériquement positif dont la dimension de Kodaira est égale à $\dim(V)$. Alors il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ le système linéaire $|mP|$ est sans point de base.

PROPOSITION 1-1: Soient V une variété projective, et H un diviseur ample sur V . Il existe une constante c ne dépendant que de V et H telle que pour tout diviseur P numériquement positif, le système linéaire $|cH + P|$ est sans point de base.

PROPOSITION 1-2: Soient X une variété projective de dimension d , Z une variété projective normale, $f: X \rightarrow Z$ un morphisme birationnel et H un diviseur ample sur Z . Soient E l'ensemble formé des points de X où f n'est pas un isomorphisme local, et D un diviseur de Cartier sur X tel que $D|_E$ soit numériquement positif. Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, le diviseur $nf^*(H) + D$ soit numériquement positif.

DÉMONSTRATION: Remarquons que puisque H est ample sur Z , il existe une famille finie $(F_i)_{i \in I}$ de diviseurs irréductibles, une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'entiers positifs, un diviseur ample L sur X et un entier $n_0 > 0$, tels que:

$$n_0 f^*(H) + D \equiv L + \sum_{i \in I} a_i F_i. \quad (1)$$

Soit I_0 l'ensemble formé des $i \in I$ tels que l'on ait: $F_i \not\subset E$. Montrons le résultat par récurrence sur d . Commençons par le cas $d = 2$.

Pour chaque $i \in I_0$, il existe un entier $n_i > 0$ tel que pour tout $n \geq n_i$, on ait $(nf^*(H) + D) \cdot F_i \geq 0$. Soit n_1 un majorant des n_i et de n_0 . Supposons que pour un entier $n \geq n_1$, le diviseur $nf^*(H) + D$ ne soit pas numériquement positif. Alors il existe une courbe irréductible C telle que

$$(nf^*(H) + D) \cdot C < 0.$$

Par hypothèse C n'est pas contenue dans E . D'après (1) on a :

$$nf^*(H) + D \equiv (n - n_0)f^*(H) + L + \sum_{i \in I} a_i F_i. \quad (2)$$

Cela implique qu'il existe $0 \in I_0$ tel que $F_0 = C$, mais cela contredit le choix de n_1 .

Supposons maintenant le résultat acquis pour $d - 1 \geq 2$, et montrons le pour d . Par hypothèse de récurrence appliquée pour chaque $i \in I_0$ à $f|_{F_i} : F_i \rightarrow f(F_i)$, il existe un entier $n_i > 0$ tel que pour tout $n \geq n_i$ le diviseur $nf^*(H) + D|_{F_i}$ soit numériquement positif. Soit n_1 un majorant de n_0 et des n_i pour $i \in I_0$. Supposons que pour un entier $n \geq n_1$, le diviseur $nf^*(H) + D$ ne soit pas numériquement positif. Alors il existe une courbe irréductible C telle que $(nf^*(H) + D) \cdot C < 0$. Par hypothèse C n'est pas contenue dans E . Puisque l'on a la relation (2), il existe $0 \in I_0$ tel que $F_0 \cdot C < 0$, mais cela est absurde car $nf^*(H) + D|_{F_0}$ est numériquement positif. On obtient ainsi le résultat.

Soient X et Y deux variétés vérifiant les hypothèses du théorème 0. Soient $(F_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de E . Pour chaque $i \in I$, notons $d_i = \dim(F_i)$; de plus si $d_i \geq 2$ soit H_i un diviseur très ample sur F_i . Posons pour $i \in I$:

$$C_i = F_i \quad \text{si } d_i = 1, \quad (3)$$

$$C_i = H_i^{d_i-1} \quad \text{si } d_i \geq 2.$$

Soit $Z = \sum_{i \in I} C_i$, et notons $g: NS_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow N_{\mathbb{R}}^1(X, Y)$ la surjection naturelle.

PROPOSITION 1-3: *L'ensemble P formé des $g(D) \in N_{\mathbb{R}}^1(X, Y)$ vérifiant $D \cdot Z = 1$ et tel que pour toute courbe C contenue dans E , on ait $D \cdot C \geq 0$ est un sous ensemble compact convexe de $N_{\mathbb{R}}^1(X, Y)$.*

DÉMONSTRATION: Soient $D \mapsto \|D\|$ une norme sur $NS_{\mathbb{R}}(X)$ et $g(D) \mapsto \|g(D)\|$ la norme quotient sur $N_{\mathbb{R}}^1(X, Y)$. Soit $(D_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de $NS_{\mathbb{R}}(X)$ telle que l'on ait:

$$g(D_n) \in P, \quad \|g(D_n)\| = \|D_n\| \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|D_n\| = +\infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $n \mapsto D_n / \|D_n\|$ admet une limite U quand n tend vers $+\infty$.

1^{er} pas: Pour toute courbe C contenue dans E , on a $U \cdot C = 0$.

Remarquons premièrement que puisque pour tout entier n positif, on a $g(D_n) \in P$, pour toute courbe C contenue dans E , on a $U \cdot C \geq 0$. Pour tout entier positif n on a :

$$((D_n - D_0) / \|D_n\|) \cdot Z = 0.$$

On déduit par passage à la limite que $U \cdot Z = 0$. D'après le choix de Z en (3) et éventuellement le théorème de l'indice, on obtient le résultat.

2^{ème} pas: Il existe une famille finie $(D_j)_{j \in J}$ de diviseurs de Cartier sur Y et une famille $(a_j)_{j \in J}$ de nombres réels tels que l'on ait :

$$U = f^* \left(\sum_{j \in J} a_j D_j \right).$$

D'après la Remarque 1-2, il existe une famille finie $(M_j)_{j \in J}$ de diviseurs de Cartier sur X et une famille $(a_j)_{j \in J}$ de nombres réels tels que

$$U = \sum_{j \in J} a_j M_j$$

et que pour tout $j \in J$, on ait pour toute courbe C contenue dans E , $M_j \cdot C = 0$.

En utilisant la Proposition 1-2 et le Théorème 1-3, on voit facilement qu'il existe des entiers positifs c_j et d_j tels que le système linéaire $|c_j f^*(L) + d_j M_j|$ soit sans point base pour $j \in J$. Soit f_j le morphisme défini par ce système linéaire; en choisissant c_j assez grand on voit que $f_j(X)$ est isomorphe à Y ce qui implique le résultat.

3^{ème} pas: où l'on arrive à une contradiction.

D'après le 2^{ème} pas on par définition de g , $g(U) = 0$. Mais d'après le choix de la suite $(D_n)_{n \geq 0}$, on pour tout entier n positif:

$$\|g(D_n / \|D_n\|)\| = 1,$$

ce qui donne $\|g(U)\| = 1$. Cela est absurde.

Donnons la caractérisation suivante des ensembles convexes polyédriques dont les points extrémaux sont rationnels. Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension fini, R un réseau dans V . Soit C un sous-ensemble compact convexe de V tel que 0 soit dans l'intérieur de C . Pour chaque $x \in V - C$, on pose:

$$t(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+; tx \in C \}.$$

Soit $M = \sup \{ \|x\|; x \in C \}$. On a:

PROPOSITION 1-4: *Supposons que la condition suivante est réalisée: Il existe une constante N tel que pour tout $x \in R$ tel que $\|x\| \geq N$, on a $t(x) \in \mathbb{Q}$ et le dénominateur de $t(x)$ est $\leq \|x\|$. Alors C est polyédrique. De plus il existe une famille finie A de couple $(g, a) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ telle que:*

- (i) $C = \bigcap_{(g,a) \in A} \{x; g(x) + a \geq 0\}$.
(ii) Pour tout $(g, a) \in A$, on a $\|g\| \leq M$ et $|a| \leq M$.

La démonstration de cette proposition sera donnée en appendice. Rappelons le résultat classique dû à [H-W]:

PROPOSITION 1-5: *Soient n un entier > 0 et P un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[x, y, z]$ de degré n . Supposons qu'il existe des nombres réels strictement positifs s et c , une suite infinie $S \subset \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $(p, q) \in S$, il existe un entier m tel que l'on ait:*

- (a) $0 \leq 1 - ps < (1/c)$,
(b) pour tout $r \geq m$, $P(r, p, q) = 0$.

Alors on a:

- (i) $P \in \mathbb{Q}[y, z]$,
(ii) s est un nombre rationnel et le dénominateur de s est $\leq 2(n+1)c$.

2. Quelques inégalités sur la norme de diviseurs

Soient X une variété projective de dimension d , et L un diviseur de Cartier numériquement positif vérifiant $L^d > 0$. Soit $D \mapsto \|D\|$ une norme sur $NS_{\mathbb{R}}(X)$.

PROPOSITION 2-1: *Il existe une constante c ne dépendant que de X et L , une famille finie $(B_j)_{j \in J}$ de diviseurs irréductibles, tels que pour tout $D \in NS(X)$ on ait les assertions suivantes:*

- (i) *Il existe un entier positif $m(D)$, une famille $(a_j(D))_{j \in J}$ de nombres entiers positifs, et un diviseurs $M(D)$ tels que:*

$$m(D)L + D \equiv M(D) + \sum_{j \in J} a_j B_j$$

et $|M(D)|$ est sans point base.

- (ii) $\|m(D)L + D\| \leq c \|D\|$ et pour tout $j \in J$, on a $a_j(D) \leq c \|D\|$.

DÉMONSTRATION: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une base de $NS(X)$. Il existe une famille finie $(B_j)_{j \in J}$ de diviseurs irréductibles vérifiant la condition suivante: pour chaque $i \in I$, il existe un entier $n_i > 0$, une famille $(d_{ij})_{j \in J}$ d'entiers positifs, et pour $e \in \{-1, 1\}$ un diviseur $M_i(e)$ tels que l'on ait:

(1) $n_i L + e F_i \equiv M_i(e) + \sum_{j \in J} d_{ij} B_j$ et $|M_i(e)|$ est sans point base, les $d_{i,j}$ ne dépendent pas de e .

Soient c_0 et c_1 deux nombres réels > 0 tels que pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres réels on ait:

(2) $c_0 \sup\{|x_i|; i \in I\} \leq \left\| \sum_{i \in I} x_i F_i \right\| \leq c_1 \sup\{|x_i|; i \in I\}$.

Soient $D \in NS(X)$ et $(a_i)_{i \in I}$ une familles d'entiers tels que: $D = \sum_{i \in I} a_i F_i$. Posons $m(D) = \sum_{i \in I} |a_i| n_i$. Alors il existe une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ tels que l'on ait:

$$\begin{aligned} m(D)L + D &= \sum_{i \in I} |a_i| (n_i L + e_i F_i) \\ &= \sum_{i \in I} |a_i| M_i(e_i) + \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} d_{ij} |a_i| \right) B_j. \end{aligned}$$

Posons $M(D) = \sum_{i \in I} |a_i| M_i(e_i)$ et pour chaque $j \in J$: $a_j(D) = \sum_{i \in I} d_{ij} |a_i|$. D'après (1) le système linéaire $|M(D)|$ est sans point base. En utilisant (2) on obtient:

$$\|m(D)L + D\| \leq (1/c_0) \left(\sum_{i \in I} \|n_i L + e_i F_i\| \right) \|D\|,$$

et pour tout $j \in J$:

$$a_j(D) \leq (1/c_0) \left(\sum_{i \in I} d_{ij} \right) \|D\|.$$

Il suffit de prendre pour c un majorant de $(1/c_0) \left(\sum_{i \in I} \|n_i L + e_i F_i\| \right)$ et des $(1/c_0) \left(\sum_{i \in I} d_{ij} \right)$. Cela termine la démonstration.

Supposons désormais que X soit à singularités canoniques. Soient Y un modèle birationnel de X , $f: Y \rightarrow X$ un morphisme composé d'une suite finie d'éclatements, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de diviseurs irréductibles, $(\rho_i)_{i \in I}$ une famille de nombres rationnels positifs, tels que l'on ait:

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_{i \in I} \rho_i E_i.$$

PROPOSITION 2-2: *Il existe une constante c ne dépendant que de L et de X (et pas du morphisme f) vérifiant la propriété suivante: Pour tout $D \in NS(X)$ il existe un entier positif $m(D)$, une famille $(a_i(D))_{i \in I}$ d'entiers positifs un diviseur $M(D)$ tels que:*

- (i) $f^*(m(D)L + D) \equiv M(D) + \sum_{i \in I} a_i(D)E_i$ et $|M(D)|$ est sans point de base.
 (ii) $\max\{a_i(D)/(\rho_i + 1); i \in I\} \leq c \|D\|$.

DÉMONSTRATION: Quitte à étendre la famille $(E_i)_{i \in I}$ on peut supposer que les transformés stricts des B_j pour $j \in J$ forment partie de cette famille. D'après la proposition 2-1, il existe un entier $m(D)$, une famille $(a_j)_{j \in J}$ d'entiers positifs, un diviseur $M(D)$ et une constante c ne dépendant que de X et L tels que l'on ait:

- (3) $m(D)L + D \equiv M(D) + \sum_{j \in J} a_j(D)B_j$ et $|M(D)|$ est sans point base,
 (4) $\|m(D)L + D\| \leq c \|D\|$ et pour tout $j \in J$: $a_j(D) \leq c \|D\|$.
 Maintenant il est clair qu'il existe une constante c_0 ne dépendant que des B_j et donc que de X et L , telle que l'on ait:
 (5) Pour tout $j \in J$, il existe une famille $(d_{ij})_{i \in I}$ de nombres entiers positifs tels que: $f^*(B_j) = \sum_{i \in I} d_{ij}E_i$, et pour tout $i \in I$: $d_{ij} \leq c_0(\rho_i + 1)$.

En remarquant que $|f^*(M(D))|$ est sans point de base, on déduit aisément de (3), (4) et (5) le résultat annoncé. Cela termine la démonstration.

3. Un théorème de rationalité

Soient X une variété projective de dimension d , n'ayant que des singularités canoniques, R et L deux diviseurs de Cartier numériquement positifs. On suppose que $L - K_X$ est numériquement positif et que l'on a $L^d > 0$.

Soient $D \in \text{Pic}(X)$ et $A(L, R, D)$ l'ensemble formé des $t \in \mathbb{Q}_+$ vérifiant la propriété suivante: il existe un entier $m(t)$ tel que pour tout $m \geq m(t)$ on ait:

- (1) $mL + R + tD$ est numériquement positif.

On voit que $0 \in A(L, R, D)$. On note $t(L, R, D)$ la borne supérieure de $A(L, R, D)$. Désormais nous supposons:

- (2) $t(L, R, D)$ est fini.

Posons $t = t(L, R, D)$.

PROPOSITION 3-1: *Il existe deux constantes c_0 et c_1 ne dépendant que de X , R et L tels que pour tous entiers p et q positifs vérifiant $0 < q - tp < 1$, il existe:*

un entier $m(p, q)$

une variété lisse Y et un morphisme birationnel $f: Y \rightarrow X$ composé d'une suite finie d'éclatements,

une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ de diviseurs lisses à croisements normaux, un diviseur M ,

une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres entiers positifs non tous nuls,

une famille $(\rho_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels positifs,

tels que:

- (i) $f^*(m(p, q)L + pR + qD) \equiv M + \sum_{i \in I} a_i E_i$, M est la partie mobile de $|f^*(m(p, q)L + pR + qD)|$, $\sum_{i \in I} a_i E_i$ sa partie fixe, et $|M|$ est sans point base.
- (ii) $K_Y = f^*(K_X) + \sum_{i \in I} \rho_i E_i$,
- (iii) $\max\{a_i/(\rho_i + 1); i \in I\} \leq c_0 \|D\| + c_1$.

DÉMONSTRATION: Puisque L est dimension de Kodaira d , il existe un diviseur ample H sur X , un diviseur effectif E et un entier m_0 tels que:

$$m_0 L \equiv H + E'.$$

D'après la Proposition 1-1, il existe un entier $a_0 > 0$ ne dépendant que de X et H tel que pour tout diviseur numériquement positif U , le système linéaire $|a_0 H + U|$ est sans point base. Puisque l'on a: $q - 1 - tp < 0$, d'après (1), il existe un entier m_1 tel que le diviseur $m_1 L + pR + (q - 1)D$ soit numériquement positif. Posons: $A = m_1 L + a_0 H + pR + (q - 1)D$. Le système linéaire $|A|$ est sans point base. Remarquons que l'on a en posant $E = a_0 E'$:

$$(3) \quad (m_1 + a_0 m_0)L + pR + qD \equiv A + E + D.$$

Soit $m(E + D)$ l'entier positif fourni par la Proposition 2-2. Posons: $m(p, q) = m(E + D) + m_1 + m_0 a_0$. Soient Y un modèle birationnel lisse de X , $f: X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel composé suite finie d'éclatements, $(E_i)_{i \in I}$ une famille de diviseurs lisses à croisements normaux, $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers positifs, $(\rho_i)_{i \in I}$ une famille de nombres rationnels positifs, M un diviseur sur Y tels que les assertions (i) et (ii) de la proposition soient vérifiées. Puisque $0 < q - tp$, le diviseur:

$$m(p, q)L + pR + qD \text{ n'est pas numériquement positif.}$$

Les a_i ne sont donc pas tous nuls. Soient $(a_i(E + D))_{i \in I}$ la suite d'entiers et c_0 la constante fournies par la proposition 2-2. D'après (3) on déduit

$$\begin{aligned} \max \{ a_i / (\rho_i + 1); i \in I \} &\leq \max \{ a_i(E + D) / (\rho_i + 1); i \in I \} \\ &\leq c_0 \|D + E\| \leq c_0 \|D\| + c_0 \|E\|. \end{aligned}$$

Il suffit de poser $c_1 = c_0 \|E\|$ pour avoir le résultat de l'assertion (iii). Cela termine la démonstration.

THÉORÈME 3-1: Soient c_0 et c_1 les constantes données dans la proposition 3-1. Sous l'hypothèse (2), $t(L, R, D)$ est un nombre rationnel et on a: le dénominateur de $t(L, R, D)$ est $\leq 2(d + 1)(c_0 \|D\| + c_1)$.

DÉMONSTRATION: Posons $t = t(L, R, D)$. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que t n'est pas rationnel ou bien que son dénominateur est $> 2(d + 1)(c_0 \|D\| + c_1)$. Posons $c = 1 + c_0 \|D\| + c_1$ et introduisons quelques notations:

Pour tout $(m, p, q) \in \mathbb{N}^3$ posons: $M(m, p, q) = mL + pR + qD$, et soit $B(m, p, q)$ le lieu fixe de $|M(m, p, q)|$. D'après les hypothèses faites sur L et le théorème 1-3, il existe un entier m_0 tel que pour tous $n \geq m_0$ et $s \geq n$:

(4) $|sL + nR|$ est sans point base.

Soit $<$ l'ordre partiel défini sur \mathbb{N}^3 par: $(a_1, a_2, a_3) < (b_1, b_2, b_3)$ si et seulement si $a_i < b_i$ pour tout i .

1^{er} pas: Il existe une suite infinie $S \subset \mathbb{N}^3$ strictement croissante pour $<$ et un ensemble algébrique non vide T tel que pour tout $(n, p, q) \in S$, on ait

- (1) pour tout $m \geq n$: $B(m, p, q) = T$,
- (2) $0 < q - tp \leq (1/c)$.

Soit S_0 l'ensemble formé des $(m, p, q) \in \mathbb{N}^3$ vérifiant: $0 < q - tp \leq (1/c)$. Nous allons montrer que pour tout $(m, p, q) \in S_0$, il existe $(n', p', q') \in S_0$ tel que pour tout $m' \geq n'$, on ait:

- (1) $(m', p', q') > (m, p, q)$,
- (2) $B(m', p', q') \subset B(m, p, q)$.

Soit $(m', p', q') \in S_0$ tel que $(m', p', q') > (m, p, q)$. Il existe deux entiers k et s vérifiant $q' = kq + s$ avec $q \leq s \leq 2q$. Puisque $t \neq 0$, d'après le théorème 1-3, il existe deux entiers m_s et $p_s > 0$ tels que:

(5) $|m_s L + p_s R + sD|$ est sans point base.

Soit w un entier tel que: $p' = pk + p_s + w$, et soit u un entier tel que $m' = mk + m_s + u$. Par définition on a:

$$(6) \quad M(m', p', q') \equiv kM(m, p, q) + m_s L + p_s R + sD + wR + uL.$$

On a aussi:

$$0 < q' - tp' = k(q - tp) + s - tp_s - tw \leq (1/c).$$

Comme $q - tp > 0$, il existe q' suffisamment grand pour que $w \geq m_0$. Posons $n' = m_s + km + u$. Alors d'après (4), (5) et (6), on déduit que pour $m' \geq n'$ on a:

$$B(m', p', q') \subset B(m, p, q).$$

Comme X est noethérien et que pour tout $(m, p, q) \in S_0$, $M(m, p, q)$ n'est pas numériquement positif, on a les assertions annoncées.

2^{ème} pas: Quelques calculs arithmétiques.

Soient $(m, p, q) \in S$ et k un entier strictement positif, tels que:

$$(7) \quad ((c-1)/c) \leq k(q-tp) < 1.$$

Remarquons que l'on a:

$$(8) \quad B(km, kp, kq) \subset T.$$

D'après La proposition 3-1, il existe:

un modèle birationnel lisse Y de X ,
 un morphisme $f: Y \rightarrow X$ composé d'une suite finie d'éclatements,
 une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ de diviseurs à croisements normaux,
 une famille $(\rho_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels ≥ 0 ,
 une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres entiers positifs non tous nuls,
 un diviseur M ,

tels que:

$f^*(M(km, kp, kq)) \equiv M + \sum_{i \in I} a_i E_i$, M est la partie mobile de $|f^*(M(km, kp, kq))|$ et $\sum_{i \in I} a_i E_i$ est sa partie fixe. De plus $|M|$ est sans point base.

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_{i \in I} \rho_i E_i,$$

$$\max\{a_i/(\rho_i + 1); i \in I\} \leq c_0 \|D\| + c_1.$$

On peut choisir une famille $(t_i)_{i \in I}$ de nombres rationnels strictement positifs suffisamment petits et $o \in I$, pour que les conditions suivantes soient réalisées:

(9) le \mathbb{Q} -diviseur $f^*(2L - K_X) - \sum_{i \in I} t_i E_i$ est ample,

(10) on a: $(a_0 + t_0)/(\rho_0 + 1) < c - 1$ et $a_0 \neq 0$,

(11) pour tout $i \in I - \{o\}$, on a:

$$(a_0 + t_0)/(\rho_0 + 1) > (a_i + t_i)/(\rho_i + 1).$$

Posons $r = (\rho_0 + 1)/(a_0 + t_0)$. Pour chaque $i \neq o$, soit m_i un entier tel que

$$m_i = r(a_i + t_i) - \rho_i \in [0, 1[.$$

Alors pour chaque $i \neq o$, on a:

(12) $0 \leq m_i \leq \lceil \rho_i \rceil$.

Posons aussi $c_i = m_i + r(a_i + t_i) - \rho_i$ pour $i \neq o$. Soit $(n', p', q') \in S$ tel que $p' > rpk$, et soit $m' > n'$. On a:

(13) $M(m', p', q') \equiv (m' - rkm - 2)L + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D$
 $+ rkM(m, p, q) + 2L.$

D'après (7) et le premier pas, on a:

$$q' - rkq - t(p' - rpk) = q' - tp' - rk(q - tp)$$

$$\leq (1/c) - r((c-1)/c) < 0.$$

Posons $s = (q' - rkq)/(p' - rkp)$; on a $s < t$, et d'après la définition (1) il existe un entier m'_s tel que pour tout $m \geq m'_s$, on ait:

(14) $mL + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D$

est un diviseur numériquement positif.

Soit $m' \geq rkm + m'_s + 2$; posons:

$$A = f^*(m'_s L + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D).$$

On a dans $NS_{\mathbb{Q}}(Y)$:

$$\begin{aligned} & f^*(M(m', p', q')) + \sum_{i \neq 0} m_i E_i \\ &= K_Y + (m' - rkm - m'_s - 2)f^*(L) + A + rM + f^*(2L - K_X) \\ & \quad - \sum_{i \in I} t_i E_i + \sum_{i \neq 0} c_i E_i + E_0. \end{aligned}$$

Posons $H = A + rM + f^*(2L - K_X) - \sum_{i \in I} t_i E_i$. Alors d'après (9), H est un \mathbb{Q} -diviseur ample et on a:

$$\begin{aligned} (15) \quad & f^*(M(m', p', q')) + \sum_{i \neq 0} m_i E_i \\ &= K_Y + (m' - rkm - m'_s - 2)f^*(L) + H + \sum_{i \neq 0} c_i E_i + E_0. \end{aligned}$$

Posons $A(m', p', q') = f^*(M(m', p', q')) + \sum_{i \neq 0} m_i E_i$.

3^{ème} pas: où l'on arrive à une contradiction.

D'après (8), (10) et (12), E_0 est contenue dans la partie fixe de $|A(m', p', q')|$. Comme on a la suite exacte:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_Y(A(m', p', q') - E_0) \rightarrow \mathcal{O}_Y(A(m', p', q')) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_{E_0}(A(m', p', q')) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

on déduit en appliquant le Théorème 1-1 à Y et E_0 que l'on a:

$$(16) \quad \chi(\mathcal{O}_{E_0}(A(m', p', q'))) = 0.$$

D'après la construction de la suite S effectuée au 1^{er} pas et la Proposition 1-5, on déduit que le polynôme:

$$(17) \quad (m', p', q') \mapsto \chi(\mathcal{O}_{E_0}(A(m', p', q'))) \text{ est le polynôme nul.}$$

Soient $(m', p', q') \in \mathbb{N}^3$ suffisamment grand pour que l'on ait:

$$p'/q' < t, \quad p' > rkp \quad \text{et} \quad q' > rkq.$$

On a donc: $(q' - rkq)/(p' - rkp) < t$. Posons $s' = (q' - rkq)/(p' - rkp)$. D'après la définition (1), il existe un entier $n_{s'}$ tel que pour tout $m \geq n_{s'}$, les diviseurs $mL + (p' - rkp)R + (q' - rkq)D$ et

$M(m, p', q')$ soient numériquement positifs. Pour $m' \geq rkm + n_{s'} + 2$, on a la relation (15) et H est encore un \mathbb{Q} -diviseur ample. Soit k' un entier > 1 ; remarquons que:

$$A(k'm', k'p', k'q') = (k' - 1)f^*(M(m', p', q')) + A(m', p', q').$$

Puisque $f^*(M(m', p', q'))$ est numériquement positif, la relation (13) et le théorème 1-2 contredisent la relation (17), ce qui démontre le Théorème 3-1.

4. La démonstration du Théorème 0

Reprenons les notations du théorème 0, ainsi que celles introduites au paragraphe 1. Notons $g: NS(X) \rightarrow N_{\mathbb{Z}}^1(X, Y)$ la surjection naturelle. Soient $(F_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de E , et pour chaque $i \in I$, d_i la dimension de F_i . Pour chaque $i \in I$ tel que $d_i \geq 2$, soit H_i un diviseur très ample sur F_i ; posons:

$$C_i = F_i \text{ si } d_i = 1, \quad C_i = H_i^{d_i-1} \text{ si } d_i \geq 2,$$

$$\text{et } Z = \sum_{i \in I} C_i.$$

La Remarque 1-1 permet de définir l'ensemble P formé des éléments $g(D)$ de $N_{\mathbb{R}}^1(X, Y)$ tels que $D \cdot Z = 1$ et que pour toute courbe C contenue dans E , on ait $D \cdot C \geq 0$. La Proposition 1-3 montre que P est un sous-ensemble compact convexe d'intérieur non vide dans l'hyperplan affine des $g(D)$ vérifiant $D \cdot Z = 1$.

Soit R un \mathbb{Q} -diviseur ample sur X vérifiant $R \cdot Z = 1$. Notons C l'ensemble formé des $g(D)$ tels que $g(R) + g(D) \in P$. Alors C est linéairement isomorphe à P et C est contenu dans l'hyperplan des $g(D)$ avec $D \cdot Z = 0$. Notons $V = \{g(D); D \in NS(X) \text{ et } D \cdot Z = 0\}$, et posons $V_{\mathbb{R}} = V \otimes \mathbb{R}$. L'ensemble C est donc un sous-ensemble compact convexe dont l'intérieur dans $V_{\mathbb{R}}$ contient 0. Soient $D \mapsto \|D\|$ une norme sur $NS_{\mathbb{R}}(X)$, et $g(D) \mapsto \|g(D)\|$ la norme quotient sur $NS_{\mathbb{R}}^1(X, Y)$. On définit pour tout $x \in V_{\mathbb{R}} - C$ le nombre réel $t(x)$ en posant:

$$t(x) = \sup\{t; t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } tx \in C\}.$$

PROPOSITION 4-1: *Il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que pour tout $x \in V \setminus C$, on ait:*

- (i) $t(x) \in \mathbb{Q}$,
- (ii) le dénominateur de $t(x)$ est $\leq c_0 \|x\| + c_1$.

La Proposition 4-1 n'est qu'une reformulation du Théorème 1-3.

Grâce à la Proposition 1-4, en utilisant la dualité pour la forme d'intersection entre P et l'ensemble formé des $Z \in \overline{NE}(X)$ vérifiant $f^*(L) \cdot Z = 0$, on obtient le Théorème 0.

Appendice: Une caractérisation de certains convexes polyédriques

Introduction

Soient V un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, R un réseau dans V . Soit C un ensemble convexe compact tel que 0 appartienne à l'intérieur de C . Pour chaque $x \in V - \{0\}$, on pose:

$$t(x) = \sup\{t; t \in \mathbb{R}_+, tx \in C\}.$$

Soit $M = \sup\{\|x\|; x \in C\}$.

THÉORÈME A-0: *Soit N un entier positif tel que la condition suivante soit réalisée: Pour tout $x \in R - \{0\}$ tel que $\|x\| \geq N$, on a $t(x) \in \mathbb{Q}$ et le dénominateur de $t(x)$ est $\leq \|x\|$. Alors C est polyédrique et il existe une famille finie A de couples $(g, a) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ telle que:*

- (i) $C = \bigcap_{(g,a) \in A} \{x; g(x) + a \geq 0\}$,
- (ii) pour tout $(g, a) \in A$, on a $\|g\| \leq M$ et $|a| \leq M$.

1. Quelques résultats intermédiaires

Soit n un entier ≥ 0 . Posons $V = \mathbb{R}^n$ et $R = \mathbb{Z}^n$.

PROPOSITION 1-1: *(referee inconnu): Soit f une fonction convexe de V dans \mathbb{R} telle que pour tout $x \in V$ on ait pour tout entier q :*

$$qx \in R \Rightarrow qf(x) \in \mathbb{Z}.$$

Alors pour tout ouvert non vide $\mathcal{U} \subset V$, il existe un ouvert non vide $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ tel que la restriction de f à \mathcal{W} soit une forme affine à coefficients entiers.

DÉMONSTRATION: Introduisons quelques notations. Soit m un entier > 1 . Posons $I = \{1, \dots, n\}$ et soit $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique de V . Pour tout entier positif t , notons $S(n, t)$ l'ensemble formé des $(x_i)_{i \in I}$ vérifiant pour tout $i \in I$, $x_i \geq 0$ et $\sum_{i \in I} x_i \leq (1/m)^t$.

1^{er} pas: Soit g une fonction convexe de $S(n, 0)$ dans \mathbb{R} . Si g n'est pas une forme affine, pour tout $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ intérieur à $S(n, 0)$, on a:

$$g(x) < \left(1 - \sum_{i \in I} x_i\right) g(0) + \sum_{i \in I} x_i g(e_i).$$

Cela est une conséquence directe des définitions.

Posons pour tout $x \in V$ et tout $t \geq 0$:

$$(1) \quad g(x, t) = m^t (f(x + (e_n/m^t)) - f(x)).$$

D'après l'hypothèse, on a:

$$(2) \quad \text{Pour tout entier } t \text{ positif et tout } x \in (1/m)^t R \text{ on a: } g(x, t) \in \mathbb{Z}.$$

Il est clair qu'il existe un entier positif a et $z \in (1/m)^a R$ tels que:

$$z + S(n, a) \subset \mathcal{U}.$$

Montrons le résultat par récurrence sur n . Pour $n = 0$ le résultat est clair. Soit n un entier > 0 . Supposons le résultat acquis si $\dim V < n$ et montrons le pour $\dim V = n$. Montrons premièrement qu'il existe un ouvert non vide \mathcal{W} tel que la restriction de f à \mathcal{W} soit une forme affine à coefficients réels.

2^{ème} pas: Quitte à multiplier f par entier > 0 et à ajouter à f une forme affine, on peut se ramener au cas où f vérifie les conditions suivantes:

$$(3) \quad \text{la restriction de } f \text{ à } z + S(n-1, a) \text{ est nulle,}$$

$$(4) \quad f \text{ est à valeurs positives sur } z + S(n, a),$$

$$(5) \quad \text{pour tout } x \in V \text{ et tout entier } q, \text{ on a: } qx \in R \Rightarrow qf(x) \in \mathbb{Z}.$$

Considérons la fonction de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R} définie par:

$$(x_i)_{0 \leq i \leq n-1} \mapsto m^a f\left(z + \sum_{0 \leq i \leq n-1} x_i e_i\right)$$

Elle vérifie les hypothèses de la proposition. Quitte à changer z et a , on peut supposer qu'il existe une forme affine h à coefficients entiers telle que pour tout $x \in z + S(n-1, a)$, on ait: $m^a f(x) = h(x)$. Remplaçons f par $m^a f - h$. On a:

$$(6) \quad \text{pour tout } x \in z + S(n-1, a), f(x) = 0.$$

Soit $s: V \rightarrow V$ la symétrie par rapport à l'hyperplan engendré par les e_i pour $i < n$ parallèlement à e_n . Pour tout $x = (x_i)_{i \in I} \in S(n, a)$ on a

$$\begin{aligned} z + s(x) &= \left(1 - m^a \sum_{i \in I} x_i\right) z + \sum_{i < n} (m^a x_i) (z + (e_i/m^a)) \\ &\quad + (m^a x_n) (z + (e_n/m^a)). \end{aligned}$$

Puisque f est convexe on déduit compte tenu de (6) que:

$$(7) \quad f(z + s(x)) \leq m^a x_n f(z - (e_n/m^a))$$

Posons $b = m^a f(z - (e_n/m^a))$; par hypothèse on a $b \in \mathbb{Z}$. Soit k la forme affine définie pour tout $x \in V$ par: $k(x) = m^a b(z_n - x_n)$. Il est clair que

(8) pour tout $x \in V$ et tout entier q , si $qx \in R$, on a $qk(x) \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in z + S(n-1, a)$, on a $k(x) = 0$.

D'après (7) on a pour tout $x \in S(n, a)$: $f(z + s(x))m^a \leq k(z + s(x))$. Quitte à remplacer f par $m^a f - k$, on peut supposer que l'on a (5) et (6). Par construction on a alors pour tout $x \in S(n, a)$: $f(z + s(x)) \leq 0$. Puisque f est convexe on déduit que pour tout $x \in S(n, a)$, on a: $f(z + x) \geq 0$. Cela termine de montrer le 2^{ème} pas.

3^{ème} pas: Supposons qu'il n'existe par d'ouvert non vide \mathcal{W} contenu dans $z + S(n, a)$ tel que la restriction de f à \mathcal{W} soit une forme affine. Montrons que l'on peut construire une suite $(x_p)_{p \geq 0}$ de points de $z + S(n-1, a)$ telle que pour tout $p \geq 0$ on ait:

$$(9) \quad x_p + S(n-1, a+p) \subset z + S(n, a),$$

$$(10) \quad g(x_{p+1}, a+p+1) < g(x_p, a+p).$$

Posons $x_0 = z$. Supposons x_p construit et construisons x_{p+1} . D'après le premier pas on a:

$$\begin{aligned} f\left(x_p + \sum_{i \in I} (e_i/m^{a+p+1})\right) &< (1/m)f\left(x_p + \sum_{i < n} (e_i/m^{a+p})\right) \\ &\quad + (1/m)f\left(x_p + (e_n/m^{a+p})\right) \\ &\quad + (1 - (2/m))f(x_p). \end{aligned}$$

Posons $x_{p+1} = x_p + \sum_{i < n} (e_i/m^{a+p+1})$. D'après (1) et (3) on déduit l'asser-

tion (10). Puisque $m > 1$, on aussi l'assertion (9). Cela termine la démonstration du 3^{ème} pas.

4^{ème} pas: La fin de la démonstration

D'après le résultat du 3^{ème} pas et les assertions (1), (2), (3), (4) et (5), on voit que l'hypothèse du 3^{ème} pas est absurde. Soit \mathcal{W} un ouvert non vide contenu dans \mathcal{U} tel que la restriction de f à \mathcal{W} soit une forme affine. Soient $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels et a_0 un nombre réel tel que pour tout $x = (x_i)_{i \in I} \in \mathcal{W}$ on ait:

$$(11) \quad f(x) = a_0 + \sum_{i \in I} a_i x_i.$$

Soient r et s deux entiers premiers entre eux et u et v deux points de \mathcal{W} tels que $ru \in R$ et $sv \in R$. Il existe un entier p positif tel que pour tout $i \in I$, on ait $u + (1/r)^p e_i \in \mathcal{W}$ et $v + (1/s)^p e_i \in \mathcal{W}$. En considérant pour chaque $i \in I$, $f(u + (1/r)^p e_i) - f(u)$ et $f(v + (1/s)^p e_i) - f(v)$ on a: $r^p a_i \in \mathbb{Z}$ et $s^p a_i \in \mathbb{Z}$, ce qui implique $a_i \in \mathbb{Z}$. En utilisant (11) on obtient: $ra_0 \in \mathbb{Z}$ et $sa_0 \in \mathbb{Z}$, ce qui montre que $a_0 \in \mathbb{Z}$. On a donc démontré la proposition.

PROPOSITION 1-2: Soit C un ensemble compact convexe de V contenant 0 dans son intérieur. Pour tout $x \in V$, on définit l'ensemble $A(x)$ formé des éléments $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \in tC$. Soit $s(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $A(x)$. Alors la fonction $x \mapsto s(x)$ est une fonction convexe de V dans \mathbb{R} et on a:

- (i) $C = \{x; x \in V, s(x) \leq 1\}$,
- (ii) pour tout $t > 0$ et tout $x \in V$: $s(tx) = ts(x)$.

Le résultat est classique et nous renvoyons le lecteur à Rockafellar [Ro] pour la démonstration.

PROPOSITION 1-3: Soient C un cône convexe fermé d'intérieur non vide dans V , $g \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z})$, a , m et M des entiers vérifiant les conditions suivantes:

- (a) $H = C \cap \{x; g(x) + a \geq 0\}$ est un ensemble compact d'intérieur non vide et $0 \in H$.
 - (b) $H \subset B(0, M)$ et $B(0, m) \subset \{x; g(x) + a \geq 0\}$.
 - (c) Pour tout $x \in C - \{0\}$ soit $A(x)$ l'ensemble formé des $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \in tH$. Soit $s(x)$ la borne inférieure de $A(x)$. On suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout $x \in C \cap R - \{0\}$ vérifiant $\|x\| \geq N$, on a $s(x) \in \mathbb{Q}$ et le numérateur de $s(x)$ est $\leq \|x\|$.
 - (d) L'idéal engendré par $g(R)$ et a est \mathbb{Z} .
- Alors on a: $\|g\|(1)(M/m)$ et $|a| \leq M$.

DÉMONSTRATION:

1^{er} pas: quelques inégalités

Ecrivons pour tout $x \in C \cap R - \{0\}$ vérifiant $\|x\| \geq N$, $s(x) = (p(x)/q(x))$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des entiers premiers entre eux. Par (c), on a:

$$|p(x)| \leq \|x\|. \quad (1)$$

Par définition on a:

$$x(q(x)/p(x)) \in H.$$

D'après (b) on a:

$$\|x\|(q(x)/p(x)) \leq M.$$

En utilisant (1) on déduit:

$$|q(x)| \leq M. \quad (2)$$

D'autre part d'après (b) pour tout $x \in B(0, m)$ on a: $g(x) + a \geq 0$. Cela implique:

$$m\|g\| \leq |a|. \quad (3)$$

2^{ème} pas: on a $|a| \leq M$

Soit $x \in \overset{\circ}{C} \cap R - \{0\}$ et $u \in R$ tels que $g(u)$ et a soient premiers entre eux. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait:

$$nax + u \in C \cap R \quad \text{et} \quad \|nax + u\| \geq N.$$

Pour tout entier positif r posons $y(r) = rax + u$. Pour tout $r \geq n_0$ on a

$$g(y(r)) + s(y(r))a = 0.$$

Cela montre que:

$$a(p(y(r)) + rq(y(r))g(x)) = -q(y(r))g(u).$$

Comme $g(u)$ et a sont premiers entre eux, on voit que a divise $q(y(r))$, ce qui implique d'après (2) le résultat.

En utilisant (3) on termine la démonstration de la proposition.

2 La démonstration du théorème A-0

Gardons les notations de la section précédente. Soit C un ensemble compact convexe vérifiant les hypothèses du Théorème A-0. Soit s la

fonction définie à la Proposition 1-2. Notons A la famille des couples (g, a) où $g \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Z})$ et $a \in \mathbf{Z}$ vérifiant:

- (1) $g(R)$ et a engendrent \mathbf{Z} ,
- (2) $C \subset \{x; g(x) + a \geq 0\}$,
- (3) $\|g\| \leq M$ et $|a| \leq M$.

Cette famille A est finie. Posons $C' = \bigcap_{(g,a) \in A} \{x; g(x) + a \geq 0\}$.

1^{er} pas: Quelques inégalités

D'après les hypothèses pour tout $x \in R$ vérifiant $\|x\| \geq N$, on a: $s(x)$ appartient à \mathbf{Q} . Soient $x \in R$ vérifiant $\|x\| \geq N$, $p(x)$ et $q(x)$ deux entiers premiers entre eux tels que:

$$s(x) = p(x)/q(x).$$

On a aussi:

$$|p(x)| \leq \|x\|. \quad (4)$$

Puisque $x \in s(x)C$, on obtient:

$$q(x)(x/p(x)) \in C.$$

Par densité on déduit:

$$B(0, 1) \subset C, \quad (5)$$

et en utilisant (4):

$$|q(x)| \leq M. \quad (6)$$

2^{ème} pas: on a $C = C'$

Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Comme $C \subset C'$, il existe un ouvert non vide \mathcal{Q} contenu dans C' tel que:

$$C \cap \mathcal{Q} = \emptyset. \quad (7)$$

D'après (6) et l'assertion (ii) de la Proposition 1-2, il existe un entier $r > 0$ tel que pour tout $x \in rR - \{0\}$ on ait:

$$\|x\| \geq N,$$

$$s(x) \in \mathbf{Z}.$$

D'après la Proposition 1-2, s est une fonction convexe qui vérifie les

hypothèses de la proposition 1-1. Il existe donc un ouvert non vide $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ $h \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(rR, \mathbf{Z})$ et un entier b tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$ on ait:

$$s(x) = h(x) + b.$$

D'après l'assertion (ii) de la Proposition 1-2, on voit que $b = 0$. Posons $E = \overline{\mathcal{V}} \cap \mathbb{R}_+$ et $k = -rh$. On a: $k \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Z})$. D'après l'assertion (i) de la Proposition 1-2 on a:

$$E \cap C = E \cap \{x; k(x) + r \geq 0\}. \quad (8)$$

Posons $H = E \cap C$. Il est clair qu'il existe $g \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Z})$ et un entier a tels que a et $g(R)$ engendrent \mathbf{Z} et que l'on ait:

$$H = E \cap \{x; g(x) + a \geq 0\}.$$

Pour $m = 1$, d'après (5), il est clair que les conditions (a), ..., (d) de la Proposition 1-3 sont vérifiées. En utilisant celle-ci on obtient:

$$\|g\| \leq M \quad \text{et} \quad |a| \leq M.$$

Puisque $\mathcal{V} \subset C'$, on a $\mathcal{V} \subset H$; en utilisant (8) on obtient:

$$\mathcal{V} \subset C,$$

ce qui contredit (7).

Cela achève la démonstration du théorème.

Références

- [B] X. BENVENISTE: Sur l'anneau canonique de certaines variétés de dimension 3. *Inv. Math.* 73 (1983) 153-164.
- [B-1] X. BENVENISTE: Sur le cône des 1-cycles effectifs en dimension 3. *Math. Ann.* 272 (1985) 257-265.
- [B-2] X. BENVENISTE: Sur la décomposition de Zariski en dimension 3. Note aux C.R.A.S. t 295 (20 Sept 1982), Série I 107-110.
- [Ha] R. HARTSHORNE: *Algebraic Geometry*. G.T.M. 52. Springer Verlag (1977).
- [Hi] H. HIRONAKA: Resolution of an algebraic variety over a field of characteristic zero (I, II). *Ann. of Math.* 79 (1964) 109-326.
- [H-W] G.H. HARDY and E.M. WRIGHT: *An introduction to the theory of numbers* 5th edition, Clarendon: Oxford (1979).
- [K] Y. KAWAMATA: A generalisation of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. *Math. Ann.* 261 (1983) 43-46.
- [K-1] Y. KAWAMATA: The cone of curves of algebraic varieties. *Ann. of Math.* 119 (1984) 603-633.
- [K-2] Y. KAWAMATA: Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. *Inv. Math.* 79 (1985) 567-588.
- [Ko] J. KOLLAR: The cone theorem. *Ann. of Math.* 120 (1984) 1-5.

- [R] M. REID: Canonical 3-folds. In: *Géométrie Algébrique, Angers 1979*, pp. 273–310, A. Beauville (éditeur) Sijthoff Noordhoff (1980).
- [R-1] M. REID: Minimal models of canonical 3-folds. In: *Symposia in Math.* Vol. 1, S. Iitaka et H. Morikawa (éditeurs). Kinokuniya-North Holland (1981).
- [Ro] R.T. ROCKAFELLAR: *Convex Analysis*: Princeton University Press no. 28 (1970).
- [S] V.V. SHOKUROV: Non vanishing theorem. *Izv. An. SSSR.* (à paraître).
- [V] E. VIEHWEG: Vanishing theorems. *J. reine angew. Math.* 335 (1982) 1–8.

(Oblatum 25-VI-1985 & 22-X-1985)

X. Benveniste
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau
France