COMPOSITIO MATHEMATICA

FRANÇOIS RODIER

Sur le caractère de Steinberg

Compositio Mathematica, tome 59, nº 2 (1986), p. 147-149
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__59_2_147_0>

Compositio Mathematica 59 (1986) 147–149

SUR LE CARACTÈRE DE STEINBERG

François Rodier

On montre que le caractère de Steinberg d'un groupe réductif p-adique n'est jamais nul sur les éléments réguliers semi-simples.

Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps p-adique k. La représentation de Steinberg de G est la représentation virtuelle définie par

$$\mathrm{St}(G)=\sum(-1)^{\dim A_0/A}\ \mathrm{Ind}_P^G\delta_P^{\frac{1}{2}}$$

où la somme est étendue aux sous-groupes paraboliques P de G contenant un sous-groupe parabolique minimal P_0 fixé de G, A (resp. A_0) est une composante déployée (c'est à dire un tore déployé maximal dans le centre d'un sous-groupe de Lévi) de P (resp. P_0), Ind_P^G est l'induction normalisée (transformant les représentations préunitaires en préunitaires) dans la catégorie des représentations lisses, δ_P est la fonction module de P: $\delta_P(g)=|\det(\mathrm{Ad}\ g)_{\mathrm{Lie}\,P}|$ si $g\in P$. Borel et Serre ([1]), puis par d'autres méthodes Casselman ([2]), ont montré que St est en fait une représentation irréductible de carré intégrable de G.

Le caractère de St est représenté par une fonction localement intégrable sur G, notée car(St); sa valeur sur les éléments réguliers semi-simples de G est donnée par la formule suivante (cf. [6], [7])

$$(*)\quad \mathrm{car(St)}(\gamma)=(-1)^{\dim A_0}\sum(-1)^{\dim A}\delta_P(\gamma)^{-\frac{1}{2}}|D_{G/M}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}}$$

où γ est un élément régulier semi-simple contenu dans un sous-groupe de Cartan Γ, la somme est étendue aux paires paraboliques (P, A) telles que A soit un sous-tore de la composante déployée A_Γ de Γ, M est le centralisateur de A et $D_{G/M}(\gamma)=\det(1-\mathrm{Ad}\ \gamma)_{\mathrm{Lie}\,G/\mathrm{Lie}\,M}$. On va montrer que si γ est un élément régulier semi-simple de G, alors car(St)(γ) n'est jamais nul. Rappelons qu'on a un résultat analogue dans le cas des groupes réductifs sur un corps fini (cf. [5]).

On se ramène d'abord au cas où γ est contenu dans un sous-groupe compact de G, grâce au résultat suivant de Casselman. Soit P le sous-groupe parabolique contracté par γ: son radical unipotent N est l'ensemble des éléments g de G tels que la limite quand n tend vers l'infini de $\gamma^n g \gamma^{-n}$ soit égale à e. Soit St_N la représentation de M dans l'espace des coïnvariants de N dans St (c'est le module de Jacquet associé à St et N, cf. [3]).

PROPOSITION 1: $\mathrm{car}(\mathrm{St})(\gamma) = \mathrm{car}(\mathrm{St}_N)(\gamma)$.

DÉMONSTRATION: Cf. [4].
La proposition suivante donne le calcul de St_N.

PROPOSITION 2: *Soit $P = MN$ un sous groupe parabolique de G. On a $\mathrm{St}_N = \delta_P\, \mathrm{St}(M)$ où $\mathrm{St}(M)$ est la représentation de Steinberg de M.*

DÉMONSTRATION: Comme St est irréductible, St_N est de type fini. Soit π un quotient irréductible de St_N. Il existe un sous-groupe parabolique Q de M, contenant $M \cap P_0$, et de radical unipotent V, tel que la représentation π_V soit cuspidale (cf. [3]). D'après les propriétés des modules de Jacquet (cf. loc. cit.) on a $(\mathrm{St}_N)_V = \mathrm{St}_{N.V}$ et $N.V$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique $Q.N$ de G. Soit N_0 le radical unipotent de P_0; St est l'unique sous-quotient de $\mathrm{Ind}_{P_0}^G \delta^{\frac{1}{2}}{}_{P_0}$ tel que $(\mathrm{St})_{N_0} = \delta_{P_0}$ (cf. [3] §9 ou [2]). Donc $\mathrm{St}_{N.V} = \delta_{P_0}$ si Q est un sous-groupe parabolique minimal de M et $\mathrm{St}_{N.V}$ n'a pas de composant cuspidal sinon. Si $\mathrm{St}_{N.V}$ est cuspidal, on a donc $Q = M \cap P_0$, $V = M \cap N_0$ et $\pi_{N_0 \cap M} = \delta_{P_0} = \delta_P . \delta_{P_0 \cap M}$. Cela implique que π est une sous-représentation de $\delta_P\, \mathrm{Ind}_{P_0 \cap M}^M \delta^{\frac{1}{2}}{}_{P_0 \cap M}$. Appliquant cette fois-ci à M la caractérisation rappelée ci-dessus de le représentation de Steinberg, on en déduit que $\pi = \delta_P\, \mathrm{St}(M)$. Soit maintenant π_0 le noyau de la projection de St_N sur π. Comme le foncteur de Jacquet est exact, $(\pi_0)_V \subset (\mathrm{St}_N)_V$ et $(\pi_0)_V$ n'a pas de composante cuspidale si $Q \neq M \cap P_0$, $(\pi_0)_{N_0 \cap M} = 0$. D'où $\pi_0 = 0$. Donc $\mathrm{St}_N = \pi = \delta_P . \mathrm{St}(M)$.

Soit q le nombre d'éléments du corps résiduel de k. Les valeurs absolues des éléments de $k^\times$ sont des puissances de q.

PROPOSITION 3: *Si γ est dans un sous-groupe compact de G, alors $\mathrm{car}(\mathrm{St})(\gamma)$ est un entier impair.*

DÉMONSTRATION: Reprenons les notations de la formule $(*)$. Si γ est dans un sous-groupe compact de G, on a

$$\delta_P(\gamma) = |\det{}_{\mathrm{Lie}\,P} \mathrm{Ad}\ \gamma| = 1.$$

Si $\overline{N}$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à P contenant M, on a

$$\begin{aligned} |D_{G/M}(\gamma)| &= |\det{}_{\mathrm{Lie}\,N}(1 - \mathrm{Ad}\ \gamma)| \cdot |\det{}_{\mathrm{Lie}\,\overline{N}}(1 - \mathrm{Ad}\ \gamma)| \\ &= |\det{}_{\mathrm{Lie}\,N}(1 - \mathrm{Ad}\ \gamma)| \cdot |\det{}_{\mathrm{Lie}\,N}(1 - \mathrm{Ad}\ \gamma^{-1})| \\ &= |\det{}_{\mathrm{Lie}\,N} \mathrm{Ad}\ \gamma^{-1}| \cdot |\det{}_{\mathrm{Lie}\,N}(1 - \mathrm{Ad}\ \gamma)|^2 \\ &= |\det{}_{\mathrm{Lie}\,N}(1 - \mathrm{Ad}\ \gamma)|^2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de Ad γ (dans une extension de k) sont de valeur absolue égale à 1. On a donc

$$|\det_{\mathrm{Lie}\,N}(1 - \mathrm{Ad}\ \gamma)| \leqslant 1.$$

On en déduit que $|D_{G/M}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}}$ est une puissance positive de q, donc un entier. La formule $(*)$ devient

$$\mathrm{car(St)}(\gamma) = (-1)^{\dim A_0} \sum (-1)^{\dim A} |D_{G/M}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}}.$$

A chaque paire parabolique (P, A) intervenant dans la somme, il lui correspond une paire opposée $(\bar{P}, A)$ unique, et cette paire opposée donne lieu dans la somme ci-dessus à un terme de même valeur (car $\bar{M} = M$). On a $(P, A) \neq (\bar{P}, A)$ sauf si $P = G$. Enfin le terme correspondant à $P = G$ est égal à ± 1, d'où la proposition.

COROLLAIRE: *Si γ est un élément régulier semi-simple de G, on a* car (St)(γ) $\neq 0$.

References

[1] A. Borel et J.P. Serre: Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques. *Topology* 15 (1976) 211–232.

[2] W. Casselman: The Steinberg character as a true character, in Harmonic analysis on homogeneous spaces. *Proc. Symp. pure Math., Vol. 26, Amer. Math. Soc.*, Providence (1973) 413–417.

[3] W. Casselman: Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups: notes polycopiées (1978).

[4] W. Casselman: Characters and Jacquet modules. *Math. Ann.* 230 (1977) 101–105.

[5] C.W. Curtis, G.I. Lehrer et J. Tits: Spherical buildings and the character of the Steinberg representation. Inventiones Math. 58 (1980) 201–210.

[6] Harish-Chandra: Harmonic analysis on reductive p-adic groups, in Harmonic analysis on homogeneous spaces. *Proc. Symp. pure Math., Vol. 26, Amer. Math. Soc.*, Providence (1973) 167–192.

[7] A.J. Silberger: *Introduction to harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups.* Princeton University Press, Princeton (1979).

(Oblatum 20-III-1984)

U.E.R. de mathématiques
Université Paris 7
2, Place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
France