

COMPOSITIO MATHEMATICA

WOJCIECH CHOJNACKI

Fonctions cosinus hilbertiennes bornées dans les groupes commutatifs localement compacts

Compositio Mathematica, tome 57, n° 1 (1986), p. 15-60

http://www.numdam.org/item?id=CM_1986__57_1_15_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS COSINUS HILBERTIENNES BORNÉES DANS LES GROUPES COMMUTATIFS LOCALEMENT COMPACTS

Wojciech Chojnacki

Dédié à mes Parents

Résumé

Etant donné un groupe commutatif localement compact G et un espace de Hilbert \mathfrak{H} , on étudie les solutions faiblement continues, bornées en norme $\mathcal{C}: G \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ de l'équation fonctionnelle de d'Alembert

$$\mathcal{C}(a+b) + \mathcal{C}(a-b) = 2\mathcal{C}(a)\mathcal{C}(b) \quad (a, b \in G).$$

Comme un des résultats de la théorie développée, on obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour que chaque élément d'une famille d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ deux à deux permutables soit semblable, par une même similitude, à un opérateur hermitien.

Abstract

Given a commutative locally compact group G and a Hilbert space \mathfrak{H} , the weakly continuous norm bounded solutions $\mathcal{C}: G \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ of d'Alembert's functional equation

$$\mathcal{C}(a+b) + \mathcal{C}(a-b) = 2\mathcal{C}(a)\mathcal{C}(b) \quad (a, b \in G)$$

are studied. As one of the results of the theory developed, one obtains necessary and sufficient conditions for each element of a family of commuting operators in $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ to be similar, by one and the same similarity, to a hermitian operator.

0. Introduction

Soit G un groupe commutatif (noté additivement), E un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de E dans lui-même.

On appelle fonction cosinus définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ toute solution \mathcal{C} dans $\mathcal{L}(E)$ de l'équation fonctionnelle de d'Alembert

$$\mathcal{C}(a+b) + \mathcal{C}(a-b) = 2\mathcal{C}(a)\mathcal{C}(b) \quad (a, b \in G) \quad (0.1)$$

vérifiant en outre

$$\mathcal{C}(e) = \text{id}_E, \quad (0.2)$$

où e est l'élément neutre de G et id_E est l'application identique de E sur lui-même.

Récemment les fonctions cosinus définies dans \mathbf{R} ont suscité beaucoup d'intérêt, l'impulsion étant venue de l'étude du problème de Cauchy abstrait pour les équations différentielles du second ordre (cf. [1],[2],[6]–[8],[14]–[18],[20]–[24],[30]–[52],[54]–[58],[60],[62]–[70]). La majorité des résultats portant sur de telles fonctions cosinus s'établit par des méthodes empruntées à la théorie des semi-groupes d'opérateurs et fait intervenir de façon essentielle la structure particulièrement simple du groupe des réels (il s'agit avant tout de pouvoir introduire et d'utiliser la notion du générateur d'une fonction cosinus).

Par contraste, les résultats du présent article vont diminuer le rôle prépondérant de \mathbf{R} dans l'étude de certaines fonctions cosinus (hilbertiennes bornées). Grâce à des méthodes d'analyse harmonique le développement ci-dessous va, entre autres, étendre quelques résultats bien connus sur les fonctions cosinus définies dans \mathbf{R} à celles définies dans les groupes commutatifs localement compacts.

Le travail se divise en cinq parties. La partie 1 fournit un théorème de décomposition spectrale pour les fonctions cosinus normales bornées. La partie 2 établit que toute fonction cosinus hilbertienne bornée est semblable à une fonction cosinus hermitienne. La partie 3 traite le problème de l'existence de représentations exponentielles bornées pour les fonctions cosinus bornées; exceptionnellement, on se place ici hors du cadre des fonctions cosinus hilbertiennes en incluant quelques résultats relatifs au cas non hilbertien. La partie 4 concerne diverses relations entre la mesurabilité et la continuité des fonctions cosinus hilbertiennes bornées. Dans la partie 5, à titre d'application de la théorie développée, on caractérise d'une manière intrinsèque les familles composées d'endomorphismes hilbertiens bornés qui commutent et qui sont semblables, par une même similitude, à des opérateurs hermitiens.

En terminant cette introduction, l'auteur a plaisir à adresser ses vifs remerciements au Professeur J. Kisiński pour l'avoir initié à l'étude des fonctions cosinus, et au Professeur Cz. Ryll-Nardzewski pour avoir suscité son intérêt pour les fonctions cosinus autres que celles définies dans \mathbf{R} , notamment pour celles définies dans \mathbf{Z} . L'auteur tient également à exprimer sa gratitude au Professeur E. Albrecht pour les fructueuses

remarques sur ce travail faites lors de la Huitième Conférence sur la théorie des Opérateurs à Timișoara et Herculane (Roumanie) en juin 1983, remarques par lesquelles la forme finale de la partie 5 a été fortement influencée.

1. Décomposition spectrale des fonctions cosinus normales bornées

1.1. Généralités et énoncé du résultat

Soit G un groupe commutatif localement compact. On notera \hat{G} le dual de G et λ la mesure de Haar sur G . La dualité entre G et \hat{G} s'écrira (a, χ) pour $a \in G$ et $\chi \in \hat{G}$.

Soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert, f une fonction définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Dire que la fonction f est bornée signifie que

$$\sup\{\|f(a)\| : a \in G\} < +\infty;$$

dans la suite, la borne supérieure ci-dessus, norme de f , sera notée $\|f\|$.

Dire que la fonction f est normale (hermitienne) veut dire que chacun des opérateurs $f(a)$ ($a \in G$) est normal (hermitien).

La fonction f est dite fortement (faiblement) continue lorsqu'elle est continue pour la topologie forte (faible) des opérateurs sur $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Le théorème suivant est analogue à celui de Stone-Neumark-Ambrose-Godement, donnant une forme canonique des représentations unitaires des groupes commutatifs localement compact (cf. [3], Th. 6.2.1).

THÉORÈME 1.1: *Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathfrak{H} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, normale, bornée et faiblement continue. Alors il existe une mesure spectrale borélienne E sur \hat{G} à valeurs dans une algèbre booléenne de projecteurs orthogonaux dans \mathfrak{H} , telle que, pour tout $a \in G$, on ait*

$$\mathcal{C}(a) = \frac{1}{2} \int_{\hat{G}} [(a, \chi) + (a, -\chi)] dE(\chi). \quad (1.1)$$

1.2. Démonstration du Théorème 1.1

Supposons les hypothèses du Théorème 1.1 vérifiées.

En premier lieu, de (0.1) et (0.2), on déduit que la fonction cosinus \mathcal{C} est paire. Ensuite on s'assure que les opérateurs $\mathcal{C}(a)$ ($a \in G$) commutent. Chacun des $\mathcal{C}(a)$ étant normal, le théorème de Fuglede-Putnam-Rosenblum (cf. [19],[59],[61]) implique que l'algèbre stellaire engendrée dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ par les $\mathcal{C}(a)$ est commutative. Par suite, il en est

de même de l'algèbre de von Neumann \mathcal{A} engendrée dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ par les $\mathcal{C}(a)$. En particulier, chaque élément de \mathcal{A} est normal.

Soit $\mathcal{F}\mathcal{C}$ la transformée de Fourier de \mathcal{C} , considérée comme pseudomesure sur \hat{G} à valeurs dans \mathcal{A} ; ceci veut dire qu'à tout $f \in A(\hat{G})$, $A(\hat{G})$ étant l'espace transformé de Fourier de $L^1(G)$, muni de la norme $\|f\|_{A(\hat{G})} = \|\mathcal{F}f\|_1$ (f s'écrivant $f(\chi) = \mathcal{F}\varphi(\chi) = \int_G \varphi(a)(a, -\chi)d\lambda(a)$ ($\chi \in \hat{G}$) pour un seul $\varphi \in L^1(G)$), on prend pour $\mathcal{F}f$ la (classe de la) fonction $a \rightarrow \varphi(-a)$ dans $L^1(G)$), on fait correspondre

$$\mathcal{F}\mathcal{C}(f) = \int_G \mathcal{C}(a) \mathcal{F}f(a) d\lambda(a),$$

élément de \mathcal{A} , l'intégrale étant prise au sens faible; or, comme l'application $A(\hat{G}) \ni f \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{C}(f) \in \mathcal{A}$ est un opérateur linéaire borné, par analogie aux pseudomesures usuelles sur \hat{G} (qui constituent l'espace dual de $A(\hat{G})$), $\mathcal{F}\mathcal{C}$ peut s'interpréter comme une pseudomesure sur \hat{G} à valeurs dans \mathcal{A} .

La fonction cosinus \mathcal{C} étant paire, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\mathcal{C}$ s'annule sur les fonctions impaires de $A(\hat{G})$.

Notons F_p l'espace des éléments pairs d'un espace fonctionnel F défini sur un groupe.

Pour tout couple $f, g \in A(\hat{G})_p$, on a

$$\mathcal{F}\mathcal{C}(f)\mathcal{F}\mathcal{C}(g) = \mathcal{F}\mathcal{C}(fg). \quad (1.2)$$

En effet, si $x, y \in \mathfrak{H}$, alors, compte tenu de (0.1), on a

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\mathcal{C}(f)\mathcal{F}\mathcal{C}(g)x, y) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{C}(g)x, \mathcal{F}\mathcal{C}(f)^*y) \\ &= \int_G (\mathcal{C}(b)x, \mathcal{F}\mathcal{C}(f)^*y) \mathcal{F}g(b) d\lambda(b) \\ &= \int_G (\mathcal{F}\mathcal{C}(f)\mathcal{C}(b)x, y) \mathcal{F}g(b) d\lambda(b) \\ &= \int_G \left[\int_G (\mathcal{C}(a)\mathcal{C}(b)x, y) \mathcal{F}f(a) d\lambda(a) \right] \mathcal{F}g(b) d\lambda(b) \\ &= \frac{1}{2} \int_{G \times G} [(\mathcal{C}(a+b)x, y) + (\mathcal{C}(a-b)x, y)] \\ & \quad \times \mathcal{F}f(a)\mathcal{F}g(b) d\lambda \otimes \lambda(a, b) \\ &= \int_G (\mathcal{C}(a)x, y) (\mathcal{F}(fg))(a) d\lambda(a). \end{aligned}$$

On notera f_p la partie paire d'une fonction f définie dans un groupe. Par $r(T)$ on désignera le rayon spectral d'un opérateur linéaire T . Quels que soient $f \in A(\hat{G})$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|(\mathcal{F}\mathcal{C}(f_p))^n\|^{1/n} = \|\mathcal{F}\mathcal{C}((f_p)^n)\|^{1/n} \leq \|\mathcal{C}\|^{1/n} \|(f_p)^n\|_{A(\hat{G})}^{1/n}.$$

Compte tenu du fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^n\|_{A(\hat{G})}^{1/n} = \|g\|_{\infty} \quad (g \in A(\hat{G})),$$

il vient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\mathcal{C}(f)\| &= \|\mathcal{F}\mathcal{C}(f_p)\| = r(\mathcal{F}\mathcal{C}(f_p)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{C}\|^{1/n} \|(f_p)^n\|_{A(\hat{G})}^{1/n} = \|f_p\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Soit $C_0(\hat{G})$ l'espace des fonctions complexes continues dans \hat{G} nulles à l'infini.

Puisque $A(\hat{G})$ est dense dans $C_0(\hat{G})$ pour la norme uniforme, la dernière majoration montre que $\mathcal{F}\mathcal{C}$ peut se prolonger par continuité en un opérateur linéaire continu de $C_0(\hat{G})$ dans \mathcal{A} , de norme ≤ 1 . En raison de (1.2) et comme les fonctions de $C_0(\hat{G})_p$ peuvent s'approcher uniformément par des fonctions de $A(\hat{G})_p$, la restriction de $\mathcal{F}\mathcal{C}$ à l'algèbre $C_0(\hat{G})_p$ est un homomorphisme d'algèbres. Il est clair que $\mathcal{F}\mathcal{C}$ s'annule sur les fonctions impaires de $C_0(\hat{G})$.

Soient $\mathcal{B}(\hat{G})$ l'espace des fonctions boréliennes complexes bornées dans \hat{G} , $M(\hat{G})$ l'espace des mesures boréliennes régulières complexes bornées sur \hat{G} .

Si l'on introduit dans $\mathcal{B}(\hat{G})$ la topologie $\sigma(\mathcal{B}(\hat{G}), M(\hat{G}))$ et dans \mathcal{A} la topologie faible des opérateurs, $\mathcal{F}\mathcal{C}$ se prolonge par continuité en un opérateur linéaire continu de $\mathcal{B}(\hat{G})$ dans \mathcal{A} . En effet, quels que soient $x, y \in \mathfrak{H}$, il existe une et une seule mesure $\nu_{x,y}$ dans $M(\hat{G})$, de norme $\leq \|x\| \|y\|$, telle que, pour tout $f \in C_0(\hat{G})$, on ait

$$(\mathcal{F}\mathcal{C}(f)x, y) = \int_{\hat{G}} f d\nu_{x,y}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{B}(\hat{G})$, la forme sesquilinéaire

$$(x, y) \rightarrow \int_{\hat{G}} \varphi d\nu_{x,y}$$

s'écrit

$$(x, y) \rightarrow (\mathcal{F}\mathcal{C}(\varphi)x, y)$$

pour un opérateur linéaire borné $\mathcal{F}\mathcal{C}(\varphi) \in \mathcal{A}$ déterminé de façon unique. On voit aisément que l'application $\mathcal{B}(\hat{G}) \ni \varphi \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{C}(\varphi) \in \mathcal{A}$ est le prolongement cherché.

La restriction de $\mathcal{F}\mathcal{C}$ à l'algèbre $\mathcal{B}(\hat{G})_p$ est encore un homomorphisme d'algèbres. En effet, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{B}(\hat{G})_p$, on peut choisir deux familles filtrantes $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(g_\beta)_{\beta \in B}$ dans $C_0(\hat{G})_p$ convergeant, pour la topologie induite de $\mathcal{B}(\hat{G})$, suivant les filtres des sections de A et B respectivement vers φ et ψ , de sorte que, pour tout couple $x, y \in \mathfrak{S}$ et tout $\alpha \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha \psi)x, y) &= \lim_{\beta \in B} (\mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha g_\beta)x, y) \\ &= \lim_{\beta \in B} (\mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha) \mathcal{F}\mathcal{C}(g_\beta)x, y) \\ &= \lim_{\beta \in B} (\mathcal{F}\mathcal{C}(g_\beta)x, \mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha)^*y) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{C}(\psi)x, \mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha)^*y) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha) \mathcal{F}\mathcal{C}(\psi)x, y) \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\mathcal{C}(\varphi \psi)x, y) &= \lim_{\alpha \in A} (\mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha \psi)x, y) \\ &= \lim_{\alpha \in A} (\mathcal{F}\mathcal{C}(f_\alpha) \mathcal{F}\mathcal{C}(\psi)x, y) \\ &= (\mathcal{F}\mathcal{C}(\varphi) \mathcal{F}\mathcal{C}(\psi)x, y). \end{aligned}$$

On voit aussitôt que $\mathcal{F}\mathcal{C}$ s'annule sur les fonctions impaires de $\mathcal{B}(\hat{G})$, ce qui équivaut à ce que chacune des mesures $\nu_{x,y}$ ($x, y \in \mathfrak{S}$) soit symétrique.

Soit $\mathbf{B}(\hat{G})$ la tribu des parties boréliennes de \hat{G} .

On note 1_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble.

On pose pour tout $\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})$

$$N(\omega) = \mathcal{F}\mathcal{C}(1_\omega).$$

Il est clair que pour $x, y \in \mathfrak{S}$ et $\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})$, on a

$$\nu_{x,y}(\omega) = (N(\omega)x, y). \quad (1.3)$$

La symétrie des mesures $\nu_{x,y}$ ($x, y \in \mathfrak{S}$) entraîne qu'on a pour tout $\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})$

$$N(\omega) = N(-\omega), \quad (1.4)$$

— ω désignant l'ensemble des $-x$ pour $x \in \omega$. Le fait que $\mathcal{F}\mathcal{C}$ soit un

homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{B}(\hat{G})_p$ dans \mathcal{A} combiné avec (1.4) se reflète dans la propriété

$$N(\omega)N(\omega') = \frac{1}{2} [N(\omega \cap \omega') + N(\omega \cap (-\omega'))] \quad (1.5)$$

pour $\omega, \omega' \in \mathbf{B}(\hat{G})$.

Soit \mathcal{U} un système fondamental de voisinages ouverts symétriques de l'élément neutre e de G . Pour tout $U \in \mathcal{U}$, soit φ_U une fonction paire positive λ -intégrable dans G , à support dans U , telle que

$$\int_G \varphi_U d\lambda = 1.$$

On voit que pour toute mesure ν dans $M(\hat{G})$, on a

$$\lim_{U \in \mathcal{U}} \int_{\hat{G}} \mathcal{F} \varphi_U d\nu = \lim_{U \in \mathcal{U}} \int_G \varphi_U \mathcal{F} \nu d\lambda = \mathcal{F} \nu(e) = \nu(\hat{G}).$$

Cela montre que $(\mathcal{F} \varphi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ est une famille filtrante dans $A(\hat{G})$, convergeant suivant le filtre des sections de \mathcal{U} vers la fonction identiquement égale à 1 dans \hat{G} , pour la topologie $\sigma(\mathcal{B}(\hat{G}), M(\hat{G}))$.

D'autre part, en raison de (0.2) et de la continuité faible de \mathcal{C} , quels que soient $x, y \in \mathfrak{S}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{U \in \mathcal{U}} (\mathcal{F} \mathcal{C}(\mathcal{F} \varphi_U)x, y) &= \lim_{U \in \mathcal{U}} \int_G (\mathcal{C}(a)x, y) \varphi_U(a) d\lambda(a) \\ &= (\mathcal{C}(e)x, y) = (x, y). \end{aligned}$$

Autrement dit, la famille filtrante $(\mathcal{F} \mathcal{C}(\mathcal{F} \varphi_U))_{U \in \mathcal{U}}$ dans \mathcal{A} converge suivant le filtre des sections de \mathcal{U} vers l'automorphisme identique de \mathfrak{S} , pour la topologie faible des opérateurs.

Tenant compte de ce qui précède et du fait que $\mathcal{F} \mathcal{C}$ est continue comme application de $\mathcal{B}(\hat{G})$ dans \mathcal{A} , il vient

$$N(\hat{G}) = \text{id}_{\mathfrak{S}}.$$

Notons $\mathbf{B}_s(\hat{G})$ la sous-tribu des parties symétriques de $\mathbf{B}(\hat{G})$.

Il résulte de (1.5) que pour tout $\omega \in \mathbf{B}_s(\hat{G})$, l'opérateur $N(\omega)$ est idempotent. Or, puisque un tel $N(\omega)$ est également normal, c'est en fait un projecteur hermitien, donc orthogonal. De plus, d'après (1.5), pour $\omega, \omega' \in \mathbf{B}_s(\hat{G})$, on a

$$N(\omega)N(\omega') = N(\omega \cap \omega'). \quad (1.6)$$

Cela posé, \mathfrak{S} peut s'écrire comme somme hilbertienne de sous-espaces fermés \mathfrak{S}_α dont chacun est stable par les opérateurs $N(\omega)$ lorsque ω parcourt $\mathbf{B}_s(\hat{G})$, chaque \mathfrak{S}_α contenant en outre un vecteur (totalisateur) z_α tel que les éléments $N(\omega)z_\alpha$ ($\omega \in \mathbf{B}_s(\hat{G})$) engendrent un sous-espace

vectoriel partout dense dans \mathfrak{S}_α ; la décomposition ci-dessus s'établit en employant un argument d'épuisement, analogue - par exemple - à celui utilisé dans la preuve du Théorème 21.13 de [28].

Il s'avère que pour tout α , ν_{z_α, z_α} est une mesure positive et basique pour les mesures $\nu_{x, y}$ avec $x, y \in H_\alpha$. En effet, considérons une partie borélienne quelconque ω de \hat{G} . Par la symétrie de ν_{z_α, z_α} , on a

$$\nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega) = \frac{1}{2} \left[\nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega \cup (-\omega)) + \nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega \cap (-\omega)) \right]. \quad (1.7)$$

En raison de (1.3) et comme $N(\omega \cup (-\omega))$ et $N(\omega \cap (-\omega))$ sont des projecteurs orthogonaux, on a

$$\nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega \cup (-\omega)) = \|N(\omega \cup (-\omega))z_\alpha\|^2$$

et

$$\nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega \cap (-\omega)) = \|N(\omega \cap (-\omega))z_\alpha\|^2.$$

Il s'ensuit que la mesure ν_{z_α, z_α} est positive.

Pour prouver la seconde assertion, supposons que $\nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega) = 0$. Il est clair qu'on a

$$\nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega \cup (-\omega)) = \nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega \cap (-\omega)) = 0.$$

Quels que soient $x, y \in \mathfrak{S}_\alpha$ et $\epsilon > 0$, on peut choisir ξ_i, η_j dans $B_s(\hat{G})$ et des nombres complexes a_i, b_j ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) de telle sorte que l'on ait

$$\|x - \sum_{i=1}^n a_i N(\xi_i)z_\alpha\| \leq \epsilon \|x\|$$

et

$$\|y - \sum_{j=1}^n b_j N(\eta_j)z_\alpha\| \leq \epsilon \|y\|.$$

Or d'après (1.3)

$$\begin{aligned} |\nu_{x, y}(\omega \cup (-\omega))| &\leq \sum_{i, j=1}^n |a_i b_j (N(\omega \cup (-\omega))N(\xi_i)z_\alpha, N(\eta_j)z_\alpha)| \\ &\quad + \left| \left(N(\omega \cup (-\omega)) \left(x - \sum_{i=1}^n a_i N(\xi_i)z_\alpha \right), y \right) \right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |a_i \left(N(\omega \cup (-\omega))N(\xi_i)z_\alpha, y \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^n b_j N(\eta_j)z_\alpha \right)|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Des relations (1.3) et (1.6), compte tenu du fait que chacun des opérateurs $N(\eta_j)$ ($1 \leq j \leq n$) est hermitien et que la mesure ν_{z_α, z_α} est positive, il découle que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^n |a_i b_j (N(\omega \cup (-\omega))N(\xi_i)z_\alpha, N(\eta_j)z_\alpha)| \\
 &= \sum_{i,j=1}^n |a_i b_j (N(\eta_j)N(\omega \cup (-\omega))N(\xi_i)z_\alpha, z_\alpha)| \\
 &= \sum_{i,j=1}^n |a_i b_j (N(\eta_j \cap (\omega \cup (-\omega)) \cap \xi_i)z_\alpha, z_\alpha)| \\
 &= \sum_{i,j=1}^n |a_i b_j | \nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\eta_j \cap (\omega \cap (-\omega)) \cap \xi_i) \\
 &\leq \sum_{i,j=1}^n |a_i b_j | \nu_{z_\alpha, z_\alpha}(\omega \cup (-\omega)) = 0.
 \end{aligned}$$

Les deux autres termes au second membre de (1.8) ne dépassant pas respectivement $\epsilon \|x\| \|y\|$ et $\epsilon(1 + \epsilon) \|x\| \|y\|$, il est clair, vu l'arbitraire de ϵ , qu'on a

$$\nu_{x,y}(\omega \cup (-\omega)) = 0.$$

De même on a

$$\nu_{x,y}(\omega \cap (-\omega)) = 0.$$

Donc, d'après (1.7), on a $\nu_{x,y}(\omega) = 0$, d'où l'assertion.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $\hat{G}^{(n)}$ et $\hat{G}_{(n)}$ l'image et le noyau de l'homomorphisme $a \rightarrow na$ de \hat{G} dans lui-même.

Pour tout α , on va déterminer une partie borélienne A_α de \hat{G} telle que les parties A_α et $-A_\alpha$ soient disjointes et que le complémentaire de $A_\alpha \cup (-A_\alpha)$ dans $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$ soit ν_{z_α, z_α} -négligeable.

Pour toute fonction f définie dans \hat{G} , notons If l'image de f par l'isomorphisme $a \rightarrow -a$ de \hat{G} sur lui-même.

Remarquons en premier lieu qu'en raison de la symétrie de ν_{z_α, z_α} , l'application $f \rightarrow If$ induit une application, qu'on va noter de même I , de l'espace $L_R^\infty(\hat{G}, \nu_{z_\alpha, z_\alpha})$ des classes de fonctions réelles ν_{z_α, z_α} -mesurables et bornées en mesure dans \hat{G} , dans lui-même. Soit

$$E = \{f \in L_R^\infty(\hat{G}, \nu_{z_\alpha, z_\alpha}) : If = -f\}.$$

E étant un sous-espace fermé de $L_R^\infty(\hat{G}, \nu_{z_\alpha, z_\alpha})$ pour la topologie $\sigma(L_R^\infty(\hat{G}, \nu_{z_\alpha, z_\alpha}), L_R^1(\hat{G}, \nu_{z_\alpha, z_\alpha}))$, la boule unité B_E dans E est compacte pour cette topologie. En vertu du théorème de Krein-Milman, il existe au moins un élément extrémal dans B_E . Or, on vérifie facilement que quelle que soit la fonction g dont la classe dans $L_R^\infty(\hat{G}, \nu_{z_\alpha, z_\alpha})$ coïncide avec un élément extrémal de B_E , la restriction de g à $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$ ne prend que les valeurs ± 1 , à une fonction ν_{z_α, z_α} -négligeable près; il est clair que parmi les parties boréliennes de \hat{G} qui ne diffèrent de $g^{-1}(\{1\}) \cap (\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)})$ que par un ensemble ν_{z_α, z_α} -négligeable il y en a une qui répond à la question.

On note $f|_A$ la restriction d'une fonction f à une partie A du domaine de f .

Pour tout α et tout $\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})$, on définit un opérateur hermitien $E_\alpha(\omega)$ de $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_\alpha)$ en posant

$$E_\alpha(\omega) = (N(\omega \cap \hat{G}_{(2)}) + 2N(\omega \cap A_\alpha)) |_{\mathfrak{H}_\alpha}.$$

En faisant usage de (1.4) et (1.5), on vérifie aussitôt que pour toutes les deux parties boréliennes ω et ω' de \hat{G} , on a

$$E_\alpha(\omega)E_\alpha(\omega') = E_\alpha(\omega \cap \omega').$$

En outre, quels que soient $x, y \in \mathfrak{H}_\alpha$ et $\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})$, la relation (1.3), compte tenu de la symétrie de $\nu_{x, y}$, entraîne

$$\begin{aligned} & (E_\alpha(\omega)x, y) + (E_\alpha(-\omega)x, y) \\ &= 2[\nu_{x, y}(\omega \cap \hat{G}_{(2)}) + \nu_{x, y}(\omega \cap A_\alpha) + \nu_{x, y}((-\omega) \cap A_\alpha)] \\ &= 2[\nu_{x, y}(\omega \cap \hat{G}_{(2)}) + \nu_{x, y}(\omega \cap A_\alpha) + \nu_{x, y}(\omega \cap (-A_\alpha))] \\ &= 2\nu_{x, y}(\omega \cap (\hat{G}_{(2)} \cup A_\alpha \cup (-A_\alpha))). \end{aligned}$$

Puisque le complémentaire de $\omega \cap (\hat{G}_{(2)} \cup A_\alpha \cup (-A_\alpha))$ dans ω est ν_{z_α, z_α} -négligeable, et par suite $\nu_{x, y}$ -négligeable, on a

$$(E_\alpha(\omega)x, y) + (E_\alpha(-\omega)x, y) = 2\nu_{x, y}(\omega) = 2(N(\omega)x, y).$$

L'opérateur $N(\omega)$ laissant stable \mathfrak{H}_α , on peut finalement écrire

$$E_\alpha(\omega) + E_\alpha(-\omega) = 2N(\omega) |_{\mathfrak{H}_\alpha}. \quad (1.9)$$

Si l'on prend maintenant pour $E(\omega)$, où ω décrit $\mathbf{B}(\hat{G})$, la somme hilbertienne des $E_\alpha(\omega)$, on voit que la fonction d'ensemble E vérifie les conditions suivantes:

(i) pour $x, y \in \mathfrak{H}$,

$$\eta_{x, y}(\omega) = (E(\omega)x, y) \quad (\omega \in \mathbf{B}(\hat{G}))$$

est une mesure dans $M(\hat{G})$, somme des mesures

$$\nu_{x_\alpha, y_\alpha}(\omega \cap \hat{G}_{(2)}) + 2\nu_{x_\alpha, y_\alpha}(\omega \cap A_\alpha) \quad (\omega \in \mathbf{B}(\hat{G}))$$

où $x = \sum_\alpha x_\alpha$ et $y = \sum_\alpha y_\alpha$ avec $x_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{S}_\alpha$;

- (ii) quel que soit $\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})$, l'opérateur $E(\omega)$ est hermitien;
- (iii) $E(\hat{G}) = \text{id}_{\mathfrak{S}}$;
- (iv) quels que soient $\omega, \omega' \in \mathbf{B}(\hat{G})$, on a

$$E(\omega)E(\omega') = E(\omega \cap \omega').$$

E est donc une mesure spectrale borélienne sur \hat{G} à valeurs dans une algèbre booléenne de projecteurs orthogonaux dans \mathfrak{S} .

En outre, en raison de (1.9), pour tout $\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})$, on a

$$E(\omega) + E(-\omega) = 2N(\omega).$$

Il en résulte que quels que soient $x, y \in \mathfrak{S}$ et $a \in G$, on a

$$\int_{\hat{G}} [(a, \chi) + (a, -\chi)] d\eta_{x, y}(\chi) = 2 \int_{\hat{G}} (a, \chi) d\nu_{x, y}(\chi). \quad (1.10)$$

Or comme, pour tout $f \in A(\hat{G})$, on a

$$\begin{aligned} & \int_G \left[\int_{\hat{G}} (a, \chi) d\nu_{x, y}(\chi) \right] \mathcal{F}f(a) d\lambda(a) \\ &= \int_{\hat{G}} \left[\int_G (a, \chi) \mathcal{F}f(a) d\lambda(a) \right] d\nu_{x, y}(\chi) \\ &= \int_{\hat{G}} f d\nu_{x, y} = \int_G (\mathcal{C}(a)x, y) \mathcal{F}f(a) d\lambda(a), \end{aligned}$$

alors on a

$$\int_{\hat{G}} (a, \chi) d\nu_{x, y}(\chi) = (\mathcal{C}(a)x, y).$$

Cela, compte tenu de (1.10), montre que

$$\int_{\hat{G}} [(a, \chi) + (a, -\chi)] d\eta_{x, y}(\chi) = 2(\mathcal{C}(a)x, y)$$

d'où (1.1).

La démonstration est achevée.

1.3. Corollaires et commentaire

D'après (1.1), quels que soient $a, b \in G$ et $x \in \mathfrak{S}$, on a

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{C}(a)x - \mathcal{C}(b)x \|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int_{\hat{G}} |(a, \chi) - (b, \chi) + (a, -\chi) - (b, -\chi)|^2 d\eta_{x, \nu}(\chi). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité conduit immédiatement au corollaire suivant:

COROLLAIRE 1.1: *Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathfrak{S} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$, normale, bornée et faiblement continue. Alors la fonction cosinus \mathcal{C} est fortement continue.*

Un autre corollaire simple est le suivant:

COROLLAIRE 1.2: *Soient G un groupe commutatif discret, \mathfrak{S} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus normale bornée définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$. Alors la fonction cosinus \mathcal{C} est hermitienne et sa norme est égale à 1.*

En se restreignant au cas du groupe des réels, le Théorème 1.1 peut être considéré comme un cas particulier d'un théorème de Kurepa [37] donnant la forme générale des fonctions cosinus normales faiblement continues, non nécessairement bornées, définies dans \mathbf{R} .

Dans le cadre des groupes commutatifs localement compacts le Théorème 1.1 apparaît comme une généralisation d'un résultat de Maltese [51] selon lequel une fonction cosinus normale bornée faiblement continue définie dans un groupe commutatif localement compact G s'écrit, en un point quelconque de G , comme l'intégrale de la fonction d'évaluation associée à ce point, définie dans l'ensemble Ξ des fonctions cosinus complexes bornées continues dans G - ensemble qui, muni de la topologie de la convergence localement uniforme, constitue un espace localement compact - par rapport à une mesure spectrale borélienne portée par Ξ . La décomposition spectrale obtenue dans le théorème de Maltese se subordonne à celle donnée par le Théorème 1.1 sous la forme suivante: la mesure spectrale figurant dans la première de ces décompositions s'écrit comme l'image de la mesure spectrale correspondante figurant dans la seconde par l'application faisant correspondre à tout caractère χ du groupe sous-jacent la fonction cosinus $a \rightarrow \frac{1}{2}[(a, \chi) + (a, -\chi)]$.

Le Théorème 1.1, en dehors de l'intérêt qu'il présente pour lui-même - il aboutit à une caractérisation satisfaisante des objets considérés - occupe la position centrale dans la théorie des fonctions cosinus

hilbertiennes bornées. Ceci est d'autant plus remarquable que, par contraste avec la décomposition provenant du théorème de Maltese, la décomposition spectrale donnée par la formule (1.1) n'est pas canonique: lorsque $\hat{G} \neq \hat{G}_{(2)}$ ou, ce qui revient au même, lorsque $G \neq G_{(2)}$, on peut associer plusieurs mesures spectrales à la fonction cosinus donnée.

2. Similitude des fonctions cosinus hilbertiennes bornées à des fonctions cosinus hermitiennes

2.1. Généralisation d'un théorème de Fattorini-Kurepa

Fattorini [16] avait prouvé que toute fonction cosinus hilbertienne bornée définie dans \mathbf{R} est semblable à une fonction cosinus hermitienne. Kurepa [40] a observé que le résultat de Fattorini s'étendait au cas d'une fonction cosinus définie dans un groupe G vérifiant $G = G^{(2)}$ ou, plus généralement, admettant ce qu'on appelait une moyenne invariante d'ordre 2. Dans ce paragraphe nous montrons qu'en fait les restrictions sur le groupe G , sauf commutativité, peuvent être toutes abandonnées. Ainsi l'étude des fonctions cosinus hilbertiennes bornées pourra s'inscrire dans celle des fonctions cosinus hermitiennes bornées.

THÉORÈME 2.1: *Soient G un groupe commutatif discret, \mathfrak{H} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus bornées définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Alors on peut munir \mathfrak{H} d'un produit scalaire équivalent au produit scalaire initial tel que la fonction cosinus \mathcal{C} devienne hermitienne.*

DÉMONSTRATION: Pour tout $a \in G$ et tout $x \in \mathfrak{H}$, on a d'après (0.1) et (0.2)

$$\begin{aligned} \|x\| - \|\mathcal{C}(2a)x\| &\leq \|x + \mathcal{C}(2a)x\| = 2\|\mathcal{C}^2(a)x\| \\ &\leq 2\|\mathcal{C}\| \|\mathcal{C}(a)x\| \end{aligned}$$

donc

$$\|x\| \leq \|\mathcal{C}(2a)x\| + 2\|\mathcal{C}\| \|\mathcal{C}(a)x\|$$

et ensuite

$$\|x\|^2 \leq (1 + 2\|\mathcal{C}\|)(\|\mathcal{C}(2a)x\|^2 + 2\|\mathcal{C}\| \|\mathcal{C}(a)x\|^2). \quad (2.1)$$

Soit m une moyenne invariante sur $l^\infty(G)$, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur $l^\infty(G)$, vérifiant

$$\|m\| = 1 = m(1),$$

ainsi que, pour tout $a \in G$ et tout $f \in l^\infty(G)$,

$$m(T_a f) = m(f),$$

$T_a f$ étant la translatée de f par a ($T_a f(b) = f(a + b)$, $a, b \in G$); l'existence d'une telle moyenne invariante est assurée par un théorème de Day ([9]; cf. aussi [27]). Compte tenu de (2.1), il vient

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\leq (1 + 2\|\mathcal{C}\|)(m_a(\|\mathcal{C}(2a)x\|^2) + 2\|\mathcal{C}\| m_a(\|\mathcal{C}(a)x\|^2)) \\ &\leq (1 + 2\|\mathcal{C}\|)^2 \|\mathcal{C}\|^2 \|x\|^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

où a mis en indice indique que l'action de m se rapporte à la variable a .

Pour tout $x \in \mathfrak{S}$ et tout $y \in \mathfrak{S}$, on pose

$$\begin{aligned} (x, y)_1 &= (1 + 2\|\mathcal{C}\|) \\ &\quad \times (m_a((\mathcal{C}(2a)x, \mathcal{C}(2a)y)) \\ &\quad + 2\|\mathcal{C}\| m_a((\mathcal{C}(a)x, \mathcal{C}(a)y))). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Compte tenu de (2.2), il est clair que $(\cdot, \cdot)_1$ introduit dans \mathfrak{S} une structure hilbertienne équivalente à la structure initiale.

Montrons que la fonction cosinus $a \rightarrow \mathcal{C}(2a)$ est hermitienne par rapport à $(\cdot, \cdot)_1$. Pour $a \in G$ et $x, y \in \mathfrak{S}$, on a d'après (0.1)

$$\begin{aligned} &m_b((\mathcal{C}(2b)\mathcal{C}(2a)x, \mathcal{C}(2b)y)) \\ &= \frac{1}{2} [m_b((\mathcal{C}(2(b+a))x, \mathcal{C}(2b)y)) \\ &\quad + m_b((\mathcal{C}(2(b-a))x, \mathcal{C}(2b)y))] . \end{aligned}$$

Comme la fonction $b \rightarrow (\mathcal{C}(2b)x, \mathcal{C}(2(b-a))y)$ est la translatée de $b \rightarrow (\mathcal{C}(2(b+a))x, \mathcal{C}(2b)y)$ par $-a$ et comme la fonction $b \rightarrow (\mathcal{C}(2b)x, \mathcal{C}(2(b+a))y)$ est la translatée de $b \rightarrow (\mathcal{C}(2(b-a))x, \mathcal{C}(2b)y)$ par a , compte tenu de (0.1) et de l'invariance par translation de m , il découle de l'identité précédente que

$$\begin{aligned} &m_b((\mathcal{C}(2b)\mathcal{C}(2a)x, \mathcal{C}(2b)y)) \\ &= \frac{1}{2} [m_b((\mathcal{C}(2b)x, \mathcal{C}(2(b-a))y)) \\ &\quad + m_b((\mathcal{C}(2b)x, \mathcal{C}(2(b+a))y))] \\ &= m_b((\mathcal{C}(2b)x, \mathcal{C}(2b)\mathcal{C}(2a)y)). \end{aligned}$$

De même on a

$$m_b((\mathcal{C}(b)\mathcal{C}(2a)x, \mathcal{C}(b)y)) = m_b((\mathcal{C}(b)x, \mathcal{C}(b)\mathcal{C}(2a)y)),$$

d'où la conclusion.

D'après le Théorème 1.1, il existe une mesure spectrale borélienne E sur \hat{G} à valeurs dans une algèbre booléenne de projecteurs orthogonaux dans $(\mathfrak{H}, (\cdot, \cdot)_1)$, telle que, en désignant par $\eta_{x,y}$ ($x, y \in \mathfrak{H}$) la mesure dans $M(\hat{G})$ donnée par

$$\eta_{x,y}(\omega) = (E(\omega)x, y)_1 \quad (\omega \in \mathbf{B}(\hat{G})),$$

on ait, quels que soient $a \in G$ et $x, y \in \mathfrak{H}$,

$$(\mathcal{C}(2a)x, y)_1 = \frac{1}{2} \int_{\hat{G}} [(a, \chi) + (a, -\chi)] d\eta_{x,y}(\chi).$$

Or, selon un résultat d'Eberlein [13], la valeur moyenne par rapport à une moyenne invariante quelconque de la transformée de Fourier d'une mesure sur un groupe commutatif localement compact est égale à la masse placée en l'élément neutre. Par conséquent, pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$m_a((\mathcal{C}(2a)x, x)_1) = \eta_{x,x}(\{\hat{e}\}) \geq 0, \quad (2.4)$$

où \hat{e} est le caractère trivial de G . Par ailleurs, en raison de (0.1), on a

$$\|x\|_1^2 + (\mathcal{C}(2a)x, x)_1 = 2(\mathcal{C}^2(a)x, x)_1$$

si bien que la relation (2.4) entraîne

$$\|x\|_1^2 \leq \|x\|_1^2 + m_a((\mathcal{C}(2a)x, x)_1) = 2m_a((\mathcal{C}^2(a)x, x)_1). \quad (2.5)$$

Or par (2.2) et (2.3)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}^2(a)x\|_1 &\leq (1 + 2\|\mathcal{C}\|) \|\mathcal{C}\| \|\mathcal{C}^2(a)x\| \\ &\leq (1 + 2\|\mathcal{C}\|) \|\mathcal{C}\|^2 \|\mathcal{C}(a)x\| \\ &\leq (1 + 2\|\mathcal{C}\|) \|\mathcal{C}\|^2 \|\mathcal{C}(a)x\|_1. \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.5), on a donc

$$\|x\|_1^2 \leq 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|) \|\mathcal{C}\|^2 \|x\|_1 m_a(\|\mathcal{C}(a)x\|_1)$$

et finalement

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &\leq 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|)\|\mathcal{C}\|^2 m_a(\|\mathcal{C}(a)x\|_1) \\ &\leq 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|)\|\mathcal{C}\|^2 (m_a(\|\mathcal{C}(a)x\|_1^2))^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De même on a

$$\begin{aligned} 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|)\|\mathcal{C}\|^2 (m_a(\|\mathcal{C}(a)x\|_1^2))^{1/2} \\ \leq 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|)^2 \|\mathcal{C}\|^4 \|x\|_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les relations (2.6) et (2.7) montrent qu'en posant pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et tout $y \in \mathfrak{X}$

$$(x, y)_2 = 4(1 + 2\|\mathcal{C}\|)^2 \|\mathcal{C}\|^4 m_a((\mathcal{C}(a)x, \mathcal{C}(a)y)_1), \quad (2.8)$$

on définit un produit scalaire sur \mathfrak{X} équivalent à $(\cdot, \cdot)_1$, donc équivalent au produit scalaire initial. Procédant comme ci-dessus, on voit sans peine que la fonction cosinus \mathcal{C} est hermitienne par rapport à $(\cdot, \cdot)_2$.

Cela achève la démonstration.

2.2. Complément

En conservant les notations du paragraphe précédent, il est clair que les relations (2.2), (2.3), (2.6), (2.7) et (2.8) entraînent

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|)^3 \|\mathcal{C}\|^5 \|x\|$$

quel que soit $x \in \mathfrak{X}$. Soit T l'opérateur strictement positif de $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ tel que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et tout $y \in \mathfrak{X}$, on ait

$$(x, y)_2 = (Tx, y).$$

Notant $T^{1/2}$ la racine carrée positive de T , on vérifie aisément que l'application $S \rightarrow T^{1/2}ST^{-1/2}$ ($S \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$) est une similitude envoyant la fonction cosinus \mathcal{C} en une fonction cosinus hermitienne et qu'on a

$$\|T^{1/2}\| \|T^{-1/2}\| \leq 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|)^3 \|\mathcal{C}\|^5. \quad (2.9)$$

Il est à noter que la majoration ci-dessus ne fait intervenir que la norme de la fonction cosinus \mathcal{C} .

3. Problème de l'existence de représentations exponentielles bornées pour les fonctions cosinus bornées.

3.1. Cas des fonctions cosinus hilbertiennes

Soient G un groupe commutatif localement compact, E un espace de Banach, \mathcal{C} une fonction cosinus fortement continue définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$.

Par représentation exponentielle (bornée) de la fonction cosinus \mathcal{C} on entend toute représentation de \mathcal{C} sous la forme

$$\mathcal{C}(a) = \frac{1}{2}(\mathcal{G}(a) + \mathcal{G}(-a)) \quad (a \in G), \quad (3.1)$$

où \mathcal{G} est une représentation (bornée) fortement continue de \mathcal{G} dans E .

On a le théorème fondamental suivant.

THÉORÈME 3.1: *Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathfrak{H} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus bornée fortement continue définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Alors la fonction cosinus \mathcal{C} admet une représentation exponentielle bornée.*

DÉMONSTRATION: Grâce au Théorème 1.1, on peut supposer que la fonction cosinus \mathcal{C} est hermitienne. Comme telle \mathcal{C} s'écrit sous la forme (1.1). Or, d'après le théorème de Stone-Neumark-Ambrose-Godement, l'application \mathcal{G} de G dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ donnée par

$$\mathcal{G}(a) = \int_{\hat{G}} (a, \chi) dE(\chi) \quad (a \in G)$$

est une représentation unitaire fortement continue de G dans \mathfrak{H} . On aboutit au théorème en remarquant que la relation (3.1) subsiste manifestement.

Signalons qu'en général une fonction cosinus hilbertienne bornée admet plusieurs représentations exponentielles bornées. Ceci tient au fait que d'ordinaire plusieurs mesures spectrales peuvent s'associer, de façon à réaliser l'égalité (1.1), à une fonction cosinus hermitienne, image par une similitude de la fonction cosinus initiale.

3.2. Cas des fonctions cosinus non hilbertiennes

Les résultats de ce paragraphe ne pouvant s'incorporer à la théorie qu'on développe dans le présent travail qu'assez artificiellement, ils permettront de voir plus clairement ce qui est spécial à l'étude des fonctions cosinus bornées dans le cas hilbertien.

Grâce au Théorème 3.1 la théorie des fonctions cosinus hilbertiennes bornées se laisse ramener à celle des représentations bornées dans les espaces de Hilbert des groupes commutatifs localement compacts. Pour les fonctions cosinus bornées non hilbertiennes, la réduction analogue est impossible en général, ainsi qu'on va le voir. Il s'avère que pour tout groupe commutatif localement compact, il existe une fonction cosinus bornée fortement continue définie dans ce groupe, n'admettant une représentation exponentielle bornée que moyennant une condition supplémentaire sur le groupe en question. Ainsi, dès que cette condition n'est pas vérifiée, on arrive à une fonction cosinus n'ayant pas de représentations exponentielles bornées.

Les premiers exemples de fonctions cosinus bornées n'ayant pas de représentations exponentielles bornées ont été donnés par Kiszyński en [32] et [33]. Les fonctions cosinus apparaissant dans ces exemples, fonctions n'admettant de fait aucunes représentations exponentielles, partent du tore à une dimension T , du compactifié de Bohr $b\mathbf{R}$ du groupe des réels et du groupe des réels \mathbf{R} lui-même, et opèrent sur certains espaces de fonctions et de mesures impaires sur les groupes sous-jacents. Les techniques employées à établir la non existence de représentations exponentielles de ces fonctions cosinus font intervenir d'une façon essentielle des structures particulières aux groupes T , $b\mathbf{R}$ et \mathbf{R} . Notamment on traite séparément le cas des groupes compacts T et $b\mathbf{R}$, et celui du groupe non compact \mathbf{R} .

C'est dans un cadre général que le théorème établi ci-dessous conduit à toute une série de fonctions cosinus bornées n'admettant pas de représentations exponentielles bornées. Cependant, en contraste avec la discussion effectuée par Kiszyński, y ignore-t-on la question de l'existence d'une représentation exponentielle non bornée de chacune des fonctions cosinus considérées.

THÉORÈME 3.2: *Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathcal{C} la fonction cosinus définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(L^\infty(G)_p)$, ayant pour expression*

$$\mathcal{C}(a) = \frac{1}{2}(T_a + T_{-a}) \quad (a \in G). \quad (3.2)$$

On suppose que la fonction cosinus \mathcal{C} admet une représentation exponentielle bornée. Alors le groupe $G^{(2)}$ est fini.

DÉMONSTRATION: Supposons que la fonction cosinus \mathcal{C} s'écrive sous la forme (3.1) pour une représentation bornée \mathcal{G} de G dans $L^\infty(G)_p$.

Nous montrerons en premier lieu que $C_u(G)_p$, $C_u(G)$ étant l'espace des fonctions complexes uniformément continues dans G , est stable par les opérateurs $\mathcal{G}(a)$ ($a \in G$). D'après (3.1), les $\mathcal{G}(a)$ ($a \in G$) permutent aux $\mathcal{G}(b)$ ($b \in G$). Etant donnés $f \in C_u(G)_p$ et $\epsilon > 0$, il existe un voisinage

ouvert symétrique V_ϵ de l'élément neutre e de G , tel que, pour tout $b \in V_\epsilon$, on ait

$$\|\mathcal{C}(b)f - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{\|\mathcal{G}\|}.$$

Quels que soient $a \in G$ et $b \in V_\epsilon$, on a donc

$$\|\mathcal{C}(b)\mathcal{G}(a)f - \mathcal{G}(a)f\|_\infty = \|\mathcal{G}(a)(\mathcal{C}(b)f - f)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Par suite, si φ_ϵ est une fonction paire positive continue dans G , à support dans V_ϵ , telle que

$$\int_G \varphi_\epsilon d\lambda = 1,$$

alors on a

$$\|(\mathcal{G}(a)f) * \varphi_\epsilon - \mathcal{G}(a)f\|_\infty \leq \epsilon,$$

où $*$ signifie le produit de convolution. Or $(\mathcal{G}(a)f) * \varphi_\epsilon \in C_u(G)_p$. Vu l'arbitraire de ϵ , il est clair que la classe $\mathcal{G}(a)f$ contient une (seule) fonction uniformément continue paire. Identifiant celle-ci à $\mathcal{G}(a)f$, il vient $\mathcal{G}(a)f \in C_u(G)_p$, d'où notre assertion.

On prouve ensuite que $C_0(G)_p$ est stable par les opérateurs $\mathcal{G}(a)$ ($a \in G$). Quel que soit $a \in G$, la forme linéaire continue sur $C_0(G)_p$

$$f \rightarrow (\mathcal{G}(a)f)(e)$$

s'écrit

$$f \rightarrow \int_G f d\nu_a$$

pour une mesure symétrique unique ν_a dans $M(G)$. Si $f \in C_0(G)_p$ et $a, b \in G$, alors, en raison de la parité de $\mathcal{G}(a)f$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}(a)f)(b) &= (\mathcal{C}(b)\mathcal{G}(a)f)(e) = (\mathcal{G}(a)\mathcal{C}(b)f)(e) \\ &= (f * \nu_a)(b). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il est aisé de voir que quel que soit $a \in G$, l'application $f \rightarrow f * \nu_a$ envoie l'espace $C_0(G)_p$ dans lui-même.

Cela posé, d'après (3.3), pour $f \in C_0(G)_p$ et $a, b \in G$, il vient

$$f * \nu_{a+b} = \mathcal{G}(a+b)f = \mathcal{G}(a)\mathcal{G}(b)f = f * \nu_b * \nu_a.$$

Ainsi, pour tout couple $a, b \in G$, on a

$$\nu_{a+b} = \nu_a * \nu_b.$$

Par ailleurs, d'après (3.3),

$$\sup\{\|\nu_a\| : a \in G\} \leq \|\mathcal{G}\|.$$

Il est donc clair que quel que soit $\chi \in \hat{G}$, l'application $a \rightarrow \mathcal{F}\nu_a(\chi)$ est un homomorphisme de G_d , G_d désignant le groupe G muni de la topologie discrète, sur un sous-groupe borné du groupe multiplicatif des complexes non nuls; autrement dit, $a \rightarrow \mathcal{F}\nu_a(\chi)$ est un caractère de G_d .

D'après (3.2), pour tout $a \in G$, on a

$$\nu_a + \nu_{-a} = \delta_a + \delta_{-a},$$

où δ_a signifie la mesure de Dirac au point a . Par suite, quels que soient $a \in G$ et $\chi \in \hat{G}$, il vient

$$\mathcal{F}\nu_a(\chi) + \overline{\mathcal{F}\nu_a(\chi)} = \mathcal{F}\nu_a(\chi) + \mathcal{F}\nu_{-a}(\chi) = (a, \chi) + (a, -\chi).$$

Par l'unicité du développement trigonométrique sur G_d , pour tout $\chi \in \hat{G}$, le caractère $a \rightarrow \mathcal{F}\nu_a(\chi)$ s'écrit

$$\mathcal{F}\nu_a(\chi) = (a, \epsilon(\chi)\chi) \quad (a \in G), \quad (3.4)$$

où ϵ est une fonction définie dans \hat{G} , ne prenant que les valeurs ± 1 . On note qu'en raison de la symétrie des mesures ν_a ($a \in G$), pour tout $\chi \in \hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$, on a

$$\epsilon(-\chi) = -\epsilon(\chi). \quad (3.5)$$

Par la suite, on supposera que $\hat{G} \neq \hat{G}_{(2)}$, dans le cas contraire le groupe $G^{(2)}$ se réduisant à l'élément neutre et la thèse du théorème étant évidente.

Soit φ une fonction définie dans \hat{G} par

$$\varphi(\chi) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \epsilon(\chi) & \text{pour } \chi \in \hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)} \\ 0 & \text{pour } \chi \in \hat{G}_{(2)} \end{cases}. \quad (3.6)$$

En tenant compte de (3.4) et (3.6), on vérifie directement que, pour tout $a \in G$ et tout $\chi \in \hat{G}$, on a

$$2(a, \chi)\mathcal{F}\nu_{-a}(\chi) - \mathcal{F}\nu_{-2a}(\chi) - 1 = \varphi(\chi)(1 - \mathcal{F}\nu_{-2a}(\chi)). \quad (3.7)$$

L'expression figurant au premier membre de cette dernière égalité est la transformée de Fourier de la mesure

$$\mu_a = 2\delta_{-a} * \nu_{-a} - \nu_{-2a} - \delta_e.$$

Il est clair que les mesures μ_a ($a \in G$) sont bornées dans leur ensemble.

Soient bG le compactifié de Bohr de G , $AP(G)$ l'espace des fonctions presque périodiques dans G , espace s'identifiant canoniquement à celui des fonctions complexes continues dans bG , ce dernier se notant $C(bG)$.

Soit m une moyenne invariante sur $l^\infty(G_d)$. Par abus de notation, la forme linéaire continue sur $AP(G)$

$$f \rightarrow m_a \left(\int_G f d\mu_a \right)$$

s'écrit

$$f \rightarrow \int_{bG} f d\mu$$

pour une mesure unique μ dans $M(bG)$. Il est immédiat que la transformée de Fourier de μ , fonction définie dans $(\hat{G})_d$, a pour expression

$$\mathcal{F}\mu(\chi) = \varphi(\chi)(1 - m_a(\mathcal{F}\nu_{-2a}(\chi))) \quad (\chi \in \hat{G}).$$

On va voir qu'en réalité

$$\mathcal{F}\mu(\chi) = \varphi(\chi) \tag{3.8}$$

pour tout $\chi \in \hat{G}$. En effet, si $\chi \in \hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$, alors, vu (3.4), l'application $a \rightarrow \mathcal{F}\nu_{-2a}(\chi)$ est un caractère non trivial de G_d , la valeur moyenne en est donc nulle et l'identité (3.8) dans ce cas est claire. Si $\chi \in \hat{G}_{(2)}$, alors, pour tout $a \in G$, on a $\mathcal{F}\nu_{-2a}(\chi) = 1$, d'où $\mathcal{F}\mu(\chi) = 0$; cela, compte tenu de (3.6), établit l'identité (3.8) dans le second cas.

Dans l'ouvert $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$, la fonction φ est continue. En effet, quel que soit $\chi \in \hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$, il existe $a \in G$ tel que

$$1 - \mathcal{F}\nu_{-2a}(\chi) \neq 0.$$

Tenant compte de (3.7), on en déduit aussitôt que dans un voisinage ouvert de χ suffisamment petit, la fonction φ peut s'écrire comme quotient de deux fonctions continues.

Montrons que l'ensemble $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$ est fermé. Par un théorème de Doss ([11]; cf. aussi [25], Th. 1.8.4), la transformée de Fourier d'une mesure de $M(bG)$, continue dans un ouvert de \hat{G} , coïncide dans celui-ci avec la transformée de Fourier d'une mesure de $M(G)$. En particulier, on

constate qu'il existe une mesure η dans $M(G)$, dont la transformée de Fourier coïncide avec φ dans $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$. Si $\chi \in \hat{G}_{(2)}$ était adhérent à une famille filtrante (χ_μ) dans $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$, alors χ serait également adhérent à la famille filtrante $(-\chi_\mu)$ dans $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$. Or, par (3.5) et (3.6), on aurait

$$|\mathcal{F}\eta(\chi_\mu) - \mathcal{F}\eta(-\chi_\mu)| = |\varphi(\chi_\mu) - \varphi(-\chi_\mu)| = 2,$$

donc $\mathcal{F}\eta$ serait discontinue en χ , ce qui serait absurde.

$\hat{G}_{(2)}$ étant un sous-groupe ouvert de \hat{G} , la fonction φ est continue dans \hat{G} . Par le théorème de Doss, φ est la transformée de Fourier d'une mesure de $M(G)$. Par suite, on peut supposer que la mesure μ elle-même est portée par G . D'après (3.6), il est clair que c'est une mesure impaire.

D'autre part, le groupe $\overline{G^{(2)}}$, adhérence de $G^{(2)}$, a pour dual le groupe quotient discret $\hat{G}/\hat{G}_{(2)}$. Donc il est clair que $\overline{G^{(2)}}$ est compact, que la mesure de Haar σ sur $\overline{G^{(2)}}$ appartient à $M(G)$, et qu'on a

$$\mathcal{F}\sigma = 1_{\hat{G}_{(2)}}.$$

Par ailleurs d'après (3.6) et (3.8), la transformée de Fourier de $\mu * \mu$, φ^2 , est la fonction caractéristique de $\hat{G} \setminus \hat{G}_{(2)}$. On a donc

$$\mu * \mu = \delta_e - \sigma.$$

Si le groupe $G^{(2)}$ était infini, il en serait de même du groupe $\overline{G^{(2)}}$ et la mesure σ serait diffuse. Notant μ_{atom} la partie atomique de μ , on aurait

$$\mu_{\text{atom}} * \mu_{\text{atom}} = \delta_e. \quad (3.9)$$

D'autre part, la mesure μ étant impaire, la mesure μ_{atom} l'est aussi. Alors

$$\mu_{\text{atom}} * 1_G = 0$$

contrairement à (3.9).

Ainsi on aboutit au théorème.

Notons qu'au cours de la démonstration qu'on vient d'achever on n'a fait usage d'aucune hypothèse de continuité sur la représentation \mathcal{G} .

Signalons enfin que quoiqu'il soit vraisemblable qu'en général, pour un groupe commutatif localement compact G , la finitude du groupe $G^{(2)}$ n'assure pas l'existence d'une représentation exponentielle bornée de la fonction cosinus figurant dans l'énoncé du Théorème 3.2, c'est le contraire qui est vrai lorsque $G^{(2)}$ est un facteur fini de G .

Pour le voir, supposons qu'un groupe commutatif localement compact G soit somme directe du groupe $G^{(2)}$ et d'un groupe H , ce dernier s'identifiant à un sous-groupe de $G_{(2)}$; supposons en outre que le groupe $G^{(2)}$ soit fini. Soit ϵ une fonction impaire dans $(G^{(2)})^\wedge$ ne prenant que les

valeurs ± 1 hors l'élément neutre. Pour tout $a \in G^{(2)}$, notons ν_a la mesure sur $G^{(2)}$, dont la transformée de Fourier a pour expression

$$\mathcal{F}\nu_a(\chi) = (a, \epsilon(\chi)\chi) \quad (\chi \in (G^{(2)})^\wedge).$$

Visiblement, quel que soit $a \in G^{(2)}$, la mesure ν_a est symétrique et l'identité suivante a lieu

$$\nu_a + \nu_{-a} = \delta_a + \delta_{-a}.$$

De plus, pour tout couple $a, b \in G^{(2)}$, on a

$$\nu_a * \nu_b = \nu_{a+b}.$$

Quel que soit $(a, b) \in G^{(2)} \oplus H$, on pose

$$\mu_{(a,b)} = \nu_a \otimes \delta_b.$$

Il est clair que pour tout $a \in G^{(2)}$ et tout $b \in H$, la mesure $\mu_{(a,b)}$ est symétrique et qu'on a

$$\begin{aligned} \mu_{(a,b)} + \mu_{(-a,-b)} &= \mu_{(a,b)} + \mu_{(-a,b)} = \delta_a \otimes \delta_b + \delta_{-a} \otimes \delta_b \\ &= \delta_a \otimes \delta_b + \delta_{-a} \otimes \delta_{-b} = \delta_{(a,b)} + \delta_{(-a,-b)}. \end{aligned}$$

De même, pour $a, c \in G^{(2)}$ et $b, d \in H$, on a

$$\mu_{(a,b)} * \mu_{(c,d)} = \mu_{(a+c,b+d)}.$$

En outre

$$\begin{aligned} &\sup\{ \|\mu_{(a,b)}\| : a \in G^{(2)}, b \in H \} \\ &\leq \sup\{ \|\nu_a\| : a \in G^{(2)} \} < +\infty. \end{aligned}$$

En posant pour tout $a \in G$ et tout $f \in L^\infty(G)_p$

$$\mathcal{G}(a)f = f * \mu_a,$$

on obtient une représentation bornée fortement continue de G dans $L^\infty(G)_p$, déterminant une représentation exponentielle bornée de la fonction cosinus $\mathcal{C} : G \rightarrow \mathcal{L}(L^\infty(G)_p)$ donnée par (3.2).

3.3. Problème

Nous concluons cette partie en posant le problème suivant:

PROBLÈME: Soit E un espace de Banach tel que quel que soit le groupe commutatif localement compact G , chaque fonction cosinus bornée fortement continue définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ admette un représentation exponentielle bornée. Est-ce que E est nécessairement isomorphe à un espace de Hilbert?

4. Mesurabilité et continuité des fonctions cosinus hilbertiennes bornées

4.1. Fonctions cosinus faiblement λ -mesurables

Le point de départ de ce paragraphe est le résultat suivant qui généralise dans une direction un théorème de Kurepa [42]:

THÉORÈME 4.1: Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathcal{H} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus bornée définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Alors \mathfrak{H} s'écrit comme somme directe de deux sous-espaces linéaires fermés \mathfrak{H}_1 et \mathfrak{H}_2 tels que: 1^o \mathfrak{H}_1 et \mathfrak{H}_2 sont stables par les opérateurs $\mathcal{C}(a)$ ($a \in G$); 2^o la fonction cosinus $a \rightarrow \mathcal{C}(a)|_{\mathfrak{H}_1}$ est fortement continue; 3^o pour tout couple $x, y \in \mathfrak{H}_2$, si la restriction de la fonction $a \rightarrow (\mathcal{C}(a)x, y)$ à une partie λ -mesurable de G est λ -mesurable, alors cette restriction est localement λ -négligeable. En outre, si la fonction cosinus \mathcal{C} est hermitienne, alors la somme directe ci-dessus peut être supposée orthogonale.

DÉMONSTRATION: Considérons \mathcal{C} comme fonction cosinus définie dans G_d . Grâce au Théorème 2.1, on peut supposer d'emblée que la fonction cosinus \mathcal{C} est hermitienne. D'après le Théorème 1.1, il existe une mesure spectrale borélienne E sur $(G_d)^\wedge = b\hat{G}$ à valeurs dans une algèbre booléenne de projecteurs orthogonaux dans \mathfrak{H} , telle que la fonction cosinus \mathcal{C} s'écrit

$$\mathcal{C}(a) = \frac{1}{2} \int_{b\hat{G}} [(a, \chi) + (a, -\chi)] dE(\chi) \quad (a \in G).$$

Comme l'ont montré Graham et Ramsey [26], l'image canonique d'un groupe commutatif localement compact dans son compactifié de Bohr est un sous-groupe borélien. Identifiant \hat{G} à son image canonique dans $b\hat{G}$, on peut alors poser

$$\mathfrak{H}_1 = (E(\hat{G}))(\mathfrak{H}),$$

$$\mathfrak{H}_2 = (E(b\hat{G} \setminus \hat{G}))(\mathfrak{H}).$$

Il est clair que l'espace de Hilbert \mathfrak{H} est somme directe des sous-espaces de Hilbert \mathfrak{H}_1 et \mathfrak{H}_2 , que les opérateurs $\mathcal{C}(a)$ ($a \in G$) laissent stable \mathfrak{H}_1 et \mathfrak{H}_2 , et que la fonction cosinus $a \rightarrow \mathcal{C}(a)|_{\mathfrak{H}_1}$ est fortement continue (cf. le Corollaire 1.1). Compte tenu du fait que si la restriction de la transformée de Fourier d'une mesure de $M(b\hat{G} \setminus \hat{G})$ à une partie λ -mesurable de G est λ -mesurable, alors elle est en fait localement λ -négligeable (cf. [25], Th. 1.8.3 et Th. 1.8.6), on aboutit au théorème en observant que chacune des fonctions $a \rightarrow (\mathcal{C}(a)x, y)$ ($x, y \in \mathfrak{H}_2$) est la transformée de Fourier d'une mesure bornée portée par $b\hat{G} \setminus \hat{G}$.

Du Théorème 4.1 résulte immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4.1: *Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathfrak{H} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus bornée définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, faiblement continue en l'élément neutre de G . Alors la fonction cosinus \mathcal{C} est fortement continue.*

DÉMONSTRATION: En raison du théorème précédent, l'assertion s'obtient en remarquant que, grâce à (0.2) et à l'hypothèse faite, pour tout vecteur non nul x dans \mathfrak{H} , il existe un ouvert contenant l'élément neutre du groupe G , tel que la fonction $a \rightarrow (\mathcal{C}(a)x, x)$ ne s'annule en aucun point de cet ouvert.

Soient G un groupe commutatif localement compact, E une partie λ -mesurable de G , \mathfrak{H} un espace de Hilbert, f une fonction définie dans E à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Dire que la fonction f est localement λ -négligeable signifie que chacune des fonctions $a \rightarrow f(a)x$ ($x \in \mathfrak{H}$) est localement λ -négligeable.

Dire que la fonction f est faiblement localement λ -négligeable veut dire que chacune des fonctions $a \rightarrow (f(a)x, y)$ ($x, y \in \mathfrak{H}$) est localement λ -négligeable.

Donnons-nous un exemple d'une fonction cosinus bornée faiblement localement λ -négligeable.

EXEMPLE: Soient G un groupe commutatif localement compact non discret, $\mathfrak{H} = l^2(G_d)$, \mathcal{C} la fonction cosinus de G dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ définie par (3.2). Que \mathcal{C} soit faiblement localement λ -négligeable tient au fait que quels que soient $x, y \in \mathfrak{H}$, la fonction $a \rightarrow (\mathcal{C}(a)x, y)$ est nulle sauf pour un ensemble dénombrable de points.

Cet exemple est à comparer avec le théorème suivant:

THÉORÈME 4.2: *Il n'existe pas de fonction cosinus hilbertienne bornée qui soit localement λ -négligeable.*

DÉMONSTRATION: Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un groupe commutatif localement compact G et un espace de Hilbert \mathfrak{H} tels qu'une certaine fonction cosinus bornée \mathcal{C} définie dans G à valeurs dans

$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ soit localement λ -négligeable. Par le Théorème 2.1, on peut supposer que la fonction cosinus \mathcal{C} est hermitienne. Soit m une moyenne invariante sur $L^\infty(G_d)$ s'annulant sur les fonctions localement λ -négligeables de $L^\infty(G_d)$ (cf. [27], chap. 2, paragr. 1). Soit x un vecteur non nul dans \mathfrak{H} . Il est clair qu'on a

$$m_a((\mathcal{C}^2(a)x, x)) = 0$$

d'où par (0.1) et (0.2)

$$m_a((\mathcal{C}(2a)x, x)) = 2m_a((\mathcal{C}^2(a)x, x)) - \|x\|^2 = -\|x\|^2,$$

ce qui est en contradiction avec (2.4).

La démonstration est achevée.

Deux théorèmes qui suivent résultent-ils immédiatement de ce qui précède.

THÉORÈME 4.3: *Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathfrak{H} un espace de Hilbert à base dénombrable, \mathcal{C} une fonction cosinus bornée faiblement λ -mesurable définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Alors la fonction cosinus \mathcal{C} est fortement continue.*

DÉMONSTRATION: Sinon, en se plaçant dans la situation du Théorème 4.1, la restriction non triviale de \mathcal{C} à \mathfrak{H}_2 serait faiblement localement λ -négligeable. Comme \mathfrak{H} est à base dénombrable, cette restriction serait en fait localement λ -négligeable, ce qui serait contraire au théorème précédent.

La démonstration est achevée.

THÉORÈME 4.4: *Soient G un groupe commutatif localement compact, \mathcal{C} une fonction cosinus complexe bornée λ -mesurable définie dans G . Alors la fonction cosinus \mathcal{C} est continue et il existe $\chi \in \hat{G}$ tel que, pour tout $a \in G$, on ait*

$$\mathcal{C}(a) = \frac{1}{2}[(a, \chi) + (a, -\chi)].$$

De plus, le seul caractère de G outre χ qui puisse tenir le rôle de celui-ci dans la représentation ci-dessus est le caractère inverse $-\chi$.

DÉMONSTRATION: La continuité de la fonction cosinus \mathcal{C} résulte immédiatement du théorème précédent.

Par le Théorème 1.1, la fonction cosinus \mathcal{C} s'écrit sous la forme (1.1). Compte tenu de ce que l'espace de Hilbert ambiant est à une dimension, il est clair que la mesure spectrale associée à la fonction cosinus \mathcal{C} est portée par un seul caractère dans \hat{G} . D'où la représentation annoncée.

L'assertion d'unicité résulte du principe d'unicité du développement trigonométrique.

La démonstration est terminée.

Concluons ce paragraphe en remarquant que le Théorème 4.4 peut également être déduit d'un théorème de Kannappan [30] donnant, entre autres, la forme générale des fonctions cosinus complexes définies dans un groupe commutatif.

4.2. Propriété (D)

On dira qu'un groupe commutatif localement compact G a la propriété (D) si pour chaque sous-groupe ouvert H de G engendré par une partie compacte de G , on a $H = \overline{H^{(2)}}$.

Tout groupe commutatif localement compact connexe jouit de la propriété (D). En effet, chaque sous-groupe ouvert d'un tel groupe coïncide avec le groupe tout entier; en outre, étant connexe le groupe est divisible (cf. [53], Cor. 2 du Th. 31).

Il existe des groupes commutatifs localement compacts infinis ayant la propriété (D) sans être connexes. En voici un exemple:

EXEMPLE: Soit n un entier impair supérieur à 2, $n = 2k - 1$ ($k \in \{2, 3, \dots\}$). Soit G le groupe compact produit Z_n^N . Pour tout $a \in G$, on a $a = 2ka$. Par suite, quel que soit le sous-groupe H de G , on a $H = H^{(2)}$. D'autre part, le groupe $G^{(n)}$ se réduit à l'élément neutre. Alors G n'est pas divisible, ce qui signifie que ce groupe-là n'est pas connexe.

L'intérêt de la propriété (D) est dû au théorème suivant qui généralise dans une direction un théorème de Kurepa [37]:

THÉORÈME 4.5: Soient G un groupe commutatif localement compact jouissant de la propriété (D), \mathfrak{H} un espace de Hilbert, \mathcal{C} une fonction cosinus bornée définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. On suppose qu'il existe une partie λ -mesurable E de G telle que $0 < \lambda(E) < +\infty$ et telle que la restriction $\mathcal{C}|_E$ soit faiblement λ -mesurable. Alors la fonction cosinus \mathcal{C} est faiblement λ -mesurable.

La démonstration de ce théorème fera l'objet d'un des paragraphes ultérieurs. Pour l'instant, notons la simple conséquence suivante du Théorème 4.3 et du théorème énoncé:

THÉORÈME 4.6: Soient G un groupe commutatif localement compact jouissant de la propriété (D), \mathfrak{H} un espace de Hilbert à base dénombrable, \mathcal{C} une fonction cosinus bornée définie dans G à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. On suppose qu'il existe une partie λ -mesurable E de G telle que $0 < \lambda(E) <$

+ ∞ et telle que la restriction $\mathcal{C}|_E$ soit faiblement λ -mesurable. Alors la fonction cosinus \mathcal{C} est fortement continue.

Il est à noter que si on ne suppose plus que le groupe G vérifie la propriété (D), le Théorème 4.6 tombe en défaut. En effet, considérons $G = \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_2^N$. Soient χ_1 le caractère de \mathbf{Z}_4 tel que $(1, \chi_1) = i$, χ_2 un caractère de \mathbf{Z}_2^N non mesurable pour la mesure de Haar sur \mathbf{Z}_2^N , χ le caractère de G ayant pour expression

$$\chi(a, b) = \chi_1(a)\chi_2(b) \quad (a \in \mathbf{Z}_4, b \in \mathbf{Z}_2^N).$$

χ n'est pas λ -mesurable, car sinon, ce serait un caractère continu et χ_2 serait lui aussi un caractère continu. Soient $E = \{(1, a) : a \in \mathbf{Z}_2^N\}$, \mathcal{C} la fonction cosinus à valeurs réelles, définie dans G par

$$\mathcal{C}(a) = \frac{1}{2}[(a, \chi) + (a, -\chi)] \quad (a \in G).$$

E est une partie ouverte de G et la restrictions $\mathcal{C}|_E$ est nulle, donc a *fortiori* λ -mesurable. D'autre part, n'étant pas de la forme précisée dans l'énoncé du Théorème 4.4, la fonction cosinus \mathcal{C} ne peut être continue dans le groupe G tout entier.

4.3. Propositions auxiliaires

En vue de la démonstration du Théorème 4.5 nous établirons dans ce paragraphe quelques résultats auxiliaires.

On notera λ la mesure de Haar essentielle définie par

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \subset E \text{ et } K \text{ est compact}\},$$

E étant une partie λ -mesurable d'un groupe commutatif localement compact (cf. [5], §1, n^o 1).

Par $A\Delta B$ on désignera la différence symétrique d'ensembles A et B .

Si A est une partie d'un groupe et si a est un élément de ce groupe, on notera $A + a$ ($A - a$) l'ensemble dont la fonction caractéristique est $T_{-a}1_A$ (T_a1_A).

PROPOSITION 4.1: *Soient G un groupe commutatif localement compact, E une partie λ -mesurable de G telle que $0 < \lambda(E) < +\infty$. On suppose que F est une partie λ -mesurable de G telle que, pour tout $a \in G$, on ait*

$$\lambda(((F - a) \cap E)\Delta((F + a) \cap E)) = 0. \quad (4.1)$$

Alors il existe un sous-groupe ouvert H de G , engendré par une partie

compacte de E de mesure de Haar positive, tel que, pour tout $a \in \overline{H^{(2)}}$, on ait

$$\lambda((F+a)\Delta F) = 0. \quad (4.2)$$

DÉMONSTRATION: Sans perdre la généralité, on peut supposer que la partie E est compacte.

Notons S le support de la restriction à E de la mesure de Haar.

Soit $L^\infty(G, E)$ l'espace des classes de fonctions complexes λ -mesurables dans G , bornées en mesure et localement λ -négligeables hors de E .

Nous montrerons en premier lieu que pour tout $a \in S$, toute suite finie $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $L^1(G)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe g dans $L^\infty(G, E)$ tel que, pour $i = 1, \dots, n$, on ait

$$\|\psi_i * g - T_{-a}\psi_i\|_1 < \epsilon.$$

Considérons $l_n^1(L^1(G))$, la somme directe de n copies de $L^1(G)$ munie de la norme

$$\|(f_i)\| = \|f_1\|_1 + \dots + \|f_n\|_1 \quad (f_1, \dots, f_n \in L^1(G)).$$

Il suffit de montrer que pour tout $a \in S$, le vecteur $(T_{-a}\psi_1, \dots, T_{-a}\psi_n)$ est adhérent au sous-espace de $l_n^1(L^1(G))$ composé des vecteurs de la forme

$$(\psi_1 * g, \dots, \psi_n * g) \quad (g \in L^\infty(G, E)).$$

Par le théorème de Hahn-Banach, tout revient à constater que si, pour $h_1, \dots, h_n \in L^\infty(G)$, la relation

$$\sum_{i=1}^n \int_G h_i(\psi_i * g) d\lambda = 0 \quad (4.3)$$

subsiste pour tout $g \in L^\infty(G, E)$, alors on a

$$\sum_{i=1}^n \int_G h_i T_{-a}\psi_i d\lambda = \sum_{i=1}^n (h_i * I\psi_i)(a) = 0.$$

Or, d'après (4.3), la restriction à E de la fonction $\sum_{i=1}^n h_i * I\psi_i$ est λ -négligeable. Comme la fonction $\sum_{i=1}^n h_i * I\psi_i$ est uniformément continue, on conclut qu'elle s'annule sur S . D'où l'assertion.

Cela étant, quel que soit $a \in S$, il existe une famille filtrante $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ dans $L^\infty(G, E)$ telle que la famille filtrante composée des opérateurs linéaires

$$A(\hat{G}) \ni f \rightarrow \mathcal{F}(g_\alpha)f \in A(\hat{G}) \quad (\alpha \in A)$$

converge suivant le filtre des sections de A vers l'opérateur linéaire

$$A(\hat{G}) \ni f \rightarrow (-a, \cdot)f \in A(\hat{G}),$$

pour la topologie de la convergence simple. Il sera utile de noter que la famille filtrante composée des opérateurs linéaires

$$A(\hat{G}) \ni f \rightarrow \mathcal{F}(I g_\alpha) f \in A(\hat{G}) \quad (\alpha \in A)$$

converge suivant le filtre des sections de A vers l'opérateur linéaire

$$A(\hat{G}) \ni f \rightarrow (a, \cdot)f \in A(\hat{G}),$$

pour la topologie de la convergence simple.

Observons que l'égalité (4.1) peut s'écrire

$$1_{F+a} 1_E = 1_{F-a} 1_E \quad l.\lambda-p.p. \text{ (localement } \lambda\text{-presque partout)}$$

quel que soit $a \in G$. Par suite, pour tout $a \in G$ et tout $g \in L^\infty(G, E)$, on a

$$1_{F+a} g = 1_{F-a} g \quad l.\lambda-p.p.$$

d'où

$$g * 1_{-F} = I g * 1_F.$$

La dernière égalité, par transformation de Fourier, entraîne

$$(\mathcal{F}g)(\mathcal{F}(1_{-F})) = (\mathcal{F}(I g))(\mathcal{F}(1_F)), \quad (4.4)$$

où $\mathcal{F}g, \mathcal{F}(I g) \in A(\hat{G})$, et $\mathcal{F}(1_{-F})$ et $\mathcal{F}(1_F)$ sont des pseudomesures sur \hat{G} . Compte tenu de (4.4) et de la remarque qui précède, on a pour tout $a \in S$

$$(-a, \cdot)\mathcal{F}(1_{-F}) = (a, \cdot)\mathcal{F}(1_F)$$

d'où

$$\mathcal{F}(1_{-F}) = (2a, \cdot)\mathcal{F}(1_F).$$

Il en résulte que, pour $a, b \in S$, on a

$$[(2a - 2b, \cdot) - 1]\mathcal{F}(1_F) = 0. \quad (4.5)$$

Notons H le sous-groupe de G engendré par S . Nous montrerons que le groupe H répond à la question.

Comme $0 < \lambda(S) = \lambda(E) < +\infty$, d'après un résultat bien connu de Steinhaus (cf. [28], Th. 20.17), H contient un voisinage ouvert de l'élément neutre, donc H lui-même est ouvert.

D'après (4.5), le support de la pseudomesure $\mathcal{F}(1_F)$ est contenu dans l'orthogonal $H^{(2)\perp}$ de $H^{(2)}$, sous-groupe fermé de \hat{G} composé des caractères de G valant 1 sur $H^{(2)}$. Comme tout sous-groupe fermé d'un groupe commutatif localement compact est de synthèse spectrale (cf. [28], Th. 40.24), quelle que soit la fonction f appartenant à $B(\hat{G})$, $B(\hat{G})$ étant l'espace transformé de Fourier de $M(G)$, et prenant la valeur 1 sur $H^{(2)\perp}$, la pseudomesure $\mathcal{F}(1_F)$ et son produit par f coïncident (cf. [4], Th. 1.4.1, f). En particulier, pour tout $a \in \overline{H^{(2)}}$, on a

$$(a, \cdot) \mathcal{F}(1_F) = \mathcal{F}(1_F).$$

De là, par cotransformation de Fourier, on obtient (4.2).

La démonstration est achevée.

PROPOSITION 4.2: *Soient G un groupe commutatif localement compact, f une fonction complexe de type positif dans G . Alors la fonction f est adhérente, pour la topologie de la convergence uniforme, à l'espace vectoriel engendré par les translatées de $f + If$.*

DÉMONSTRATION: D'après le théorème de Bochner (cf. [28], Th. 33.3), il existe une mesure positive bornée ν sur $(G_d)^\wedge = b\hat{G}$ telle que la fonction f s'écrive comme la transformée de Fourier de ν . Soit $\mu = \nu + I\nu$. Il est clair que la transformée de Fourier de μ coïncide avec $f + If$. Puisque $\mu \geq \nu$, par le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction positive μ -intégrable h définie dans $b\hat{G}$ telle que $\nu = h\mu$. Comme $C(b\hat{G})$ est dense dans $L^1(b\hat{G}, \mu)$, il existe une suite (h_n) de polynômes trigonométriques définis dans $b\hat{G}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - h_n\|_{L^1(b\hat{G}, \mu)} = 0. \quad (4.6)$$

Il est aisé de voir que chacune des transformées de Fourier $\mathcal{F}(h_n\mu)$ est combinaison linéaire finie de translatées de $f + If$. Pour achever la démonstration, il suffit de noter que, d'après (4.6), la fonction f est limite uniforme des $\mathcal{F}(h_n\mu)$.

La proposition qui suit est une variante d'un résultat bien connu dans la théorie ergodique.

PROPOSITION 4.3: *Soient G un groupe commutatif localement compact, T une partie λ -mesurable de G . On suppose que pour tout $a \in G$, on ait*

$$\lambda((T + a)\Delta T) = 0. \quad (4.7)$$

Alors soit $\lambda(T) = 0$, soit $\lambda(G \setminus T) = 0$.

DÉMONSTRATION: La relation (4.7), par transformation de Fourier, entraîne

$$[(a, \cdot) - 1] \mathcal{F}(1_T) = 0 \quad (4.8)$$

quel que soit $a \in G$. Supposons que $\lambda(T) \neq 0$ et soit γ un point quelconque dans le support de $\mathcal{F}(1_T)$. Pour tout $a \in G$, la fonction $\chi \rightarrow (a, \chi) - 1$ appartient à $B(\hat{G})$, donc, d'après (4.8), elle s'annule en γ ; γ est alors le caractère trivial \hat{e} de G . Le support de $\mathcal{F}(1_T)$ se réduisant à \hat{e} , on a que $\mathcal{F}(1_T) = \alpha \delta_{\hat{e}}$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (cf. [4], Th. 2.2.4). Il en résulte que la fonction $1_T - \alpha$ est localement λ -négligeable. Dès lors, l'égalité $\lambda(G \setminus T) = 0$ s'obtient d'une manière évidente.

La démonstration est achevée.

4.4. Démonstration du Théorème 4.5

Supposons les hypothèses du Théorème 4.5 vérifiées. Soit \mathcal{A} la famille des parties λ -mesurables A de G telles que la restriction $\mathcal{C}|_A$ soit faiblement λ -mesurable. Nous montrerons en premier lieu qu'il existe un ensemble F dans \mathcal{A} tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'ensemble $A \setminus F$ soit localement λ -négligeable.

Soit \mathcal{K} une famille des parties compactes de G satisfaisant aux conditions suivantes:

- (i) les ensembles de \mathcal{K} sont deux à deux disjoints;
 - (ii) l'ensemble $G \setminus \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ est localement λ -négligeable;
 - (iii) si Y est une partie de G telle que pour tout $K \in \mathcal{K}$, $Y \cap K$ soit λ -mesurable, alors Y est λ -mesurable
- (cf. [28], Th. 11.39; [29], Th. 19.30). Pour $K \in \mathcal{K}$, soit

$$\alpha_K = \sup \{ \lambda(A \cap K) : A \in \mathcal{A} \};$$

choisissons une suite $(F_{K,n})$ d'ensembles de \mathcal{A} de telle sorte que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F_{K,n} \cap K) = \alpha_K;$$

il est clair que l'ensemble $F_K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_{K,n} \cap K)$ appartient à \mathcal{A} et qu'on a $\lambda(F_K) = \alpha_K$. Soit $F = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} F_K$. Il est immédiat que l'ensemble F est λ -mesurable et qu'il appartient à \mathcal{A} . On vérifie sans peine que si $A \in \mathcal{A}$, alors, pour tout $K \in \mathcal{K}$, $(A \setminus F) \cap K$ est λ -négligeable. Par suite, $A \setminus F$ est localement λ -négligeable et on constate que l'ensemble F répond à la question.

Cela posé, notons que quels que soient $b \in G$ et $x, y \in \mathfrak{S}$, la restriction à $F - b$ de la fonction $a \rightarrow (\mathcal{C}(a + b)x, y)$ ainsi que la restriction à

E de la fonction $a \rightarrow (\mathcal{C}(a)\mathcal{C}(b)x, y)$ est λ -mesurable, si bien que, compte tenu de (0.1), la restriction à $(F-b) \cap E$ de la fonction $a \rightarrow (\mathcal{C}(a-b)x, y)$ est λ -mesurable. L'ensemble $((F-b) \cap E) - b$ appartient donc à \mathcal{A} et on a

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot (((F-b) \cap E) \setminus ((F+b) \cap E)) \\ &= \lambda \cdot (((F-b) \cap E) \setminus (F+b)) \\ &= \lambda \cdot (((F-b) \cap E) - b) \setminus F = 0. \end{aligned}$$

De même on a

$$\lambda \cdot (((F+b) \cap E) \setminus ((F-b) \cap E)) = 0.$$

Dès lors, compte tenu de ce que le groupe G jouit de la propriété (D), la Proposition 4.1 assure qu'il existe un sous-groupe ouvert G_0 de G , engendré par une partie compacte S de E de mesure de Haar positive, tel que chacune des restrictions $T_b \mathcal{C} | S$ ($b \in G_0$) soit faiblement λ -mesurable.

D'après le Théorème 3.1, il existe une représentation bornée \mathcal{G} de G dans \mathfrak{H} telle que la fonction cosinus \mathcal{C} se mette sous la forme (3.1). Quitte à substituer au produit scalaire un produit scalaire équivalent, on peut supposer que la représentation \mathcal{G} est unitaire (cf. la Démonstration du Théorème 3.1). Cela étant, pour tout $x \in \mathfrak{H}$, la fonction $a \rightarrow (\mathcal{G}(a)x, x)$ est de type positif et il en est de même de sa restriction à G_0 . La Proposition 4.2 implique que pour tout $x \in \mathfrak{H}$, la restriction à G_0 de la fonction $a \rightarrow (\mathcal{G}(a)x, x)$ est limite uniforme de combinaisons linéaires finies des restrictions à G_0 des fonctions $a \rightarrow (\mathcal{C}(a+b)x, x)$ ($b \in G_0$). Compte tenu de ce qui précède, on voit que pour tout $x \in \mathfrak{H}$, la restriction à S de la fonction $a \rightarrow (\mathcal{G}(a)x, x)$ est λ -mesurable. Par la formule de polarisation, on en conclut que la restriction $\mathcal{G} | S$ est faiblement λ -mesurable.

Soit \mathfrak{B} la famille des parties λ -mesurables B de G telles que la restriction $\mathcal{G} | B$ soit faiblement λ -mesurable. Reprenant l'argument utilisé ci-dessus, on constate qu'il existe un ensemble T dans \mathfrak{B} tel que pour tout $B \in \mathfrak{B}$, l'ensemble $B \setminus T$ soit localement λ -négligeable. Puisque pour $a, b \in G$ et $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$(\mathcal{G}(a+b)x, y) = (\mathcal{G}(a)\mathcal{G}(b)x, y),$$

alors, pour tout $b \in G$, $T+b$ appartient à \mathfrak{B} et on voit immédiatement que $\lambda \cdot ((T+b)\Delta T) = 0$. Vu que $S \in \mathfrak{B}$, l'ensemble T n'est pas localement λ -négligeable et, d'après la Proposition 4.3, l'ensemble $G \setminus T$ est locale-

ment λ -négligeable. Ainsi, la représentation \mathcal{G} est faiblement λ -mesurable et, en conséquence, la fonction cosinus \mathcal{C} l'est aussi.

La démonstration est achevée.

5. Caractérisation des familles composées d'opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Hilbert, deux à deux permutables, semblables par une même similitude à des opérateurs hermitiens

5.1. (h) caractéristique

Soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert, $(S_j)_{j \in J}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

On appelle (h) caractéristique de $(S_j)_{j \in J}$ et on note $h((S_j)_{j \in J})$ le nombre (fini ou non):

$$\inf \{ \|T\| \|T^{-1}\| : T, T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \\ \text{et } TS_j T^{-1} \text{ est hermitien pour tout } j \in J \},$$

où on convient que $\inf \emptyset = +\infty$.

La valeur de $h((S_j)_{j \in J})$ ne change pas si la borne supérieure est étendue exclusivement à des opérateurs strictement positifs convenables; en effet, si, pour un opérateur inversible T de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, les $TS_j T^{-1}$ ($j \in J$) sont hermitiens, alors il en est de même des $|T|^{1/2} S_j |T|^{-1/2}$ ($j \in J$), $|T|$ étant la racine carrée strictement positive de T^*T , et on a $\|T\| = \||T|\|$.

La relation suivante subsiste:

$$h((S_j)_{j \in J}) = \sup \{ h((S_j)_{j \in I}) : I \subset J \text{ et } I \text{ est fini} \}. \quad (5.1)$$

En effet, l'inégalité « \geq » étant évidente, pour établir l'inégalité opposée, supposons l'expression au second membre finie et inférieure à un nombre strictement positif C . Quelle que soit la partie finie I de J , on peut choisir un opérateur strictement positif T_I de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ de telle sorte que l'on ait $C^{-1} \text{id}_{\mathfrak{H}} \leq T_I \leq \text{id}_{\mathfrak{H}}$ et que chacun des $T_I S_j T_I^{-1}$ ($j \in I$) soit hermitien. Soit \mathfrak{F} l'ensemble des parties finies de J . Ordonné par inclusion, \mathfrak{F} est filtrant. Comme la boule unité de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ est compacte pour la topologie faible des opérateurs, il existe $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ faiblement adhérent à la famille filtrante $(T_I)_{I \in \mathfrak{F}}$, et c'est clairement un opérateur strictement positif vérifiant $C^{-1} \text{id}_{\mathfrak{H}} \leq T \leq \text{id}_{\mathfrak{H}}$ et tel que chacun des $TS_j T^{-1}$ ($j \in J$) soit hermitien. D'où (5.1).

Un problème qui se pose naturellement est l'estimation « effective » de la (h) caractéristique d'une famille finie quelconque d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert. Pour une famille composée d'opérateurs

qui commutent, on donnera ci-dessous quelques estimées qui feront apparaître l'utilité d'opérer des fonctions cosinus hilbertiennes définies dans \mathbf{Z}^k ($k \in \mathbf{N}$). C'est à partir de ces estimées qu'on obtiendra une simple caractérisation intrinsèque des familles composées d'endomorphismes hilbertiens bornés, deux à deux permutables et semblables, par une même similitude, à des opérateurs hermitiens. Ces estimées redonneront-elles aussi un résultat, dû à Dixmier et Wermer, relatif aux familles finies composées d'algèbres booléennes bornées de projecteurs dans un espace de Hilbert, les projecteurs de toutes les algèbres étant deux à deux permutables.

5.2. Fonctions cosinus « universelles » dans \mathbf{Z}^k

On introduit dans ce paragraphe certaines fonctions cosinus dans \mathbf{Z}^k ($k \in \mathbf{N}$), à valeurs dans un anneau, qui vont jouer le rôle d'objets « universels » pour des fonctions cosinus opératorielles qui apparaîtront ultérieurement.

Soit $n \in \mathbf{N}$; on note $T_n^0(X)$ le polynôme de Tschebycheff de première espèce, de degré n :

$$T_n^0(X) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k, \quad (5.2)$$

et $T_n^1(X)$ le polynôme de Tschebycheff de seconde espèce, de degré n :

$$T_n^1(X) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} X^{n-2k-1} (X^2 - 1)^k. \quad (5.3)$$

On pose

$$T_0^0(X) = 1, \quad T_0^1(X) = 0,$$

et pour tout entier négatif n

$$T_{-n}^0(X) = T_n^0(X),$$

$$T_{-n}^1(X) = -T_n^1(X).$$

On sait que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$T_n^0(x) = \cos(n \operatorname{arc} \cos x), \quad (5.4)$$

$$(1 - x^2)^{1/2} T_n^1(x) = \sin(n \operatorname{arc} \cos x). \quad (5.5)$$

Soient $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_{2k}]$ l'anneau des polynômes à $2k$ indéterminées ($k \in \mathbf{N}$) et à coefficients entiers, J_k l'idéal dans $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_{2k}]$ engendré par les polynômes $1 - X_j^2 - X_{k+j}^2$ ($1 \leq j \leq k$), A_k l'anneau quotient $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_{2k}]/J_k$. Pour $1 \leq j \leq k$, on notera s_j l'image canonique dans A_k de X_j , et u_j l'image canonique dans A_k de X_{k+j} .

Nous allons montrer que l'application qui à tout $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{Z}^k$ fait correspondre

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 0, 1 \\ i_1 + \dots + i_k \equiv 0 \pmod{2}}} i_1^{i_1} \dots i_k^{i_k} T_{n_1}^{i_1}(s_1) \dots T_{n_k}^{i_k}(s_k) u_1^{i_1} \dots u_k^{i_k}, \quad (5.6)$$

élément de A_k , est une fonction cosinus définie dans \mathbf{Z}^k à valeurs dans A_k (l'extension de la notion de fonction cosinus au cas d'une fonction cosinus prenant ses valeurs dans un anneau se fait d'une façon évidente).

Pour $1 \leq j \leq k$, notons t_j la fonction coordonnée $[-1, 1]^k \ni (t_1, \dots, t_k) \rightarrow t_j \in [-1, 1]$, et notons v_j la racine carrée positive de la fonction $1 - t_j^2$. Soit $\mathbf{Z}[t_1, \dots, t_k, v_1, \dots, v_k]$ l'algèbre sur \mathbf{Z} engendrée par les fonctions $t_1, \dots, t_k, v_1, \dots, v_k$.

Nous montrerons en premier lieu que l'application envoyant t_j en s_j et v_j en u_j ($1 \leq j \leq k$) peut se prolonger en un homomorphisme de \mathbf{Z} -algèbres de $\mathbf{Z}[t_1, \dots, t_k, v_1, \dots, v_k]$ dans A_k (ce sera manifestement un isomorphisme de \mathbf{Z} -algèbres).

Pour tout multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbf{N} \cup \{0\})^k$ et tout $x = (x_1, \dots, x_k)$ dans le produit de k exemplaires d'une algèbre unifère, on écrira x^α au lieu de $x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}$.

On montre avant tout que les fonctions v^β ($\beta \in \{0, 1\}^k$) forment une base de l'algèbre $\mathbf{Z}[t_1, \dots, t_k, v_1, \dots, v_k]$ lorsqu'on considère cette dernière en tant que $\mathbf{Z}[t_1, \dots, t_k]$ -module. Soit

$$\sum_{\beta \in \{0, 1\}^k} p_\beta v^\beta = 0$$

avec $p_\beta \in \mathbf{Z}[t_1, \dots, t_k]$; cela peut s'écrire

$$q + v_k r = 0 \quad (5.7)$$

où $q, r \in \mathbf{Z}[t_1, \dots, t_k, v_1, \dots, v_{k-1}]$. Il est clair qu'on peut choisir une branche de la racine carrée de $1 - t_k^2$ de telle sorte que, pour (t_1, \dots, t_{k-1}) arbitrairement fixé dans $[-1, 1]^{k-1}$, l'expression au premier membre de (5.7) définisse une fonction analytique en t_k dans un voisinage ouvert de l'axe réel. Il est évident que cette fonction est identiquement nulle. Or, pour (t_1, \dots, t_{k-1}) fixé dans $[-1, 1]^{k-1}$, q et r sont des polynômes réels en t_k , tandis que la fonction v_k est imaginaire pour $t_k \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$. Donc q et r s'annulent dans $\{(t_1, \dots, t_{k-1})\} \times (\mathbf{R} \setminus [-1, 1])$, puis s'annu-

lent-ils dans $\{(t_1, \dots, t_{k-1})\} \times \mathbf{R}$, en particulier dans $\{(t_1, \dots, t_{k-1})\} \times [-1, 1]$. Vu l'arbitraire de (t_1, \dots, t_{k-1}) en tant qu'élément de $[-1, 1]^{k-1}$, les fonctions q et r sont nulles dans $[-1, 1]^k$. Utilisant le même procédé d'élimination à q et r , et ensuite aux fonctions s'en déduisant successivement, on constate qu'on a $p_\beta = 0$ pour tout $\beta \in \{0, 1\}^k$.

Pour établir l'existence de l'homomorphisme cherché, il suffit de montrer que la relation

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} t^\alpha v^\beta = 0 \quad (a_{\alpha, \beta} \in \mathbf{Z}),$$

la somme portant sur un nombre fini d'indices α et β dans $(\mathbf{N} \cup \{0\})^k$, entraîne

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} s^\alpha u^\beta = 0. \quad (5.8)$$

Puisque, pour $1 \leq j \leq k$, on a à la fois $v_j^2 = 1 - t_j^2$ et $u_j^2 = 1 - s_j^2$, on peut supposer que les indices β dans les deux sommes ci-dessus ne valent que 0 ou 1. Cela posé, il découle de la remarque précédente que

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha, \beta} t^\alpha = 0$$

pour tout β . Comme les fonctions t_1, \dots, t_k sont algébriquement indépendantes sur \mathbf{Z} , on a en effet $a_{\alpha, \beta} = 0$ pour tout α et tout β , ce qui assure la validité de (5.8). D'où l'existence de l'homomorphisme désiré.

Cela étant, posons pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout $x \in \mathbf{R}$

$$f_n^0(x) = \cos nx,$$

$$f_n^1(x) = \sin nx.$$

On aura besoin de l'identité trigonométrique

$$\begin{aligned} & \cos(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 0, 1 \\ i_1 + \dots + i_k \equiv 0 \pmod{2}}} i_1^{i_1 + \dots + i_k} f_{n_1}^{i_1}(x_1) \dots f_{n_k}^{i_k}(x_k) \end{aligned} \quad (5.9)$$

valable pour tout $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{Z}^k$ et tout $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$. Pour l'établir, notons que l'expression au second membre s'écrit sous la forme

$$2^{-k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 0, 1 \\ i_1 + \dots + i_k \equiv 0 \pmod{2}}} (e^{i_1 n_1 x_1} + (-1)^{i_1} e^{-i_1 n_1 x_1}) \dots (e^{i_k n_k x_k} + (-1)^{i_k} e^{-i_k n_k x_k}).$$

Compte tenu de cela, on établit (5.9) à l'aide des identités:

$$\sum_{\substack{j_1, \dots, j_k = 0, 1 \\ j_1 + \dots + j_k \equiv 0 \pmod{2}}} (-1)^{j_1 + \dots + j_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } l < k \\ 2^{k-1} & \text{si } l = k \end{cases},$$

dont la facile preuve est laissée au lecteur.

En substituant dans (5.9) $\arccos x_j$ à x_j ($1 \leq j \leq k$), on obtient, compte tenu de (5.4) et (5.5),

$$\begin{aligned} & \cos(n_1 \arccos t_1 + \dots + n_k \arccos t_k) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 0, 1 \\ i_1 + \dots + i_k \equiv 0 \pmod{2}}} i_1^{i_1} \dots i_k^{i_k} T_{n_1}^{i_1}(t_1) \dots T_{n_k}^{i_k}(t_k) v_{n_1}^{i_1} \dots v_{n_k}^{i_k}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Il est clair que l'expression au second membre définit une fonction cosinus dans \mathbf{Z}^k à valeurs dans $\mathbf{Z}[t_1, \dots, t_k, v_1, \dots, v_k]$.

En combinant ce dernier résultat avec celui qui précède, on constate que l'application donnée par (5.6) est une fonction cosinus de \mathbf{Z}^k dans A_k .

5.3. Fonctions cosinus opératorielles dans \mathbf{Z}^k

Soient H un espace de Hilbert, $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ une famille finie d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ deux à deux permutables.

On dira qu'une fonction cosinus \mathcal{C} définie dans \mathbf{Z}^k , à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, est associée à $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ si

$$\mathcal{C}(1, 0, 0, \dots, 0) = S_1,$$

$$\mathcal{C}(0, 1, 0, \dots, 0) = S_2,$$

...

$$\mathcal{C}(0, 0, \dots, 0, 1) = S_k.$$

Soit $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$; il va de soi que la seule fonction cosinus associée à S s'écrit

$$n \rightarrow T_n^0(S) \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Supposons que pour une famille $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ deux à deux permutables, il existe une famille $(U_j)_{1 \leq j \leq k}$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ tels que

$$U_j^2 + S_j^2 = \text{id}_{\mathfrak{H}}$$

pour $1 \leq j \leq k$ et tels que les S_i, U_j ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$) commutent. L'application qui à tout $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{Z}^k$ fait correspondre

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k = 0, 1 \\ i_1 + \dots + i_k \equiv 0 \pmod{2}}} i_1^{n_1} \dots i_k^{n_k} T_{n_1}^{i_1}(S_1) \dots T_{n_k}^{i_k}(S_k) U_{n_1}^{i_1} \dots U_{n_k}^{i_k} \quad (5.11)$$

est une fonction cosinus associée à $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$. En effet, c'est l'image de la fonction cosinus donnée par (5.6) par l'homomorphisme unifié de A_k dans l'algèbre unifiée engendrée dans $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ par les S_i, U_j ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$), qui envoie s_j en S_j et u_j en U_j pour $1 \leq j \leq k$.

Etant donnée une famille $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, deux à deux permutables, semblables à des opérateurs hermitiens et dont les rayons spectraux ne dépassent pas 1, on introduit la fonction cosinus canoniquement associée à $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$. Pour $1 \leq j \leq k$, soit T_j un opérateur inversible de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ tel que $T_j S_j T_j^{-1}$ soit hermitien. Comme, pour $1 \leq j \leq k$, on a

$$\|T_j S_j T_j^{-1}\| = r(T_j S_j T_j^{-1}) = r(S_j) \leq 1,$$

on peut extraire la racine carrée positive V_j de l'opérateur positif $\text{id}_{\mathfrak{H}} - (T_j S_j T_j^{-1})^2$. On vérifie aisément que, pour $1 \leq j \leq k$, l'opérateur $U_j = T_j^{-1} V_j T_j$ est la racine carrée de $\text{id}_{\mathfrak{H}} - S_j^2$ qui peut se mettre sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} S_j^{2n},$$

la série étant convergente pour la topologie normique. Il est évident que les S_i, U_j ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$) commutent. La fonction cosinus définie par (5.11) à partir des U_1, \dots, U_k comme ci-dessus c'est précisément ce qu'on va appeler fonction cosinus canoniquement associée à $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$.

5.4. Principal résultat

Le résultat qui suit constitue le centre de cette partie.

THÉORÈME 5.1: *Soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert, $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ une famille finie d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ deux à deux permutables. S'il existe une fonction cosinus bornée \mathcal{C} associée à $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$, alors les rayons spectraux des S_1, \dots, S_k sont inférieurs ou égaux à 1, les S_1, \dots, S_k sont semblables par une même similitude T à des opérateurs hermitiens et on a*

$$\|T\| \|T^{-1}\| \leq 2(1 + 2\|\mathcal{C}\|)^3 \|\mathcal{C}\|^5.$$

Réciproquement, si les S_1, \dots, S_k sont semblables par une même similitude T à des opérateurs hermitiens et si leurs rayons spectraux sont inférieurs ou égaux à 1, alors la fonction cosinus canoniquement associée à $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ est bornée et sa norme ne dépasse pas $\|T\| \|T^{-1}\|$.

Démonstration: La première assertion s'obtient en rapprochant le Théorème 2.1, la formule (2.9) et le Corollaire 1.2.

Pour établir la seconde, supposons qu'il existe un opérateur inversible T de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ tel que les opérateurs $\bar{S}_j = TS_jT^{-1}$ ($1 \leq j \leq k$) soient hermitiens; supposons, en outre, que les rayons spectraux des S_1, \dots, S_k soient inférieurs ou égaux à 1. Alors, pour $1 \leq j \leq k$, on a

$$\|\bar{S}_j\| = r(\bar{S}_j) = r(S_j) \leq 1.$$

Soit E la mesure spectrale borélienne sur $[-1, 1]^k$, à valeurs dans une algèbre booléenne de projecteurs orthogonaux dans \mathfrak{H} , associée à la famille $(\bar{S}_j)_{1 \leq j \leq k}$ toute entière. Quel que soit $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{Z}^k$, on pose

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}(n_1, \dots, n_k) \\ = \int_{[-1, 1]^k} \cos(n_1 \arccos t_1 + \dots + n_k \arccos t_k) dE(t_1, \dots, t_k). \end{aligned}$$

Il est immédiat que $\bar{\mathcal{C}}$ est une fonction cosinus dans \mathbf{Z}^k , de norme ≤ 1 . Compte tenu de (5.10), on voit aussitôt que $(n_1, \dots, n_k) \rightarrow T^{-1} \bar{\mathcal{C}}(n_1, \dots, n_k) T$ est la fonction cosinus canoniquement associée à $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$, de norme $\leq \|T\| \|T^{-1}\|$.

Cela achève la démonstration.

Etant donné un espace de Hilbert \mathfrak{H} et une famille finie $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ deux à deux permutables, on peut introduire la (c) caractéristique de $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$, notée $c((S_j)_{1 \leq j \leq k})$, en posant

$$\begin{aligned} c((S_j)_{1 \leq j \leq k}) = \inf \{ \|\mathcal{C}\| : \mathcal{C} \text{ est une fonction cosinus} \\ \text{bornée associée à } (S_j)_{1 \leq j \leq k} \}, \end{aligned}$$

où on convient que $\inf \emptyset = +\infty$.

Avec cette notion, le contenu du Théorème 5.1 peut se résumer, en gros, en disant que pour une famille $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert, deux à deux permutables, tels que $r(S_1), \dots, r(S_k) \leq 1$, la (c) caractéristique et la (h) caractéristique sont toutes équivalentes; plus précisément, en écrivant c et h respectivement au lieu de $c((S_j)_{1 \leq j \leq k})$ et $h((S_j)_{1 \leq j \leq k})$, on a

$$c \leq h \leq 2(1 + 2c)^3 c^5.$$

Le corollaire suivant est immédiat:

COROLLAIRE 5.1: *Pour qu'un opérateur linéaire borné S dans un espace de Hilbert, de rayon spectral strictement positif, soit semblable à un opérateur hermitien, il faut et il suffit que la famille $(T_n^0(S/r(S)))_{n \in \mathbb{N}}$ soit équibornée.*

Remarquons au passage qu'un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert, de rayon spectral nul, est semblable à un opérateur hermitien si et seulement si c'est l'opérateur nul.

Joint à (5.1), le Théorème 5.1 entraîne également le corollaire que voici:

COROLLAIRE 5.2: *Soit $(S_j)_{j \in J}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert, deux à deux permutables, non nuls, semblables à des opérateurs hermitiens. Pour qu'il existe une similitude par laquelle chacun des S_j ($j \in J$) soit semblable à un opérateur hermitien, il faut et il suffit que la famille des fonctions cosinus canoniquement associées à toutes les sous-familles finies de $(S_j/r(S_j))_{j \in J}$ soit équibornée.*

Signalons enfin encore un autre résultat qui peut se déduire directement du Théorème 5.1: si $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ est une famille finie d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Hilbert deux à deux permutables, alors

$$\max_{1 \leq j \leq k} h(S_j) < +\infty \Leftrightarrow h((S_j)_{1 \leq j \leq k}) < +\infty.$$

C'est un cas particulier d'un théorème de Wermer qui indirectement, sous forme de corollaire d'un résultat plus général, sera retrouvé au paragraphe qui suit.

5.5. Conclusion

Rappelons qu'une famille \mathcal{A} de projecteurs dans un espace de Banach E deux à deux permutables est dite algèbre booléenne de projecteurs dans E si les conditions suivantes sont vérifiées:

- (i) $0, \text{id}_E \in \mathcal{A}$,
- (ii) $P, Q \in \mathcal{A} \Rightarrow PQ, P + Q - PQ \in \mathcal{A}$.

On vérifie directement qu'en prenant 0 pour élément le plus petit et id_E pour élément le plus grand de \mathcal{A} , PQ pour borne inférieure et $P + Q - PQ$ pour borne supérieure de P et Q quelconques de \mathcal{A} et enfin $\text{id}_E - P$ pour complémentaire de P quelconque de \mathcal{A} , \mathcal{A} devient une algèbre booléenne au sens habituel.

Une algèbre booléenne de projecteurs \mathcal{A} est dite bornée si

$$\sup\{\|P\| : P \in \mathcal{A}\} < +\infty.$$

Dans la suite, la borne supérieure ci-dessus sera notée $\|\mathcal{A}\|$.

A partir du Théorème 5.1 on peut retrouver le théorème suivant, dû à Dixmier et Wermer ([10], [71]; cf. aussi [12], Lem. 15.6.2):

THÉORÈME 5.2 (Dixmier-Wermer): *Soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert, $(\mathcal{A}_j)_{1 \leq j \leq m}$ une famille finie d'algèbres booléennes bornées de projecteurs dans \mathfrak{H} telle que tous les deux projecteurs de $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^m \mathcal{A}_j$ commutent. Alors il existe une similitude par laquelle chacun des projecteurs de \mathcal{A} soit semblable à un projecteur orthogonal.*

DÉMONSTRATION: Notons en premier lieu qu'en vertu de (5.2) et (5.3), si P est un projecteur dans \mathfrak{H} , alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$T_{4n}^0(P) = \text{id}_{\mathfrak{H}}, \quad (5.12)$$

$$T_{4n+2}^0(P) = 2P - \text{id}_{\mathfrak{H}}, \quad (5.13)$$

$$(\text{id}_{\mathfrak{H}} - P)T_{2n}^1(P) = 0. \quad (5.14)$$

Étant donnés des projecteurs P_1, \dots, P_k de \mathcal{A} , soit \mathcal{C} la fonction cosinus associée à $(P_j)_{1 \leq j \leq k}$, ayant pour expression (5.11) avec $U_j = \text{id}_{\mathfrak{H}} - P_j$ ($1 \leq j \leq k$). D'après (5.14), quels que soient $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{Z}$, on a

$$\mathcal{C}(2n_1, \dots, 2n_k) = T_{2n_1}^0(P_1) \dots T_{2n_k}^0(P_k).$$

En vertu de (5.12) et (5.13), l'expression au second membre est soit le composé de quelques opérateurs d'entre les $2P_j - \text{id}_{\mathfrak{H}}$ ($1 \leq j \leq k$), soit l'automorphisme identique. Or, le composé des opérateurs $2P - \text{id}_{\mathfrak{H}}$, où P parcourt une sous-famille finie \mathcal{B} de \mathcal{A} , s'écrit

$$(-1)^{1 + \text{Card } \mathcal{B}} \left(2 \underset{Q \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1}{\Delta} Q - \text{id}_{\mathfrak{H}} \right) \dots \left(2 \underset{Q \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_m}{\Delta} Q - \text{id}_{\mathfrak{H}} \right),$$

les différences symétriques se rapportant aux structures booléennes des $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$, et il est clair que ce composé est majoré en norme par

$$d = \prod_{j=1}^m (2\|\mathcal{A}_j\| + 1).$$

Alors la fonction cosinus

$$(n_1, \dots, n_k) \rightarrow \mathcal{C}(2n_1, \dots, 2n_k) \quad ((n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{Z}^k),$$

associée à la famille $(2P_j - \text{id}_{\mathfrak{H}})_{1 \leq j \leq k}$, est bornée et sa norme ne dépasse pas d . D'après le Théorème 5.1, on a la majoration suivante:

$$h\left((P_j)_{1 \leq j \leq k}\right) = h\left((2P_j - \text{id}_{\mathfrak{H}})_{1 \leq j \leq k}\right) \leq 2(1 + 2d)^3 d^5.$$

Compte tenu de (5.1), on aboutit immédiatement à la conclusion.

On termine ce paragraphe en énonçant le théorème de Wermer mentionné à la fin du paragraphe précédent. Le lecteur est renvoyé à [12] (Th. 15.6.4) pour apprendre comment ramener ce résultat à celui que l'on vient de retrouver.

THÉORÈME 5.3 (Wermer): *Soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert, $(S_j)_{1 \leq j \leq k}$ une famille finie d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ deux à deux permutables et semblables à des opérateurs normaux. Alors il existe une similitude par laquelle chacun des S_j ($1 \leq j \leq k$) soit semblable à un opérateur normal.*

Bibliografie

- [1] J.A. BAKER: D'Alembert's functional equation in Banach algebras. *Acta Sci. Math.* (Szeged) 32 (1971) 225–234.
- [2] J.A. BAKER et K.R. DAVIDSON: Cosine, exponential and quadratic functions. *Glas. Math. Ser. III* 16 (1981) 269–274.
- [3] A.O. BARUT et R. RĄCZKA: *Theory of Group Representations and Applications*. Warszawa: Polish Scientific Publishers (1980).
- [4] J.J. BENEDETTO: *Spectral Synthesis*. Stuttgart: Teubner (1975).
- [5] N. BOURBAKI: *Éléments de mathématique, Intégration, Chapitre V: Intégration des mesures*. Paris: Hermann (1967).
- [6] A.B. BUCHE: On the cosine-sine operator functional equations. *Aequations Math.* 6 (1971) 231–234.
- [7] R. CHANDLER et H. SINGH: On the measurability and continuity properties of the cosine operator. *Indian J. Pure Appl. Math.* 12 (1981) 81–83.
- [8] G. DA PRATO et E. GIUSTI: Una caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte. *Boll. Un. Mat. Ital.* 22 (1967) 357–362.
- [9] M.M. DAY: Ergodic theorems for abelian semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 51 (1942) 399–412.
- [10] J. DIXMIER: Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications. *Acta Sci. Math.* (Szeged) 12 A (1950) 213–227.
- [11] R. DOSS: Approximation and representations for Fourier transforms. *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971) 211–221.
- [12] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ: *Linear Operators, Part III: Spectral Operators*. New York: Wiley-Interscience (1971).
- [13] W.F. EBERLEIN: A note on Fourier-Stieltjes transforms. *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955) 310–312.
- [14] H.O. FATTORINI: Ordinary differential equations in linear topological spaces. I. *J. Differential Equations* 5 (1968) 72–105.

- [15] H.O. FATTORINI: Ordinary differential equations in linear topological spaces. II. *J. Differential equations* 6 (1969) 50–70.
- [16] H.O. FATTORINI: Uniformly bounded cosine functions in Hilbert space. *Indiana Univ. Math. J.* 20 (1970) 411–425.
- [17] H.O. FATTORINI: Some remarks on second-order abstract Cauchy problems. *Funkcial. Ekvac.* 24 (1981) 331–344.
- [18] G.D. FAULKNER et R.W. SHONKWILER: Cosine representations of abelian $*$ -semigroups and generalized cosine operator functions. *Canad. J. Math.* 30 (1978) 474–482.
- [19] B. FUGLEDE: A commutativity theorem for normal operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 36 (1950) 35–40.
- [20] E. GIUSTI: Funzioni coseno periodiche. *Boll. Un. Mat. Ital.* 22 (1967) 478–485.
- [21] J.A. GOLDSTEIN: Semigroups and second-order differential equations. *J. Funct. Anal.* 4 (1969) 50–70.
- [22] J.A. GOLDSTEIN: On a connection between first and second order differential equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 30 (1970) 246–251.
- [23] J.A. GOLDSTEIN: On the convergence and approximation of cosine functions. *Aequationes Math.* 10 (1974) 201–205.
- [24] J.A. GOLDSTEIN, Ch. RADIN et R.E. SHOWALTER: Convergence rates of ergodic limits for semigroups and cosine functions. *Semigroup Forum* 16 (1978) 89–95.
- [25] C.C. GRAHAM et O.C. McGEHEE: *Essays in Commutative Harmonic Analysis*. New York: Springer (1979).
- [26] C.C. GRAHAM et L.T. RAMSEY: Three results on I-sets, *Colloq. Math.* (à paraître).
- [27] F.P. GREENLEAF: *Invariant Means on Topological Groups and Their Applications*. New York: Van Nostrand (1969).
- [28] E. HEWITT et K.A. ROSS: *Abstract Harmonic Analysis, Volumes I et II*. Berlin: Springer (1963 et 1970).
- [29] E. HEWITT et K. STROMBERG: *Real and Abstract Analysis*. Berlin: Springer (1969).
- [30] PL. KANNAPPAN: The functional equation $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y)$ for groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 19 (1968) 69–74.
- [31] J. KISYŃSKI: On second order Cauchy's problem in a Banach space. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 18 (1970) 371–374.
- [32] J. KISYŃSKI: On operator-valued solutions of d'Alembert's functional equation I. *Colloq. Math.* 23 (1971) 107–114.
- [33] J. KISYŃSKI: On operator-valued solutions of d'Alembert's functional equation II. *Studia Math.* 42 (1972) 43–66.
- [34] J. KISYŃSKI: On cosine operator functions and one-parameter groups of operators. *Studia Math.* 44 (1972) 93–105.
- [35] Y. KONISHI: Cosine functions of operators in locally convex spaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math.* 18 (1971/72) 443–463.
- [36] S. KUREPA: A cosine functional equation in n -dimensional vector space. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* 13 (1958) 169–189.
- [37] S. KUREPA: A cosine functional equation in Hilbert space. *Canad. J. Math.* 19 (1960) 45–50.
- [38] S. KUREPA: On some functional equations in Banach spaces. *Studia Math.* 19 (1960) 149–158.
- [39] S. KUREPA: A cosine functional equation in Banach algebras. *Acta Sci. Math.* (Szeged) 23 (1962) 255–267.
- [40] S. KUREPA: Uniformly bounded cosine function in a Banach space. *Math. Balkanica* 2 (1972) 109–115.
- [41] S. KUREPA: Weakly measurable selfadjoint cosine function. *Glas. Mat. Ser. III* 8 (1973) 73–79.
- [42] S. KUREPA: Decomposition of weakly measurable semigroups and cosine operator functions. *Glas. Mat. Ser. III* 11 (1976) 91–95.

- [43] S. KUREPA: Semigroups and cosine functions. Functional Analysis; Proceedings of a conference held at Dubrovnik, Yugoslavia, 1981. *Lecture Notes in Math.* 948 (1982) 48–72.
- [44] D. LUTZ: Which operators generate cosine operator functions? *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 63 (1978) 314–317.
- [45] D. LUTZ: Compactness properties of operator cosine functions. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 2 (1980) 277–280.
- [46] D. LUTZ: Über operatorwertige Lösungen der Funktionalgleichung des Cosinus. *Math. Z.* 171 (1980) 233–245.
- [47] D. LUTZ: Periodische operatorwertige Cosinusfunktionen. *Resultate Math.* 4 (1981) 75–83.
- [48] D. LUTZ: On bounded time-dependent perturbations of operator cosine functions. *Aequationes Math.* 23 (1981) 197–203.
- [49] D. LUTZ: Strongly continuous operator cosine functions. Functional Analysis; Proceedings of a conference held at Dubrovnik, Yugoslavia, 1981. *Lecture Notes in Math.* 948 (1982) 73–97.
- [50] D. LUTZ: Über die Konvergenz operatorwertiger Cosinusfunktionen mit gestörtem infinitesimalen Erzeuger. *Period. Math. Hungar.* 14 (1983) 101–105.
- [51] G. MALTESE: Spectral representations for solutions of certain abstract functional equations. *Compositio Math.* 15 (1962) 1–22.
- [52] G. MALTESE: Spectral representations for some unbounded normal operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* 110 (1964) 79–87.
- [53] S.A. MORRIS: *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*. Cambridge: Cambridge University Press (1977).
- [54] B. NAGY: On the generators of cosine operator functions. *Publ. Math. Debrecen* 21 (1974) 151–154.
- [55] B. NAGY: On cosine operator functions in Banach spaces. *Acta Sci. Math.* (Szeged) 36 (1974) 281–289.
- [56] B. NAGY: Cosine operator functions and the abstract Cauchy problem. *Period. Math. Hungar.* 7 (1976) 213–217.
- [57] B. NAGY: Approximation theorems for cosine operator functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 29 (1977) 69–76.
- [58] S. NELSON et R. TRIGGIANI: Analytic properties of cosine operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* 74 (1979) 101–104.
- [59] C.R. PUTNAM: On normal operator in Hilbert space. *Amer. J. Math.* 73 (1951) 357–362.
- [60] S.M. RANKIN III: A remark on cosine families. *Proc. Amer. Math. Soc.* 79 (1980) 376–378.
- [61] M. ROSENBLUM: On a theorem of Fuglede and Putnam. *J. London Math. Soc.* 33 (1958) 376–377.
- [62] N. SARAPA: A note on the cosine equation for probability on compact semigroups. *Glas. Mat. Ser. III* 15 (1980) 383–385.
- [63] M. SOVA: Cosine operator functions. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 49 (1966) 1–47.
- [64] M. SOVA: Semigroups and cosine functions of normal operators in Hilbert spaces. *Časopis Pěst. Mat.* 93 (1968) 437–458.
- [65] T. TAKENAKA et N. OKAZAWA: A Phillips-Miyadera type perturbation theorem for cosine functions of operators. *Tōhoku Math. J.* 30 (1978) 107–115.
- [66] C.C. TRAVIS et G.F. WEBB: Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families. *Houston J. Math.* 3 (1977) 555–567.
- [67] C.C. TRAVIS et G.F. WEBB: Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 32 (1978) 75–96.
- [68] C.C. TRAVIS et G.F. WEBB: An abstract second order semilinear Volterra integrodifferential equation. *SIAM J. Math. Anal.* 10 (1978) 412–424.

- [69] S. TYMOWSKI: On the analogue of the formula $\cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$ for operator cosine functions. *Comment. Math. Prace Mat.* 23 (1983) 173–182.
- [70] F. VAJZOVIĆ: Einige Funktionalgleichungen im Fréchet'schen Raum. *Glas. Mat. Ser. III* 3 (1968) 19–40.
- [71] J. WERMER: Commuting spectral measures on Hilbert space. *Pacific J. Math.* 4 (1954) 355–361.

(Oblatum 20-III-1984)

Institut de Mathématique
Université de Varsovie
Patac Kultury i Nauki, IX p.
PL-00-91 Warszawa
Pologne