COMPOSITIO MATHEMATICA

D. BARLET

Contribution effective dans le réel

Compositio Mathematica, tome 56, nº 3 (1985), p. 351-359
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__56_3_351_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica 56 (1985) 351–359.
© 1985 Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht. Printed in The Netherlands.

CONTRIBUTION EFFECTIVE DANS LE RÉEL

D. Barlet

Introduction

Considérons un germe de fonction analytique réelle positive $f_{\mathbb{R}}$: $(\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}^+, 0)$ et notons par f: $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ son complexifié. Le théorème de contribution effective que l'on se propose d'établir dans cet article donne une condition suffisante pour que le prolongement méromorphe de la distribution $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\square$ admette effectivement un pôle d'ordre au moins k en un point de la forme $-u-\nu$ pour $\nu \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. Ce théorème est directement inspiré de son analogue complexe. Il en diffère de deux façons; la première est que, contrairement au cas complexe, l'existence d'un block de Jordan (k, k) relatif à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ pour la monodromie agissant sur la cohomologie de la fibre de Milnor (complexe) est insuffisante: on doit tenir compte de la position du réel dans le complexe (et plus précisément de la position de l'image de la cohomologie de la fibre de Milnor réelle par rapport au bloc de Jordan considéré). L'autre différence est une simplicité beaucoup plus grande de la méthode (commune) utilisée pour la démonstration, due à la disparition des termes "anti-holomorphes" dans le cas réel.

Terminons cette introduction en faisant remarquer que les estimations obtenues dans [3] sur le "décalage maximal" des pôles vers la gauche dans le cas complexe (pour le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$) donnent immédiatement les résultats analogues dans le cas réel. Nous renvoyons donc à cet article le lecteur intéressé par des informations sur ce point.

Nous nous proposons de prouver le résultat suivant:

THÉORÈME: *Soit f: $X \to D$ une situation de Milnor, avec $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Supposons que $f \mid X_{\mathbb{R}} = X \cap \mathbb{R}^{n+1}$ prenne ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soit $s_0 \in D^* \cap (\mathbb{R}^+)$ et notons par $X(s_0)$ la fibre de f and s_0 (la fibre de Milnor complexe) et $X_{\mathbb{R}}(s_0) = X(s_0) \cap \mathbb{R}^{n+1}$ (la fibre de Milnor réelle: df ne s'annulant pas sur $f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$, $\mathbb{R}^{n+1} \cap f^{-1}(\mathbb{R}^{+*}) \to \mathbb{R}^{+*} \cap D$ est une fibration (triviale) C^{∞} (*)).*

Soit T la monodromie agissant sur $H^*(X(s_0), \mathbb{C})$ en degrés > 0 et supposons que T admette un bloc de Jordan de taille (k, k) $e_1(s_0) \dots e_k(s_0)$

(*) en effet si $g = f\mid_{X_{\mathbb{R}}}$, on a $df\mid_{X_{\mathbb{R}}} = dg \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{C}}$.

pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$. *Soit* i: $X_{\mathbb{R}}(s_0) \hookrightarrow X(s_0)$ *l'injection naturelle. Si on a* $e_h(s_0) \notin i(H_*(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C}))^{\perp}$ *(l'orthogonalité ici est prise au sens de la dualité homologie/cohomologie sur* $X(s_0)$*) alors le prolongement méromorphe de* $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\square$ *admet un pôle d'ordre* $\geqslant k-h+1$ *en* $-u-\nu$ *pour* $\nu \in \mathbb{N}$, ν *assez grand.*

DÉMONSTRATION: commençons par traiter le cas $k = h = 1$.

Soit $\omega \in \Omega^p(X)$ ($p > 0$) telle que l'on ait

$$\mathrm{d}\omega = (m+u)\frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \omega \qquad \text{sur } X \text{ avec } 0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 1,\ m \in \mathbb{N}$$

et $\omega\,|_{X(s_0)} = e_1(s_0)$ (voir Lemme A de [1])

Pour $\theta \in C_c^{\infty}(X_{\mathbb{R}})$ de degré $n+1-p$ posons

$$\langle T, \theta \rangle = Pf\left(\lambda = -m-u,\ \int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\omega \wedge \theta\right).$$

Ceci définit un courant de degré p sur $X_{\mathbb{R}}^{(**)}$.

LEMME 1: *Si* $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\omega \wedge \theta$ *n'a jamais de pôle en* $\lambda = -m-u-1$ *pour tout* $\theta \in C_c^{\infty}(X_{\mathbb{R}})$, *alors on a* $dT = 0$ *sur* $X_{\mathbb{R}}$.

PREUVE:

Pour $\varphi \in C_c^{\infty}(X_{\mathbb{R}})$ de degré $n-p$ on a

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}T, \varphi \rangle &= (-1)^{p+1}\langle T, \mathrm{d}\varphi \rangle \\ &= (-1)^{p+1} Pf\left(\lambda = -m-u,\ \int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\omega \wedge \mathrm{d}\varphi\right).\end{aligned}$$

Pour $\mathrm{Re}(\lambda) \gg 0$ on aura

$$\begin{aligned}(-1)^p \int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\omega \wedge \mathrm{d}\varphi &= \int_{X_{\mathbb{R}}} \mathrm{d}(f^{\lambda}\omega \wedge \varphi) \\ &\quad - (\lambda+m+u)\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \omega \wedge \varphi \\ &= -(\lambda+m+u)\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \omega \wedge \varphi\end{aligned}$$

par Stokes. Si $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}(\mathrm{d}f/f) \wedge \omega \wedge \varphi$ n'a pas de pôle en $\lambda = -m-u$ on aura donc $\langle \mathrm{d}T, \varphi \rangle = 0$ ce qui prouve le lemme 1.

(**) nous laissons à titre d'exercice l'analogue réel du lemme 1 de [1] qui est classique.

Supposons maintenant que $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\omega \wedge \theta$ n'ait jamais de pôle en $\lambda = -m - u - 1$ pour tout $\theta \in C_c^{\infty}(X_{\mathbb{R}})$ de degré $n - p + 1$. Alors on a $\mathrm{d}T = 0$ sur $X_{\mathbb{R}}$ et donc $T = \mathrm{d}\mathscr{U}$ sur $X_{\mathbb{R}}$ où $\mathscr{U}$ est un courant de degré $p - 1$ sur $X_{\mathbb{R}}$ (on a $p \geqslant 1$ et $X_{\mathbb{R}}$ est un ouvert contractible de $\mathbb{R}^{n+1}$). Mais sur $X_{\mathbb{R}} - \{f = 0\}$ on a $T = (\omega/f^{m+u})$. Par hypothèse il existe $\gamma \in H_p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$ tel que

$$\int_{\gamma} \omega = 1 \left(\text{car } \omega\,|_{X_{\mathbb{R}}(s_0)} = s_0^{m+u} e_1(s_0)\,|_{X_{\mathbb{R}}(s_0)}\right).$$

Choisissons $\eta \in C_c^{\infty}(X_{\mathbb{R}}(s_0))$ de degré $(n-p)$, vérifiant $d\eta = 0$ et représentant γ dans $H_c^{n-p}(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$. Si $\sigma \in C_c^{\infty}(]0, 2s_0[)$ vérifie

$$\int_0^{2s_0} \rho(s)\mathrm{d}s = 1$$

alors $\sigma(f(x))$. $F^*(\eta) \wedge \mathrm{d}f = \Gamma$ représente γ dans $H_c^{n-p+1}(X_{\mathbb{R}} - \{f = 0\}, \mathbb{C})$ où

$$\begin{array}{ccc} F\colon X_{\mathbb{R}} - \{f=0\} & \xrightarrow{\sim} & X_{\mathbb{R}}(s_0) \times (D \cap \mathbb{R}^{+*}) \\ & \searrow f \qquad \swarrow pr & \\ & \mathbb{R}^{+*} & \end{array}$$

est une trivialisation C^{∞} de $f\,|\,X_{\mathbb{R}} - \{f = 0\} \to \mathbb{R}^{+*} \cap D$. En Effet pour θ C^{∞} de degré p et d-fermée sur $X_{\mathbb{R}} - \{f = 0\}$ on aura

$$\int_{X_{\mathbb{R}}} \Gamma \wedge \theta = \int_0^{2s_0} \sigma(s)\mathrm{d}s \int_{X_{\mathbb{R}}(s)} F^*(\eta) \wedge \theta = \int_{X_{\mathbb{R}}(s_0)} \eta \wedge \theta = \int_{\gamma} \theta$$

par Fubini. On a alors pour $(\omega/f^{m+u}) = \theta$

$$\int_{X_{\mathbb{R}}} \Gamma \wedge \frac{\omega}{f^{m+u}} = \int_{X_{\mathbb{R}}(s_0)} \eta \wedge \frac{\omega}{s_0^{m+u}} = \frac{1}{s_0^{m+u}} \neq 0.$$

Mais aussi $\int_{X_{\mathbb{R}}} \Gamma \wedge (\omega/f^{m+u}) = \langle T, \Gamma \rangle$ puisque $\operatorname{Supp} \Gamma \subset\subset X_{\mathbb{R}} - \{f = 0\}$ et donc

$$\frac{1}{s_0^{m+u}} = \langle \mathrm{d}\mathscr{U}, \Gamma \rangle = \langle \mathscr{U}, \mathrm{d}\Gamma \rangle = 0$$

ce qui est absurde. Donc il existe $\theta \in C_c^{\infty}(X_{\mathbb{R}})$ de degré p telle que le prolongement méromorphe de $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^{\lambda}\omega \wedge \theta$ ait un pôle en $\lambda = -m - u - 1$.

Passons au cas général. On peut supposer données (toujours d'après le lemme A de [1]) des formes holomorphes $\omega_1 \ldots \omega_k$ de degré $p > 0$ sur X vérifiant

(1°) $d\omega_j = (m+u)(df/f)\wedge\omega_j + (df/f)\wedge\omega_{j-1}$
pour $j\in[1,k]$ avec $\omega_0=0$, $m\in\mathbb{N}$ $0\leqslant \mathrm{Re}(u)<1$

(2°) les $\omega_j\,|\,X(s_0)$ engendrent le même sous-espace de $H^p(X(s_0),\mathbb{C})$ que $e_1(s_0)\dots e_k(s_0)$ et de plus

$$\omega_h\,|\,X(s_0)\notin i\big[H_p(X_{\mathbb{R}}(s_0),\mathbb{C})\big]^{\perp}.$$

Nous supposerons de plus que h est le meilleur possible c'est-à-dire que $\omega_j\in i[H_p(X_{\mathbb{R}}(s_0),\mathbb{C})]^{\perp}$ pour $1\leqslant j\leqslant h-1$.

Définissons alors pour $j\in\mathbb{Z}$ les courants T^j de degré p sur $X_{\mathbb{R}}$ en posant pour $\theta\in C_c^\infty(X)$ de degré $n-p+1$

$$\langle T^j,\theta\rangle = \sum_{a=0}^{k-1}(-1)^a P_{a+j}\left(\lambda=-m-u,\ \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\omega_{a+1}\wedge\theta\right)^{(*)}$$

LEMME 2: *Si le prolongement méromorphe de $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\omega_k\wedge\eta$ n'a jamais de pôle d'ordre $\geqslant k-h+1$ en $\lambda=-m-u-1$ pour toute forme différentielle $\eta\in C_c^\infty(X)$ de degré $n-p+1$, alors on a $dT^j=0$ sur $X_{\mathbb{R}}$ pour $j\geqslant -h+1$*

PREUVE

Pour $a\geqslant 0$ et $\varphi\in C_c^\infty(X)$ de degré $n-p$, on a pour $\mathrm{Re}(\lambda)\gg 0$

$$\begin{aligned}(-1)^p\int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\omega_{a+1}\wedge d\varphi &= \int_{X_{\mathbb{R}}} d\big(f^\lambda\omega_{a+1}\wedge\varphi\big)\\ &\quad -(\lambda+m+u)\int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\frac{df}{f}\wedge\omega_{a+1}\wedge\varphi\\ &\quad -\int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\frac{df}{f}\wedge\omega_a\wedge\varphi\end{aligned}$$

et on a $\int_{X_{\mathbb{R}}} d(f^\lambda\omega_{a+1}\wedge\varphi)=0$ par Stokes.

Par prolongement méromorphe on en déduit que

$$\begin{aligned}&P_\mu\left(\lambda=-m-u,\ \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\omega_{a+1}\wedge d\varphi\right)\\ &\quad = P_{\mu+1}\left(\lambda=-m-u,\ \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\frac{df}{f}\wedge\omega_{a+1}\wedge\varphi\right)\\ &\quad\quad + P_\mu\left(\lambda=-m-u,\ \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda\frac{df}{f}\wedge\omega_a\wedge\varphi\right)\end{aligned}$$

(*) Ici $P_\mu(z=\alpha, F(z))$ désigne, pour F méromorphe, le coefficient de $(z-\alpha)^{-\mu}$ dans le développement de Laurent de F and $z=\alpha$.

Comme $\langle \mathrm{d}T^j, \varphi\rangle = (-1)^{p+1}\langle T^j, \mathrm{d}\varphi\rangle$ on en déduit

$$\langle \mathrm{d}T^j, \varphi\rangle = \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a P_{a+j+1}\left(\lambda = -m-u, \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \omega_{a+1} \wedge \varphi\right)$$

$$+ \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a P_{a+j}\left(\lambda = -m-u, \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \omega_a \wedge \varphi\right)$$

avec la convention $\omega_0 = 0$. En posant $a = b+1$ dans la seconde somme (en tenant compte du fait que le terme pour $a = 0$ est nul) on obtient

$$\langle \mathrm{d}T^j, \varphi\rangle = \pm P_{k-1+j+1}\left(\lambda = -m-u, \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \omega_k \wedge \varphi\right) = 0$$

car $k-1+j+1 = (k-h+1)+(j+h-1) \geqslant k-h+1$ et on n'a pas de pôle d'ordre $> k-h$ pour $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda (\mathrm{d}f/f)\omega_k \wedge \varphi$ pour $\lambda = -m-u$ par hypothèse.

On en déduit que l'on a $\mathrm{d}T^j = 0$ $\forall j \geqslant -h+1$ ce qui achève la preuve du lemme.

Comme $X_{\mathbb{R}}$ est un ouvert contractible et $p > 0$, on peut trouver des courants $\mathscr{U}^j$ sur $X_{\mathbb{R}}$ de degré $p-1$ vérifiant $\mathrm{d}\mathscr{U}^j = T^j$ sur $X_{\mathbb{R}}$ sous les hypothèses du lemme 2.

Montrons que ceci mène à une contradiction sous les hypothèses du Théorème: Sur $X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}$, on a:

$$T^{1-h} = (-1)^{h-1} f^{-m-u}\omega_h + \sum_{0}^{h-2} (-1)^a P_a\left(\lambda = -m-u, \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \omega_{a+1} \wedge \Box\right)$$

puisque pour $q > 0$ $P_q(\lambda = -m-u, \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \omega_j \wedge \theta)$ a son support dans $f = 0$ $\forall j \geqslant 0$.

L'hypothèse $\omega_j \in i[H_p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})]^\perp$ $1 \leqslant j \leqslant h-1$ montre que pour tout $j \in [1, h-1]$ on a $\omega_j \mid X_{\mathbb{R}}(s_0) = 0$ dans $H^p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$.
Supposons, en raisonnant par récurrence sur j, qu'il existe $\alpha_j \in C^\infty(X_{\mathbb{R}} - \{f=0\})$ de degré $p-1$ vérifiant

$$\mathrm{d}\left(f^{-m-u}\omega_j - \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \alpha_j\right) = 0 \qquad \text{sur } X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}.$$

Alors la classe de cohomologie $f^{-m-u}\omega_j - (\mathrm{d}f/f) \wedge \alpha_j$ de $H^p(X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}, \mathbb{C}) \simeq H^p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$ induit $s_0^{-m-u}\omega_j$, via cet isomorphisme (donné par restriction!). Comme on sait que ω_j induit 0 dans $H^p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$ pour $j \leqslant h-1$ on en déduit l'existence de $\beta \in C^\infty(X_{\mathbb{R}} - \{f=0\})$ de degré $p-1$ vérifiant

$$\mathrm{d}\beta = f^{-m-u}\omega_j - \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \alpha_j.$$

Considérons $f^{-m-u}\omega_{j+1}$; on a $\mathrm{d}(f^{-m-u}\omega_{j+1}) = (\mathrm{d}f/f) \wedge f^{-m-u}\omega_j$. Alors $\mathrm{d}(f^{-m-u}\omega_{j+1} - (\mathrm{d}f/f) \wedge \beta) = 0$; on peut donc choisir $\alpha_{j+1} = -\beta$. Donc il existe $\alpha_h \in C^\infty(X_{\mathbb{R}} - \{f=0\})$ de degré $p-1$ tel que

$$\mathrm{d}\left(f^{-m-u}\omega_h - \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \alpha_h\right) = 0.$$

Calculons maintenant, pour $a < 0$ et $\chi \in C_c^\infty(X)$

$$P_a\left(\lambda = -m-u, \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \chi\right)\Bigg| X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}.$$

Pour $f \neq 0$ on a $(\partial/\partial\lambda)(f^\lambda) = (\operatorname{Log} f) f^\lambda$ et donc

$$|a|!P_a\left(\lambda = -m-u, \int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \chi\right) = (\operatorname{Log} f)^{|a|} f^{-m-u}\chi.$$

Ceci donne sur $X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}$:

$$T^{1-h} = (-1)^{h-1} f^{-m-u}\omega_h + \sum_0^{h-2} \frac{(-1)^b}{b!} (\operatorname{Log} f)^b f^{-m-u}\omega_{b+1}$$

et comme $\mathrm{d}(f^{-m-u}\omega_j - (\mathrm{d}f/f) \wedge \alpha_j) = 0$ sur $X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}$ on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathscr{U}^{1-h} = {} & (-1)^{h-1}\left(f^{-m-u}\omega_h - \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \alpha_h\right) \\ & + \sum_0^{h-2} \frac{(-1)^b}{b!} (\operatorname{Log} f)^b \left(f^{-m-u}\omega_{b+1} - \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \alpha_{b+1}\right) \\ & + \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \left[(-1)^{h-1}\alpha_h + \sum_0^{h-2} \frac{(-1)^b}{b!} (\operatorname{Log} f)^b \alpha_{b+1}\right]. \end{aligned}$$

En reprenant les notations du cas $k = h = 1$ si $\gamma \in H_p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$ vérifie $\int_\gamma \omega_h = 1$ on aura, puisque $f^{-m-u}\omega_j - (\mathrm{d}f/f) \wedge \alpha_j$ est d-fermée sur $X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}$:

$$\int_\gamma f^{-m-u}\omega_j = \int_{X_{\mathbb{R}} - \{f=0\}} \Gamma \wedge \left(f^{-m-u}\omega_j - \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \alpha_j\right)$$

car $\Gamma \wedge \mathrm{d}f = 0$, et donc, puisque $\mathrm{d}\Gamma = 0$

$$\langle \mathrm{d}\mathscr{U}^{1-h}, \Gamma\rangle = 0 = \sum_{0}^{h-2} (-1)^b \int_\gamma f^{-m-u}\omega_{b+1}$$

$$+(-1)^{h-1}\int_\gamma f^{-m-u}\omega_h = \frac{(-1)^{h-1}}{s_0^{m+u}} \ (*) \quad .$$

ce qui est absurde

Ceci achève la preuve du théorème.

REMARQUE: la démonstration montre en fait qu'il existe un pôle en $\lambda = -m-u-1$ pour le prolongement méromorphe de $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \mathrm{d}f \wedge \omega_k \wedge \square$, d'ordre au moins égal à $k-h+1$.

Pour conclure cet article, montrons que le phénomène de "contribution sur-effective" pour la valeur propre 1 que l'on a mis en évidence dans le cas complexe dans [2], n'apparaît pas dans le cas réel (au moins avec l'hypothèse du théorème).

Rappelons que dans le cas complexe le phénomène de contribution sureffective se traduit de la manière suivante: pour la valeur propre 1, un bloc de Jordan de taille (k, k) en degré strictement positif fait effectivement apparaître un pôle d'ordre au moins $k+1$ aux points de la forme $-\nu$ avec $\nu \in \mathbb{N}$ assez grand. Ceci n'est pas (toujours) vrai dans le réel comme on peut le constater sur l'exemple

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \text{ donné par } f(X, Y) = X^2 + Y^2$$

pour lequel l'espace $H^1(X(s_0), \mathbb{C})$ est de dimension 1 (avec monodromie égale à l'identité) et la restriction $H^1(X(s_0), \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{res}} H^1(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$ est un isomorphisme (donc la condition du théorème est vérifiée!) bien que le prolongement méromorphe de $\int_{X_{\mathbb{R}}} f^\lambda \square$ ne présente que des pôles simples aux entiers strictement négatifs.

Références

[1] Contribution effective de la monodromie aux développments asymptotiques. Preprint Institut Elie Cartan Nancy janvier 83. A paraître aux Ann. Sc. ENS (84).

[2] Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$. Preprint Institut Elie Cartan Nancy sept. 83 - à paraître aux Ann. de l'Institut Fourier.

[3] Monodromie et poles de $\int_X |f|^{2\lambda}\square$, preprint Institut Elie Cartan, Nancy, avril 1984.

(Oblatum 28-II-1984)

Université de Nancy I
Faculté des sciences
Départment de Mathématiques
B.P. n° 239
54506 Vandœvre les Nancy Cedex

(*) Rappelons que pour $1 \leqslant j \leqslant h-1$ on a supposé que $\omega_j \in i[H_p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})]^\perp$ et donc la nullité de $\int_\gamma \omega_j$ $\forall \gamma \in H_p(X_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C})$!.

Appendice

Nous nous proposons de montrer dans cet appendice comment des résultats, aujourd'hui classiques, de Łojasiewicz, Herrera et Poly sur les ensembles semi-analytiques permettent d'obtenir le renforcement suivant du théorème prouvé plus haut:

THÉORÈME RENFORCÉ: Soit f: $(\mathbb{R}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe de fonction analytique réelle (non constante) et soit f: $X \to D$ un représentant de Milnor de son complexifié (X est donc un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et D un disque de centre 0 dans $\mathbb{C}$). Prenons comme point de base dans $D^* = D - \{0\}$ un point s_0 de $D^* \cap \mathbb{R}^+$. Notons par $X(s_0)$ la fibre de Milnor (complexe) de f et par $X_{\mathbb{R}}(s_0) = X(s_0) \cap \mathbb{R}^{n+1}$. Soit A une composante connexe de $f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$ et notons $X^A_{\mathbb{R}}(s_0) = X_{\mathbb{R}}(s_0) \cap A$. Soit j_A: $X^A_{\mathbb{R}}(s_0) \hookrightarrow X(s_0)$ l'inclusion naturelle, et supposons que la monodromie T agissant sur $H^*(X(s_0), \mathbb{C})$ admette, en degré strictement positif, un bloc de Jordan $e_1(s_0), \ldots, e_k(s_0)$ relatif à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$. Supposons en outre que $e_h(s_0)$ ne soit pas orthogonal (pour l'accouplement homologie/cohomologie) à $j_A(H_*(X^A_{\mathbb{R}}(s_0), \mathbb{C}))$. Alors le prolongement méromorphe de la distribution sur $X_{\mathbb{R}}$ définie pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ par

$$\varphi \to \int_A f^z \varphi \qquad \text{pour} \quad \varphi \in C_c^\infty(X)$$

de degré $n+1$, admet un pôle d'ordre $\geqslant k - h + 1$ en $-u - m$ pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand.

La démonstration du théorème renforcé étant calquée sur celle du théorème, nous allons seulement commenter les points qui demandent à être éclaircis.

D'abord le prolongement méromorphe de $\int_A f^z \square$.

Pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ et $\varphi \in C_c^\infty(X)$ l'intégrale est bien définie et dépend holomorphiquement de z. Le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier s'obtient par exemple en utilisant le polynôme de Bernstein-Sato de f.

Le second point réside dans l'utilisation de la formule de Stokes dans le lemme 1. Comme le bord de A est contenu dans $\{f = 0\}$, pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ le terme de bord sera nul, d'où la conclusion désirée par prolongement analytique. Pour l'utilisation du théorème de Stokes dans le cadre semi-analytique on pourra consulter [B.H.].

Ensuite, pour montrer que $\bar{A}$ est contractible, on utilise d'abord le fait que le bord de A l'est, grâce au théorème de triangulation de Łojasiewicz (voir [L]), puis le résultat de Milnor ([M] lemme 5.9 p. 52) qui permet de montrer que l'identité de $\bar{A}$ est homotope à une application continue dont l'image est contenue dans un voisinage arbitraire donné de ∂A (ce raisonnement est déjà utilisé dans l'appendice de [2]).

On utilise enfin le résultat de Poly [P] qui montre que le complexe de De Rham des courants de supports contenus dans $\bar{A}$ a pour cohomologie l'homologie de Borel-Moore de $\bar{A}$, pour conclure comme dans le cas où $\bar{A} = X_{\mathbb{R}}$. En effet la fibration

$$f\colon A \to D \cap \mathbb{R}^{+*}$$

est triviale, puisque $f\colon f^{-1}(D \cap \mathbb{R}^{+*}) \to D \cap \mathbb{R}^{+*}$ est une fibration triviale (différentiablement) et puisque A est une composante connexe de $f^{-1}(D \cap \mathbb{R}^{+*})$.

On remarquera que l'ouvert $\{f \neq 0\}$ de $X_{\mathbb{R}}$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes (*) et qu'une composante connexe B de $\{f < 0\}$ donne également naissance à une distribution dépendant méromorphiquement de z en posant

$$\varphi \to \int_B (-f)^z \varphi.$$

On peut évidemment appliquer le théorème renforcé à une telle distribution, quitte à changer f en $-f$.

On remarquera enfin que même quand la fonction f est positive, le théorème renforcé peut apporter plus de précision que le théorème précédent, pour peu que l'ouvert $\{f \neq 0\}$ ne soit pas connexe!

References Complementaires

[B.H] T. Bloom et M. Herrera: De Rham cohomology of an analytic space, *Invent. Math.* 7 (1969) 275–296.

[L] S. Łojasiewicz: Triangulation of semi-analytic sets, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Sc. Fis. Mat.* ser. 3 vol 18 fasc. 4 (1964) 449–474.

[M] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies* 61, Princeton University Press (1968).

[P] J.B. Poly: Sur l'homologie des courants à support dans un ensemble semi-analytique, *Bull. Soc. Math. France*, Memoire n°38 (1974) p. 35–43.

(Oblatum 16-IV-1984)

Université de Nancy I
Faculté des sciences
Départment de Mathématiques
B.P. No 239
54506 Vandœvre les Nancy Cedex

(*) On peut, par exemple, trianguler $X_{\mathbb{R}}$ de manière que $\{f = 0\}$ soit un sous-complexe.