

COMPOSITIO MATHEMATICA

FRANÇOIS LAUBIE

Sur la ramification des extensions de Lie

Compositio Mathematica, tome 55, n° 2 (1985), p. 253-262

http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__55_2_253_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA RAMIFICATION DES EXTENSIONS DE LIE

François Laubie

Abstract

Soit K un corps local de caractéristique résiduelle $p > 0$; une extension galoisienne infinie de K dont l'extension résiduelle est finie et dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p -adique s'appelle une extension de Lie. Les extensions de Lie ont été étudiées par S. Sen [6] dans le cas où $\text{car}(K) = 0$ et par J.-P. Wintenberger [8] dans le cas où $\text{car}(K) = p$.

Soit G le groupe de Galois d'une extension galoisienne, éventuellement infinie, d'un corps local; la suite des groupes de ramification en numérotation supérieure qu'on note habituellement $(G^x)_{x \geq -1}$ sera notée ici $(G(x))_{x \geq -1}$, comme dans [6]. On dit que deux extensions galoisiennes de corps locaux de groupes de Galois respectifs G et G' sont identiquement ramifiées s'il existe un isomorphisme f de G sur G' tel que $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout réel $x \geq 0$; un tel f s'appelle un isomorphisme de ramification.

Soit p un nombre premier; dorénavant, tous les corps locaux que l'on considère sont de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle p .

Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e . On sait [2] que toute extension galoisienne finie totalement ramifiée de K est identiquement ramifiée à une extension galoisienne d'une extension finie d'indice de ramification e sur \mathbb{Q}_p .

L'objet de cet article est de généraliser ce résultat aux extensions de Lie dont le groupe de Galois est un pro- p -groupe (voir le théorème 1 du §4). Les trois premiers § établissent des résultats intermédiaires nécessaires à la démonstration qui est achevée au §4.

Je remercie J.-P. Serre pour son aide et ses conseils pendant la préparation de ce travail.

§1 Stabilisation de la ramification dans les extensions de lie

Si G est un groupe et m un entier ≥ 1 , la notation G^m est réservée à l'ensemble des puissances $m^{\text{ème}}$ des éléments de G .

Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e et soit L une extension de Lie totalement ramifiée de K de groupe de Galois G .

Considérons d'abord le cas où l'extension L/K est abélienne; alors G est un produit direct fini de groupes isomorphes à \mathbb{Z}_p et d'un groupe fini.

PROPOSITION 1: *Supposons que l'extension de Lie L/K soit abélienne; alors $G(x)^p = G(x + e)$ pour tout réel $x > e/p - 1$.*

DÉMONSTRATION: Il s'agit d'un résultat bien connu de la théorie du corps de classe local lorsque G est fini et lorsque le corps résiduel de K est

quasi-fini (voir par exemple [4]); cela reste vrai lorsque le corps résiduel de K est quelconque ([2], th. 1). Enfin, si G est infini, soit $x > e/p - 1$ et soit $y > x + e$; $G(y)$ est un sous-groupe d'indice fini de G (cf. [4] ou [6]); d'après le théorème de Herbrand ([7], ch. IV, §3), on a donc $[G(x)/G(y)]^p = G(x + e)/G(y)$; donc, pour tout $y > x + e$, $G(x + e) = G(x)^p G(y)$; mais $G(x)^p$ est un sous-groupe fermé de G et $(G(y))_{y > x + e}$ est un système fondamental de voisinages ouverts de 1; il s'ensuit que $G(x + e) = G(x)^p$. \square

Passons maintenant au cas général où L/K est une extensions de Lie totalement ramifiée dont le groupe de Galois G n'est pas nécessairement abélien. Les propriétés suivantes sont conservées:

- Pour tout réel $x \geq 0$, $G(x)$ est un sous-groupe ouvert de G ([6], lemme 4.4); autrement dit: L/K est une extension arithmétiquement profinie (en abrégé APF) dans la terminologie de Fontaine [1]; en particulier, l'ensemble des sauts de ramification supérieurs de L/K est discret dans \mathbb{R} ;
- Il existe un réel x_0 tel que $G(x)^p = G(x + e)$ dès que $x \geq x_0$ ([6], prop. 4.5); on ignore, malheureusement, s'il est possible de choisir un tel x_0 ne dépendant que de e et du groupe "abstrait" G .

Ces résultats permettent de décrire avec précision la filtration de ramification d'un sous-groupe ouvert de G . On peut résumer la proposition suivante en disant que la ramification de L/K "se stabilise"; ce phénomène fut découvert par Tate [8] et étudié par Wyman [10] pour les \mathbb{Z}_p -extensions.

PROPOSITION 2: *Il existe un réel x_1 vérifiant les conditions suivantes:*

- (i) *Pour tout $x \geq x_1$ et tout $\epsilon > 0$ assez petit, l'élévation à la puissance p induit un isomorphisme de $G(x)/G(x + \epsilon)$ sur $G(x + e)/G(x + e + \epsilon)$;*
- (ii) *Pour tout $x \geq x_1$, $G(x) = \{ \sigma \in G(x_1) \mid \sigma^p \in G(x + e) \}$;*
- (iii) *Si u désigne la fonction d'ordre de la filtration $(G(x))_{x \geq 0}$, i.e. si $u(\sigma) \geq x \Leftrightarrow \sigma \in G(x)$, alors pour tout $\sigma \in G(x_1)$, $u(\sigma^p) = u(\sigma) + e$;*
- (iv) *Si, parmi les sauts de ramification supérieurs $u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$ de L/K , $u_s, u_{s+1}, \dots, u_{s+t-1}$ désignent ceux qui sont dans l'intervalle $[x_1, x_1 + e[$, alors pour tout entier $k \geq 0$, on a $u_{s+k} = u_{s+r} + me$ avec $r \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ et $k = mt + r$.*

DÉMONSTRATION: Soit $x \geq x_0$ de sorte que $G(x)^p = G(x + e)$; l'élévation à la puissance p induit une surjection de $G(x)/G(x + \epsilon)$ sur $G(x + e)/G(x + e + \epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$; en particulier si $v \geq x_0 + e$ est un saut de ramification alors $v - e$ en est aussi un; on en déduit qu'en notant v_1, v_2, \dots, v_t les sauts de ramification qui sont dans l'intervalle

$[x_0, x_0 + e]$, tout saut de ramification $v \geq x_0$ s'écrit $v = v_r + me$ avec $r \in \{1, 2, \dots, t\}$ et $m \in \mathbb{N}$.

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \min\{v_2 - v_1, \dots, v_t - v_{t-1}, v_1 + e - v_t\}$; alors $\epsilon < |v - v'|$ quels que soient les sauts de ramification v et $v' \geq x_0$. Pour $x \geq x_0$, les quotients $G(x)/G(x + \epsilon)$ étant des groupes abéliens finis, il existe un réel $x_1 \geq x_0$ tel que, pour tout $x \geq x_1$, l'élévation à la puissance p induise un isomorphisme de $G(x)/G(x + \epsilon)$ sur $G(x + e)/G(x + e + \epsilon)$; les autres assertions de la proposition 2 sont alors faciles à vérifier. \square

REMARQUE: Il serait intéressant de savoir si l'on peut choisir pour x_1 une constante ne dépendant que de e et de G .

§2 Filtrations de lie et filtrations de ramification

On conserve les notations du § précédent et on rappelle que la notation G^m (m entier ≥ 1) est réservé à l'ensemble des puissances $m^{\text{ème}}$ des éléments de G .

On appelle filtration de Lie de G une filtration $(G_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les axiomes suivants:

(L 1) les G_n forment une suite décroissante de sous-groupes ouverts de G , distingués dans G_1 et tels que $\bigcap_{n \geq 1} G_n = \{1\}$;

(L 2) pour tout $n \geq 1$, $G_n = \{\sigma \in G_1 \mid \sigma^p \in G_{n+1}\}$;

(L 3) pour tout $n \geq 2$, $G_{n+1} = G_n^p$;

(L 4) si $\sigma \in G_n$, $\tau \in G_m$ alors $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in G_{n+m}$;

(en particulier les quotients G_n/G_{2n} sont abéliens).

Un groupe de Lie p -adique G possède toujours une filtration de Lie $(G_n)_{n \geq 1}$, G_1 est alors un pro- p -groupe, il est dit p -saturé dans la terminologie de Lazard ([3], ch. III, §3) et pour tout $n \geq 2$, on a $(G_n : G_{n+1}) = p^d$ où d est la dimension de G en tant que groupe analytique sur \mathbb{Q}_p ([3], Loc. cit.).

Si $(G_n)_{n \geq 1}$ est une filtration de Lie de G , S. Sen a montré [6] l'existence d'une constante c telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $G(ne + c) \subset G_n \subset G(ne - c)$; c'était une conjecture de J.-P. Serre. On ignore s'il est possible de choisir un tel c ne dépendant que de p , de e et de la filtration $(G_n)_{n \geq 1}$. Par contre il est possible de choisir de cette façon une constante c' telle que $G(ne + c') \subset G_n$ pour tout $n \geq 1$ et cela, pour des filtrations $(G_n)_{n \geq 1}$ plus générales que les filtrations de Lie.

DÉFINITION: On appelle pseudo-filtration de Lie de G , une filtration $(G_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les axiomes (L 1), (L 2), (L 3) et l'axiome (L'4) suivant:

(L'4) il existe un entier ν tel que, pour tout $n \geq \nu$, le quotient $G_n/G_{2n-\nu}$ est abélien.

LEMME 1: Soit H un p -sous-groupe ouvert de G (i.e.: un sous-groupe ouvert qui est un pro- p -groupe). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit H_k le sous-groupe de G

engendré par les $(p^k)^{\text{ème}}$ puissances des éléments de H . Il existe un entier $N = N(H)$ tel que $(H_{N+n})_{n \geq 1}$ soit une pseudo-filtration de Lie.

DÉMONSTRATION: Soit $(G_n)_{n \geq 1}$ une filtration de Lie de G . Comme les H_k forment un système fondamental de voisinages ouverts de 1 ([3], ch. III, §3), on a $H_k \subset G_1$ pour tout k assez grand. La conclusion du lemme demeure inchangée si l'on remplace H_n par H_{n+k} pour tout $n \geq 0$; on peut donc supposer que $H_1 \subset G_1$. Il existe alors un entier $\nu \geq 1$ tel que $G_{n+\nu} \subset H_n \subset G_n$ pour tout $n \geq 1$ ([3], loc. cit.). On a alors $G_{2n} \subset H_{2n-\nu} \subset H_n \subset G_n$ pour tout $n \geq \nu$. Le quotient G_n/G_{2n} étant abélien, $H_{2n-\nu}$ est un sous-groupe distingué de H_n et $H_n/H_{2n-\nu}$ est abélien.

Pour tout $n \geq \nu$, H_n/G_{2n} est abélien; l'élevation à la puissance p est donc un homomorphisme surjectif de groupes de H_n sur H_{n+1}/G_{2n+1} et on a: $H_{n+1} = H_n^p G_{2n+1} = H_n^p$ car $G_{2n+1} = G_{2n}^p \subset H_n^p$, pour $n \geq \nu$. On en déduit que pour tout $k \geq 0$, $H_{\nu+k} = H_\nu^{p^k}$ est distingué dans H_ν .

Pour tout $n \geq \nu$, G_n/H_n est abélien et $G_{n+1} = G_n^p$; par suite l'élevation à la puissance p induit un homomorphisme de groupes surjectif de G_n/H_n sur G_{n+1}/H_{n+1} ; mais G_n/H_n étant fini, il existe un entier $N \geq \nu$ tel que, pour tout $n \geq N$, ces surjections deviennent des isomorphismes; on a, en particulier, $H_n = \{\sigma \in G_n \mid \sigma^p \in H_{n+1}\}$. Plus précisément, si $\sigma \in G_1$ avec $\sigma^p \in H_{n+1}$ alors $\sigma \in G_n$ et, d'après ce qui précède, $\sigma \in H_n$; donc $H_n = \{\sigma \in G_1 \mid \sigma^p \in H_{n+1}\}$ pour $n \geq N$.

Par suite l'entier N satisfait à la conclusion du lemme. \square

REMARQUES:

1. Les pseudo-filtrations de Lie de G sont toutes fournies par le lemme 1.
2. Pour tout réel x assez grand, $(G(x + ne))_{n \geq 1}$ est une pseudo-filtration de Lie.
3. Soit E un corps local d'indice de ramification absolu e et soit F une extension galoisienne infinie de E de groupe de Galois \mathcal{G} . Pour que F/E soit une extension de Lie, il faut et il suffit qu'il existe un réel $x > 0$ vérifiant: $\mathcal{G}(x)$ est ouvert dans \mathcal{G} , $\mathcal{G}(x)^{p^2} = \mathcal{G}(x + 2e)$ et $\mathcal{G}(x)/\mathcal{G}(x + 2e)$ est abélien; de plus, si $p > 2$, ces deux dernières conditions se simplifient en: $\mathcal{G}(x)^p = \mathcal{G}(x + e)$ et $\mathcal{G}(x)/\mathcal{G}(x + e)$ est abélien. Cela résulte immédiatement des critères d'analyticité de Lazard ([3], loc. cit.).

LEMME 2: Soient I et J deux p -sous-groupes ouverts de G tels que $I \subset J$. Pour toute partie A de G , on note A_n le sous-groupe de G engendré par les $(p^n)^{\text{ème}}$ puissances des éléments de A . Il existe un entier $N = N(I, J)$ vérifiant les propriétés suivantes:

- pour tout sous-groupe H de J_N contenant I_N , $(H_n)_{n \geq 1}$ est une pseudo-filtration de Lie de G ;
- pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout sous-groupe H' de G tel que

$I_{N+m} \subset H' \subsetneq J_{N+m}$, il existe un sous-groupe H de G tel que $I_N \subset H \subsetneq J_N$ et $H' = H^{p^m}$.

DÉMONSTRATION: Soit $(G_n)_{n \geq 1}$ une filtration de Lie de G . Comme dans la démonstration du lemme 1, on peut supposer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait: $G_{2n} \subset I_n \subset J_n \subset G_n$. Quitte à translater leur numérotations, on peut aussi supposer que $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$ sont des pseudo-filtrations de Lie.

Soit $n_1 \geq n_0$ un entier tel que, pour tout $n \geq n_1$, l'élévation à la puissance p induise un isomorphisme de groupes abéliens de J_{n-1}/I_{n-1} sur J_n/I_n . Soient n et n' deux entiers tels que $n' \geq n \geq n_1$ et soit H' un sous-groupe de $J_{n'}$ contenant $I_{n'}$; appelons H le sous-groupe de J_n contenant I_n tel que H/I_n soit l'image réciproque de $H'/I_{n'}$ par l'élévation à la puissance $p^{n'-n}$; on a: $H' = H^{p^{n'-n}}I_{n'} = H^{p^{n'-n}}I_n^{p^{n'-n}} = H^{p^{n'-n}} = H_{n'-n}$. On en déduit que l'application $H \mapsto H_{n'-n}$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de J_n contenant I_n sur l'ensemble des sous-groupes de $J_{n'}$ contenant $I_{n'}$. Or, d'après le lemme 1, il existe un entier $n_H \geq n_1$ tel que $(H_{n_H+k})_{k \geq 1}$ soit une pseudo-filtration de Lie de G . Dans ces conditions, il est clair que l'entier $N = \max n_H$, H parcourant l'ensemble fini des sous-groupes de J_{n_1} contenant I_{n_1} , vérifie les conclusions de l'énoncé. \square

Précisons maintenant les rapports existant entre les pseudo-filtrations de Lie et les filtrations de ramification.

Pour tout sous-groupe ouvert H de G , on note $v_H = \inf\{v \geq 0 \mid \forall \epsilon > 0, G(v + \epsilon) \subset H\}$. Si $H \neq G$, v_H est le réel vérifiant $G(v_H + \epsilon) \subset H$ pour tout $\epsilon > 0$ mais $G(v_H) \not\subset H$; en outre, si H est distingué dans G , le théorème de Herbrand ([7], ch. IV, §3) montre que v_H est le plus grand saut de ramification de l'extension de K de groupe de Galois G/H .

Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ une pseudo-filtration de Lie de G . Il existe un entier δ tel que, pour tout $n \geq \delta$, H_n/H_{n+d+3} soit un groupe abélien, d désignant la dimension de G . Dans ces conditions, S. Sen a montré ([6], §3) l'existence d'un entier n_H tel que, pour tout $n \geq n_H$, on ait $v_{H_{n+1}} = v_{H_n} + e$. Un calcul simple, fondé sur la démonstration de Sen, montre qu'on peut choisir $n_H = (2 + d)(1 + d + [\log_p(e(G: H_\delta))])$ où \log_p désigne le logarithme en base p . Cette valeur ne dépend pas de la ramification de L/K .

En combinant ce résultat avec le lemme 2, on obtient immédiatement la:

PROPOSITION 3: Soient G un groupe de Lie p -adique et e un entier ≥ 1 . Pour tout couple (I, J) de p -sous-groupes ouverts de G tels que $I \subset J$, il existe un entier $v(I, J)$ vérifiant la propriété suivante: pour tout corps local K d'indice de ramification absolu e , pour toute extension de Lie L de K de groupe de Galois G , pour tous entiers $n' \geq n \geq v(I, J)$ et pour tout sous-groupe H' de G tel que $I^{p^{n'}} \subset H' \subsetneq J^{p^{n'}}$, il existe un sous-groupe H de G tel que $H' = H^{p^{n'-n}}$, $I^{p^n} \subset H \subsetneq J^{p^n}$ et $v_{H'} = v_H + (n' - n)e$.

§3 Extensions de lie identiquement ramifiées

Soient K et K' deux corps locaux de même caractéristique résiduelle p et de même indice de ramification absolue e . Comme dans les § précédents, L désigne une extension de Lie de K de groupe de Galois G . Soit L' une extension galoisienne de K' de groupe de Galois G' isomorphe à G .

On rappelle qu'un isomorphisme de ramification est un isomorphisme de groupes de Galois qui respecte les filtrations de ramification.

LEMME 3: *Supposons que L/K est totalement ramifiée. Alors il existe un sous-groupe ouvert G_0 de G tel que tous les sous-groupes ouverts H de G_0 distingués dans G vérifient la propriété (TR) suivante:*

(TR) : *s'il existe un isomorphisme de groupes f de G sur G' induisant un isomorphisme de ramification de G/H sur $G'/f(H)$, alors L'/K' est totalement ramifiée.*

DÉMONSTRATION: Comme $G = \varprojlim G/H$, H parcourant l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de G , il existe un sous-groupe ouvert distingué G_0 de G tel que, pour tout sous-groupe ouvert H de G_0 distingué dans G , le nombre minimal de générateurs de G/H soit égal au nombre minimal de générateurs topologiques de G . Montrons qu'un tel sous-groupe H satisfait à la condition (TR). Soit f un isomorphisme de groupes de G sur G' ; on note $H' = f(H)$ et $f_{G/H}$ l'isomorphisme de G/H sur G'/H' induit par f . Supposons que $f_{G/H}$ soit un isomorphisme de ramification. Soit I' le sous-groupe d'inertie de G' ; on note M' (resp. L'_0) le sous-corps des invariants de L' sous l'action de H' (resp. de I'). Comme M'/K' est totalement ramifiée, M' et L'_0 sont des extensions linéairement disjointes sur K' ; il s'ensuit que $G'/H' \cap I' \simeq G'/H' \times G'/I'$; pour que les nombres de générateurs topologiques minimaux de G' et G'/H' coïncident, il faut donc que $I' = G'$. \square

On se donne maintenant un isomorphisme de groupes f de G sur G' . Pour tout sous-groupe H de G , on note $H' = f(H)$, f_H la restriction de f à H et, si H est distingué dans G , $f_{G/H}$ l'isomorphisme de G/H sur G'/H' induit par f .

Si H est un sous-groupe de ramification de G , il est facile de montrer, à l'aide du théorème de Herband ([7], ch. IV, §3) que, pour que f soit un isomorphisme de ramification, il faut et il suffit que f_H et $f_{G/H}$ en soient aussi.

LEMME 4: *Soit $H = G(v)$ un groupe de ramification supérieur (i.e. $v > 0$) de L/K . On suppose que H vérifie la propriété (TR) du lemme 3 et qu'il existe $u \in]0, v[$ tel que $H \subset G(u)^p$. Alors, si $f_{G/H}$ est un isomorphisme de ramification, on a $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout $x \leq u$.*

DÉMONSTRATION: Comme $f_{G/H}$ est un isomorphisme de ramification, le théorème de Herband déjà cité nous dit que, pour tout x , $f(HG(x)) =$

$H'G'(x)$; en particulier, pour $x \leq v$, on a $f(G(x)) = H'G'(x)$; il s'ensuit que $H' = f(H) \subset f(G(u)^p) = [H'G'(u)]^p$.

Montrons que $H' \subset G'(u)$. Soit v_0 la borne supérieure des réels $x \geq -1$ tels que $H' \subset G'(x)$; comme $H' \subset G'(v_0)$, il suffit de voir que $v_0 \geq u$. Puisque H vérifie la propriété (TR) , on a $v_0 \geq 0$. En fait $v_0 > 0$; en effet: soit w (resp. w') le plus petit saut de ramification > 0 de L/K (resp. de L'/K'); $G'(w')$ est le p -sous-groupe maximal de G' , donc $f^{-1}(G'(w'))$ est le p -sous-groupe maximal de G et $f^{-1}(G'(w')) = G(w)$; par suite comme $H \subset G(w)$, on a $H' \subset G'(w')$. Supposons que $v_0 \in]0, u[$; on a alors:

$$H' \subset [H'G'(u)]^p \subset [H'G'(v_0)]^p = G'(v_0)^p;$$

comme la ramification de $G'(v_0)$ est totalement sauvage, il existe $v_1 > v_0$ tel que $G'(v_0)^p \subset G'(v_1)$, c'est-à-dire tel que $H' \subset G'(v_1)$ ce qui contredit l'hypothèse de maximalité faite sur v_0 .

On a donc $H' \subset G'(u)$ et, pour $x \leq u$, les égalités $f(G(x)) = H'G'(x)$ deviennent $f(G(x)) = G'(x)$. □

On rappelle qu'au §2, on a posé $v_H = \inf\{v \geq 0 \mid \forall \epsilon > 0, G(v + \epsilon) \subset H\}$ pour tout sous-groupe ouvert H de G . On définit de même v'_H pour tout sous-groupe ouvert H' de G' .

LEMME 5: *Soit $r_0 < r_1 < \dots < r_n < \dots$ une suite de réels ≥ 0 et soit $G = H_0 \supsetneq H_1 \neq \dots \supsetneq H_n \supsetneq \dots$ une suite de sous-groupes ouverts de G telle que $\bigcap_{n \geq 0} H_n = \{1\}$. On suppose que pour tout sous-groupe H de G tel que $H_n \supsetneq H \supset H_{n+1}$, on a $v_H = r_n$. Alors pour tout $n \geq 0$, $H_n = G(r_n)$ et les H_n sont tous les sous-groupes de ramification de G .*

DÉMONSTRATION: Soit $n \geq 1$; on a $v_{H_n} = r_{n-1}$ donc pour tout $\epsilon > 0$, $G(r_{n-1} + \epsilon) \subset H_n$; mais pour ϵ assez petit $G(r_n) \subset G(r_{n-1} + \epsilon)$ donc $G(r_n) \subset H_n$. Montrons que $H_{n+1}G(r_n) = H_n$. Comme $G(r_n) \subset H_{n+1}G(r_n)$, on a $v_{H_{n+1}G(r_n)} < r_n$; mais on a aussi $H_{n+1} \subset H_{n+1}G(r_n) \subset H_n$ donc $H_{n+1}G(r_n) = H_n$. On en déduit que $G(r_n) = H_n$; en effet: pour tous $n > m \geq 1$, on a $H_m = H_{m+1}G(r_m) = H_{m+2}G(r_m) = \dots H_nG(r_m)$; or $G(r_m)$ est fermé et les H_n constituent un système fondamental de voisinages ouverts de 1; il s'ensuit que $H_m = \bigcap_{n \geq m} H_nG(r_m) = G(r_m)$, pour tout $m \geq 1$ et comme l'unique saut de ramification de l'extension de groupe de Galois $G/G(r_1)$ est r_0 , on a aussi $G = G(r_0)$. Enfin, soient $u_n < u_{n+1}$ deux sauts de ramification consécutifs de L/K ; il existe un entier k tel que $G(r_{k+1}) \subset G(u_{n+1}) \subsetneq G(r_k)$ donc $u_n = v_{G(u_{n+1})} = r_k$. □

En combinant les résultats des §1, 2 et 3, on obtient la:

PROPOSITION 4: *Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e et soit L/K une extension de Lie totalement ramifiée de groupe de Galois G . Il existe un réel x_2 vérifiant la propriété suivante:*

pour tout corps local K' d'indice de ramification absolu e et pour toute extension galoisienne L' de K' de groupe de Galois G' isomorphe à G , tout

isomorphisme de groupes f de G sur G' qui induit un isomorphisme de ramification de $G/G(x_2)$ sur $G'/f(G(x_2))$ est un isomorphisme de ramification.

DÉMONSTRATION: On suppose que l'extension de Lie L/K est totalement ramifiée. Soit x_1 le réel de la proposition 2; quitte à augmenter x_1 on peut supposer que le sous-groupe $G(x_1)$ satisfait à la condition (TR) du lemme 3.

Soit $u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$ la suite des sauts de ramification supérieurs de L/K . On note $u_s, u_{s+1}, \dots, u_{s+t-1}$ les sauts de ramification de L/K qui sont dans l'intervalle $[x_1, x_1 + e]$. Pour tout $n \geq 1$, posons $H_n = G(u_n)$. Enfin, avec les notations de la proposition 3, on pose:

$$\nu = \max_{0 \leq r \leq t-1} \nu(H_{s+r+1}, H_{s+r}) \quad \text{et} \quad x_2 = u_s + e(\nu + 2).$$

Montrons que x_2 satisfait à la conclusion de notre proposition 4.

Soit K' un corps local d'indice de ramification absolu e et soit L' une extension galoisienne de K' de groupe de Galois G' isomorphe à G . On se donne un isomorphisme de groupes f de G sur G' induisant un isomorphisme de ramification de $G/G(x_2)$ sur $G'/f(G(x_2))$. D'après le lemme 4, on a $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout $x \leq x_2 - e$ et il s'agit de montrer que $f(G(x)) = G'(x)$ pour tout x .

Pour tout $n \geq 1$, posons $H'_n = f(G(u_n))$ et montrons que la filtration $(H'_n)_{n \geq 1}$ de G' associée à la suite de réels $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifie les hypothèses du lemme 5.

Il est clair que pour $n \geq 1$, H'_n est un sous-groupe ouvert G' , que pour $n \geq s$, on a $H'_{n+1} = H'_n{}^p$ et que $\bigcap_{n \geq 1} H'_n = \{1\}$. Soit H' un sous-groupe de G' tel que $H'_{n+1} \subset H' \subset H'_n$. Si $n \leq s + t(\nu + 1)$ alors, d'après la proposition 2, $u_n \leq u_s + e(\nu + 1) = x_2 - e$ et on a $G'(u_{n+1}) \subset H'_n \subsetneq G'(u_n)$ donc $v_{H'} = u_n$. Si $n \geq s = t\nu$ alors on écrit $n - s - t\nu = r + mt$ avec $m \geq 0$ et $0 \leq r < t$ et, d'après la proposition 2, on a $u_n = u_{s+r+t\nu} + me$. D'après la proposition 3, il existe alors un sous-groupe H'' de G' tel que: $H'_{s+t\nu+r+1} \subset H'' \subsetneq H'_{s+t\nu+r}$, $H' = H''{}^p{}^m$ et $v_{H'} = v_{H''} + me$; mais $s + t\nu + r \leq s + t(\nu + 1)$ donc $v_{H''} = u_{s+t\nu+r}$ et $v_{H'} = n$.

D'après le lemme 5, pour tout $n \geq 1$, on a $H'_n = G'(u_n)$ donc $f(H_n) = H'_n$ et comme les H'_n sont tous les sous-groupes de ramification de G' , pour tout $x \geq 0$, on a $f(G(x)) = G'(x)$. \square

§4 Problèmes de plongement et conclusion de la preuve

On appelle p -extension de Lie d'un corps local de caractéristique résiduelle p , une extension de Lie de ce corps local, dont le groupe de Galois est un pro- p -groupe.

Le résultat principal de cet article est le suivant:

THÉORÈME 1: *Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e . Toute p -extension de Lie totalement ramifiée de K est identiquement ramifiée à une p -extension de Lie d'une extension finie, d'indice de ramification e , de \mathbb{Q}_p .*

DÉMONSTRATION: Soit L une p -extension de Lie totalement ramifiée de K . On note G son groupe de Galois, g le nombre minimal de générateurs topologiques de G et F_g le pro- p -libre à g générateurs.

Soit x_2 un réel vérifiant la propriété de la proposition 4; quitte à augmenter x_2 , on peut supposer que le nombre minimal de générateurs du groupe quotient $G/G(x_2)$ est égal à g . On note encore M le corps des invariants de L sous l'action de $G(x_2)$.

On sait [2] qu'il existe une extension finie K' de \mathbb{Q}_p d'indice de ramification e et une extension galoisienne finie M' de K' identiquement ramifiée à M'/K' .

D'après un résultat de Nguyen Quang Do ([5], corollaire 5 au théorème 4), il existe une extension finie non ramifiée K'' de K' et une extension galoisienne Ω de K'' de groupe de Galois F_g qui contient l'extension composée $M'' = K''M'$. Appelons ϕ la surjection naturelle de F_g sur $\text{Gal}(M''/K'')$.

Comme M'/K' est totalement ramifiée, l'isomorphisme naturel de $\text{Gal}(M''/K'')$ sur $\text{Gal}(M'/K')$ est un isomorphisme de ramification. Il existe donc un homomorphisme surjectif f de G sur $\text{Gal}(M''/K'')$ qui se factorise en un isomorphisme de ramification \hat{f} de $\text{Gal}(M/K)$ sur $\text{Gal}(M''/K'')$. Comme F_g est projectif, il existe $\psi \in \text{Hom}(F_g, G)$ tel que $f \circ \psi = \phi$. Soit L'' le souscorps des invariants de Ω sous l'action de $\text{Ker } \psi$; par la théorie de Galois, ψ définit un isomorphisme de G sur $\text{Gal}(L''/K'')$ qui relève \hat{f} ; d'après la proposition 4, c'est un isomorphisme de ramification. \square

REMARQUES: 1. Le théorème 1 repose sur trois bases: les résultats de Sen concernant la ramification des extensions de Lie [6], le théorème conjecturé par J.-P. Serre qui affirme que toute extension galoisienne finie totalement ramifiée d'un corps local est identiquement ramifiée à une extension d'un corps local à corps résiduel fini [2] et le théorème de plongement des p -extensions finies totalement ramifiées de Nguyen Quang Do ([5], loc. cit.). La seule obstruction qui empêche de généraliser le théorème 1 à toutes les extensions de Lie totalement ramifiées est l'absence d'une généralisation du théorème de Nguyen Quang Do à toutes les extensions galoisiennes finies totalement ramifiées.

2. Dans un précédent article [2], nous démontrions que toute extension abélienne totalement ramifiée d'un corps local K est identiquement ramifiée à une extension d'un corps local à corps résiduel fini pourvu que la caractéristique résiduelle de K soit > 2 et, quand celle-ci est égale à 2, nous annonçons que le résultat restait vrai. Cela résulte de la généralisation suivante du théorème 1.

THÉORÈME 2. Soit K un corps local d'indice de ramification absolu e et soit L une extension de Lie totalement ramifiée de K de groupe de Galois G . Supposons que G est produit-direct d'un pro- p -groupe et d'un groupe fini d'ordre premier à p . Alors il existe une extension fini K' de \mathbb{Q}_p , d'indice de ramification e , et une extension de Lie de K' identiquement ramifiée à L/K .

DÉMONSTRATION: Par hypothèses, l'extension L/K est la composée de deux extensions galoisiennes totalement ramifiées et linéairement disjointes N/K et M/K avec $V = \text{Gal}(N/K)$ isomorphe au p -sous-groupe maximal de G et $U = \text{Gal}(M/K)$ cyclique fini d'ordre m premier à p . On a $U(0) = U$, $U(x) = \{1\}$ pour $x > 0$ et, pour tout $x \geq 0$, l'isomorphisme canonique de $U \times V$ sur G applique $U(x) \times V(x)$ sur $G(x)$.

D'après le théorème 1, il existe un corps local K' dont l'indice de ramification absolu est e et dont le corps résiduel est fini et une extension de Lie N' de K' identiquement ramifiée à N/K . Quitte à composer N'/K' avec une extension finie non ramifiée de K' , on peut supposer que K' contient une racine primitive $m^{\text{ème}}$ de l'unité; alors, en désignant par π une uniformisante de K' , l'extension $M' = K'(\sqrt[m]{\pi})$ de K' est cyclique, totalement et modérément ramifiée et linéairement disjointe de N'/K' . Le groupe de Galois de $M'N'/K'$ s'identifie donc à $\text{Gal}(M'/K') \times \text{Gal}(N'/K')$ et si f_U (resp. f_V) désigne un isomorphisme de ramification de U sur $\text{Gal}(M'/K')$ (resp. de V sur $\text{Gal}(N'/K')$) il est immédiat de vérifier que $f_U \times f_V$ est un isomorphisme de ramification de G sur $\text{Gal}(M'N'/K')$. \square

Bibliographie

- [1] J.-M. FONTAINE et J.-P. WINTENBERGER: Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux. *C.R. Acad. Sc. Paris* série A 288 (1979) 367–370.
- [2] F. LAUBIE: Groupes de ramification et corps résiduels. *Bull. Sc. Math.* 2^{ème} série 105 (1981) 309–320.
- [3] M. LAZARD: Groupes analytiques p -adiques. *publication Math. IHES* 26 (1965).
- [4] M.A. MARSHALL: Ramification groups of Abelian local field extensions. *Can. J. Math.* 23 2 (1971) 184–203.
- [5] T. NGUYEN QUANG DO: Sur la structure galoisienne des corps locaux et la théorie d'Iwasawa. *Compositio Math.* 46 (1982) 85–119.
- [6] S. SEN: Ramification in p -adic Lie extensions, *Inv. Math.* 17 (1972) 44–50.
- [7] J.-P. SERRE: CORPS LOCAUX. Paris: Hermann (1968) 2^{ème} éd.
- [8] J.T. TATE: p -divisible groups, Proc. of a conference on local fields, Driebergen: Springer (1967) 158–183.
- [9] J.-P. WINTENBERGER: Extensions de Lie et groupes d'automorphismes de corps locaux de caractéristique p . *C.R. Acad. Sc. Paris* série A 288 (1979) 367–370.
- [10] B.F. WYMAN: Wildly ramified gamma extensions. *Amer. J. of Math.* 9 (1969) 135–152.

(Oblatum 24-VI-1983)

François Laubie
U.E.R. des Sciences de Limoges
123 Avenue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex
France