COMPOSITIO MATHEMATICA

F. CAMPANA

Réduction d'albanèse d'un morphisme propre et faiblement kahlérien. II. Groupes d'automorphismes relatifs

Compositio Mathematica, tome 54, n° 3 (1985), p. 399-416

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__54_3_399_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Compositio Mathematica 54 (1985) 399–416.
© 1985 Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht. Printed in The Netherlands.

REDUCTION D'ALBANESE D'UN MORPHISME PROPRE ET FAIBLEMENT KAHLERIEN. II. GROUPES D'AUTOMORPHISMES RELATIFS

F. Campana

Abstract

Dans le chapitre 8, la notion de groupe relatif d'automorphismes relatifs est introduite. Dans le chapitre 9, la décomposition en parties linéaire et torique de la composante neutre du groupe d'automorphismes relatifs d'un morphisme propre et faiblement Kählérien est établie. Dans le chapitre 10 enfin, on étudie les morphismes faiblement Kählériens propres et à fibres algébriques: on montre que l'obstruction à l'algébricité (voir définitions) d'un tel morphisme gît dans la partie torique du groupe relatif d'automorphismes, et que l'obstruction à l'algébricité uniforme de ce morphisme, supposé algébrique, gît dans la partie linéaire de ce même groupe relatif. De premières conséquences de ce résultat sont données.

Nous préservons la bibliographie de l'article précédent (*Comp. Math.* 54 (1985) 373–398).

§7. Groupes méromorphes relatifs

Un morphisme d'espaces analytiques réduits γ: $G \to S$ et une application méromorphe Δ: $G \times_S G \to S$ au-dessus de S définissent sur G une structure de *groupe méromorphe sur* $S^{(*)}$ si:

- La restriction de γ à toute composante irréductible de G est propre et surjective.
- Il existe des ouverts de Zariski denses S^* de S et $G^* \subset \gamma^{-1}(S^*)$ de G tels que la restriction γ^* de γ à G^* soit lisse.
- La restriction Δ^* de Δ à $G^* \times_{S^*} G^*$ est analytique et il existe sur chaque fibre G_s^* de γ^* une structure de groupe, notée $\cdot$, telle que l'on ait, pour tout $(g, h) \in (G_s^*)^2$: $\Delta^*(g, h) = g \cdot h^{-1}$.

La *section neutre* de G est la section méromorphe de γ dont l'image est $N_G = \Delta(\Delta_G)$, où Δ_G est la diagonale de $G \times G$. La *composante neutre*

[1] Cette notion a été introduite, dans le cas absolu, par Liebermann et Fujiki, qui a également introduit les notions des §§7 et 8 du présent travail dans: "On a holomorphic fiber bundle with meromorphic structure"; Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 19 (1983) 117–134.

de G, notée G^0, est la composante irréductible de G qui contient N_G. Le groupe méromorphe γ: $G \to S$ est dit *faiblement Kählérien* si la restriction de γ à chaque composante irréductible de G est un morphisme faiblement Kählérien, et *propre* si γ est propre.

Soit γ: $G \to S$ un groupe méromorphe sur S, et soit φ: $X \to S$ un morphisme dont la restriction à chaque composante irréductible est propre et surjective. Une *action méromorphe de G sur X au-dessus de S* est une application méromorphe A: $G \times_S X \to S$ au-dessus de S dont la restriction à $G^* \times_{S^*} X^*$, avec $X^* = \varphi^{-1}(S^*)$, est analytique et induit, pour toute fibre G_s^* de γ^* une action du groupe G_s^* sur X_s.

Un morphisme sur S du groupe méromorphe γ: $G \to S$ dans le groupe méromorphe η: $H \to S$ est une application méromorphe M: $G \to H$ au-dessus de S, analytique et à valeurs dans H^* sur G^*, et induisant sur chaque fibre de γ^* un morphisme de groupes à valeurs dans la fibre correspondante de η^*.

Un *sous-groupe méromorphe* de γ: $G \to S$ est un sous-espace analytique fermé K de G qui est adhérence de son intersection K^* avec G^*, et tel que la restriction γ_K de γ à K, et la restriction Δ_K de Δ à $K \times_S K$ supposée à valeurs dans K, définissent sur K une structure de groupe méromorphe sur S.

On vérifie immédiatement que le *noyau* $\mathrm{Ker}(M) = M^{-1}(N_H)$ et l'*image* $\mathrm{Im}(M) = M(G)$ d'un tel morphisme sont des sous-groupes méromorphes de G et H respectivement.

Soit γ: $G \to S$ un groupe méromorphe sur S, φ_i: $X_i \to S$ des espaces au-dessus de S, et A_i: $G \times_S X_i \to X_i$ une action méromorphe de G sur X_i pour $i = 1$, 2. Une application méromorphe χ: $X_1 \to X_2$ est dite *G-équivariante* sur S si $A_2 \circ (1_G \times \chi) = (1_G \times \chi) \circ A_1$. On dit que χ est *G-invariante* si elle est G-équivariante lorsque A_2 est l'action triviale de G sur X_2, c'est-à-dire la projection de $G \times X_2$ sur son second facteur.

PROPOSITION 1: *Soit φ: $X \to S$ un morphisme analytique, et A: $G \times_S X \to X$ une action méromorphe du groupe méromorphe propre γ: $G \to S$ sur S. Il existe un diagramme commutatif, appelé le quotient méromorphe de X par G:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & (X/G) \arrow[dl, "\varphi_G"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

dans lequel q_G est une application méromorphe surjective et G-invariante, et tel que pour tout diagramme commutatif dans lequel q: $X \to Y$ est une application méromorphe G-invariante surjective, il existe une unique application méromorphe surjective r: $(X/G) \to Y$ telle que $q = r \circ q_G$.

Rappelons la construction du quotient méromorphe *canonique* de (X/G), la démonstration étant analogue à celle de [L]: pour tout x de $\varphi^{-1}(S^*) = X^*$, l'orbite $G \cdot x$ de x sous l'action de G_s, avec s: $\varphi(x)$, est Zariski-ouverte et dense dans son adhérence $\overline{G \cdot x}$, qui est analytique fermée dans X_s. Sur l'ouvert U, G-invariant et Zariski dense, de X constitué des x de X^* au voisinage desquels X est normal et la dimension des orbites sous l'action de G constante, on a un morphisme q_G^*: $U \to \mathscr{C}(X/S)$ au-dessus de S^* défini par $q_G^*(x) = 1 \cdot \overline{(G \cdot x)}$ ([$B2$]) qui se prolonge en une application méromorphe q_G: $X \to \mathscr{C}(X/S)$ au-dessus de $\mathscr{C}(X/S)$. On pose alors: $(X/G) = q_G(X)$.

§8. Groupes d'automorphismes relatifs

Si φ: $X \to S$ est un morphisme propre et surjectif d'espaces analytiques irréductibles, on appellera *φ-suite* Y toute suite finie $Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$ de sous-ensembles analytiques fermés Y^h de X, pour $h = 1, \ldots, n$, dont chaque composante irréductible est surjective sur S pour φ. On notera alors S^* un ouvert de Zariski dense de S au-dessus duquel X et les Y^h sont géométriquement plats ([B2]).

Si β: $B \to S$ est un morphisme surjectif d'espaces irréductibles, on note φ_B: $X_B \to B$ le morphisme déduit de φ par le changement de base β, et Y_B la φ_B-suite définie par $Y_B = (Y_B^1, \ldots, Y_B^n)$.

Si s est dans S^*, on note Y_s la suite $(Y_s^1, \ldots, Y_s^n)$ où $Y_s^h = Y^h \cap X_s$ pour $h = 1, \ldots, n$. Si χ: $X_1 \to X_2$ est un morphisme au-dessus de S d'espaces irréductibles φ_i: $X_i \to S$ surjectifs sur S, et $Y_i = (Y_i^1, \ldots, Y_i^{n_i})$ une φ_i-suite pour $i = 1, 2$, on note: $\chi(Y_i)$ (resp. $\chi^{-1}(Y_i)$) la φ_2-suite (resp. φ_1-suite) définie par: $\chi(Y_i) = (\chi(Y_1^1), \ldots, \chi(Y_1^{n_1}))$ (resp. $\chi^{-1}(Y_2) = (\chi^{-1}(Y_2^1), \ldots, \chi^{-1}(Y_2^{n_2}))$, et on l'appelle l'image de Y^1 (resp. l'image réciproque de Y^2) par χ.

Soit φ_i: $X_i \to S$ un morphisme propre et surjectif d'espaces analytiques irréductibles, et Y_i une φ_i-suite, pour $i = 1, 2$. Soit φ: $\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2 \to \mathrm{S}$ la projection déduite de $\varphi_1 \times \varphi_2$, et φ_*: $\mathscr{C}(X_1 \times_S X_2/S) \to S$ le morphisme d'image directe de cycles par φ. On note également φ_* la restriction de φ_* à toute intersection d'un ouvert et d'un fermé de Zariski de $\mathscr{C}(X_1 \times_S X_2/S)$.

La démonstration de la proposition 2.1 de [L] montre que le sous-ensemble $\mathrm{Isom}_S^{*}(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ de $\mathscr{C}(X_1 \times_S X_2/S)$ constitué des graphes de multiplicité un des isomorphismes d'une fibre $X_{1,s}$ de φ_1, avec $s \in S^*$, sur la fibre $X_{2,s}$ correspondante de φ_2, qui envoient la suite $Y_{1,s}$ sur la suite $Y_{2,s}$, est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de Zariski de $\mathscr{C}(X_1 \times_S X_2/S)$. On note $\mathrm{Isom}_S^*(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ la réunion des composantes irréductibles de cet ensemble dont l'image par φ_* n'est pas maigre dans S^*, et $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ l'adhérence de Isom_S^* $(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ dans $\mathscr{C}(X_1 \times_S X_2/S)$, dont c'est une réunion de composantes irréductibles.

On notera, pour abréger: $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2; X_1, X_2) = \mathrm{Isom}_S(X_1, X_2)$; $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_1; Y_1, Y_1) = \mathrm{Aut}_S(X_1; Y_1)$ et $\mathrm{Isom}_S(X_1; X_1) = \mathrm{Aut}_S(X_1)$. On utilise avec des significations analogues les notations: $\mathrm{Aut}^*_S(X_1)$, $\mathrm{Aut}^*_S(X_1; Y_1)$ et $\mathrm{Isom}^*_S(X_1, X_2)$.

La composition des applications définit naturellement des applications au-dessus de S^*:

$C^*_{X_i}$: $\mathrm{Aut}^*_S(X_i) \times_S \mathrm{Aut}^*_S(X_i) \to \mathrm{Aut}^*_S(X_i)$
Φ^*_i : $\mathrm{Aut}^*_S(X_i) \times_S X_i \to X_i$ pour $i = 1, 2$
Γ^* : $\mathrm{Aut}^*_S(X_1) \times_S \mathrm{Aut}^*_S(X_2) \times_S \mathrm{Isom}^*_S(X_1, X_2) \to \mathrm{Isom}^*_X(X_1, X_2)$
Λ^* : $\mathrm{Isom}^*_S(X_1, X_2) \times_S X_1 \to X_2$

par les égalités: $C^*_{X_i}(h, g) = h \circ g^{-1}$; $\Phi^*_i(g, x) = g \cdot x$; $\Gamma^*(h, g, j) = g \circ j \circ h^{-1}$; $\Lambda^*(j, x) = j \cdot x$.

PROPOSITION 1: *Les applications précèdentes sont analytiques, et se prolongent en des applications méromorphes au-dessus de S, respectivement notées*: C_{X_i}: $\mathrm{Aut}(X_i) \times_S \mathrm{Aut}_S(X_i) \to \mathrm{Aut}_S(X_i)$, Φ_i: $\mathrm{Aut}_S(X_i) \times_S X_i \to X_i$, Γ: $\mathrm{Aut}_S(X_1) \times_S \mathrm{Aut}_S(X_2) \times_S \mathrm{Isom}_S(X_1, X_2) \to \mathrm{Isom}_S(X_1, X_2)$ *et* Λ: $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2) \times_S X_1 \to X_2$.

Lorsque φ_1 et φ_2 sont faiblement Kählériens, C_{X_i} définit sur $\mathrm{Aut}_S(X_i)$ *une structure de groupe méromorphe faiblement Kählérien sur S, pour laquelle Φ_i est une action méromorphe sur X_i, et pour lesquelles Γ est une action méromorphe du groupe produit* $\mathrm{Aut}_S(X_1) \times_S \mathrm{Aut}_S(X_2)$ *sur* $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2)$.

Si Y_i est une φ_i-suite pour $i = 1, 2$, alors $\mathrm{Aut}_S(X_i; Y_i)$ *est un sous-groupe méromorphe de* $\mathrm{Aut}_S(X_i)$.

DÉMONSTRATION: Nous allons démontrer le résultat pour Γ, les autres résultats admettant des démonstrations analogues: soit $Z_i \subset X_i \times_S X_i \times_S G_i$ (resp. $Z_0 \subset X_1 \times_S X_2 \times_S I$) les graphes des familles universelles de cycles de $X_i \times_S X_i$ (resp. $X_1 \times_S X_2$) paramétrées par $\mathrm{Aut}_S(X_i)$ (resp. $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2)$, et soit p_i (resp. q_i) la projection de Z_i (resp. Z_0) sur son premier (resp. $i^{\text{ème}}$ facteur) ceci pour $i = 1, 2$, et où l'on a posé: $\mathrm{Aut}_S(X_i) = G_i$ et $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2) = I$. Soit Z le sous-ensemble analytique fermé de $Z_1 \times Z_0 \times Z_2 \subset X_1 \times_S X_1 \times_S G_1 \times_S X_1 \times_S X_2 \times_S X_2 \times_S G_2 = P$, défini par les équations: $p_1 = q_1$ et $p_2 = q_2$, et soit π: $Z \to (G_1 \times_S G_2 \times_S I) \times_S X_1 \times_S X_2$ la restriction à Z de $\pi_3 \times \pi_6 \times \pi_9 \times \pi_2 \times \pi_8$, où π_j désigne la projection de P sur son $j^{\text{ième}}$ facteur, pour $1 \leqslant j \leqslant 9$. Alors π est propre, son image $\pi(Z)$ est le graphe d'une famille méromorphe de cycles de $X_1 \times_S X_2$ paramétrée par $G_1 \times_S G_2 \times_S I$. on vérifie que l'application méromorphe au-dessus de S de $(G_1 \times_S G_2 \times_S I)$ dans $\mathscr{C}(X_1 \times_S X_2)$ associée à cette famille coïncide avec le prolongement cherché Γ de Γ^*.

Lorsque φ_1 et φ_2 sont propres et faiblement Kählériens, le lemme 10 du §5 montre que la restriction de $(\varphi_i)_*$: $\mathscr{C}(X_i \times_S X_i) \to S$ aux composantes irréductibles de $\mathrm{Aut}_S(X_i)$ est propre et faiblement Kählérien, et donc que $\mathrm{Aut}_S(X_i)$ est un groupe méromorphe sur S. Les autres assertions se démontrent comme la précèdente.

PROPOSITION 2: *Soient* φ_i: $X_i \to S$ *un morphisme faiblement Kählérien, propre et surjectif d'espaces analytiques irréductibles, et* Y_i *une* φ_i*-suite pour* $i = 1, 2$, *géométriquement plats sur l'ouvert de Zariski dense* S^* *de* S.

Si, pour tout s *de* S^*, *il existe un isomorphisme de* $X_{1,s}$ *sur* $X_{2,s}$ *qui envoie* $Y_{1,s}$ *sur* $Y_{2,s}$, *alors* $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ *est non vide, et il existe une application biméromorphe naturelle* β: $(X_1/G_1) \to (X_2/G_2)$ *au-dessus de* S, *avec* $G_i = \mathrm{Aut}_S(X_i; Y_i)$ *pour* $i = 1, 2$.

DÉMONSTRATION: L'hypothèse du théorème est que S^* est contenu dans l'image de $\mathrm{Isom}_S^*(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ par φ_*. Le théorème de Baire montre que l'une des composantes irréductibles de $\mathrm{Isom}_S^*(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ a une image d'intérieur non vide dans S. La S-propreté de cette composante irréductible démontre la première assertion. Soit φ_*: $I \to S$ une composante irréductible de $\mathrm{Isom}_S(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$, surjective sur S donc.

On a une application biméromorphe

$$1_I \times \Lambda : I \underset{S}{\times} X_1 \to I \underset{S}{\times} X_2$$

au-dessus de S, où Λ est l'application méromorphe introduite dans l'énoncé de la proposition 1. On a, d'autre part, une action méromorphe B de $G_1 \times_S G_2$ sur $(I \times X_i)$ au-dessus de S, ainsi définie: $B = (A \circ p_i) \times (\Phi_i \circ q_i)$, où

$$p_i: G_1 \underset{S}{\times} G_2 \underset{S}{\times} I \underset{S}{\times} X_i \to G_1 \underset{S}{\times} G_2 \underset{S}{\times} I$$

et

$$q_i: G_1 \underset{S}{\times} G_2 \underset{S}{\times} I \underset{S}{\times} X_i \to G_i \times X_i$$

sont les projections naturelles.

On vérifie, d'autre part, facilement que, pour ces actions:

- $1_I \times \Lambda$ est $G_1 \times_S G_2$-équivariante
- la projection naturelle de $I \times_S X_i$ sur (X_i/G_i) est $G_1 \times_S G_2$-invariante et définit une application biméromorphe β_i: $(I \times_S X_i/G_1 \times_S G_2) \to (X_i/G_i)$.

L'application biméromorphe $G_1 \times_S G_2$-équivariante $(1_I \times \Lambda)$ définit donc, par passage au quotient pr $(G_1 \times_S G_2)$ une application biméromorphe β: $(X_1/G_1) \to (X_2/G_2)$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} I \underset{S}{\times} X_1 & \xrightarrow{1_I \times \Lambda} & I \underset{S}{\times} X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X_1/G_1) & \xrightarrow{\beta} & (X_2/G_2) \end{array}$$

§9. Parties linéaire et torique d'un groupe d'automorphismes relatifs dans le cas faiblement Kählérien

Soit φ: $X \rightarrow S$ un morphisme propre et faiblement Kählérien, tel que, au-dessus de l'ouvert de Zariski dense et normal S^* de S, φ soit lisse à fibres connexes et le faisceau cohérent $\varphi_*(\Theta_{X/S})$ soit localement libre, où $\Theta_{X/S}$ désigne le faisceau des germes de champs de vecteurs verticaux.

$$\text{Soit}\quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathrm{Alb}(X/S) = A \arrow[dl, "\tau"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

la réduction d'Albanèse de φ, et τ_*: $\mathrm{Aut}_S^0(A) \rightarrow S$ la composante neutre de $\mathrm{Aut}_S(A)$.

On démontre alors. Comme dans la proposition 1 du §6 l'existence d'un morphisme naturel de groupes méromorphes sur S analytique et à valeurs dans $\mathrm{Aut}_S^{0*}(A)$ sur $\mathrm{Aut}_S^{0*}(X)$: $J: \mathrm{Aut}_S^0(X) \rightarrow \mathrm{Aut}_S^0(A)$ tel que pour tout j de $\mathrm{Aut}_S^{0*}(X)$ on ait: $\alpha \circ j = J(j) \circ \alpha$.

On appellera J le *morphisme de Jacobi* de φ.

On note $T_S(X)$ l'image de J; c'est un tore relatif sur S appelé la *partie torique* de $\mathrm{Aut}_S^0(X)$.

Soit $L_S(X)$ le noyau du morphisme de groupes relatifs J: $\mathrm{Aut}_S^0(X) \rightarrow \mathrm{Aut}_S^0(A)$ au-dessus de S: c'est un groupe de Lie méromorphe sur S appelé la *partie linéaire* de $\mathrm{Aut}_S^0(X)$.

Ce terme provenant de ce que, d'après [L] ou [F], pour tout s de S^*, la fibre de $L_S^*(X)$ au-dessus de s est naturellement munie d'une structure de groupe linéaire algébrique. Si G est un sous-groupe méromorphe de $\mathrm{Aut}_S^0(X)$, surjectif sur S, on note

$$L_S(G) = L_S(X) \cap G$$

et

$$T_S(G) = J(G),$$

et on l'appelle la *partie linéaire* (*resp. torique*) *de* G; ce sont, respectivement, des sous-groupes méromorphes de $L_S(X)$ et $T_S(X)$.

On déduit donc de ce qui précède un diagramme commutatif d'applications méromorphes; appelé *diagramme de décomposition de* φ *relatif à*

G:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "q_L"] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ddd, "\varphi"'] & & (X/L_S(G)) \arrow[dl, "\alpha_L"'] \arrow[ddd, "q_G"] \\
& A \arrow[d, "q_T"] \arrow[ddl, "\tau"'] & \\
& (A/T_S(G) \arrow[dl, "\tau_0"] & \\
S & & (X/\bar{G}) \arrow[ul, "\alpha_G"'] \arrow[ll, "\varphi_G"]
\end{tikzcd}$$

résultant de ce que α est invariante par $L_S(G)$, de ce que l'action de G sur $\mathscr{C}(X/S)$ qui prolonge son action sur X laisse $(X/L_S(G))$ stable et passe donc au quotient en une action de $T_S(G)$ sur $(X/L_S(G))$, et enfin de ce que l'application composée $(q_T \circ \alpha)$: $X \to (A/T_S^0(G))$ est invariante par G.

Remarque: Dans le diagramme précédent, le morphisme produit: $(q_G \times \alpha_L)$: $(X/L_S(G)) \to (X/\bar{G}) \times_{(A/T_S^0(G))} A$ est un isomorphisme faible sur son image (c'est à dire que c'est une bijection de $(X/L_S(G))$ sur son image) au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S.

Il suffit évidemment de démontrer cette propriété dans le cas absolu où S est un point (réduit). Tout d'abord, α_L est bien un morphisme, puisque $(X/L_S(G)) \subset \mathscr{C}(X/A)$ où X est au-dessus de A par α; en effet, il existe un ouvert de Zariski dense de $(X/L_S(G))$ constitué d'adhérences d'orbites sous l'action de $L_S(G)$; comme une telle orbite est contenue dans une fibre de α, α_L est la restriction à $(X/L_S(G))$ du morphisme α_*: $\mathscr{C}(X/A) \to A$ d'image directe par α. Montrons ensuite que q_G est aussi un morphisme: tout d'abord, le roupe $T_S^0(G)$ agit sans point fixe sur $(X/L_S(G))$. En effet, si $g \in G$ est tel que son image t_g dans $T_S^0(G)$ ait un point fixe y dans $(X/L_S(G))$, on a:

$$\alpha(g \cdot y) = \alpha(y) = \alpha(y) + t_g \quad \text{et} \quad t_g = 0.$$

Toutes les orbites de $(X/L_S(G))$ sont donc isomorphes à $T_S^0(G)$, de telle sorte que q_G est analytique, et que $(q_G \times \alpha_L)$ définit une bijection de $(X/L_S(G))$ sur son image.

§10. Morphismes faiblement Kählériens à fibres algébriques

Le morphisme propre φ: $X \to S$ est dit *algébrique* (resp. *presque-projectif*) (*) s'il admet une algébrisation (resp. une p-projectivisation),

[2] Les définitions relatives à la projectivité (resp. l'algébricité) gardent un sens lorsque φ est supposée méromorphe et holomorphe au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S (resp. méromorphe).

c'est-à-dire un couple $(\mathscr{F}, \mu)$ formé d'un faisceau analytique cohérent $\mathscr{F}$ sur S et d'une application méromorphe μ: $X \to \mathbb{P}(\mathscr{F})$ au-dessus de S qui est biméromorphe de X sur son image $\mu(X)$ (resp. qui est au plongement au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S). Le morphisme propre φ: $X \to S$ est dit *uniformément algébrique* (resp. *uniformément p-projectif*) si, après changement de base par une modification ν: $\hat{S} \to S$ de S, il admet une algébrisation (resp. une p-projectivisation) $(\mathscr{F}, \mu)$ dans laquelle $\mathscr{F}$ est globalement libre sur chaque composante irréductible de $\hat{S}$. Ces propriétés sont évidemment stables par changement de base β: $B \to S$ surjectif.

Si φ est uniformément algébrique, il est algébrique et donc à fibres algébriques (i.e.: de Moisezon). On a montré, dans [C4], que si φ est faiblement kählérien et à fibres algébriques, il est, localement sur S, uniformément algébrique. Si φ est fini et S compact, ou si φ est algébrique, S compact et algébrique, alors φ est uniformément algébrique. Cependant, ces trois propriétés sont deux à deux inéquivalentes en général, même lorsque S est compact et X kählérienne.

Par exemple, si T est un tore de dimension 2 de dimension algébrique $a(T)$ égale à un, et ρ: $T \to E$ sa réduction algébrique, alors ρ est à fibres algébriques, mais non algébrique. Sinon, il serait uniformément algébrique et on aurait $a(T) = 2$, puisque lorsque φ: $X \to S$ est à fibres algébriques de base compacte, φ est uniformément algébrique si et seulement si $a(X) = a(S) + \dim_{\mathbb{C}}(X) - \dim_{\mathbb{C}}(S)$. (voir appendice).

D'autre part, si S est une surface $K3$ Kählérienne telle que $H^1(S, 0_S^*) = \{1\}$ (il en existe), et $\varphi = \mathbb{P}(T_S) \to S$ le projectifié du fibré tangent T_S à S, on vérifie facilement que $\mathbb{P}(T_S)$ ne contient d'autre sous-ensemble analytique compact et irréductible que les fibres de φ. En particulier, $a(\mathbb{P}(T_S)) = 0$ et φ est algébrique sans être uniformément algébrique.

Un morphisme propre d'espaces analytiques irréductibles φ: $X \to S$ sera dit *régulier* s'il est surjectif, faiblement Kählérien, lisse et à fibre connexe au-dessus d'un ouvert de Zariski dense S^* de S.

THÉORÈME: *Soit* φ: $X \to S$ *un morphisme régulier à fibre générique algébrique projective, soit* Y *une* φ*-suite dans le sens du* §9, *soit* $G = \mathrm{Aut}_S^0(X;\, Y)$ *et soit*:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q_L"] \arrow[dr, "\alpha"'] & (X/L_S(G)) \arrow[r, "q_G"] \arrow[d, "\alpha_L"] & (X/G) \arrow[d, "\alpha_G"] \arrow[dr, "\varphi_G"] & \\
 & A \arrow[r, "q_T"] & (A/T_S(G)) \arrow[r, "\tau_0"] & S
\end{tikzcd}$$

le diagramme de décomposition de φ *relatif à* G. *Les morphismes* φ_G, τ_0, α_G *et* α_L *sont alors uniformément p-projectifs et le morphisme* α *est presque-projectif, et l'application méromorphe* q_L *est algébrique.*

DÉMONSTRATION: On suppose que φ est lisse à fibre connexe et algébrique projective au-dessus de l'ouvert de Zariski dense S^* de S.

Remarquons tout d'abord que le théorème sera établi lorsque l'on aura montré que α est presque-projectif et φ_G uniformément p-projectif. En effet, la proposition 2 de l'appendice montre alors que q_L est p-projectif et que α_G et la restriction de τ_0 à $\alpha_G(X/G)$ sont uniformément p-projectifs. Puisque, d'après la remarque finale du §9, α_L est déduit de α_G par le changement de base q_T: $A \to (A/T_S(G))$ et que α_G est uniformément p-projectif, α_L l'est aussi.

D'autre part, puisque la restriction de τ_0 à l'image de α_G est uniformément p-projectif, la remarque 5 de l'appendice montre qu'il existe un sous-ensemble analytique fermé irréductible $\tilde{S}$ de $\alpha_G(X/G)$ tel que la restriction de τ_0 à $\tilde{S}$ soit surjective et génériquement finie.

Si l'on considère maintenant le morphisme régulier à fibre générique algébrique projective τ_0: $(A/T_s(G)) \to S$ et la φ-suite $\tilde{S}$, on constate que le groupe méromorphe G sur S est réduit à sa section neutre, de telle sorte que $(\tau_0)_G$ est ici égal à τ_0, qui est donc uniformément p-projectif.

Il nous suffit donc d'établir les propriétés énoncées pour α et φ_G.

Nous utilisons les notations introduites dans le §6: π: $\mathrm{Pic}(X/S) \to S$ désigne la variété de Picard de X relative à φ, δ: $D(X/S) \to \mathrm{Pic}(X/S)$ l'application méromorphe naturelle de l'espace des diviseurs génériques relatifs à φ dans $\mathrm{Pic}(X/S)$, on désigne par $\mathrm{Pic}^+(X/S)$ la réunion des composantes irréductibles de $\mathrm{Pic}(X/S)$ qui contiennent la classe d'un diviseur très ample sur une fibre lisse de φ, et par $D^+(X/S)$ l'image réciproque de $\mathrm{Pic}^+(X/S)$ par δ.

Démontrons la p-projectivité de α: soit P^+ une composante irréductible de $\mathrm{Pic}^+(X/S)$ contenant un point p qui est la classe d'un fibré en droites $\mathscr{D}_s$ sur une fibre lisse X_s de φ, avec s dans S^*, qui est très ample sur X_s et tel que $H^i(X_s, \mathscr{D}_s) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$, et $D^+ = \delta^{+1}(P^+)$.

L'existence d'une telle composante P^+ résulte du théorème de Baire et du fait que les conditions énoncées sont Zariski-ouvertes.

La projection φ_*: $D^+ \to S$ est alors un morphisme régulier à fibres génériques algébriques projectives. Le théorème 3 du §6 montre alors que le morphisme Δ: $D(D^+/S) \to \mathrm{Pic}(D^+/S)$ est presque-projectif. L'application de Kodaira K_{D^+}: $X \to D(D^+/S)$ est, d'autre part, un plongement au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S, d'après les hypothèses faites sur D^+.

L'application composée: $\Delta \circ K_D$: X $\to \mathrm{Pic}(D^+/S)$ est donc presque projective. La propriété universelle de α: $X \to \mathrm{Alb}(X/S) = A$ associe à $(\Delta \circ K_D)$ une application méromorphe β: $A \to \mathrm{Pic}(D^+/S)$ au-dessus de S telle que $\beta \circ \alpha = \Delta \circ K_D$. La proposition 2 de l'appendice montre alors que α est presque-projective.

Il reste donc à montrer que φ_G est uniformément presque-projectif. Cette propriété sera déduite de la:

PROPOSITION: *Soit* φ: $X \to S$ *un morphisme régulier à fibre générique algébrique projective, et* Y *une* φ*-suite. Il existe alors un morphisme surjectif, propre, fini et uniformément p-projectif* σ: $\bar{S} \to S$, *avec* $\bar{S}$ *irréductible, un morphisme régulier et uniformément p-projectif* $\bar{\varphi}$: $\bar{X} \to \bar{S}$ *et une* $\bar{\varphi}$*-suite* $\bar{Y}$ *tels que* $\mathrm{Isom}_{\bar{S}}(X_{\bar{S}}, \bar{X}; Y_{\bar{S}}, \bar{Y})$ *soit non vide.*

Avant de démontrer cette proposition, montrons qu'elle entraîne l'uniforme p-projectivité de φ_G: soit $X_1 = X_{\bar{S}}$, $X_2 = \bar{X}$, $G_1 = \mathrm{Aut}^0_{\bar{S}}(X_{\bar{S}}; Y_{\bar{S}})$ et $G_2 = \mathrm{Aut}^0_{\bar{S}}(\bar{X}; \bar{Y})$.

La proposition 2 du §8 montre l'existence d'une application biméromorphe β: $X_1/G_1 \to X_2/G_2$ au-dessus de $\bar{S}$, dont on peut vérifier ici qu'elle est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de $\bar{S}$. La proposition 2 de l'appendice montre que la projection φ_{G_1}: $X_2/G_2 \to \bar{S}$ est uniformément p-projective. La projection φ_{G_1}: (X_1/G_1) l'est donc aussi. Cependant, φ_{G_1} est déduite de φ_G par le changement de base σ: $\bar{S} \to S$, de sorte que le corollaire à la proposition 2 de l'appendice montre l'uniforme p-projectivité de φ_G.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION: La première étape (lemmes 1 et 2 ci-dessous) est la construction d'un morphisme surjectif β: $B \to S$ tel que le morphisme déduit de φ par le changement de base β soit uniformément p-projectif.

LEMME 1: *Soit* φ: $X \to S$ *un morphisme régulier à fibre générique algébrique projective, et soit* π^+: $P^+ \to S$ *une composante irréductible de* $\mathrm{Pic}^+(X/S)$ (*notaions introduites au* §6 *et rappelées au début de la démonstration du théorème*).

Le morphisme φ_+: $X_{P^+} \to P_+$ *déduit de* φ *par le changement de base* π_+ *est alors p-projectif.*

DÉMONSTRATION: Soit δ_+: $D^+ \to P^+$ la restriction de δ à $D^+ = \delta^{-1}(P^+)$. On identifie $(\varphi_*)_{P^+}$: $D(X/S) \times_S P^+ = D(X/S)_{P^+} \to P^+$ à $(\varphi_{P^+})_*$: $D(X_{P^+}/P^+) \to P^+$ par les applications naturelles, et D^+ à un sous-ensemble analytique fermé de $D(X_{P^+}/P^+)$ par le plongement $1_{\mathrm{D}^+} \times \delta_+$: $\mathrm{D}^+ \to \mathrm{D}^+ \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}^+$ au-dessus de P^+. Avec cette identification, D^+ paramètre une famille universelle de diviseurs relatifs de X_{P^+} sur P^+, dont le graphe est noté $\mathrm{Z} \subset \mathrm{D}^+ \times_{\mathrm{P}^+} \mathrm{X}_{\mathrm{P}^+}$.

Soit P^{+*} l'ouvert de Zariski dense de P^+ au-dessus duquel δ_+ est lisse, et est un fibré localement trivial de fibre $\mathbb{P}_r$, pour un $r \in \mathbb{N}^*$. La projection ζ: $Z \to X_{P^+}$ est alors, au-dessus de P^{+*}, un fibré holomorphe localement trivial de fibre $\mathbb{P}_{r-1}$. L'application de Kodaira K_{D^+}: $X_{P^+} \to D(D^+/P^+)$ au-dessus de P^+ associée à cette famille de diviseurs est donc analytique au-dessus de P^{+*}, et un plongement au-dessus de l'ensemble des points p de P^{+*} pour lesquels la fibre $\delta_+^{-1}(p)$ est le système linéaire complet d'un fibré très ample sur X_s, avec $s = \pi_+(p)$.

La proposition 1 de l'appendice montre, d'autre part, que la restriction $(\delta_+)_*$: $D(D^+/P^+) \to P^+$ à toute composante irréductible de $D(D^+/P^+)$ est presque-projective. L'application composée $(\delta_+)_* \circ K_{D^+}$: $X_{P^+} \to P^+$, qui coïncide avec φ_{P^+}, est donc presque-projective.

REMARQUE: On peut, en fait, montrer que le morphisme φ_B: $X_B \to B$ déduit de φ par le changement de base β: $B \to S$ surjectif, avec B irréductible, est presque projectif si et seulement s'il existe une application méromorphe ρ: $B \to \mathrm{Pic}^+(X/S)$ au-dessus de S.

LEMME 2: *Soit* φ: $X \to S$ *un morphisme presque-projectif d'espaces irréductibles, et* μ: $X \to \mathbb{P}(\mathscr{F})$ *une presque-projectivisation de* φ. *Soit* $(r+1)$ *le rang de* $\mathscr{F}$ *sur* S, $I = \mathrm{Isom}_S(\mathbb{P}(\mathscr{F}), S \times \mathbb{P}_r)$ *et* ψ_*: $I \to S$ *le morphisme d'image directe par* ψ: $\mathbb{P}(\mathscr{F}) \times_S (S \times \mathbb{P}_r) \to S$.

Le morphisme φ_I: $X_I \to I$ *déduit de* φ *par le changement de base* ψ_* *est alors uniformement p-projectif.*

REMARQUES:

1. φ est presque-projectif, donc faiblement Kählérien; donc $\mathrm{Isom}_S(\mathbb{P}(\mathscr{F}), S \times \mathbb{P}_r)$ est non vide, irréductible, et ψ_*: $I \to S$ est propre et faiblement Kählérien.

2. Avec les hypothèses et les notations du lemme 2, le morphisme déduit de φ: $X \to S$ par le changement de base ρ: $\mathrm{Isom}_{P^+}(\mathbb{P}(\mathscr{F}), P^+ \times \mathbb{P}_r) \to S$ composé de π^+ et de la projection de $\mathrm{Isom}_{P^+}(\mathbb{P}(\mathscr{F}), P^+ \times \mathbb{P}_r)$ sur P^+ est uniformément p-projectif. Remarquons ici que ρ est propre et faiblement Kählérien à fibres génériques algébriques projectives.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2: Notons encore Λ: $I \times_S \mathbb{P}(\mathscr{F}) \to \mathbb{P}_r$ l'application méromorphe au-dessus de S définie dans la proposition 1 du §8 pour $X_1 = \mathbb{P}(\mathscr{F})$ et $X_2 = S \times \mathbb{P}_r$: Λ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S. L'application méromorphe composée $\Lambda \circ (1_I \times \mu)$: $X_I \to I \times \mathbb{P}_r$, est donc une p-projectivisation uniforme de φ, où Θ: $X_I \to I \times_S \mathbb{P}(\mathscr{F})$ est définie par l'égalité: $\Theta = p_I \times \mu \circ p_X$, p_I (resp. p_X) désignant la restriction à $X_I \subset X \times I$ de la projection de $X \times I$ sur son second (resp. premier) facteur.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION: Soit μ: $X_I \to I \times \mathbb{P}_r$ une p-projectivisation uniforme de φ_I: $X_I \to I$, construite à l'aide des lemmes 1 et 2.

Soit Y_I la φ_I-suite déduite de $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$ par le changement de base ρ: $I \to S$, et soit $\mu(Y_I)$ l'image de Y_i par μ, et $\mu(Y_I)^h$ pour $h = 1, \dots, n$, l'image par μ de $Y_I^h = Y \times_S I$. On pose $Y^0 = X$, $Y_I^0 = X_I$ et $\mu(Y_I)^0 = \mu(X)$.

Pour $h = 0, 1, \dots, n$, l'espace analytique $\mu(Y_I)^h$ est, d'après [B2], le graphe d'une famille méromorphe de cycles de $\mathbb{P}_r$ paramétrée par I; soit m_h: $I \to \mathscr{C}(\mathbb{P}_r)$ l'application méromorphe associée, m: $I \to \mathscr{C}(\mathbb{P}_r)^{n+1}$ le produit des m_h, V une composante irréductible de $\mathscr{C}(\mathbb{P}_r)^{n+1}$ contenant l'image de m.

La propreté de ρ: $I \to S$ implique celle de $\rho \times 1_V$: $I \times V \to S \times V$.

L'image par $(\rho \times 1_V)$ du graphe $M \subset I \times V$ de l'application méromorphe m est donc un sous-ensemble analytique fermé de $I \times V$ surjectif sur S. Puisque V est algébrique projective, la remarque 5 de l'appendice montre donc l'existence d'un sous-ensemble analytique fermé irréductible $\bar{S}$ de $(\rho \times 1_V)(M)$ tel que la restriction à $\bar{S}$ de la projection de $S \times V$ sur son premier facteur soit propre, surjective, et génériquement finie. Soit $\bar{m}$: $\bar{S} \to V \subset \mathscr{C}(\mathbb{P}_r)^{n+1}$ la restriction à $\bar{S}$ de la projection de $(S \times V)$ sur son second facteur, et $\bar{m}_h$: $\bar{S} \to \mathscr{C}(\mathbb{P}_r)$ la composée de $\bar{m}$ avec la projection de $\mathscr{C}(\mathbb{P}_r)^{n+1}$ sur son facteur d'indice h, pour $h = 0, 1, \ldots, n$. Si $\bar{Y}^h$ est le graphe de la famille universelle de cycles de $\mathbb{P}_r$ paramétrée par $\bar{S}$ et associée au morphisme $\bar{m}_h$, pour $h = 0, 1, \ldots, n$, si $\bar{X} = \bar{Y}^0$ et si $\bar{\varphi}$: $\bar{X} \subset \bar{S} \times \mathbb{P}_r \to \bar{S}$ la restriction de la projection sur le premier facteur, la construction des $\bar{Y}^h$ montre que $\bar{Y} = (\bar{Y}^1, \ldots, \bar{Y}^n)$ est une $\bar{\varphi}$-suite et que, pour $\bar{s}$ générique dans $\bar{S}$, il existe un isomorphisme de $X_{\bar{s}}$ sur $\bar{Y}_{\bar{s}}$, qui envoie $Y_{\bar{s}}$ sur $\bar{Y}_{\bar{s}}$, ce qui montre que $\mathrm{Isom}_{\bar{S}}(X_{\bar{S}}, \bar{X}; Y_{\bar{S}}, \bar{Y})$ est non vide, puisque $\varphi_{\bar{S}}$ et $\bar{\varphi}$ sont faiblement Kählériens.

REMARQUES:

1. La démonstration précédente montre aussi que si S est compact et λ: $\bar{S} \to \bar{R}$ une réduction algébrique de $\bar{S}$, on peut construire on morphisme régulier et uniformément p-projectif $\tilde{\varphi}$: $\tilde{X} \to \bar{R}$ tel que $\bar{\varphi}$: $\bar{X}_S \times \bar{S}$ soit déduit de $\tilde{\varphi}$ par le changement de base λ: $\bar{S} \to \bar{R}$. Ceci montre l'existence d'un ouvert de Zariski dense $\bar{S}^*$ de $\bar{S}$ sur lequel λ est analytique, et tel que la restriction de $\varphi_{\bar{S}}$ au-dessus de l'intersection de $\bar{S}^*$ avec toute fibre de λ est un fibré holomorphe localement trivial de fibre X_s, avec s image d'un élément de cette fibre par σ.

2. Si φ: $X \to S$ est un morphisme régulier à fibres algébriques, et Y une φ-suite, $G = \mathrm{Aut}^0_S(X; Y)$, U un ouvert relativement compact de S et:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q_L"] \arrow[dr, "\alpha"'] & (X/L_S(G)) \arrow[r, "q_G"] \arrow[d, "\alpha_L"] & (X/G) \arrow[d, "\alpha_G"] \arrow[dr, "\varphi_G"] & \\
& A \arrow[r, "q_T"] & (A/T_S(G)) \arrow[r, "\tau_0"] & S
\end{tikzcd}$$

le diagramme de décomposition de φ relatif à G, alors au-dessus de U, les restrictions de α_L, α_G, φ_G et τ_0 sont uniformément algébriques et les restrictions de α et q_L sont algébriques.

Il suffit, en effet, d'observer que le lemme du §6 montre l'existence d'une modification ϵ: $X' \to X$ au-dessus de U telle que l'on puisse appliquer le théorème précédent à $\varphi' = \varphi \circ \epsilon$, $Y' = \epsilon^{-1}(Y)$ et $G' = \mathrm{Aut}^0(X'; Y')$ au-dessus de U. Le lemme 3 ci-dessous montre, d'autre part, que le diagramme de décomposition de φ' relatif à G' domine celui de φ relatif à G au-dessus de U, de sorte que le résultat découle de la proposition 2 de l'appendice.

Lemme 3: *Soit* ϵ: $X' \to X$ *une modification propre de variétés compactes connexes et faiblement Kähleriennes, Y un sous-ensemble analytique fermé de X, et* $Y' = \epsilon^{-1}(Y)$. *Si* $G = \mathrm{Aut}^0(X; Y)$ (*resp.* $G' = \mathrm{Aut}^0(X'; Y')$) *est la composante neutre du groupes des automorphismes de X* (*resp.* X') *qui laissent Y* (*resp.* Y') *invariant globalement, et si L* (*resp.* L') *et T*(*resp.* T') *désignent les parties linéaire et torique de G* (*resp.* G'), *il existe un morphisme de groupes de Lie complexes injectif et fermé naturel* ϵ_*: $G' \to G$ *tel que* $\epsilon_*(L') = L \cap \epsilon_*(G')$, *d'où l'on déduit en particulier un morphisme injectif*: ϵ_*: $T' \to T$ (*ce qui a un sens, car X' et X ont même variété d'Albanese*).

Démonstration: Le théorème d'Hartog's montre l'existence d'une injection ϵ_*: $H^0(X', \Theta_{X'}) \to H^0(X, \Theta_X)$ des champs de vecteurs holomorphes globaux sur X' à valeurs dans les champs de vecteurs holomorphes globaux sur X. D'où un morphisme de groupes de Lie: ϵ_*: $\mathrm{Aut}^0(X') \to \mathrm{Aut}^0(X)$; si un automorphisme g de X' laisse Y' stable, $\epsilon_*(g)$ laisse évidemment Y stable. Donc $\epsilon_*(G') \subset G$. Soit α: $X \to A$ une réduction d'Albanese pour X; donc $\alpha \circ \epsilon$: $X' \to A$ en est une pour X'. Mais un élément g de G' appartient à L' si et seulement s'il laisse stable les fibres de $(\alpha \circ \epsilon)$, c'est-à-dire si et seulement si $\epsilon_*(g)$ laisse stable les fibres de α, c'est-à-dire appartient à L. D'où le lemme.

Donnons quelques applications du théorème précédent: Si φ: $X \to S$ est un morphisme régulier, on note: $\dim(\varphi) = \dim(X) - \dim(S)$, $x(\varphi)$ la dimension de Kodaira d'une fibre générale de φ, $b_1(\varphi)$ le premier nombre de Betti d'une fibre lisse de φ, $g(\varphi)$ (égal à $\dim_{\mathbf{C}}(q_T \circ q_L)$) la dimension d'une orbite générique de $\mathrm{Aut}^0_S(X)$ et $r(\Theta_{X/S})$ le rang sur S de $\varphi_*(\Theta_{X/S})$.

Corollaire 1: *Soit* φ: $X \to S$ *régulier à fibres algébriques avec X compact. Alors*:

$$a(X) \geqslant a(S) + \dim_{\mathbf{C}}(\varphi) - g(\varphi) \geqslant a(S) + \dim_{\mathbf{C}}(\varphi) - r(\Theta_{X/S}).$$

En effet, les seules pertes de dimension algébrique sont localisées dans q_L et q_T, et on a:

$$\dim_{\mathbf{C}}(q_L) + \dim_{\mathbf{C}}(q_T) = g(\varphi).$$

Corollaire 2: *Sous les mêmes hypothèses, on a*:

1. *Si* $x(\varphi) \geqslant 0$, *α est uniformément algébrique et* $a(X) \geqslant a(S) + x(\varphi)$.

2. *Si* $x(\varphi) \geqslant 0$, *et si* φ *est algébrique, alors* φ *est uniformément algébrique.*
3. *Si* $b_1(\varphi) = 0$, φ *est algébrique.*
4. *Si* $x(\varphi) \geqslant 0$ *et si* $b_1(\varphi) = 0$, *alors* φ *est uniformément algébrique.*
5. *Si* $b_1(\varphi) = 0$ *et* $\dim_{\mathbf{C}}(q_L) = 0$, *alors* φ *est uniformément algébrique.*

En effet, si $b_1(\varphi) \geqslant 0$, q_L est un isomorphisme, et si $b_1(\varphi) = 0$, alors $\alpha = \varphi$. La seconde partie de la première assertion résulte de l'inégalité

$$r(\Theta_{X/S}) \leqslant \dim(\varphi) - k(\varphi)$$

([L], théorème 4.10, dont la démonstration est valable dans notre situation).

Remarquons que, lorsque $k(\varphi) = \dim(\varphi)$, on a: $a(X) = a(S) + \dim(\varphi)$, et qu'il n'est pas nécessaire de supposer φ faiblement Kählérien, puisqu'il est algébrique ([U]).

Nous dirons qu'un groupe méromorphe sur S γ: $G \to S$ est connexe si ses fibres sur S le sont. Si G agit au-dessus de S sur φ: $X \to S$, nous dirons que X est préhomogène sous l'action de G si pour tout s de S^*, le groupe G_s a une orbite dense dans chaque composante irréductible de X_s. Nous dirons également que le sous-ensemble analytique fermé Y de X est G-stable si, pour tout s de S^*, Y_s est G_s-stable. Si Z est analytique compact irréductible, $a(Z)$ est sa dimension algébrique.

COROLLAIRE 3 [(*)]: *Soit* φ: $X \to S$ *un morphisme surjectif faiblement Kählérien d'espaces analytiques compacts et irréductibles, à fibre générique algébrique irréductible et tel que* $a(X) = a(S)$.

Il existe alors un plus grand sous-groupe méromorphe connexe G_0 *de* $\mathrm{Aut}^0_S(X)$ *tel que tout sous-ensemble analytique fermé irréductible* Y *de* X *tel que* $\varphi(Y) = S$ *soit* G_0*-stable. De plus,* X *est préhomogène sous l'action de* G_0.

DÉMONSTRATION: Le théorème précédent montre que, pour toute φ-suite $Y = (Y^1, \dots, Y^m)$ de sous-ensembles analytiques fermés irréductibles surjectifs sur S, X est préhomogène sous l'action de $G_Y = \mathrm{Aut}^0_S(X;\, Y)$.

Soit Y_0 une φ-suite pour laquelle $\dim(\mathrm{Aut}^0_S(X;\, Y_0)$ soit minimum. Si Y^0 est un sous-ensemble analytique fermé de X, irréductible et surjectif sur S, et si $Y = (Y^0, Y_0)$, on a donc: $\mathrm{Aut}^0_S(X;\, Y) \subset \mathrm{Aut}^0_S(X;\, Y_0)$, d'où l'égalité par la minimalité de la dimension de G_Y. Comme on a, d'autre part, $\mathrm{Aut}^0_S(X;\, Y) \subset \mathrm{Aut}^0_S(X;\, Y^0)$ on voit que Y^0 est stable sous l'action de G_{Y_0}, et le corollaire est établi, puisque G_0 doit contenir G_{Y_0}.

[3] Dans le cas particulier où φ est projectif et où $b_1(\varphi) = 0$, ce résultat a été obtenu indépendamment par Fujiki, dans son manuscrit: "On the structure of compact manifolds in $\mathscr{C}$".

REMARQUE: Rappelons que les variétés faiblement Kählériennes P préhomogènes ont une structure très particulière: il existe une variété unirationnelle U préhomogène sous l'action d'un groupe linéaire algébrique et une représentation ρ: $\pi_1(\mathrm{Alb}(P)) \to \mathrm{Aut}(U)$ dont l'image est contenue dans le centralisateur de $\mathrm{Aut}^0(U)$ telles que P soit le quotient de $\tilde{T} \times U$, où $\tilde{T}$ est le revêtement universel de $T = \mathrm{Alb}(P)$, par l'action de $\pi_1(T)$ définie par: $\gamma(\tilde{t}, u) = (\tilde{t} + \gamma, \rho(\gamma) \cdot u)$ pour tout γ de $\pi_1(T)$. Inversement, si U et ρ sont de telles données, le quotient ainsi défini est préhomogène ([F1] ou [L]).

Appendice: Morphismes algebriques et operations usuelles

Les morphismes φ: $X \to S$ considérés dans cet appendice sont propres, surjectifs avec X irréductible. Le morphisme d'image directe par φ sera noté φ_*: $\mathscr{C}(X/S) \to S$. Un sous-ensemble analytique fermé Γ de $\mathscr{C}(X/S)$ sera tel que $\Gamma = \overline{\Gamma^*}$ si le cycle générique de la famille universelle de cycles de X paramétrée par Γ est de support irréductible. Enfin un sous-ensemble analytique fermé Γ de $\mathscr{C}(X/S)$ sera dit générique si chaque composante irréductible de son graphe $Z_\Gamma \subset \Gamma \times_S X$ est surjective sur X pour la restriction à Z_Γ de la projection de $\Gamma \times_S X$ sur le second facteur.

Enfin, le morphisme φ: $X \to S$ sera dit être U.P. (resp. P, resp. F.K) s'il est uniformément p-projectif (resp. p-projectif, resp. faiblement Kählérien).

PROPOSITION 1: *On a équivalence respectivement entre*:

- φ: $X \to S$ *est* U.P (*resp.* P, *resp.* F.K).
- *La restriction de* φ_* *à tout sous-ensemble analytique fermé générique* Γ *d'une composante irréductible de* $\mathscr{C}(X/S)$ *est propre et* U.P (*resp.* P; *resp.* F.K).

DÉMONSTRATION: La première propriété est une conséquence de la seconde puisque φ: $X \to S$ s'identifie à la restriction de φ_* à la composante irréductible de $\mathscr{C}(X/S)$ constituée des points de X affectés de la multiplicité un.

Inversement, si φ est faiblement Kählérien, et si Γ est une composante irréductible de $\mathscr{C}(X/S)$ telle que $\Gamma = \overline{\Gamma^*}$, alors φ_*/Γ est propre ([F2], p. 32) et P_X: $Z_\Gamma \to X$ est propre, donc algébrique ([C1]: la démonstration s'applique en fait sous la seule hypothèse que P_X est propre) donc, en particulier, faiblement Kählérien. Il en est donc de même pour $\varphi \circ P_\Gamma$: $Z_\Gamma \to S$ et φ_*: $\Gamma \to S$ puisque la projection naturelle P_Γ: $Z_\Gamma \to \Gamma$ est surjective.

On ramène le cas où $\Gamma \neq \overline{\Gamma^*}$ au cas précédent à l'aide de la démonstration du corollaire 3 de [C1].

Pour traiter le cas où φ est U.P (resp. P, on se ramène au cas où $X = S \times \mathbb{P}_N$ (resp. $\mathbb{P}(F)$ pour F fibré vectoriel de rang $(N+1)$ sur S) à l'aide des remarques suivantes:

• Si Y est un sous-ensemble analytique fermé de X, $\mathscr{C}(Y/S)$ est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathscr{C}(X/S)$.

• Si β: $X' \to X$ est une modification et un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de S, alors pour tout sous-ensemble analytique fermé générique Γ' de $\mathscr{C}(X'/S)$, la restriction de β_*: $\Gamma' \to \Gamma = \beta_*(\Gamma)$ est une modification et un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de S.

On conclut alors en remarquant que, si $X = S \times \mathbb{P}_N$, $\mathscr{C}(X/S) = S \times \mathscr{C}(\mathbb{P}_N)$ et que si $X = \mathbb{P}(F)$ correspond à un élément c de $H^1(X, \mathbb{P}Gl(N+1, \mathbb{C}))$, alors $\mathscr{C}(X/S)$ est un fibré holomorphe de fibre $\mathscr{C}(\mathbb{P}_N)$ et de groupe structural $\mathbb{P}Gl(N+1, \mathbb{C})$ agissant naturellement sur $\mathscr{C}(\mathbb{P}_N)$, de même classe de cohomologie.

PROPOSITION 2: *Soit* φ: $X \to Y$ *et* ψ: $Y \to S$ *des morphismes propres, avec* Y *normal et* φ *à fibres toutes de même dimension pure. Alors* $\psi \circ \varphi$: $X \to S$ *est* U.P (*resp.* P, *resp.* F.K) *si et seulement si* ψ *et* φ *le sont.*

DÉMONSTRATION: Dans le cas F.K, l'assertion est une conséquence immédiate de [F2], p. 32.

Si ψ et φ sont U.P, il est évident que $\psi \circ \varphi$ l'est aussi. De même, si $\psi \circ \varphi$ est U.P. (resp. P), il est immédiat que φ est U.P (resp. P), puisque $(\psi \circ \varphi)_Y$: $X \times_S Y \to Y$ l'est et que le morphisme $(1_X) \times (\varphi)$: $X \to X \times_S Y$ est un plongement au-dessus de Y.

Supposons que $(\psi \circ \varphi)$ est U.P (resp. P). On a un morphisme naturel φ_F: $Y \to \mathscr{C}(X/S)$ qui, à y générique dans Y, associe la fibre de φ au-dessus de y, et qui est biméromorphe de Y sur son image, sous-ensemble analytique fermé générique de $\mathscr{C}(X/S)$. La proposition 1 montre donc que $\psi_* \circ \varphi_F = \psi$ est U.P (resp. P)

Si ψ et φ sont P, il existe donc des faisceaux analytiques cohérents $\mathscr{F}$ sur X et $\mathscr{G}$ sur Y, de rang un, et des applications méromorphes f: $X \to \mathbb{P}(\varphi_* \mathscr{F})$ et g: $Y \to \mathbb{P}(\psi_* \mathscr{G})$ au-dessus de Y et S respectivement, et qui sont des plongements au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S. On peut alors démontrer, par les arguments de G.A.G.A qu'il existe un entier m_0 tel que l'application méromorphe naturelle h: $X_S \to \mathbb{P}(\psi \circ \varphi)_*(\mathscr{F} \otimes \varphi^*(\mathscr{G} \otimes m_0)))$ est définie et est un plongement au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S.

COROLLAIRE: *Soit* σ: $\bar{S} \to S$ *un morphisme propre, génériquement fini et* U.P. *Alors,* φ: $X \to S$ *est* U.P *si et seulement si* $\varphi_{\bar{S}}$: $X_{\bar{S}} \to \bar{S}$ *est* U.P.

DÉMONSTRATION: Si φ est U.P, $\varphi_{\bar{S}}$ l'est aussi. Si $\varphi_{\bar{S}}$ est U.P., alors $\sigma \circ \varphi_{\bar{S}}$: $X_{\bar{S}} \to S$ l'est aussi d'après la proposition précédente. Comme $\sigma \circ \varphi_{\bar{S}} = \varphi \circ q$, où q: $X_{\bar{S}} \to X$ est la restriction à $X_{\bar{S}}$ de la projection de $X \times \bar{S}$ sur son premier facteur, la proposition précédente montre aussi que φ est U.P.

Nous énonçons aussi le résultat suivant, bien qu'il ne soit pas utilisé ici:

Proposition 3: *Soit* φ: $X \to S$ *et* ξ: $Y \to X$ *des morphismes surjectifs d'espaces irréductibles. On suppose* ξ *fini au-dessus d'un ouvert dense de* S, *et* φ *à fibre générique normale et irréductible. Alors* φ *est* U.P *si et seulement si* $(\varphi \circ \xi)$ *est* U.P.

Démonstration: Puisque X est normal au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S, si $(\varphi \circ \xi)$ est U.P, la proposition 2 montre que φ est U.P. Réciproquement, si μ: $X \to S \times \mathbb{P}_r$ est une p-projectivisation uniforme de φ, p: $S \times \mathbb{P}_r \to \mathbb{P}_r$ la projection sur le second facteur, et $\mathscr{D}_m = (p \circ \mu \circ \xi)^*(\mathcal{O}(m))$ le corollaire 5.8, p. 57, de [U] et la cohérence du faisceau $\varphi_*(\mathscr{D}_m)$ entraîne l'existence d'un entier $m \gg 0$ tel que $\mathscr{D}_m$ soit très ample relativement à $(\varphi \circ \xi)$ au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de S.

Remarques: On a encore les propriétés suivantes:

1. Si S est compact, φ: $X \to S$ est U.P si et seulement si $a(X) = a(S) + \dim(\varphi)$, où $a(X)$ (resp. $a(S)$) désigne la dimension algébrique de X (resp. S); la démonstration résulte des inégalités de Moisezon ([U], p. 27 ou [C4], p. 26).

2. Un changement de base propre τ: $T \to S$ peut rendre U.P un morphisme φ: $X \to S$ qui n'est pas F.K: X est la surface de Hopf quotient de $C^2 - (0, 0)$ par le groupe d'automorphismes engendré par le groupe d'automorphismes engendré par l'automorphisme g défini par $g(Z, Z') = (2Z, 2Z')$, π: $\mathbb{C}^2 - (0, 0) \to X$ est la projection naturelle, φ: $X \to \mathbb{P}_1 = S$ est la réduction algébrique de X, τ: $X = T \to \mathbb{P}_1 = S$ est égal à φ. Le morphisme $\overline{\Theta}$: $Z = \{((Z, Z'), (\xi, \xi')) \in (\mathbb{C}^2 - (0, 0)) | Z\xi' = Z'\xi\} \to X \times \mathbb{P}_1$ défini par $\overline{\Theta}((Z, Z'), (\xi, \xi')) = (\pi(Z, Z'), [Z : \xi])$ si $Z\xi \neq 0$ et $(\pi(Z, Z'), [Z' : \xi'])$ si $Z' \cdot \xi' \neq 0$ passe au quotient par $\pi \times \pi$: $\overline{\Theta} \to X \times_{\mathbb{P}_1} X$ et définit un morphisme surjectif sur $X \times \mathbb{P}_1$.

3. Un morphisme fini, surjectif, non ramifié ρ: $T' \to T$ d'espaces irréductibles compacts peut n'admettre, pour aucun $N \in \mathbb{N}^*$, d'application méromorphe au-dessus de T μ: $T' \to T \times \mathbb{P}_N$ qui soit biméromorphe sur $T'' = \mu(T')$: c'est le cas si T est un tore de dimension algébrique zéro et ρ un revêtement de degré $d \geqslant 2$, puisqu'une telle application μ définirait une application méromorphe ν: $T \to \mathrm{Sym}^d(\mathbb{P}_N)$, donc constante d'image Δ, et que T'' serait égal à $T \times \Delta$ dans ce cas.

4. Les propositions ci-dessus restent vraies si l'on y remplace les propriétés U.P et P respectivement par l'algébricité uniforme et l'algébricité.

5. Soit $X \subset S \times V$ un sous-ensemble analytique fermé irréductible de $S \times V$ tel que $p_S(X) = S$, où p_S: $S \times V \to S$ est la projection sur le premier facteur. Si V est algébrique projective, il existe un sous-ensemble analytique fermé $\overline{S}$ de X, irréductible et tel que $\mathrm{p_S}(\overline{\mathrm{S}}) = \mathrm{S}$ et tel que p_S: $\overline{S} \to S$ soit génériquement finie. En effet, on peut supposer que $V = \mathbb{P}_r$ avec $r \geqslant 1$ et procéder par récurrence sur r, puisque si X n'est pas

contenu dans $S \times \mathbb{P}_{r-1}$, avec $\mathbb{P}_{r-1}$ un hyperplan de $\mathbb{P}_r$, toute composante irréductible de $(X \cap (S \times \mathbb{P}_{r-1}))$ est un diviseur de X surjectif sur S.

(Oblatum 6-IV-1983)

Institut de Mathématiques pures Elie Cartan
Equipe associée au C.N.R.S. d'Analyse Globale
Case officielle 140,
54037 Nancy Cedex
France