COMPOSITIO MATHEMATICA

F. CAMPANA

Réduction d'albanèse d'un morphisme propre et faiblement kahlérien. I

Compositio Mathematica, tome 54, nº 3 (1985), p. 373-398

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1985__54_3_373_0>

Compositio Mathematica 54 (1985) 373–398.

REDUCTION D'ALBANESE D'UN MORPHISME PROPRE ET FAIBLEMENT KAHLERIEN. I.

F. Campana

Les espaces analytiques considérés ici sont réduits et dénombrables à l'infini. Si X est un espace analytique, on note $\mathscr{C}(X)$ l'espace des cycles de X, construit par Barlet dans [B1]. Si $\varphi: X \to S$ est un morphisme, on note $\varphi_*: \mathscr{C}(X/S) \to S$ le morphisme d'image direct par φ, défini sur l'espace des cycles relatifs de X sur S, et défini dans [F2] et [C1].

§0. Introduction

Nous appellerons tore relatif au-dessus de l'espace analytique S tout morphisme $\tau: T \to S$, propre et surjectif tel qu'existe un ouvert de Zariski dense et lisse S^* de S au-dessus duquel τ est une submersion dont les fibres sont des tores complexes affines, c'est à dire non munis d'une origine.

Dans ces conditions, si $\varphi: X \to S$ est un morphisme propre et surjectif, lisse et à fibres connexes au-desus de S^*, on appellera morphisme de X dans le tore relatif $\tau: T \to S$ au-dessus de S toute application méromorphe $g: X \to T$ au-dessus de S. On remarquera, qu'en vertu de [U], lemme 9.11, p. 107, g est analytique au-dessus de S^*. Deux tels morphismes

$$X \xrightarrow{g_i} T_i \xrightarrow{\tau_i} S$$

pour $i = 1$, 2 et à valeurs dans des tores relatifs τ_i: $T_i \to S$ sont dits équivalents s'il existe une application biméromorphe β: $T_1 \to T_2$ au-dessus de S telle que $g_2 = \beta \circ g_1$.

On appellera alors réduction d'Albanèse de φ: $X \to S$ un morphisme ξ: $X \to A$ à valeurs dans le tore relatif α: $A \to S$ au-dessus de S tel que, pour tout morphisme g: $X \to T$ dans un tore relatif τ: $T \to S$ au-dessus de S existe, à équivalence près, un unique morphisme μ: $A \to T$ au-dessus de S tel que $g = \mu \circ \xi$.

On se propose ici d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME 1: *Si φ: $X \to S$ est un morphisme propre, surjectif, faiblement Kählérien* (1) *et lisse à fibres connexes au-dessus de l'ouvert de Zariski*

(1) Il s'agit des morphismes de la catégorie $\mathscr{C}/S$ définis dans [F2], p. 32.

dense et lisse S^* de S, alors φ: $X \to S$ admet une réduction d'Albanèse, unique à équivalence près. De plus, si l'on note

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Alb}(X/S) \arrow[d, "\alpha"] \\ & S \end{tikzcd}$$

une telle réduction d'Albanèse, le morphisme α: $Alb(X/S) \to S$ est faiblement Kählérien.

Pour démontrer ce résultat, on construit par une méthode de quotient une telle réduction au-dessus de S^* (lemme 1 du §.1), puis on compactifie cette réduction au-dessus de S, en utilisant l'espace des cycles $\mathscr{C}(X/S)$ dont les composantes irréductibles sont propres sur S pour φ_*, puisque φ est faiblement Kählérien.

Dans le cas particulier où la réduction d'Albanèse:

$$\begin{tikzcd} X^* = \varphi^{-1}(S^*) \arrow[r, "\xi^*"] \arrow[dr, "\varphi^*"'] & \mathrm{Alb}(X^*/S^*) \arrow[d, "\alpha^*"] \\ & S^* \end{tikzcd}$$

de la restriction φ^* de φ au-dessus de S^* possède les trois propriétés suivantes:

1. ξ^* est surjective.
2. Les fibres de ξ^* ont toutes la même dimension pure.
3. Les fibres génériques de ξ^* sont irréductibles, une telle compactification peut être obtenue très simplement comme suit: l'application fibre au-dessus de S^* associée à α^* (voir le début du §.2 pour cette notion) et notée α_F^*: $\mathrm{Alb}(X^*/S^*) \to \mathscr{C}(X^*/S^*)$ est alors un morphisme, par 2., défini sur $\mathrm{Alb}(X^*/S^*)$ tout entier (et non seulement sur $\alpha^*(X^*)$) par 1., et son image est un ouvert de Zariski dense d'une composante irréductible, notée $\mathrm{Alb}(X/S)$, par 3., qui est propre sur S pour φ_* puisque φ est faiblement Kählérien. Si $\tilde{X} \subset X \times_S \mathrm{Alb}(X/S)$ est le graphe (voir [B1]) de la famille universelle de cycles relatifs de X sur S paramétrée par $\mathrm{Alb}(X/S)$ et p_X: $\tilde{X} \to X$ et p_A: $\tilde{X} \to \mathrm{Alb}(X/S)$ les restrictions des projections naturelles au-dessus de S^*, alors p_X est une modification propre qui est un isomorphisme au-dessus de S^*, et l'application

méromorphe $\xi = p_A \circ p_X^{-1}$: $X \to \mathrm{Alb}(X/S)$ est la réduction d'Albanèse cherchée.

Dans le cas général, cette méthode ne s'applique cependant pas.

Pour adapter cette méthode, on est conduit à réaliser un morphisme d'albanèse canonique dans le cas absolu, où S est un point: soient donc X une variété compacte et connexe, ξ: $X \to A$ un morphisme d'Albanèse, où l'on suppose A muni d'une origine O_A qui définit une structure de groupe de Lie complexe abélien d'élément nul O_A sur A; on note alors $+$ l'opération d'addition sur A, et q l'entier $[b_1(X)/2]$.

Puisque $\xi(X)$ engendre le groupe A, le morphisme ξ_n: $X^n \to A$ défini par: $\xi_n(x_1, \ldots, x_n) = \xi(x_1) + \ldots + \xi(x_n)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de X^n est surjectif pour $n \geqslant q$ et ses fibres sont toutes de même dimension pure pour $n \geqslant q^2$ (lemme de régularisation du §.3). En particulier, pour $n \geqslant q^2$, le morphisme fibre ξ_n^F: $A \hookrightarrow \mathscr{C}(X^n)$ associé à ξ_n est un plongement, dont on note l'image A_n. Pour $n \geqslant q^2$, si j_n: $X \times X^n \to X^{n+1}$ désigne l'isomorphisme naturel, il existe alors un unique morphisme ξ^n: $X \times A_n \to A_{n+1}$ rendant commutatif le diagramme suivant, dans lequel 1_X désigne l'identité de X:

$$\begin{array}{ccc} X \times X^n & \xrightarrow{j_n} & X^{n+1} \\ {\scriptstyle 1_X \times \xi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{n+1}} \\ X \times A_n & \xrightarrow{\xi^n} & A_{n+1} \end{array}$$

De plus, ξ_n ne dépend pas de l'origine choisie dans A, et pour tout x de X, la restriction de ξ^n à $\{x\} \times A_n$ définit un isomorphisme, noté $\xi^n(x)$ de A_n sur A_{n+1}. Si $G_n \subset X \times A_n \times A_{n+1}$ est le graphe de ξ^n, il est donc aussi le graphe (dans le sens de [B]) d'une famille analytique de cycles de $A_n \times A_{n+1}$ paramétrée par X. Soit ξ: $X \to \mathscr{C}(A_{q^2} \times A_{q^2+1})$ le morphisme associé à cette famille, lorsque $n = q^2$. Son image est contenue dans une composante connexe irréductible notée $\mathrm{Alb}(X)$ de $\mathscr{C}(A_{q^2} \times A_{q^2+1})$, qui est un tore affine isomorphe (non canoniquement) à A, et $\boldsymbol{\xi}$: $X \to \mathrm{Alb}(X)$ est un morphisme d'Albanèse pour X, appelé le *morphisme d'Albanèse canonique* de X. (§.4).

Ce modèle canonique du morphisme d'Albanèse remplace le modèle canonique simple introduit précédemment dans le cas particulier où ξ: $X \to A$ jouit des deux propriétés 1. et 2.

Le résultat qui permet alors de compactifier la réduction d'Albanèse au-dessus de S^* de manière analogue à la démonstration esquissée dans le cas particulier où ξ^* possède les propriétés 1., 2. et 3. est le lemme 3 du §.2, qui montre en particulier que le cycle de $\mathscr{C}(X^n)$ dont le support est A_n muni de la multiplicité un est un point isolé de $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n))$, et remplace la propriété 3.

Plus précisément, cette compactification est obtenue en appliquant le résultat suivant:

Théorème 2: *Les notations étant celles de l'énoncé du théorème* 1, *soit* $g^*: X^* = \varphi^{-1}(S^*) \to T^*$ *un morphisme dans le tore relatif* τ^*: $T^* \to S^*$ *au-dessus de* S^*, *tel que* $g^*(X^*)$ *engendre* T^*. *Alors, il existe un morphisme* g: $X \to T$ *dans un tore relatif* τ: $T \to S$, *unique à équivalence près, qui prolonge* g^*, *et le morphisme* τ *est faiblement Kählérien.*

L'hypothèse que $g^*(X^*)$ engendre T^* signifie que toute composante connexe de S^* contient un point s tel que $g^*(X_s)$ engendre $T_s^* = (\tau^*)^{-1}(s)$ dans le sens de l'énoncé du lemme 5, §.3, où $X_s = (\varphi^*)^{-1}(s)$.

Le morphisme g: $X \to T$ dans le tore τ: $T \to S$ est appelé un prolongement de g^* dans τ^* si sa restriction au-dessus de S^* est équivalente à g^*.

Nous utiliserons ensuite le théorème 2 pour construire, dans le §6, une variété de Picard relative pour tout morphisme régulier (voir définition) φ: $X \to S$, à fibres *algébriques*. Une telle variété de Picard a été construite, indépendamment, dans ce cas particulier par *A*. Fujiki, dans "relative algebraic reduction and relative Albanese map for a fiber space in $\mathscr{C}$", qui en a déduit, inversement, une démonstration du théorème 1 dans ce même cas particulier. (*)

§1. Cas d'un morphisme lisse

Si X est une variété analytique complexe compacte et connexe, on peut trouver la construction d'un morphisme d'Albanèse ξ: $X \to A$ pour X dans [Bl], p. 162 ou dans [U], p. 102 (malgré quelques inexactitudes qui peuvent être facilement corrigées).

Nous en énoncerons la propriété universelle sous la forme suivante, en omettant la démonstration, qui est une adaptation facile de celle de [U], p. 103:

Lemme 1: *Soient* S *une variété analytique,* T *un tore complexe, et* Φ: $S \times X \to S \times T$ *un morphisme au-dessus de* S. *Il existe alors un unique morphisme de groupes de Lie complexes* μ: $A \to T$ (*on a muni* A *et* T *d'origines*) *et un unique morphisme* ν: $S \to T$ *tels que,* p_X: $S \times X \to X$ *et* p_S: $S \times X \to S$ *désignant les projections naturelles, on ait*: $\Phi = \mu \circ \xi \circ p_X + \nu \circ p_S$, *où* $+$ *désigne l'opération naturelle d'addition pour deux applications à valeurs dans* T.

Plus généralement:

Lemme 2: *Soit* φ: $X \to S$ *une submersion propre de variétés analytiques complexes connexes, à fibres connexes et failblement Kählériennes. Il existe alors un diagramme commutatif, unique à unique isomorphisme près, de morphismes analytiques*:

(*) Publ. R.I.M.S., Kyoto University, 19 (1983) 207–236.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A_\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Alb}(X/S) \arrow[d, "\mathrm{Alb}(\varphi)"] \\ & S \end{tikzcd}$$

dans lequel $\mathrm{Alb}(\varphi)$ *est une submersion dont la fibre, pour tout* s *de* S, *est* $\mathrm{Alb}(X_s)$ *et* $A_{\varphi,s} = A_{\varphi|X_s}$ *est un morphisme d'Albanese pour* X_s.

DÉMONSTRATION: L'unicité se déduit de la propriété universelle du morphisme d'Albanese pour les fibres de φ et permet, par recollement, de se ramener au cas où S est un polydisque, où φ a une section analytique ζ: $S \to X$ et où φ est différentiablement triviale.

Puisque, pour tout s de S, $r = h^0(X_s, \Omega^1_{X_s}) = \frac{1}{2}b_1(X_s) = b_1(X/S)$ par ([F_1], corollaire 1.7) le faisceau analytique cohérent de θ_S-modules, $\sigma = \varphi_*(\Omega^1_{X/S})$ est localement libre ([B_n], théorème 4.12). La question étant de nature locale, on suppose σ libre sur S.

Soit $(\omega_i)_{i=1,\dots,r}$ une θ_S-base de $H^0(S, \sigma)$ engendrant σ_s pour tout point de S. Soit $(\gamma_j)_{j=1,\dots,2r}$ une $\mathbb{Z}$-base de la partie libre de $H_1(X, \mathbb{Z})$, qui, pour tout s de S, s'identifie à la partie libre de $H_1(X_s, \mathbb{Z})$ après trivialisation différentiable de φ.

Les fonctions $\Omega_{ij}(s) = \int_{[\gamma_j]}\omega_{i,s}$ peuvent donc être définies de manière évidente si l'on note $\omega_{i,s}$ la restriction de ω_i à X_s, qui est ([F_1], corollaire 1.7) une forme d-fermée.

De plus, les fonctions Ω_{ij} sont analytiques sur S, puisque, pour tout $j = 1,\dots,2r$, il existe une application continue Γ_j: $S \times [0, 1] \to X$ et des réels $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{p-1} < t_p = 1$ tels que:

$$\Gamma_j(s, 0) = \Gamma_j(s, 1) \quad (\forall s \in S).$$

$$\Gamma_j(s, t_k) = \Gamma_{jk}(s)$$

soit une section analytique de φ sur S pour tout

$$(j, k) \in \{1,\dots,2r\} \times \{0,\dots,p\}.$$

Pour tout s de S, le lacet $\Gamma_{j,s} = \{s\} \times [0, 1] \to X_s$ a pour classe d'homologie γ_j.

On a alors en effet $\Omega_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Gamma^*_{j,s}(\omega_{i,s})$ où chacune des fonctions de cette somme est analytique en s.

Soit F le fibré vectoriel sur S associé au faisceau libre σ^* dual de σ sur S. Ce qui précède, montre que chaque élément de la partie libre de $H_1(X, \mathbb{Z})$ définit une section analytique de F. De plus, en tout point s de

S, les valeurs en s des sections de F ainsi obtenues, forment une $\mathbb{R}$-base de F_s par le corollaire 1.7 de [F$_1$].

On définit donc $\mathrm{Alb}(X/S)$ comme le quotient de F par le réseau relatif ainsi défini. Pour chaque s de S, la fibre de $\mathrm{Alb}(X/S)$ par la projection naturelle s'identifie alors a $\mathrm{Alb}(X_s) = H^0(X, \Omega^1_{X_s})^*/H_1(X_2, \mathbb{Z})$ naturellement.

Enfin, on vérifie que l'application A_φ: $X \to \mathrm{Alb}(X/S)$ dont la restriction à X_s est $a_{X_s, \zeta(s)}$ est analytique, puisque $\zeta(s)$ est analytique. □

§2. Fibres d'un morphisme à valeurs dans un tore

Avant d'énoncer le résultat concernant ces fibres, nous définissons la notion d'application fibre associée à une application méromorphe propre g: $X \to Y$ telle que X soit un espace analytique *irréductible*: soit $G \subset X \times Y$ le graphe de F, p_X: $G \to X$ et p_Y: $G \to Y$ les restrictions des projections naturelles. Par définition, le fait que g est propre signifie que p_Y est propre. On note $Z = p_Y(G)$: c'est un sous-ensemble analytique fermé irréductible de Y qui est appelé l'image de g, et est aussi noté $g(X)$.

Soit Z^* l'ouvert de Zariski dense de Z constitué des points en lesquels Z est normal, et au-dessus desquels la fibre de p_Y est de dimension pure $d = \dim_{\mathbb{C}}(X) - \dim_{\mathbb{C}}(Z)$.

Le théorème 1, §.2, chap. 0 de [B1] montre alors que le cycle G^* de $X \times Z^*$ dont le support est $p_X^{-1}(Z^*)$ affecté de la multiplicité un est le graphe d'une famille analytique de cycles de X paramétrée par Z^*. On note g_F^*: $Z^* \to \mathscr{C}(X)$ l'application analytique correspondante. D'après [B2], le morphisme g_F^* se prolonge en une application méromorphe g_F: $Z \to \mathscr{C}(X)$ appelée l'application fibre associée à g.

Lorsque X et Y sont au-dessus d'un espace analytique S par des morphismes φ: $X \to S$ et ψ: $Y \to S$, et lorsque g est une application méromorphe propre g: $X \to Y$ au-dessus de S (c'est à dire si G est contenu dans $X \underset{S}{\times} Y$), alors g_F est à valeurs dans $\mathscr{C}(X/S)$ et est une application méromorphe au-dessus de S, où $\mathscr{C}(X/S)$ est au-dessus de S par φ_*: $\mathscr{C}(X/S) \to S$.

On appelle $g_F(Z)$, l'image de g_F, la famille des fibres de l'application méromophre g: c'est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathscr{C}(X)$. On a les propriétés suivantes, dont la démonstration est facile (voir [C4], p. 13):

0. Même lorsque g est un morphisme, g_F n'est pas nécessairement un morphisme.
1. Cependant, si $g(X) = Z$ est normal et si g est un morphisme dont les fibres ont toutes la dimension d, alors g_F est un isomorphisme de Z sur son image. En effet, g_F est alors un morphisme par le lemme 1, §.2, ch. 0 de [B2], dont l'isomorphisme réciproque est donné par g_*: $g_F(Z) \to Z$.

2. Si g est un morphisme dont la fibre générique est irréductible, alors $g_F(Z)$ est une composante irréductible de $\mathscr{C}(X)$. (voir [C5] démonstration du lemme 13, p. 197).
3. Réciproquement, si g est un morphisme, et si $g_F(Z)$ est une composante irrédictible de $\mathscr{C}(X)$, alors la fibre générique de g est irréductible (X est supposé irréductible).
4. Si g est méromorphe à fibre générique irréductible, $g_F(Z)$ n'est pas nécessairement une composante irréductible de $\mathscr{C}(X)$.

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le:

LEMME 3: *Soit g: $X \to T$ un morphisme d'un espace analytique compact et irréductible à valeurs dans un tore T. Le cycle de $\mathscr{C}(X)$ dont le support est $g_F(g(X))$, affecté de la multiplicité un, est alors un point isolé de l'espace des cycles de $\mathscr{C}(X)$.*

REMARQUES:

1.- le résultat est évident, et n'est pas valable seulement pour les tores, lorsque la fibre générique de g est irréductible, puisque $g_F(g(X))$ est alors une composante irréductible de $\mathscr{C}(X)$.

2.- Nous n'utiliserons ce résultat que dans le cas où g est surjectif. Dans ce cas particulier, on peut démontrer le résultat plus simplement.

DÉMONSTRATION: Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

une factorisation de Stein irréductible de g, et soit d le degré du morphisme f, fini sur son image.

Soit h_F: $Y \to \mathscr{C}(X)$ l'application fibre associée à h, et soit $\overline{Y} = h_F(Y)$ son image: c'est une composante irréductible de $\mathscr{C}(X)$, et l'application h_*: $\overline{Y} \to Y$ est une modification propre, réciproque de h_F.

L'application g_F: $g(X) \to \mathscr{C}(X)$ est alors composée des applications $(f \circ h_*)_F$: $g(X) \to \mathrm{Sym}^d(\overline{Y})$ et de l'application d'addition de cycles Σ_d: $\mathrm{Sym}^d(\mathscr{C}(X)) \to \mathscr{C}(X)$ introduite dans [C3], appendice 2, restreinte à $\mathrm{Sym}^d(\overline{Y})$. La proposition 3, p. 185, de [C3] montre que la restriction de Σ_d à $\mathrm{Sym}^d(\overline{Y})$ est une modification finie d'une composante irréductible de $\mathscr{C}(X)$.

Pour démontrer le lemme 3, il suffit donc de démontrer le résultat pour $(f \circ h_*)$: $\overline{Y} \to T$. Comme, d'autre part, $(f \circ h_*)_F(g(X))$ n'est pas contenu dans le lieu de dégénérescence de la modification Sym $^{d}(h_*)$: $\mathrm{Sym}^d(\overline{Y}) \to \mathrm{Sym}^d(Y)$ puisque la fibre générique de $(f \circ h_*)$: $\overline{Y} \to T$ a d points, il suffit même d'établir le résultat pour f: $Y \to T$.

Soit alors Γ une composante irréductible de $\mathscr{C}(\mathrm{Sym}^d(Y))$ telle que le cycle Z_{γ_0} de $\mathrm{Sym}^d(Y)$ de support $f_F(f(Y))$ affecté de la multiplicité un corresponde à un point γ_0 de Γ. Pour tout γ de Γ, on désigne par Z_γ le cycle de $\mathrm{Sym}^d(Y)$ correspondant. Soit $\mathrm{Sym}^d(Y)\ \#\ Y \subset \mathrm{Sym}^d(Y) \times Y$ le graphe de la famille universelle de d-uplets de Y paramétrée par Y et p_S: $\mathrm{Sym}^d(Y)\ \#\ Y \to \mathrm{Sym}^d(Y)$ et p_Y: $\mathrm{Sym}^d(Y)\ \#\ Y \to Y$ les restrictions des projections naturelles. Soit $Z_\Gamma \subset \Gamma \times \mathrm{Sym}^d(Y)$ le graphe de la famille universelle de cycles de $\mathrm{Sym}^d(Y)$ paramétrée par Γ. Si $Z_\Gamma^\# \subset \Gamma \times \mathrm{Sym}^d(Y)\ \#\ Y$ est l'image réciproque de Z_Γ par $1_\Gamma \times p_S$: $\Gamma \times \mathrm{Sym}^d(Y)\ \#\ Y \to \Gamma \times \mathrm{Sym}^d(Y)$, où 1_Γ est l'identité de Γ, alors:

- $Z_\Gamma^\#$ est le graphe d'une famille analytique de cycles de $\mathrm{Sym}^d(Y)\ \#\ Y$ paramétrée par Γ, et notée $(Z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.
- il existe un ouvert de Zariski dense lisee Γ^* de Γ tel que, pour tout γ de Γ^*, $Z_\gamma^\#$ est de support irréductible affecté de la multiplicité un, et tel que p_Y: $Z_\gamma^\# \to Y$ est un isomorphisme.

Donc, si $Z_{\Gamma^*}^\#$ est l'image réciproque de Γ^* par la restriction p de la projection naturelle de $\Gamma \times \mathrm{Sym}^d(Y)\ \#\ Y$ sur Γ à $Z_\Gamma^\#$, on en déduit que $Z_{\Gamma^*}^\#$ est le graphe d'une application analytique: ψ: $\Gamma^* \times Y \to \Gamma^* \times \mathrm{Sym}^d(Y)$ au-dessus de Γ^*.

Soit $\mathrm{Sym}^d(f)$: $\mathrm{Sym}^d(Y) \to \mathrm{Sym}^d(T)$ le d-ième produit symétrique du morphisme f, σ_d: $\mathrm{Sym}^d(T) \to T$ le morphisme qui, à un d-uplet d'éléments de T associe leur somme (on a muni T d'une origine et de l'addition correspondante), et f_d: $\mathrm{Sym}^d(Y) \to T$ le morphisme composé $f_d = \sigma_d \circ \mathrm{Sym}^d(f)$. On note ϕ: $\Gamma^* \times Y \to \Gamma^* \times T$ le morphisme au-dessus de Γ^* égal à $(1_{\Gamma^*} \times f_d) \circ \Psi$.

Le raisonnement fait au début de la démonstration pour se ramener de $\overline{Y}$ à Y, et le théorème de désingularisation ([H]) permettent de supposer que Y est lisse.

Si ξ: $Y \to A$ est un morphisme d'Albanese pour Y, et si A est muni d'une origine et de la structure de groupe de Lie correspondante, le lemme 1 montre l'existence d'un morphisme de groupes de Lie μ: $A \to T$ et d'un morphisme τ: $\Gamma^* \to T$ tels que $\Phi = \mu \circ \xi \circ p_y + \tau \circ p_{\Gamma^*}$, si p_Y et p_{Γ^*} sont les projections naturelles de $\Gamma^* \times X$ sur Y et Γ^* respectivement. En composant avec l'application $1_{\Gamma^*} \times (-\tau \circ p_{\Gamma^*})$: $\Gamma^* \times T \to \Gamma^* \times T$, on obtient donc un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^* \times Y \arrow[r, "1_{\Gamma^*} \times \xi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\Theta"] & \Gamma^* \times A \arrow[d, "1_{\Gamma^*} \times \mu"] \\
\Gamma^* \times \mathrm{Sym}^d(Y) \arrow[r, "1_{\Gamma^*} \times f_d"'] & \Gamma^* \times T
\end{tikzcd}$$

Remarquons que Θ n'est autre que $1_{\Gamma^*} \times$ d.f, où $d.f$: $Y \to T$ est la composée $D \circ f$, où D: $T \to T$ est la multiplication par d. Si δ est le degré de $d.f.$ c'est donc aussi le degré de Θ.

Le lemme 3 découle donc du lemme 4 suivant, appliqué à:

$$V = \Gamma^* \times Y,\ V_0 = \{\gamma_0\} \times Y,\ W = \Gamma^* \times T,$$

$$U = \Gamma^* \times \mathrm{Sym}^d(Y),\ \lambda_1 = \psi$$

et

$$\lambda_2 = 1_{\Gamma^*} \times \psi_{\gamma_0}\mu = 1_{\Gamma^*} \times f_d.$$

On en déduit que

$$\psi_\gamma = \psi_{\gamma_0}(\forall_\gamma \in \Gamma^*)$$

et donc que

$$\Gamma = \Gamma^* = \{\gamma_0\}.$$

LEMME 4: *Soit Ξ: $V \to W$ un morphisme d'espaces analytiques irréductibles propre, surjectif, et génériquement fini de degré δ, et V_0 un sous-ensemble analytique fermé de V tel que $\Xi_0 = \Xi_{|V_0}$: $V_0 \to W_0 = \Xi(V_0)$ soit génériquement fini de degré δ. Si μ: $U \to W$ et λ_i: $V \to U$ pour $i = 1, 2$ sont des morphismes tels que $(\mu \circ \lambda_i) = \Xi_0$ pour $i = 1, 2$, alors $\lambda_1 = \lambda_2$.*

DÉMONSTRATION: Soit $\Lambda_0 = V \underset{W}{\times} V$ (resp. $\Lambda_i = V \underset{U}{\times} V$ pour $i = 1, 2$) le produit fibré relatif à μ (resp. λ_i). Alors: Λ_0 contient Λ_i et Λ_j est de dimension pure $n = \dim_{\mathbf{C}}(X)$ pour $j = 0, 1, 2$. Si $w_0 \in W_0$ est tel que $\Xi^{-1}(w_0)$ soit constitué de δ points distincts $\{v_1, \dots, v_\delta\}$ de V_0, il en résulte que Λ_i est, pour $i = 1, 2$, la réunion des composantes irréductibles de Λ_0 qui contiennent $M_i = \Lambda_i \cap (\cup_{1 \leqslant l \leqslant m \leqslant \delta}(v, v_m))$. Puisque $M_1 = M_2$ par hypothèse, il en résulte que $\Lambda_1 = \Lambda_2$ et donc que $\lambda_1 = \lambda_2$.

§3. Regularisation

Soit X une variété analytique compacte et connexe, g: $X \to T$ un morphisme à valeurs dans un tore muni d'une origine O_T et de la structure de groupe de Lie complexe associée.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit σ_n: $T^n \to T$ par: $\sigma_n(t_1, \dots, t_n) = t_1 + \dots + t_n$, g^n: $X^n \to T^n$ par: $g^n(x_1, \dots, x_n) = (g(x_1), \dots, g(x_n))$ et g_n: $X^n \to T$ par: $g_n = \sigma_n \circ g^n$.

On pose: $q = q(X) = [b_1(X)/2]$.

LEMME 5: *On suppose que l'origine de T appartient à $g(X)$. Si $n \geqslant q$, alors l'image de X par g_n est le sous-tore, noté T_X, de T engendré par $g(X)$. En particulier, T_X ne dépend ni de $n \geqslant q$, ni de O_T (pourvu que celui-ci appartienne à $g(X)$); Si $T_X \doteq T$, on dit que $g(X)$ engendre T.*

DÉMONSTRATION: Elle est analogue à celle du lemme 9.14 de [U], p. 108. On démontre ainsi le lemme 5 pour n assez grand. Pour démontrer que la conclusion est vraie pour $n \geqslant q$, il suffit de remarquer que, par construction, le tore d'Albanese de X est de dimension au plus q, et que, avec les notations de la démonstration du lemme 9.13 de [U], on a $A_q = A(V)$ puisque l'égalité $A_n = A_{n+1}$ entraîne $A_{n+m} = A_n$ pour tout m de $\mathbb{N}$, et d'utiliser la propriété universelle du morphisme d'Albanese. □

Avec les mêmes notations, on a le lemme de régularisation suivant, où l'on suppose que $T = T_X$:

LEMME 6: *Pour $n \geqslant q^2$, les fibres de g_n sont toutes de dimension pure $d_n = n.\dim_{\mathbf{C}}(X) - \dim_{\mathbf{C}}(T_X)$.*

DÉMONSTRATION: Supposons le résultat établi pour $n = q^2$, et soit $n = q^2 + r$, avec r dans $\mathbb{N}^*$. On peut décomposer g_n en le produit suivant d'applications: $g_n = a \circ b \circ c$ avec:

- a: $T \times X^r \to T$ est la projection sur le premier facteur.
- c: $X^{q^2} \times X^r \to T \times X^r$ est le produit $g_{q^w} \times \mathbb{I}_{X^r}$, où $\mathbb{I}_{X^r}$ est l'identité de X^r.
- b: $T \times X^r \to T \times X^r$ est l'automorphisme $b = (\mathbb{I}_T + g_r \circ p_{X^r}) \times \mathbb{I}_{X^r}$, où $\mathbb{I}_T$ est l'identité de T et p_{X^r} la projection de $T \times T^r$ sur son second facteur; (on a posé $T = T_X$).

Les morphismes a et b sont à fibres toutes de même dimension, ainsi que c par hypothèse, donc aussi g_n.

Il reste donc à établir le résultat pour $n = q^2$.

Posons $h = g_q$: $X^q \to T$, qui est surjectif d'après le lemme 5. On peut décomposer g_{q^2} comme suit: $g_{q^2} = h_q$ après avoir identifié de manière naturelle X^{q^2} à $(X^q)^q$, et défini h_q comme g_q ci-dessus, en remplaçant g par h.

Le lemme 6 résulte alors du suivant:

LEMME 7: *Soit h: $Y \to T$ un morphisme surjectif d'un espace analytique compact et irréductible dans un tore T de dimension complexe q. Alors les fibres de h_n: $Y \to T$ sont toutes de dimension pure $d_n = (n \dim_{\mathbf{C}}(Y) - \dim_{\mathbf{C}}(T))$ si $n \geqslant q$.*

DÉMONSTRATION: On va commencer par se ramener au cas d'une modification propre h: $\tilde{T} \to T$: pour cela, soit h_F: $T \to \mathscr{C}(Y)$ l'application fibre et $\tilde{T} \subset \mathscr{C}(Y)$ son image, h_*: $\tilde{T} \to T$ l'application d'image directe par h, qui est réciproque de h_F. Désignons par $\tilde{Y} \subset \tilde{T} \times Y$ le graphe de la famille universelle de cycles de Y paramétrée par $\tilde{T}$, et par $\tilde{p}$: $\tilde{Y} \to \tilde{T}$ et p_Y: $\tilde{Y} \to Y$ les restrictions à $\tilde{Y}$ des projections naturelles de $\tilde{T} \times Y$ sur ses facteurs. Alors p_Y est une modification, $\tilde{p}$ a toutes ses fibres de dimension pure $d = \dim_{\mathbf{C}}(Y) - \dim_{\mathbf{C}}(T)$, et l'on a un diagramme commutatif de morphismes surjectifs:

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{Y} \arrow[dl, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\
\tilde{T} \arrow[dr, "h_*"'] & & Y \arrow[dl, "h"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Notons $\tilde{h}$ la composée $h \circ p_Y$. Alors $\tilde{h}_n$: $\tilde{Y}^n \to T$ se décompose en $\tilde{h}_n = (h_*)_n \circ ((\tilde{p})^n)$, où $\tilde{p}^n = \tilde{Y}^n \to \tilde{T}^n$ a toutes ses fibres de dimension pure $n(\dim_{\mathbf{C}}(Y) - \dim_{\mathbf{C}}(T))$.

Il suffit donc d'établir le résultat pour $(h_*)_n$.

On suppose donc que h: $Y \to T$ est une modification propre (et surjective).

Le lemme 7 resultera alors du suivant:

LEMME 8: *Soit T un tore complexe de dimension q, et h: $\tilde{T} \to T$ une modification propre. Les fibres de h_n: $\tilde{T}^n \to T$ sont toutes de dimension pure $d_n = (n-1)q$ si $n \geqslant q$ et sont, de plus, toutes irréductibles si $n \geqslant q+1$.*

DÉMONSTRATION: Notons I l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$; pour tout i de I, la projection de $\tilde{T}^n = \tilde{T}^I$ sur son ième facteur est notée $\tilde{p}_i$; pour toute partie J de I, on note $\tilde{p}_I$: $\tilde{T}^I \to \tilde{T}^J$ le produit, ordonné naturellement, des projections $\tilde{p}_i$, pour i dans J.

Soit $\tilde{S} \subset \tilde{T}$ le sous-ensemble analytique fermé de $\tilde{T}$ constitué des points au voisinage desquels h n'est pas de rang maximum. Soit t_0 un point de T, et $\tilde{\Gamma}$ une composante irréductible de $h_n^{-1}(t_0)$. On note: J l'ensemble des i de I tels que $\tilde{p}_i(\tilde{\Gamma})$ soit contenu dans $\tilde{S}$, K le complémentaire de J dans I.

Il résulte des conventions précédentes que l'image, également notée $\tilde{\Gamma}$, de $\tilde{\Gamma}$ par l'isomorphisme $\tilde{p}_{J,K} = \tilde{p}_J \times \tilde{p}_K$: $\tilde{T}^I \to \tilde{T}^J \times \tilde{T}^K$ est contenue dans $\tilde{S}_J \times \tilde{T}^K$, et que l'intersection, notée $\tilde{\Gamma}^*$, de $\tilde{\Gamma}$ avec $\tilde{T}^J \times (\tilde{T} - \tilde{S})^K$ est un ouvert de Zariski dense de $\tilde{\Gamma}$.

Deux cas se présentent alors:

• $J = I$: alors $\tilde{\Gamma}$ est contenue dans $\tilde{S}^n$, qui est le produit des $\tilde{S}_i$, pour i dans I. Comme chacune des $\tilde{S}_i$ est de dimension au plus égale à $(q-1)$, la dimension de $\tilde{\Gamma}$ est au plus égale à $n.(q-1)$, qui est égal à $(n-1).q$ si $n = q$ et lui est strictement inférieure si $n > q$. Le théorème de semi-continuité de la dimension des fibres d'un morphisme montre donc que ce cas ne peut se produire si $n \geqslant q+1$, (et qu'il ne peut se produire dans le cas où $n = q$ que si $\tilde{S}$ a des composantes irréductibles de dimension $(q-1)$ qui se projettent par h sur des points de T).

• $J \neq I$: on va démontrer qu'alors J est vide. On peut en effet, dans ce cas, décomposer la restriction $\tilde{h}_n$ de h_n à $\tilde{S}_J \times (\tilde{T}-\tilde{S})^K$ en le produit suivant: $\tilde{h}_n = a \circ b \circ c \circ d$, où

• d: $\tilde{S}_J \times (\tilde{T}-\tilde{S})^K \to \tilde{S}_J \times (T-S)^K$ est un isomorphisme qui est la restriction du produit $(1_{\tilde{T}^J} \times h^K)$ à $\tilde{S}^J \times (\tilde{T}-\tilde{S})^K$, et où S est l'image de $\tilde{S}$ par h: $\tilde{T} \to T$.

• c: $\tilde{S}_J \times (T-S)^K \to \tilde{S}_J \times T$ est le produit $(1_{\tilde{S}_J} \times \sigma_K)$, où σ_K est la restriction à $(T-S)^K$ du morphisme d'addition des K-uplets d'éléments de T.

• b: $\tilde{S}_J \times T \to \tilde{S}_J \times T$ est l'isomorphisme $(1_{\tilde{S}_J} \times (1_T - h_J \circ \tilde{p}))$, où $\tilde{p}$: $\tilde{S}_J \times T \to \tilde{S}_J$ est la projection naturelle, h_J: $\tilde{S}_J \to T$ est la restriction du morphisme h_J: $\tilde{T}^J \to T$ d'addition naturelle de J-uplets d'éléments de $\tilde{T}$, et où $+$ désigne la somme d'applications à valeurs dans T.

• a: $\tilde{S}_J \times T \to T$ est la projection sur le second facteur.

Soit T^* l'image de $\tilde{h}_n$: c'est un ouvert de Zariski dense de T, puisque K n'est pas vide. De plus, les fibres de $\tilde{h}_n$: $\tilde{S}_J \times (\tilde{T}-\tilde{S})^K \to T^*$ ont toutes la même dimension pure, puisque $\tilde{h}_n$ est composé de morphismes possédant tous cette propriété (à condition, de remplacer, dans la définition de c: $\tilde{S}_J \times (T-S)^K \to \tilde{S}_J \times T^{**}$, T par T^{**}, l'image de σ_K, qui est un ouvert de Zariski dense de T, de manière à ce que c soit surjectif).

Puisque $\tilde{\Gamma}$ est l'adhérence de son intersection $\tilde{\Gamma}^*$ avec $(\tilde{S}_J \times (\tilde{T}-\tilde{S})^K)$, qui est contenue dans une fibre de $\tilde{h}_n$, la dimension de $\tilde{\Gamma}$ est donc majorée par celle de cette fibre. Calculons donc celle-ci: elle est égale à $\dim_{\mathbf{C}}(\tilde{S}_J) + \dim_{\mathbf{C}}((\tilde{T}-\tilde{S})^K) - \dim_{\mathbf{C}}(T^*) = (\Sigma_{i \in J} \dim_{\mathbf{C}}(\tilde{S}_i)) + k.q - q$ en posant: $j = \# J$ et $k = \# K$. Comme $j + k = n$ et que: $\dim_{\mathbf{C}}(\tilde{S}_i) \leqslant (q-1)$ pour tout i de J, on a donc:

$$\dim_{\mathbf{C}}(\tilde{\Gamma}) \leqslant j.(q-1) + (k-1)q = (n-1).q - j.$$

Le théorème de semi-continuité de la dimension des fibres d'un morphisme montre alors que $j = 0$, et que $\tilde{\Gamma}$ est irréductible, puisque $\tilde{\Gamma}^*$ est contenue dans $(\tilde{T}-\tilde{S})^n$ et est donc isomorphe à son image par h^n: $(\tilde{T}-\tilde{S})^n \to (T-S)^n$ qui est une fibre de σ_n: $T^n \to T$, et que celles-ci sont irréductibles. □

§4. Modèle canonique d'un morphisme dans un tore

Soit g: $X \to T$ un morphisme d'une variété compacte et connexe X dans un tore T tel que $g(X)$ engendre T, O_T et O'_T deux origines qui definissent deux additions sur T, τ la translation de T qui envoie O'_T sur O_T, n un élément de $\mathbb{N}^*$, σ_n: $T^n \to T$ (resp. σ'_n) l'application définie au début du §3 avec pour origine O_T (resp. O'_T) g^n: $X^n \to T^n$ la puissance nième de g et enfin $g_n = \sigma_n \circ g^n$ (resp. $g'_n = \sigma'_n \circ g^n$).

On vérifie facilement la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} & T^n \arrow[dl, "\sigma_n"'] \arrow[dr, "\sigma'_n"] & \\ T \arrow[rr, "\tau^{n-1}"] & & T \end{tikzcd}$$

D'où résulte que $g'_n = \tau^{n-1} \circ g_n$. On pose $q = [b_1(X)/2]$.

Si $n \geqslant q^2$, l'application fibre $(g_n)_F$: $T \to \mathscr{C}(X^n)$ est, d'après les lemmes 5 et 6, un morphisme défini sur T, qui est un isomorphisme sur son image, notée T_n, et dont l'isomorphisme réciproque est la restriction à T_n du morphisme d'image directe par g_n.

Puisque $g'_n = \tau^{n-1} \circ g_n$, $(g'_n)_F = (g_n)_F \circ \tau^{1-n}$ et T_n ne dépendent pas de l'origine choisie sur T. Le morphisme composé π_n: $(g_n)_F \circ g_n$: $X^n \to T_n$ non plus, puisqu'il coïncide avec le morphisme $p_n \circ q_n^{-1}$, où p_n: $Z_n \to T_n$ et q_n: $Z_n \to X^n$ sont les projections naturelles du graphe $Z_n \subset T_n \times X^n$ de la famille universelle de cycles de X^n paramétrée par T_n.

Le morphisme J^0: $X \times T \to T$ défini par $J^0(x, t) = g(x) + t$, où $+$ est l'addition d'origine O_T dans T est tel que:

$$J^0 \circ (1_X \times g_{q^2}) = g_{q^2+1} \circ j, \quad \text{si} \quad j: X \times X^{q^2} \to X^{q^2+1}$$

est l'isomorphisme naturel.

Il en résulte que le morphisme $J = (g_{q^2+1})_F \circ J^0 \circ (1_X \times (g_{q^2})_F^{-1})$ rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X \times X^{q^2} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "1_X \times \pi_{q^2}"'] & X^{q^2+1} \arrow[d, "\pi_{q^2+1}"] \\ X \times T_{q^2} \arrow[r, "J"] & T_{q^2+1} \end{tikzcd}$$

La surjectivité de $(1_X \times \pi_{q^2})$ montre qu'un tel J est unique à posséder cette propriété. Puisque π_{q^2}, π_{q^2+1}, et j et dépendent pas d'une origine sur T, J n'en dépend pas non plus.

Puisque la restriction de J^0 à $\{x\} \times T$ est, pour tout x de X un isomorphisme sur T, la restriction de J à $\{x\} \times T_{q^2}$ définit un isomorphisme J_x de T_{q^2} sur T_{q^2+1}, pour tout x de X.

Soit $\boldsymbol{J}$ le graphe de J dans $X \times T_{q^2} \times T_{q^2+1}$. Ce qui précède montre que:

- $\boldsymbol{J}$ est l'image du graphe $\boldsymbol{J} \subset X \times X^{q^2} \times X^{q^2+1}$ de j par $1_X \times \pi_{q^2} \times \pi_{q^2+1}$.
- $\boldsymbol{J}$ est le graphe d'une famille de cycles de $(T_{q^2} \times T_{q^2+1})$ paramétrée par X;

si $\boldsymbol{g}$: $X \to \mathscr{C}(T_{q^2} \times T_{q^2+1})$ est le morphisme associé à cette famille, alors pour tout x de X, $\boldsymbol{g}(x)$ est le graphe de l'isomorphisme J_x de T_{q^2} sur T_{q^2+1}, affecté de la multiplicité un. L'image de $\boldsymbol{g}$ est donc contenue dans une unique composante connexe de $\mathscr{C}(T_{q^2} \times T_{q^2+1})$ qui est, d'après le lemme 9 ci-dessous, un tore complexe $\boldsymbol{T}$ isomorphe (non canoniquement) à T_{q^2} et T_{q^2+1}.

On appelle $\boldsymbol{g}$: $X \to \boldsymbol{T}$ le modèle canonique de g. Cette expression se justifie par le fait suivant: il existe un unique morphisme μ: $T \to \boldsymbol{T}$ tel que $\mu \circ g = \boldsymbol{g}$, que l'on peut naturellement construire comme suit:

On effectue les constructions qui précèdent pour $X = T$ et $g = 1_T$, en conservant cependant $q = [b_1(X)/2]$. On note alors $T_n^{\cdot}$, pour n dans $\mathbb{N}^*$, l'image de T par le morphisme fibres $(\sigma_n)_F$: $T \to \mathscr{C}(T^n)$ associé à σ_n, une origine ayant été fixée dans T, puis on note $\pi_n^{\cdot}$: $T^n \to T_n^{\cdot}$ le morphisme $(\sigma_n)_F \circ \sigma_n$. On note enfin (1_T): $T \to \boldsymbol{T}^{\cdot} \subset \mathscr{C}(T_{q^2}^{\cdot} \times T_{q^2+1}^{\cdot})$le modèle canonique de (1_T) (relatif à X).

On vérifie alors facilement que, pour $n \geqslant q^2$, la restriction à T_n du morphisme d'image directe par (g^n) est un isomorphisme $(g^n)_*$: $T_n \to T_n^{\cdot}$ sur $T_n^{\cdot}$, indépendant d'une origine sur T, et que le morphisme μ: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}^{\cdot}$ défini par:

$$\mu = \left(\left(g^{q^2}\right)_* \times \left(g^{q^2+1}\right)_*\right)^{-1}{}_* \circ (1_T)$$

possède la propriété requise, où

$$\left(\left(g^{q^2}\right)_* \times \left(g^{q^2+1}\right)_*\right)_*: \mathscr{C}\left(T_{q^2} \times T_{q^2+1}\right) \to \mathscr{C}\left(T_{q^2}^{\cdot} \times T_{q^2}^{\cdot}\right)$$

est l'isomorphisme d'image directe par $(g^{q^2}{}_*) \times (g^{q^2+1}{}_*)$.

On a utilisé le résultat suivant:

LEMME 9: *Soit T un tore complexe et T_0 un translaté d'un sous-tore complexe de T (notion indépendante d'une origine sur T). La composante connexe de $\mathscr{C}(T)$ contenant le point correspondant au cycle de support T_0, affecté de la multiplicité un s'identifie naturellement au tore quotient*

(T/T_0) au moyen de l'application fibre q_F: $(T/T_0) \to \mathscr{C}(T)$, où q: $T \to (T/T_0)$ est le quotient par T_0.

DÉMONSTRATION: Immédiate car q est une submersion propre à fibres connexes. □

Le lemme 9 a été utilisé dans la situation où T_0 est le graphe dans $(T_{q^2} \times T_{q^2+1})$ d;un isomorphisme de T_{q^2} sur T_{q^2+1}.

§5. Relativisation

On utilisera les notations suivantes: $\boldsymbol{S}$ désignant un ouvert de S, et s un point de S, on note:

- (X^n/S) le sous-ensemble analytique fermé de X^n constitué des n-uplets dont tous les éléments ont la même image sur S par φ, et par φ^n: $(X^n/S) \to S$ la projection naturelle, qui associe à un tel n-uplet la projection commune de ses éléments.
- La restriction de φ^n au-dessus de S^*, $\boldsymbol{S}$ et $\{s\}$ sera notée respectivement: $(\varphi^n{}_*)$: $(X^n/S^*) \to S^*$, $(\boldsymbol{\varphi}^n)$: $(X^n/\boldsymbol{S}) \to \boldsymbol{S}$ et φ_s^n: $X_2^n \to \{S\}$.
- $(\varphi^n)_*$: $\mathscr{C}(X^n/S) \to S$ et $(\varphi^n)_{**}$: $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n/S)/S) \to S$ les morphismes d'image direct par φ^n et $(\varphi^n)_*$.
- De manière analogue, les restrictions de $(\varphi^n)_*$ et $(\varphi^n)_{**}$ au-dessus de S^*, $\boldsymbol{S}$ et $\{s\}$ seront notées: $(\varphi^n{}_*)_*$: $\mathscr{C}(X^n/S^*) \to S^*$, et $(\varphi^n{}_*)_{**}$: $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n/S^*)/S^*) \to S^*$, $(\boldsymbol{\varphi}^n)_*$ et $(\boldsymbol{\varphi}^n)_{**}$, $(\varphi_s^n)_*$ et $(\varphi_s^n)_{**}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2: On peut supposer S irréductible et donc S^* connexe. On note alors $q = [b_1(X_s)/2]$, pour s dans S^*. Soit $\boldsymbol{S}$ un ouvert de S^* contenant un point s_0 tel que $g(X_{s_0})$ engendre T_{s_0}, et tel qu'existe une section ξ: $\boldsymbol{S} \to (X/\boldsymbol{S})$ à φ au-dessus de $\boldsymbol{S}$. Il existe donc une loi de groupe de Lie relative sur $(T/\boldsymbol{S})$, induisant sur toute fibre T_s de τ au-dessus de s dans $\boldsymbol{S}$ la loi de groupe de Lie d'élément neutre $g \circ \boldsymbol{\xi}(s)$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note alors σ_n: $(T^n/\boldsymbol{S}) \to (T/\boldsymbol{S})$ le morphisme qui, à n-uplet d'éléments de T_s, pour s dans $\boldsymbol{S}$, associe leur somme dans le groupe T_s.

On note alors $g_n = \sigma_n \circ \boldsymbol{g}^n$, où g_n est la restriction à $(X^n/\boldsymbol{S})$ du morphisme g^n: $X^n \to T^n$.

Le lemme 5 du §3 montre alors que $\boldsymbol{g}_n(X_{s_0}) = T_{s_0}$, si $n \geqslant q$, d'après l'hypothèse du théorème 2. Puisque les fibres des morphismes g_n: $(X^n/\boldsymbol{S}) \to \boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{\tau}$: $(T/\boldsymbol{S}) \to \boldsymbol{S}$ sont irréductibles et de dimension constante, le théorème de semi-continuité des dimensions des fibres d'un morphisme montre que g_n est surjective si $n \geqslant q$. La connexité de S^* montre alors que ce résultat est vrai pour tout $\boldsymbol{S}$ non vide.

On suppose maintant que $n \geqslant q^2$. Alors g_n: $(X^n/\boldsymbol{S}) \to (T/\boldsymbol{S})$ est surjectif, et ses fibres ont toutes la même dimension pure. Le morphisme fibre associé $(g_n)_F$: $(T/\boldsymbol{S}) \to \mathscr{C}(X^n/\boldsymbol{S})$ est donc un isomorphisme sur son image, notée (T_n/S). L'isomorphisme réciproque est la restriction $(\varphi^n)_*$: $(T_n/S) \to S$ du morphisme d'image directe par φ^n à (T_n/S).

Les résultats du §4 montrent alors que (T_n/S) ne dépend pas de la section ξ. Si l'on choisit un recouvrement ouvert de S^* par des ouverts S, les (T_n/S) se recollent donc pour définir un sous-espace analytique (T_n/S^*) de $\mathscr{C}(X^n/S^*)$, qui est propre sur S^* pour la restriction $(\varphi^n)_*$: $(T_n/S^*) \to S^*$ à (T_n/S^*) du morphisme d'image directe par φ^n.

Nous allons maintenant montrer que l'adhérence dans $\mathscr{C}(X^n/S)$ de (T_n/S^*) est analytique et S-propre pour $(\varphi^n)_*$.

Puisque $(\varphi^n{}_*)_*$: $(T_n/S^*) \to S^*$ est propre, surjectif, à fibres toutes de même dimension, l'application fibre

$$((\varphi^n{}_*)_*)_F\colon S^* \to \mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n/S^*)/S^*)$$

qui lui est associée est un isomorphisme sur son image, notée S_n^*.

Le lemme 3 du §2 montre alors que, pour tout s de S^*, $(S_n^*)_s = ((\varphi^n{}_*)_*)_F(s)$ est un point isolé de $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X_S^n)) = ((\varphi^n{}_*)_{**})^{-1}(s)$. Donc, S_n^* est une composante connexe irréductible de $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n/S^*)/S^*)$ qui est un ouvert de Zariski de $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n/S)/S)$. L'adhérence S_n de S_n^* dans $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n/S)/S)$ est donc analytique, et c'est une composante irréductible de cet espace.

Puisque φ: $X \to S$ est propre et faiblement Kählérien, le lemme 10 ci-dessous montre que φ^n: $(X^n/S) \to S$ l'est aussi, ainsi que les restrictions de $(\varphi^n)_*$ et $(\varphi^n)_{**}$ aux composantes irréductibles de $\mathscr{C}(X^n/S)$ et $\mathscr{C}(\mathscr{C}(X^n/S)/S)$ respectivement.

En particulier, $(\varphi^n)_{**}$: $S_n \to S$ est une modification propre qui est un isomorphisme au-dessus de S^*.

Soit $T_n \subset S_n \times_S \mathscr{C}(X^n/S)$ le graphe de la famille universelle de cycles de $\mathscr{C}(X^n/S)$ paramétrée par S_n, et soit $Z_n \subset T_n \times_S (X^n/S)$ le graphe de la famille de cycles de (X^n/S) paramétrée par T_n, et associée à la restriction p_n: $T_n \to \mathscr{C}(X^n/S)$ à T_n de la projection de $S_n \times_S \mathscr{C}(X^n/S)$ sur son second facteur par la propriété universelle de $\mathscr{C}(X^n/S)$.

Le construction de Z_n montre alors que c'est aussi le graphe d'une application méromorphe π_n: $X^n \to T_n$ au-dessus de S.

Soit $\underline{j} \subset X \times_S (X^{q^2}/S) \times_S (X^{q^2+1}/S)$ le graphe de l'isomorphisme naturel j: $X \times_S (X^{q^2}/S) \to (X^{q^2+1}/S)$ au-dessus de S, et $\underline{J} \subset X \times_S T_{q^2} \times_S (T_{q^2+1})$ l'image de $\underline{j}$ par l'application méromorphe

$$(1_X \times \pi_{q^2} \times \pi_{q^2+1})\colon X \underset{S}{\times} X^{q^2} \underset{S}{\times} X^{q^2+1} \to X \times T_{q^2} \times T_{q^2+1}.$$

Les considérations du §4 montrent que $\underline{J}$ est, au-dessus de S^*, le graphe d'une famille de cycles de $(T_{q^2} \times_S T_{q^2+1})$ paramétrée par $X^* = \varphi^{-1}(S^*)$, à laquelle est associée un morphisme g^*: $X^* \to \mathscr{C}(T_{q^2} \times_S T_{q^2+1}/S^*)$ au-dessus de S^*.

D'après [B2], ce morphisme se prolonge en une application méromorphe $\boldsymbol{g}$: $X \to \mathscr{C}((T_{q^2} \times_S T_{q^2+1})/S)$ au-dessus de S.

Les resultats du §4 montrent, d'autre part, que pour tout s de S^*, la composante connexe de $\mathscr{C}(T_{q^2} \times_S T_{q^2+1})_s$ contenant $\boldsymbol{g}^*(X_s)$ est un tore complexe isomorphe à T_s, et donc que la composante connexe $\boldsymbol{T}^*$ de $\mathscr{C}((T_{q^2} \times_S T_{q^2+1})/S^*)$ contenant $\boldsymbol{g}^*(X^*)$ est irréductible. Son adhérence $\boldsymbol{T}$ dans $\mathscr{C}((T_{q^2} \times_S T_{q^2+1})/S)$ est donc une composante irréductible de cet espace, et si l'on note $\boldsymbol{\tau}$: $\boldsymbol{T} \to S$ la restriction à $\boldsymbol{T}$ du morphisme d'image directe par $(\boldsymbol{\varphi}^{q^2})_* \times (\varphi^{q^2+1})_*$:

$$\mathscr{C}\left(X^{q^2}/S\right)\sum_S \mathscr{C}\left(X^{q^2+1}/S\right) \to S,$$

alors le morphisme τ: $\boldsymbol{T} \to S$ est un tore relatif au-dessus de S, qui est propre et faiblement Kählérien d'après le lemme 10 ci-dessous.

On appelle le diagramme suivant le prolongement canonique de g^*:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \boldsymbol{T} \arrow[dl, "\tau"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant montrer que tout prolongement:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & T \arrow[dl, "\tau"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

de

$$\begin{tikzcd} X^* = \varphi^{-1}(S^*) \arrow[rr, "g^*"] \arrow[dr, "\varphi^*"'] & & T^* \arrow[dl, "\tau^*"] \\ & S^* & \end{tikzcd}$$

est équivalent au prolongement canonique de g^*, ce qui établira en particulier (il suffit de prendre $S = S^*$) que le prolongement çanonique de g^* est bien un prolongement de g^*.

Pour cela, on effectue les constructions précédentes pour le diagramme suivant, qui est la restriction au-dessus de S^*, de l'identité 1_T: $T \to T$ de T, qui remplace le diagramme de g^*: $X^* \to T^*$:

$$\begin{tikzcd} T^* \arrow[rr, "1_{T^*}"] \arrow[dr, "\tau_*"'] & & T^* \arrow[dl, "\tau_*"] \\ & S^* & \end{tikzcd}$$

On conserve pour ces constructions l'entier q précédent.

On note alors, respectivement:

$$\tau_n^{\cdot}: T_n^{\cdot} \to S, \quad \pi_n^{\cdot}: T^n \to T_n^{\cdot}, \quad (1_T): T \to \boldsymbol{T}^{\cdot} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}^{\cdot}: \boldsymbol{T}^{\cdot} \to S$$

les morphismes au-dessus de S déduits de $(\varphi^n)_*$: $T_n \to S$, π_n: $X^n \to T_n$, $\underline{\boldsymbol{g}}$: $X \to \boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{\tau}$: $\boldsymbol{T} \to S$ respectivement en remplaçant dans les constructions précédentes le morphismes g: $X \to T$ par 1_T: $T \to T$.

Pour $n \geqslant q^2$, on vérifie alors facilement que la restriction à T_n du morphisme d'image directe par (g^n): $(X^n/S) \to (T^n/S)$ est un isomorphisme sur T_n, noté $(g^n)_*$: $T_n \to T_n^{\cdot}$.

De plus, comme dans les considérations de la fin du §.4, on constate que le morphisme μ: $\boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}^{\cdot}$ au-dessus de S est une équivalence de tores relatifs au-dessus de S telle que $\mu \circ \boldsymbol{g} = \underline{\boldsymbol{g}}$ si on le définit par:

$$\mu = \left(\left(g^{q^2}\right)_* \times \left(g^{q^2+1}\right)_*\right)^{-1}{}_* \circ (1_T),$$

où $((g^{q^2})_* \times (g^{q^2+1})_*)_*$ est l'isomorphisme d'image directe par

$$\left(\left(g^{q^2}\right)_* \times \left(g^{q^2+1}\right)_*\right): \left(T_{q^2} \underset{S}{\times} T_{q^2+1}\right) \to \left(T_{q^2}^{\cdot} \underset{S}{\times} T_{q^2+1}^{\cdot}\right). \qquad \square$$

Dans la démonstration du théorème 2, nous avons utilisé le résultat suivant:

LEMME 10: *Soient* φ: $X \to S$ *et* ψ: $X \to S$ *des morphismes propres et faiblement Kählériens et* φ_*: $Z \to S$ *une composante irréductible de* $\mathscr{C}(X/S)$. *Alors*

1. $\varphi \times \psi$: $X \times_S Y \to S$ *est un morphisme propre et faiblement Kählérien.*
2. φ_*: $Z \to S$ *est un morphisme propre et faiblement Kählérien.*

DÉMONSTRATION:

1. $\varphi \times \psi$: $X \times Y \to S$ est la composée de la projection naturelle $X \underset{S}{\times} Y \to X$ qui est faiblement Kählérienne propre et de φ, donc est propre et faiblement Kählérienne, d'après [F2], lemme 4.4.

2. La propreté de φ_* résulte de [F2], théorème 4.5 et proposition 4.8. Soit $G_Z \subset Z \underset{S}{\times} X$ le graphe de la famille universelle de cycles de X/S paramétrée par Z. La propreté de φ_* entraîne la propreté de la projection naturelle p: $G_Z \to X$.

La démonstration du théorème de [C2] s'applique sans modification au cas où, avec les notations de ce théorème, la projection p_Z: $X \to Z$ est propre, ce qui est vérifié dans le cas présent, et fournit la même conclusion. Une modification facile de la démonstration du corollaire 3 de [C2] démontre alors la seconde partie de l'énoncé du lemme 10. □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1: Soit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathrm{Alb}(X/S) \arrow[dl, "\alpha"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

le prolongement canonique de la réduction d'Albanese de la restriction φ_* de φ au-dessus de S^*, obtenue au lemme 2 du §1, et soit:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & T \arrow[dl, "\tau"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un morphisme dans un tore relatif au-dessus de S.

Notons ξ^*, α^* et g^* les restrictions de ξ, α et g au-dessus de S^*: le lemme 2 du §.1 montre qu'il existe un unique morphisme μ^*: $\mathrm{Alb}(X/S)^* = \alpha^{-1}(S^*) \to T^* = \tau^{-1}(S^*)$ de tores relatifs au-dessus de S^* tel que $\mu^* \circ \xi^* = g^*$.

On peut appliquer le théorème 2 au diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alb}(X/S)^* \arrow[rr, "\mu^*"] \arrow[dr, "\alpha^*"'] & & T_1^* = \mu^*(\mathrm{Alb}(X/S)^*) \arrow[dl, "\tau_1^*"] \\ & S^* & \end{tikzcd}$$

où τ_1^* est la restriction de τ_1 à T_1^*, puisque μ^* est surjectif, et que τ_1^*: $T_1^* \to S^*$ est un tore relatif au-dessus de S^*: il existe donc un prolongement, unique à équivalence près, du diagramme précédent:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alb}(X/S) \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & T_2 \arrow[dl, "\tau_2"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Soit T_1 l'adhérence de T_1^* dans T. on démontre ci-dessous que T_1 est analytique fermé dans T, de telle sorte que le diagramme suivant est aussi un prolongement de g^*:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & T_1 \arrow[dl, "\tau_1"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

où τ_1 est la restriction de τ à T_1.

Le théorème 2 montre donc l'existence d'une équivalence de tores relatifs au-dessus de S, β: $T_2 \to T_1$ telle que $g = \beta \circ \mu \circ \xi$. Si λ est l'injection de T_1 dans T, et si $\nu = \lambda \circ \beta \circ$: $\mathrm{Alb}(X/S) \to T$ alors ν est bien l'unique morphisme de tores relatifs au-dessus de S tel que $g = \nu \circ \xi$.

Il reste à démonstrer que l'adhérence dans T de T_1^* est analytique fermée; la question étant de nature locale sur S, on peut supposer qu'il existe (*) un morphisme propre, surjectif et génériquement fini f: $\tilde{S} \to S$ tel que $\tilde{S}$ est irréductible, et tel qu'existe un morphisme m: $\tilde{S} \to X$ tel que $f = \varphi \circ m$. On définit alors de la manière usuelle: $\tilde{X} = X \times_S \tilde{S}$, $\tilde{\varphi}$: $\tilde{X} \to \tilde{S}$ la projection sur le premier facteur, $\tilde{m} = (m \times 1_{\tilde{S}})$: $\tilde{S} \to \tilde{X}$ qui est une section à $\tilde{\varphi}$, et $\tilde{g} = (g \circ h) \times \tilde{\varphi}$: $\tilde{X} \to \tilde{T} = T \times_S \tilde{S}$, où h: $\tilde{X} \to X$ est la projection naturelle sur X.

Le morphisme $\tilde{\xi} = \tilde{g} \circ \tilde{m}$: $\tilde{S} \to \tilde{T}$ définit donc une section à la projection $\tilde{\tau}$: $\tilde{T} \to \tilde{S}$ déduite de τ par changement de base.

Soit $\tilde{S}^*$ (resp. $\tilde{T}^*$) l'image réciproque de S^{**} ouvert de Zariski dense de S contenu dans S^* et tel que, au-dessus de S^{**}, f soit fini et non

(*) Il suffit de prendre pour $\tilde{S}$ l'image d'une section méromorphe multiforme μ: $S \to X$ de φ.

ramifié, par f (resp. $\tilde{\tau}$). La section $\tilde{\xi}$ définit donc une loi de groupe relative sur $\tilde{T}^*$, qui induit sur chaque fibre de $\tilde{\tau}$ au-dessus de $\tilde{s}$ dans $\tilde{S}^*$ la structure de groupe de Lie complexe d'élément nul $\tilde{\xi}(\tilde{s})$.

Puisque $\tilde{T}$: $\tilde{T} \to \tilde{S}$ est propre et faiblement Kählérien, le lemme 10 et le théorème 2 montrent l'existence d'un prolongement au morphisme surjectif de groupes relatifs $\tilde{A}^*$: $\tilde{T}^* \underset{\tilde{S}}{\times} \tilde{T}^* \to \tilde{T}^*$ au-dessus de S^* qui définit l'opération d'addition relative. L'unicité à équivalence près de ce prolongement montre donc l'existence d'une application méromorphe $\tilde{A}$: $\tilde{T} \underset{\tilde{S}}{\times} \tilde{T} \to \tilde{T}$ au-dessus de S qui prolonge $\tilde{A}^*$.

On en déduit donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une application méro morphe $\tilde{A}_n$: $(\tilde{T}^n/\tilde{S}) \to \tilde{T}$ au-dessus de S définie par récurrence sur n comme suit: $\tilde{A}_{n+1} = \tilde{A} \circ \tilde{C}_{n+1} \circ \tilde{B}_{n+1}$ où:

- $\tilde{B}_{n+1}$: $(\tilde{T}^{n+1}/\tilde{S}) \to (\tilde{T}^n/\tilde{S}) \underset{\tilde{S}}{\times} \tilde{T}$ est l'isomorphisme naturel
- $\tilde{C}_{n+1}$: $(\tilde{T}^n/\tilde{S}) \underset{\tilde{S}}{\times} \tilde{T} \to \tilde{T} \underset{S}{\times} \tilde{T}$ est égale à $(\tilde{A}_n \times 1_{\tilde{T}})$.

Soit enfin $\tilde{g}^n$: $(\tilde{X}^n/\tilde{S}) \to (\tilde{T}^n/\tilde{S})$ la puissance nième de $\tilde{g}$.

Alors, le lemme 5 montre que, si $n \geqslant q$, l'image de $(\tilde{X}^{*n}/S^*)$ par $\tilde{g}_n = \tilde{A}_n \circ (\tilde{g}^n)$ coïncide avec l'image réciproque de T_1^* par la projection de $\tilde{T}$ sur T, notée k.

Soit $\tilde{T}_1$ l'adhérence de $\tilde{g}_n(\tilde{X}^{*n}/S^*)$ dans $\tilde{T}$: ce qui précède montre que $\tilde{T}_1$ est analytique ferméd dans T. Son image par k, qui est égale à T_1, est donc analytique fermée. Ceci établit donc le théorème 1. □

Remarquons que nous avons démontré le

LEMME 11: *Soit τ: $T \to S$ un tore relatif faiblement Kählérien lisse au-dessus de S^* et admettant une section analytique ξ: $S \to T$, et A^*: $T^* \underset{S^*}{\times} T^* \to T^*$ l'opération d'addition relative au-dessus de S^* d'élément nul $\xi(S^*)$. Alors A^* se prolonge en une application méromorphe A: $T \underset{S}{\times} T \to T$ au-dessus de S.*

On remarquera que ce lemme s'applique lorsque $\dim_{\mathbf{C}}(T) = \dim_{\mathbf{C}}(S) + 1$ si S est irréductible.

De plus, conservant les hypothèses du théorème 1 relatives à φ: $X \to S$ et S^*, on a

LEMME 12: *Soit g: $X \to T$ un morphisme dans un tore relatif τ: $T \to S$ qu-dessus de S. Si T_s^g désigne, pour tout s de S^*, le soustore de $T_s = \tau^{-1}(s)$ engendré par $g(X_s)$, alors la réunion T^{*g} des T_s^g pour s dans S^* est analytique fermée dans $T^* = \tau^{-1}(S^*)$ et son adhérence T^g dans T est analytique fermée dans T.*

Il suffit en effet de remarquer que, avec les notations de la démonstration précédente, T^{*g} est égal à $T_1^* = \mu^*(\mathrm{Alb}(X/S)^*)$, et que τ: $g(X) \to S$

est faiblement kählérien puisque image par g du morphisme faiblement kählérien φ: $X \to S$; le lemme 11 s'applique donc.

§6 Variété de Picard relative

Un morphisme d'espaces analytiques irréductibles φ: $X \to S$ sera dit *régulier* s'il est propre, surjectif, faiblement Kählérien, lisse et à fibres connexes au-dessus d'un ouvert de Zeriski dense S^* de S. Un espace analytique compact et réduit X est dit *algébrique* si chacune de ses composantes irréductibles est de Moišezon.

THÉORÈME 3: *Soit* φ: $X \to S$ *un morphisme régulier à fibres algébriques. Alors*:

1. *Il existe un groupe méromorphe faiblement Kählérien (voir définition au* §7) π: $\mathrm{Pic}(X/S) \to S$ *au-dessus de* S *dont la fibre* $\mathrm{Pic}(X/S)$ *au-dessus de tout* s *de* S^* *est le sousgroupe de* $\mathrm{Pic}(X_s)$ *constitué des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur* X_s *admettant un prolongement à un voisinage ouvert de* X_s *dans* X.

Notons encore φ_*: $D(X/S) \to S$ *la restriction de* φ_*: $\mathscr{C}(X/S) \to S$ *à la réunion* $D(X/S)$ *des composantes irréductibles de l'espace des diviseurs relatifs de* X *sur* S *dont l'image par* φ_* *est* S.

2. *L'application* δ^*: $D(X/S)^* = \varphi^{-1}{}_*(S^*) \to \mathrm{Pic}(X/S)^*$ *au-dessus de* S^*, *qui associe à un diviseur* D_s *de* X_s *la classe d'isomorphisme du fibré en droites* $[D_s]$ *qui'il définit sur* X_s, *est analytique et se prolonge en une application méromorphe* δ: $D(X/S) \to \mathrm{Pic}(X/S)$ *au-dessus de* S, *qui est propre et presque-projective (voir la définition au* §9).

DÉMONSTRATION: On commence par établir le résultat dans le cas particulier où φ *est localement projectif* au-dessus de S^*, c'est-à-dire lorsque tout point de S^* a un voisinage ouvert au-dessus duquel φ est projectif. Il résulte alors de [G] qu'il existe une variété de Picard relative π^*: $\mathrm{Pic}(X/S)^* \to S^*$ au-dessus de S^* et un morphisme δ^*: $D(X/S)^* \to \mathrm{Pic}(X/S)^*$ qui jouissent des propriétés de l'énoncé ci-dessus.

(On omet donc les composantes irréductibles non surjectives sur S^*). Désignons alors par $\mathrm{Pic}^+(X/S)^*$ la réunion des composantes irréductibles de $\mathrm{Pic}(X/S)^*$ qui contiennent un point p qui est la classe d'un fibré en droites très ample sur X_s avec $s = \pi^*(p)$, et par $D^+(X/S)^*$ l'image réciproque de $\mathrm{Pic}^+(X/S)^*$ par δ^*. Pour toute composante irréductible P^{+*} de $\mathrm{Pic}^+(X/S)^*$, l'ensemble des points p de P^{+*} qui possèdent cette propriété est alors un ouvert de Zariski dense. De plus, puisque pour tout fibré en droites très ample sur X_s, les fibrés en droites ayant même classe de Chern sont aussi très amples, l'application δ^*: $D^{+*} = (\delta^*)^{-1}(P^{+*}) \to P^{+*}$ est surjective. Le théorème 2 du §0 s'applique donc et montre l'existence et l'unicité à équivalence biméromorphe près d'un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} D^+ & \xrightarrow{\delta^*} & P^+ \\ & \varphi^* \searrow \quad \swarrow \pi^* & \\ & S & \end{array}$$

dans lequel D^+ est l'adhérence dans $D(X/S)$ de D^{+*}, et donc une composante irrédictible de $D(X/S)$, dans lequel (P^+, π^+) est une compactification faiblement Kählérienne de (P^{+*}, π^*) au-dessus de S et δ^+ une application méromorphe au-dessus de S qui prolonge $\delta^*_{|D^{+*}}$.

Comme, d'autre part, l'ensemble des points p de $\mathrm{Pic}(X/S)^*$ qui sont différence $(p_1 - p_2)$ de deux points p_1 et p_2 très amples de $\mathrm{Pic}(X_s)$ avec $s = \pi^*(p)$ qui n'appartiennent pas à $\mathrm{Pic}(X/S)_s$ est une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques fermés d'intérieur vide de $\mathrm{Pic}(X/S)^*$, le théorème de Baire et al propreté sur S des composantes irréductibles de $\mathrm{Pic}(X/S)^*$ montre que, pour toute composante irréductible P^* de $\mathrm{Pic}(X/S)^*$, il existe deux composantes irréductibles P_1^* et P_2^* de $\mathrm{Pic}^+(X/S)^*$ telles que l'application analytique au-dessus de S^* de différence dans le groupe de Lie relatif $\mathrm{Pic}(X/S)^*$ au-dessus de S^*:

$$\Delta^*:\ P_1^* \sum_{S^*} P_2^* \to \mathrm{Pic}(X/S)^*$$

a pour image P^*. Si P_1 et P_2 désignent les compactifications de P_1 et P_2 respectivement au-dessus de S obtenues précédemment, le théorème 2 montre alors l'existence d'une compactification π: $P \to S$ faiblement Kählérienne au-dessus de S, et indépendante du choix du couple (P_1, P_2) (à biméromorphie près), et d'un prolongement Δ: $P_1 \underset{S}{\times} P_2 \to P$ de Δ^* au-dessus de S. On montre de la même manière que l'application de différence Δ^*: $\mathrm{Pic}(X/S)^* \underset{S^*}{\times} \mathrm{Pic}(X/S)^* \to \mathrm{Pic}(X/S)^*$ se prolonge en une application méromorphe Δ: $\mathrm{Pic}(X/S) \underset{S}{\times} \mathrm{Pic}(X/S) \to \mathrm{Pic}(X/S)$ au-dessus de S, qui définit donc une structure de groupe méromorphe sur S sur $\mathrm{Pic}(X/S)$, réunion des compactifications des P^*, pour P^* composante irréductible de $\mathrm{Pic}(X/S)^*$.

Démontrons maintenant la seconde assertion de l'énoncé: il résulte de [G] que le morphisme δ: $D(X/S) \to \mathrm{Pic}(X/S)$ est, au-dessus de S^*, localement isomorphe au projectifié d'un faisceau analytique cohérent.

Donc $D(X/S)$ est, au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de l'image de δ, un fibré holomorphe localement trivial dont la fibre est un espace projectif. Soit T_D le fibré tangent vertical de Zariski à $D(X/S)$ pour δ, et $\mathscr{F}$ le faisceau des germes de sections $\dot{\Lambda} T_D$, où l'on désigne par . la dimension des fibres génériques de δ sur chaque composante irréductible de $D(X/S)$.

La restriction de $\mathscr{F}$ aux fibres lisses de δ est donc le fibré anti-canonique sur ces fibres; il est, en particulier, très ample sur ces fibres.

L'application méromorphe associée à $\mathscr{F}$ dans [U], page 20: κ: $D(X/S) \to \mathbb{P}(\delta_* \mathscr{F})$ est donc un plongement au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de l'image de δ, qui est donc presque-projectif.

Le résultat est donc établi lorsque φ est génériquement localement projectif. Le lemme ci-dessous montre que, lorsque φ est seulement à fibres algébriques, et régulier, δ et $\mathrm{Pic}(X/S)^*$ peuvent encore être construits, par recollement, au-dessus de S^*.

En effet, si ϵ: $X'_U \to X_U$ désigne une modification propre au-dessus de l'ouvert relativement compact U de S^*, telle que $\varphi \circ \epsilon$ soit lisse et projective, on a un plongement ouvert et fermé φ^*: $D(X/S)_U \to D(X'/S)_U$ obtenu par image réciproque par φ des diviseurs relatifs de X sur S au-dessus de U, et une bijection φ^* de l'ensemble $\mathrm{Pic}(X/S)_U$ sur une réunion de composantes connexes de $\mathrm{Pic}(X'/S)_U$ obtenue de la même façon de telle manière que commute le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} D(X'/S)_U \arrow[r, "\delta'_U"] & \mathrm{Pic}(X'/S)_U \\ D(X/S)_U \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "\delta_U"] & \mathrm{Pic}(X/S)_U \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

On peut donc munir $\mathrm{Pic}(X/S)_U$ de la structure analytique de $\mathrm{Pic}(X'/S)_U$ à l'aide de $(\varphi^*)^{-1}$, structure qui ne dépend pas de l'ouvert U choisi. L'application δ_U est alors un morphisme. On compactifie $\mathrm{Pic}(X/S)^*$ comme précédemment.

LEMME:

1. *Tout morphisme* φ: $X \to S$, *régulier à fibre générique algébrique projective est génériquement localement projectif.*
2. *Tout morphisme régulier* φ: $X \to S$ *à fibres algébriques admet, au-dessus de tout ouvert relativement compact* U *de* S, *une modification propre* ϵ: $X'_U \to X_U$ *telle que* $(\varphi \circ \epsilon)$ *soit régulier à fibre générique algébrique projective.*

DÉMONSTRATION de la second assertion: Il existe, d'après le lemme 1 de la démonstration du théorème 2 de [C4], une composante irréductible D d l'espace $D(X/S)$ des diviseurs relatifs de X sur S telle que l'application de Kodaira associée K_D: $X \to \mathscr{C} \subset C/S$) soit biméromorphe sur son image, au-dessus de S. Le lemme 1 de la démonstration du théorème 2 de [C3] montre, d'autre part, que les fibres de C sur S^* pour φ_* sont algébriques projectives. Les fibres de $\mathscr{C}(C/S)$ sur S^* le sont donc aussi, ainsi que les fibres de $K_D(X)$ sur S^*.

Les théorèmes de désingularisation et d'aplatissement d'Hironaka montrent l'existence d'une modification projective lisse de $K_D(X)$ au-dessus de U qui domine X, ce qui établit le résultat.

Démontrons maintenant la première assertion: la suite exacte de l'exponentielle $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$ définit, par image directe par φ et passage à la limite sur les ouverts de S, une suite exacte longue de faisceaux sur S comprenant le tronçon suivant:

$$R^1\varphi_*\mathcal{O}_X \to R^1\varphi_*\mathcal{O}_X^* \xrightarrow{c} R^2\varphi_*\mathbb{Z} \xrightarrow{j} R^2\varphi_*\mathcal{O}_X.$$

La projection naturelle ζ: $R^2\varphi_*\mathbb{Z} \to S$ étant, au-dessus de S^*, un revêtement non ramifié de fibre dénombrable, le théorème de Baire montre l'existence d'une composante connexe Z de $R^2\varphi_*\mathbb{Z}$ contenue dans le noyau de j, dont l'image contient S^*, et dont le point générique γ est la classe de Chern, dans $H^2(X_2, \mathbb{Z})$ avec $s = \zeta(\gamma)$, d'un fibré en droites très ample $\mathscr{D}_s$ sur X_s, tel que $H^i(X_2, \mathscr{D}_s) = 0$ pour $i \geqslant 1$.

Si V est un voisinage ouvert d'un point s de S^* au-dessus duquel φ est différentiablement trivial et admet une section analytique ρ: $V \to X$ à φ, l'image réciproque P_U de Z_U par c admet une section analytique σ au-dessus d'un ouvert de Stein de S^* contenant s, puisque le faisceau $R^1\varphi_*\mathcal{O}_X$ est localement trivial au-dessus de S^*, les fibres de φ étant des variétés Kählériennes. Il existe alors unfibré en droites $\mathscr{D}$ sur X_W induisant sur chaque fibre X_s, pour s dans W, un fibré $\mathscr{D}_s$ dont la classe d'isomorphie est $\sigma(s)$, et induisant le fibré trivial sur la section ρ: $W \to X$ à φ. L'application méromorphe $K_{\mathscr{D}}$: $X_W \to \mathbb{P}(\varphi_*\mathscr{D})$ au-dessus de W construite dans [U], p. 20, est alors un plongement au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de W, ce qui établit l'assertion.

Bibliographie

[B1] D. Barlet: Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe. Séminaire Norguet. *Lecture Notes in Math.* 482, 1–158.

[B2] D. Barlet: Majoration du volume et forme géométrique du théorème d'aplatissement. *C.R.A.S.* 288 (1979) 29–31.

[Bl] A. Blanchard: Sur les variétés analytiques complexes. *Ann. Sc. E.N.S.* 73 (1958) 157–202.

[C1] F. Campana: Images directes de cycles par un morphisme. Séminaire Norguet IV. *Lecture Notes in Math.* 807, 25–65.

[C2] F. Campana: Algébricité et compacité dans l'espace des cycles. *Math. Ann.* 251 (1980) 7–18.

[C3] F. Campana: Réduction algébrique d'un morphisme propre et faiblement Kählérien. *Math. Ann.* 256 (1981), 157–190.

[C4] F. Campana: Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement Kählérien compact. *Inv. Math.* 63 (1981) 187–223.

[F1] A. Fujiki: On automorphism groups of compact Kähler manifolds. *Inv. Math.* 44 (1978) (1978) 225–258.

[F2] A. Fujiki: Closedness of the Douady space of a compact Kähler space. *Publ. Res. Inst. Math. Sc.* 14 (1978) 1–52.

[G] A. Grothendieck: Exposé 232 du Séminaire Bourbaki.

[U] K. Ueno: Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. *Lecture Notes* 439 (1975).

[L] D. Liebermann: Compactness of the Chow Scheme. *Lecture Notes* 670 (1978).

(Oblatum 6-IV-1983)

Institut de Mathématiques pures Elie Cartan
Equipe associée au C.N.R.S. d'Analyse Globale
Case officielle 140, 54037 Nancy Cedex
France