COMPOSITIO MATHEMATICA

Z. MEBKHOUT

Une autre équivalence de catégories

Compositio Mathematica, tome 51, nº 1 (1984), p. 63-88

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1984__51_1_63_0>

Compositio Mathematica 51 (1984) 63–88

UNE AUTRE ÉQUIVALENCE DE CATÉGORIES

Z. Mebkhout

Sommaire

§ 0. Introduction

Dans [13] nous avons démontré que le foncteur $\boldsymbol{F}$ de $D(\mathcal{D}_X^\infty)_h$ dans $D(\mathbf{C}_X)_c$ (avec les notations de [13] rappelées dans le § 1.) qui a un complexe $\mathcal{M}^\infty$ associe son complexe $\mathcal{F}$ des solutions holomorphes et une équivalence de catégories. Pour ce faire nous avons montré que le foncteur $\boldsymbol{S}_r$ de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ catégorie des complexes bornés à cohomologie $\mathcal{D}_X$-holonome régulière est localement essentiellement surjectif en utilisant la résolution des singularités (cf. un résumé dans [14]). Mais si on utilise la version globale [(1)] de la résolution des singularités d'Hironaka [3] la même démonstration montre que $\boldsymbol{S}_r$ est essentiellement surjectif. Il restait à démontrer que $\boldsymbol{S}_r$ est pleinement fidèle pour montrer que $\boldsymbol{S}_r$ est aussi une équivalence de catégories. C'est ce que nous établissons dans ce présent travail.

A partir du théorème d'existence [13] les démonstrations de l'unicité

(1) Voir la remarque 3.4.1.

consistent la plupart du temps à un certain nombre de vérifications à partir des "dévissages" et de la résolution des singularités. Aucun ingrédient essentiellement nouveau n'est nécessaire. La seule différence est de dévisser deux complexes au lieu d'un complexe ce qui nous oblige à travailler sur $X_x X$ et utiliser de façon intensive la dualité (cf. [18]). Pour ces raisons ce travail peut être considéré comme un complément naturel à [13] et termine le théorème d'existence et d'unicité du problème de Riemann-Hilbert pour les coefficients constructibles (question $(\mathrm{HR})'_2$ de [14]).

Pour démontrer une *propriété locale* d'un complexe régulier $\mathcal{M}$ (c.f. définition 1.2.3.) on le dévisse de la façon suivante. On raisonne par récurrence sur la dimension du support Y de $\mathcal{M}$. Soit Z le support singulier de $\mathcal{M}$ c'est à dire le sous espace analytique de Y contenant le lieu singulier de Y tel que les solutions holomorphes de $\mathcal{M}$ soient localement constantes hors de Z. Par Mayer Vietoris et l'hypothèse de récurrence on peut supposer que Y est irréductible. Dans ce dernier cas $\dim Z < \dim Y$ et l'hypothèse de récurrence nous ramène à supposer que $\mathcal{M}$ est égal à son localisé par rapport à Z. Un théorème d'unicité (cf. théorème, 2.1.2) nous montre que $\mathcal{M}$ est isomorphe à l'intégration le long des fibres de l'extension canonique de P. Deligne [1] par une résolution des singularités du couple (Y, Z) plongé dans X. On est ramené à vérifier directement la *propriété locale* en question sur l'extension canonique. Par exemple en utilisant ce dévissage on montre (théorème 2.4.1) que le dual d'un complexe régulier est régulier. Il faut remarquer que la vérification de certaines propriétés pour l'extension canonique n'est pas toujours évidente, le théorème 2.4.1 en est un exemple.

Dans le § 1 on rappelle quelques résultats pour la commodité du lecteur et pour fixer les notations. Dans le § 2 on établit que le foncteur $\boldsymbol{S}_r$ est une équivalence de catégories. Dans le § 3 on établit deux théorèmes de dualité relative qui montrent que les équivalences de catégories $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{S}_r$ sont fonctorielles en X.

§ 1. Rappel de quelques résultats

1.1. Systèmes holonomes d'ordre infini

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété analytique complexe lisse de dimension n. On a le faisceau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels d'ordre fini. Le faisceau $\mathcal{D}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux unitaires non commutatifs. Le faisceau $\mathcal{D}_X^\infty$ des opérateurs différentiels d'ordre infini introduit cohomologiquement dans [15] est un faisceau d'anneaux non commutatifs unitaires mais fidèlement plat [16] sur son sous-faisceaux d'anneaux $\mathcal{D}_X$. Un système différentiel $\mathcal{M}$ d'ordre fini est par définition un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent. Un système différentiel $\mathcal{M}^\infty$ d'ordre infini est par définition un $\mathcal{D}_X^\infty$-module à gauche tel que localement sur X il existe un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent $\mathcal{M}$ et un isomorphisme:

$$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^\infty.$$

La variété caractéristique $\check{S}S(\mathcal{M})$ d'un système différentiel d'ordre fini est un sous-espace analytique involutif du fibré cotangent T^*X de X [[16]; théorème 5.3.2]. En particulier si $\mathcal{M}$ n'est pas nul on a dim $\check{S}S(\mathcal{M}) \geqslant n$. Un système holonome est par définition un système différentiel $\mathcal{M}$ tel que dim $\check{S}S(\mathcal{M}) = n$. Un système différentiel $\mathcal{M}^\infty$ d'ordre infini est holonome si localement sur X il existe un système holonome $\mathcal{M}$ et un isomorphisme:

$$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^\infty.$$

Nous noterons $D(\mathcal{D}_X)_h$ (resp. $D(\mathcal{D}_X^\infty)_h$) la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche (resp. de $\mathcal{D}_X^\infty$-modules à gauche) à cohomologie $\mathcal{D}_X$-holonome (resp. $\mathcal{D}_X^\infty$-holonome). Un faisceau $\mathcal{F}$ sur X d'espaces vectoriels complexes de dimension finie est dit constructible s'il existe une stratification de Whitney $\cup_{\iota \in I} X_\iota$ de X telle que la restriction $\mathcal{F}_{|X_\iota}$ de $\mathcal{F}$ à chaque strate soit un système local. Un complexe $\mathcal{F}$ est dit constructible s'il est borné et si sa cohomologie est constructible. Nous noterons $D(\mathbf{C}_X)_c$ la catégorie dérivée des complexes constructibles. On dispose alors de deux foncteurs contravariants [4]:

$$\boldsymbol{S}: D(\mathcal{D}_X)_h \to D(\mathbf{C}_X)_c$$

$$\boldsymbol{F}: D(\mathcal{D}_X^\infty)_h \to D(\mathbf{C}_X)_c$$

qui a un complexe $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^\infty$) de $D(\mathcal{D}_X)_h$ (resp. de $D(\mathcal{D}_X^\infty)_h$) associe son complexe des solutions holomorphes $\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X^\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$).

THÉORÈME 1.1.1: *Le foncteur $\boldsymbol{F}$ est une équivalence de catégories.*

Ce théorème est démontré dans [13]. Le point *clef* de la démonstration du théorème 1.1.1. est de passer par l'intermédiaire de la catégorie $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ des complexes réguliers dont nous allons rappeler la définition.

1.2. Régularité et dualité

Soient Y un sous espace analytique fermé de X défini par un Idéal $\mathcal{J}_Y$, $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)$ et $i: U = X \setminus Y \to X$ l'inclusion canonique. On définit avec Grothendieck [2] les complexes de faisceaux de cohomologie locale algébrique de Y à valeur dans $\mathcal{M}$:

$$\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R} \varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X / \mathcal{J}_Y^k, \mathcal{M})$$

$$\mathbf{R}[i_*]\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\varinjlim_{k} \hom_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{J}_Y^k, \mathcal{M}\right).$$

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche, le faisceau $\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$ est un sous-faisceau de de $\Gamma_Y(\mathcal{M})$ et $[i_*]\mathcal{M}$ est un sous-faisceau de $i_*i^{-1}\mathcal{M}$. Pour cette raison c'est des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche puisque $\mathcal{D}_X$ opère sur $\Gamma_Y(\mathcal{M})$ et sur $i_*i^{-1}\mathcal{M}$ en les préservant (C.f. [9], Lemme 2.2). Par fonctionnalité $\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$ et $\mathbf{R}[i_*]\mathcal{M}$ sont des complexes de $D(\mathcal{D}_X)$. En fait si $\mathcal{M}$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_h$ alors $\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$ et donc $\mathbf{R}[i_*]\mathcal{M}$ appartiennent à $D(\mathcal{D}_X)_h$ C.f. [6]. C'est une conséquence de la théorie du polynôme de I.N. Bernstein - M. Sato [5], [6]. On traite d'abord le cas codim $Y = 1$ [5] et on se ramène par Mayer $\cdot$ Vietoris au cas où codim $Y \geqslant 2$ [10]. On a donc un triangle distingué de $D(\mathcal{D}_X)_h$ pour tout complexe $\mathcal{M}$ de $D(\mathcal{D}_X)_h$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R}[i_*](\mathcal{M}) & \\ {\scriptstyle +1}\swarrow & & \nwarrow \\ \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{M}. \end{array}$$

Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)$. Son complexe de De Rham noté $\mathrm{DR}(\mathcal{M})$ est par définition le complexe de $D(\mathbf{C}_X)$:

$$\mathrm{DR}(\mathcal{M}) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}).$$

Le foncteur DR est un foncteur covariant de $D(\mathcal{D}_X)_h$ dans $D(\mathbf{C}_X)_c$ en vertu, par exemple, du théorème de dualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes ([11]; théorème 1.1) et de [4] (cf. le §2.4). On a alors la proposition (cf. [11], prop. 3.3):

PROPOSITION 1.2.1: *Soient $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_h$ et Y un sous espace analytique fermé de X. Les conditions suivantes sont équivalentes*:
(a) *L'homomorphisme canonique de $D(\mathbf{C}_X)_c$ est un isomorphisme*:

$$\mathrm{DR}\left(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})\right) \to \mathrm{DR}\left(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{M})\right);$$

(b) *L'homomorphisme canonique de $D(\mathbf{C}_X)_c$ est un isomorphisme*:

$$\mathbf{R}\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathbf{C}_Y \to \mathbf{R}\hom_{\mathcal{D}_X}\left(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X\right);$$

(c) *L'homomorphisme canonique de $D(\mathcal{D}_X^\infty)$ est un isomorphisme*:

$$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\Gamma_Y\left(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}\right).$$

Dans les conditions (b) et (c) is serait plus raisonnable de dire qu'il existe des homomorphismes canoniques qui soient des isomorphismes (cf. [11]).

DÉFINITION 1.2.2: *On dit que* $\mathfrak{M}$ *est régulier le long de Y s'il satisfait aux conditions équivalentes de la proposition* 1.2.1.

DÉFINITION 1.2.3: *On dit que* $\mathfrak{M}$ *est régulier s'il est régulier le long de tout sous espace analytique fermé de X.*

Dans toute la suite le mot "régulier" sera pris au sens des définitions 1.2.2 et 1.2.3. On voit immédiatement que les complexes réguliers engendrent une sous catégorie pleine et triangulée de $D(\mathcal{D}_X)_h$ que nous noterons $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$. La catégorie $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ est stable par localisation c'est-à-dire par les foncteurs $\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}$ et $\mathbf{R}[i_*]$ du § 1.1. De même pour tester la régularité il suffit par Mayer-Vietoris de la tester le long des hypersurfaces. Par contre tester la régularité d'un système le long d'un sous espace analytique requière le plus souvent la résolution des singularités d'Hironaka. Voici l'exemple fondamental (cf. [10]) à cause de sa signification géométrique:

THÉORÈME 1.2.4: *Le système de De Rham* $\mathcal{O}_X$ *appartient à* $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$.

C'est en effet ce théorème qui est responsable de la proposition 1.2.1 (cf. (14), §5). On voit immédiatement que l'on peut remplacé dans le théorème 1.2.4. le système De Rham $\mathcal{O}_X$ par tout fibre vectoriel muni d'une connexion intégrable. La démonstration fondamentale de Grothendieck [2] de la condition (a) reste valable sans changements comme Grothendieck l'a signalé dans la note 13 de [2].

1.3. Stabilité de la régularité par images directes

Soient $\pi: \tilde{X} \to X$ un morphisme projectif de variétés analytiques complexes lisses et $\tilde{\mathfrak{M}}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_{\tilde{X}})$. On définit [5] son intégrale le long des fibres:

$$\mathfrak{M} = \int_\pi \tilde{\mathfrak{M}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\pi_* \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}{\otimes}} \tilde{\mathfrak{M}}.$$

Si $\tilde{\mathfrak{M}}$ appartient à $D(\mathcal{D}_{\tilde{X}})_h$ et si sa cohomologie admet une bonne filtration [5] *globale* alors le complexe $\mathfrak{M}$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_h$. Si Z est un sous espace analytique de X nous noterons $\tilde{Z}$ son image réciproque par π.

THÉORÈME 1.3.1: *Sous les conditions précédentes le complexe* $\mathcal{M}$ *est régulier le long de* Z *si le complexe* $\tilde{\mathcal{M}}$ *est régulier le long de* $\tilde{Z}$.

La démonstration de ce théorème ([13]; théorème 4.3.1) est une application du théorème de Grauert-Rammert qui est l'analogue analytique du théorème de changement de base en géométrique algébrique et joue donc techniquement un rôle central (cf. Grothendieck [2]; note *n*° 7).

1.4. L'extension canonique de P. Deligne

Soient Y un diviseur à croisements normaux de X, $i: U = X \setminus Y \to X$ l'inclusion canonique et $\mathcal{L}$ un système de vectoriels complexes sur U de dimension finie. Alors il existe [1] un unique module holonome sur X, "l'extension canonique," régulier le long de Y que nous noterons $\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L})$ tel que

$$\boldsymbol{S}(\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L})) = i_! \mathcal{L}^{\vee}.$$

Il résulte de la condition (b) que $\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L})$ est égal à son localisé $\mathbf{R}[i_*]\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L})$. Pour tout complexe $\mathcal{F}$ de $D(\mathbf{C}_X)$ nous noterons $\mathcal{F}^{\vee}$ le complexe dual $\mathbf{R}\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathbf{C}_X)$. De plus le foncteur $\boldsymbol{S}$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des systèmes holonomes réguliers le long de Y dont la restriction à U est un fibré vectoriel muni d'une connexion intégrable et la catégorie des faisceaux sur X localement constants sur U et nuls en dehors. En effet la construction de Deligne montre que $\boldsymbol{S}$ est essentiellement surjectif et la régularité montre qu'il est pleinement fidèle. Le foncteur $\boldsymbol{S}$ est exact dans ce cas là si bien que la construction de Deligne s'étend au cas où $\mathcal{L}$ est un complexe borné de faisceaux d'espaces vectoriels complexes dont la cohomologie est formée de systèmes de vectoriels complexes de dimension finie.

PROPOSITION 1.4.1: *L'extension canonique* $\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L})$ *est régulière.*

Pour montrer la proposition 1.4.1 il suffit de montrer que $\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L})$ est régulière le long de toute hypersurface Z de X. Mais tester la régularité le long de Z équivaut à la tester le long de YUZ puisque si $j: X = X \setminus Z \to X$ désigne l'inclusion canonique on a:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}[j_*]\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L}) &\simeq \mathbf{R}[j_*]\mathbf{R}[i_*]\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L}) \\ &\simeq \mathbf{R}[\gamma_*]\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L})\end{aligned}$$

où $\gamma: X \setminus (YUZ) \to X$ désigne l'inclusion canonique. En vertu de [3] il existe un morphisme projectif $\pi: \tilde{X} \to X$ de résolution du couple (X, YUZ) tel que $\widetilde{YUZ} = \pi^{-1}(YUZ)$ soit un diviseur à croisements normaux. On peut considérer le système local $\tilde{\mathcal{L}}$ image réciproque de $\mathcal{L}$ et construire l'extension canonique $\mathfrak{M}(Y\tilde{U}Z, \tilde{X}, \tilde{\mathcal{L}})$. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}\pi_*(\mathrm{DR}(\mathbf{R}[\tilde{\gamma}_*]\mathfrak{M}(Y\tilde{U}Z, \tilde{X}, \tilde{\mathcal{L}}))) & \to & \mathbf{R}\pi_*(\mathrm{DR}(\mathbf{R}\tilde{\gamma}_*\tilde{\gamma}^{-1}\mathfrak{M}(Y\tilde{U}Z, \tilde{X}, \tilde{\mathcal{L}}))) \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{S} \\ \mathrm{DR}(\mathbf{R}[\gamma_*]\mathfrak{M}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}, \mathcal{L})) & \to & \mathrm{DR}(\mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\mathfrak{M}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}, \mathcal{L})). \end{array}$$

La flèche verticale de droite est un isomorphisme, le théorème de Grauert-Remmert nous montre que la flèche verticale de gauche est un isomorphisme (cf. Grothendieck (2)). On déduit de la régularité de l'extension $\mathfrak{M}(Y\tilde{U}Z, \tilde{X}, \tilde{\mathcal{L}})$ le long de $Y\tilde{U}Z$ la régularité de l'extension $\mathfrak{M}(Y, X, \mathcal{L})$ le long de YUZ donc le long de Z et la proposition 1.4.1.

1.5. Théorème d'existence

Rappelons, pour fixer les notations, rapidement la démonstration du théorème 1.1.1. Soit donc $\mathcal{F}$ un complexe de $D(\mathbf{C}_X)_c$. On montre que le foncteur

$$\mathbf{G}: D(\mathbf{C}_X)_c \to D(\mathfrak{D}_X^\infty); \qquad \mathbf{G}(\mathcal{F}) = \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$$

est un inverse du foncteur $\mathbf{F}$. Pour cela on peut supposer que $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible (voire la remarque 1.5.1). Le problème étant local on peut supposer par "dévissage" qu'il existe un fermé analytique Y de X et un fermé analytique Z de Y contenant le lieu singulier de Y que $\mathcal{F}$ soit localement constant sur $W = Y\setminus Z$ et nul en dehors. Nous noterons $i: U = X\setminus Y \to X$, $j: W = Y\setminus Z \to Y$; $\alpha: Y \to X$; $\gamma: V = X\setminus Z \to X$ les inclusions canoniques. Alors en vertu de [3] il existe une résolution du couple (Y, Z) plongé dans X:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \supset & \tilde{Y} & \supset & \tilde{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ X & \supset & Y & \supset & Z \end{array}$$

telle que $\tilde{Z} = \pi^{-1}(Z)$ soit un diviseur à croisements normaux dans $\tilde{Y}$. On démontre la formule fondamentale:

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{D}_X^\infty \underset{\mathfrak{D}_X}{\otimes} \mathbf{R}\varinjlim_{k} \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}_X}(\mathcal{J}_Z^k, \mathfrak{M})$$

où

$$\mathfrak{M} = \int_\pi \mathfrak{M}(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{\mathcal{F}}^\vee)[-\mathrm{codim}\, Y].$$

Cette formule montre que $\mathbf{G}(\mathcal{F})$ appartient à $D(\mathcal{D}_X^\infty)_h$ et la régularité et la bidualité nous montre que:

$$\mathbf{R}[\gamma_*](\mathcal{M}) \leftarrow\!\!\!\sim \mathcal{M}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

et finalement **F** et **G** sont inverses l'un de l'autre. (cf. [13]).

Remarque 1.5.1: Il n'est pas clair que la catégorie $D(\mathcal{D}_X^\infty)_h$ soit une sous catégorie triangulée de $D(\mathcal{D}_X^\infty)$ avec la définition adoptée ici. Mais le lecteur pourra vérifier que, en vertu de la construction précédente on évite d'utiliser dans la démonstration du théorème 1.1.1. cette propriété à condition d'utiliser la pleine fidélité du foncteur $\boldsymbol{S}_r$ qui sera établi dans le paragraphe 2 indépendemment du théorème 1.1.1.

Notations 1.5.2: Aux données Y, Z, $\mathcal{F}$ comme ci-dessus nous associons $\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^\nu)$ le complexe $\int_\pi \mathcal{M}(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{\mathcal{F}}^\nu)$ ainsi construit. Il résulte du théorème 1.3.1 et de la proposition 1.4.1 que $\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^\nu)$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$. D'autre part on voit que la même construction vaut pour un complexe constructible dont la cohomologie est formée par des systèmes locaux sur W et nulle en dehors. Le complexe $\mathcal{M}(Y, X, \mathcal{F}^\nu)$ est indépendant du morphisme de résolution π comme on le voit en coiffant deux résolutions par une troisième. Toutes les opérations mises en jeu commutent. Cette dernière remarque étant inutile pour la suite.

§ 2. Une autre équivalence de catégories

2.1. Résultats

Nous utiliserons les notations du § 1. Nous noterons $\boldsymbol{S}_r$ la restriction du foncteur $\boldsymbol{S}$ à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$:

$$\boldsymbol{S}_r\colon D(\mathcal{D}_X)_{hr} \to D(\mathbf{C}_X)_c; \qquad \mathbf{S}_r(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

Théorème 2.1.1: *Le foncteur $\boldsymbol{S}_r$ est une équivalence de catégories.*

Contrairement au foncteur **F** le foncteur **S** n'a pas d'inverse évident. On est ramené à démontrer deux choses:
(i) $\boldsymbol{S}_r$ est essentiellement surjectif;
(ii) $\boldsymbol{S}_r$ est pleinement fidèle.

Démonstration du(i): Soit $\mathcal{F}$ un complexe de $D(\mathbf{C}_X)_c$. Il nous faut montrer que $\mathcal{F}$ est de la forme $\boldsymbol{S}_r(\mathcal{M})$. On peut supposer que $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible en vertu de (ii) Soient Y son support et W le plus grand ouvert lisse de Y sur lequel $\mathcal{F}$ est localement constant. Notons

$Z = Y \setminus W$, alors Y et Z sont des fermés analytiques. Notons $j: W \to Y$ l'inclusion canonique. On a alors la suite exacte de faisceaux sur Y:

$$0 \to j_! \mathcal{F}_{|W} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{|Z} \to 0,$$

Montrons (i) par récurrence sur dim Y. Si dim $Y = 0$ alors

$$\mathcal{F} = \boldsymbol{S}\left(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)\right) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}^{\nu}.$$

Il est évident que $\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}_X} \mathcal{F}^{v}$ appartient à $D(\mathcal{D}_x)_{hr}$. Mais dim $Z <$ dim Y et par récurrence on peut supposer que

$$\mathcal{F} = j_! \mathcal{F}_{|W} \text{ en vertu de (ii).}$$

En résolvant globalement [2] [3] le couple (Y, Z) plongé dans X on est ramené à la construction de [13] rappelée brièvement au § 1 et

$$\mathcal{F} \rightleftarrows \boldsymbol{S}_r(\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^{\nu})).$$

Mais $\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^{\nu})$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$d'où(i).

Il nous reste à établir(ii). On commence par établir le point clef de l'unicité. Soient $Z \subset Y$ deux fermés analytiques de X tels que $W = Y \setminus Z$ soit lisse et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible localement constant sur W et nul en dehors.

THÉORÈME 2.1.2. *Il existe, à isomorphisme près de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$, un et un seul complexe de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ tel que*:

$$\boldsymbol{S}_r(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}.$$

2.2. Stabilité de la régularité par image inverse

Soient $\pi: \tilde{X} \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes lisses et $\mathcal{M}$ un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche. On définit son image inverse:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathbf{L}\pi^*\mathcal{M} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{\tilde{X}} \overset{\mathbf{L}}{\underset{\pi^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes}} \pi^{-1}\mathcal{M}.$$

$\mathbf{L}\pi^*\mathcal{M}$ est un complexe de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-modules à gauche. En fait $\mathbf{L}\pi^*$ est un foncteur de $D(\mathcal{D}_X)_h$ dans $D(\mathcal{D}_{\tilde{X}})_h$[6]. Soit Z un sous espace analytique de X et $\tilde{Z}$ son image réciproque par π.

(2) Voir la remarque 3.4.1.

THÉORÈME 2.2.1: *Si $\mathcal{M}$ est régulier, $\tilde{\mathcal{M}}$ est régulier le long de $\tilde{Z}$.*

Pour démontrer le théorème 2.2.1. on commence par démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 2.2.2: *L'homomorphisme canonique $\mathbf{L}\pi^*\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Z}]}(\tilde{\mathcal{M}})$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{D}_{\tilde{X}})_h$.*

Démonstration de la proposition 2.2.2. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{G}$ on a un isomorphisme canonique de complexes de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-modules:

$$\mathbf{L}\pi^*\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{M}) \rightrightarrows \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(\mathbf{L}\pi^*\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{M}}).$$

D'où un isomorphisme

$$\mathbf{L}\pi^*\mathbf{R}\varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{J}_Z^k, \mathcal{M}\right) \rightrightarrows \mathbf{R}\varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}\left(\mathbf{L}\pi^*\mathcal{J}_Z^k, \tilde{\mathcal{M}}\right).$$

Mais de l'homomorphisme $\mathcal{J}_{\tilde{Z}}^k \to \mathbf{L}\pi^*\mathcal{J}_Z^k$ on déduit un homomorphisme par composition:

$$\mathbf{L}\pi^*\mathbf{R}\varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{J}_Z^k, \mathcal{M}\right) \to \mathbf{R}\varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}\left(\mathcal{J}_{\tilde{Z}}^k, \tilde{\mathcal{M}}\right).$$

D'où l'homomorphisme de la proposition 2.2.2:

$$\mathbf{L}\pi^*\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}) \to \mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Z}]}(\tilde{\mathcal{M}}),$$

Par Mayer-Vietoris on peut supposer, pour démontrer la proposition 2.2.2. que Z est une hypersurface. Donc $\mathcal{J}_Z$ est plat sur $\mathcal{O}_X$ et $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{J}_Z^k \rightrightarrows \mathcal{J}_{\tilde{Z}}^k$ et la conclusion en résulte. Si $\mathcal{F}$ est un complexe de $D(\mathbf{C}_X)$ nous noterons $\pi^!\mathcal{F}$ son image inverse extraordinaire [17].

THÉORÈME 2.2.3: *On a un isomorphisme canonique de $D(C_{\tilde{X}})_c$ pour tout complexe de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}\mathcal{M}$:*

$$\pi^{-1}\mathbf{R}\,\lim_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \rightrightarrows \mathbf{R}\,\lim_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}).$$

COROLLAIRE 2.2.4: *On a un isomorphisme canonique de $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$ pour tout complexe $\mathcal{M}$ de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$:*

$$\pi^!\mathrm{DR}(\mathcal{M})[2\dim X] \leftleftarrows \mathrm{DR}(\tilde{\mathcal{M}})[2\dim \tilde{X}].$$

Le théorème 2.2.3 et son corollaire sont valables dans $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ et seront démontrés dans le §3 (théorème 3.2.1 et corollaire 3.2.2). Ainsi le problème de Cauchy est bien posé pour les complexes holonomes réguliers.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2.1: La condition (b) de la proposition 1.2.1 nous donne un isomorphisme si $\mathcal{M}$ est régulier le long de Z:

$$\pi^{-1}\Big(\mathbf{S}(\mathcal{M}) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathbf{C}_Z\Big) \rightrightarrows \pi^{-1}\mathbf{S}\big(\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})\big).$$

Mais par le théorème 2.2.3 et la proposition 2.2.2 on a les isomorphismes canoniques de $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$:

$$\pi^{-1}\boldsymbol{S}(\mathcal{M}) \rightrightarrows \boldsymbol{S}(\tilde{\mathcal{M}}),$$

$$\pi^{-1}\boldsymbol{S}\big(\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})\big) \rightrightarrows \boldsymbol{S}\big(\mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Z}]}(\tilde{\mathcal{M}})\big).$$

Mais pour tout complexe $\mathcal{F}$ de $D(\mathbf{C}_X)$ on a l'isomorphisme:

$$\pi^{-1}\Big(\mathcal{F} \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathbf{C}_Z\Big) \rightrightarrows \pi^{-1}(\mathcal{F}) \underset{\mathbf{C}_{\tilde{X}}}{\otimes} \mathbf{C}_{\tilde{Z}}.$$

D'où finalement l'isomorphisme dans $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$

$$\boldsymbol{S}(\tilde{\mathcal{M}}) \underset{\mathbf{C}_{\tilde{X}}}{\otimes} \mathbf{C}_{\tilde{Z}} \rightrightarrows \mathbf{S}\big(\mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Z}]}(\tilde{\mathcal{M}})\big)$$

qui exprime la régularité de $\tilde{\mathcal{M}}$ le long de $\tilde{Z}$ et le théorème 2.2.1 en résulte.

REMARQUE 2.2.4: Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.3 ne sont pas utilisés dans la démonstration du théorème 2.1.2.

2.3. Théorème d'unicité

Nous allons démontrer dans ce paragraphe le théorème 2.1.2. Soient donc Z, Y et $\mathcal{F}$ les données du théorème 2.1.2. On sait (cf. § 1) que

$$\boldsymbol{S}_r(\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^\vee) \rightrightarrows \mathcal{F}.$$

Soit $\mathcal{N}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ tel que

$$\boldsymbol{S}_r(\mathcal{N}) \rightrightarrows \mathcal{F}.$$

Soit $\pi : (\tilde{Y}, \tilde{Z}) \to (Y, Z)$ une résolution des singularités du couple (Y, Z) plongé dans X. On dispose d'un morphisme

$$(*) \quad \int_\pi \mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}[-\operatorname{codim} Y] \to \mathcal{N}$$

correspondant au morphisme d'adjonction

$$\mathcal{F} \to \mathbf{R}\pi_*\pi^{-1}\mathcal{F}.$$

D'autre part la formule de projection nous fournit un isomorphisme

$$\int_\pi \mathbf{L}\pi^*\mathcal{N} \simeq \left(\int_\pi \mathcal{O}_{\tilde{Y}}\right) \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{N}.$$

En particulier $\int_\pi \mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}$ est égal à son localisé le long de Z. Il en résulte que $(*)$ est un isomorphisme. En effet π étant un isomorphisme hors de Z le support du cône de $(*)$ est égal à Z d'une part et d'autre part ce cône est égal à son localisé le long de Z puisque les deux membres de $(_*)$ sont égaux à leur localisé le long de Z. Ce cône est donc nul.

Pour montrer que $\mathcal{N}$ est isomorphe à $\mathcal{M}(Z, X, \mathcal{F}^\vee)$ et achever la démonstration du théorème 2.1.1 il suffit de montrer que $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}$ est isomorphe à l'extension canonique de *Deligne* construite à partir de $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^{-1}\mathcal{F}$. (cf. § 1). Mais $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}$ est égal à son localisé le long de $\tilde{Z}$ en vertu de la proposition 2.2.2. Il reste à voir que $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}$ est régulier le long de $\tilde{Z}$. Mais $\tilde{Z}$ étant un diviseur à croisements normaux pour tester la régularité de $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}$ le long de $\tilde{Z}$ il suffit en vertu de ([1]; prop. 4.4) de la tester le long des courbes lisses tracées sur $\tilde{Y}$.

Soit $\tilde{C}$ une courbe lisse tracée sur $\tilde{Y}$ et $\tilde{U} = \tilde{C}/\tilde{Z}$. Notons $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to \tilde{C}$ et $\tilde{\beta} : \tilde{C} \to \tilde{Y}$ les inclusions canoniques. Il suffit de montrer que l'on a l'isomorphisme:

$$DR(\mathbf{L}(\pi 0\tilde{\beta})^*) \simeq \mathbf{R}\tilde{\alpha}_* \tilde{\alpha}^{-1}(DR(\mathbf{L}(\pi 0\tilde{\beta})^*\mathcal{N}))$$

qui est équivalent à son analogue globale puisqu'on est sur une courbe.

$$\mathbf{R}\Gamma(\tilde{C}; DR(\mathbf{L}(\pi 0\tilde{\beta})^*\mathcal{N})) \simeq \mathbf{R}\Gamma(\tilde{U}; \alpha^{-1}(DR(\mathbf{L}(\pi 0\tilde{\beta})^*\mathcal{N}))).$$

Nous allons déduire cet isomorphisme de la régularité de $\mathcal{N}$. En tenant compte de la proposition 4.3.2 de [13] on obtient les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}\Gamma(\tilde{C}; DR(\mathbf{L}(\pi 0\tilde{\beta})^*\mathcal{N})) &\simeq \mathbf{R}\Gamma(\tilde{Y}; DR(\mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{C}]}(\mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}))) \\
&\quad \times [2\dim \tilde{Y} - 2] \\
&\simeq \mathbf{R}\Gamma(\tilde{Y}; DR(\mathbf{R}\Gamma_{[\bar{C}\cup\tilde{Z}]}(\mathbf{L}\pi^*\mathcal{N}))) \\
&\quad \times [2\dim \tilde{Y} - 2] \\
&\simeq \mathbf{R}\Gamma(X; DR(\mathbf{R}\Gamma_{[C\cup Z]}(\mathcal{N}))) \\
&\quad \times [2\dim X - 2] \\
&\simeq \mathbf{R}\Gamma(X; DR(\mathbf{R}\Gamma_{C\cup Z}(\mathcal{N})))
\end{aligned}$$

$$\times [2\dim X - 2]$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}\Gamma\big(X; DR(\mathbf{R}\Gamma_C(\mathcal{N}))\big)$$

$$\times [2\dim X - 2]$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}\Gamma\big(U; \alpha^{-1}(DR(\mathcal{N}))\big)$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}\Gamma\big(\tilde{U}; \tilde{\alpha}^{-1}\big(DR\big(\mathbf{L}(\pi 0 \tilde{\beta})^{*}\mathcal{N}\big)\big)\big)$$

où $C = \pi(\tilde{C})$, $U = \pi(\tilde{U})$ et $\alpha : U \to X$ étant l'inclusion canonique. D'où la conclusion et le théorème 2.1.2.

Nous allons déduire du Théorème 2.1.2 quelques remarques qui nous serviront par la suite.

Remarque 2.3.1: Dans le théorème 2.1.2 on peut remplacer le faisceau constructible $\mathcal{F}$ par un complexe constructible dont la cohomologie soit de la forme simple.

Remarque 2.3.2: Le théorème 2.1.2 permet de "dévisser" les complexes de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ exactement comme on "dévisse" les complexes de $D(\mathbf{C}_X)_c$. Soit en effet $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$, Y son support et Z son support singulier c'est-à-dire le fermé analytique de Y contenant le lieu singulier de Y tel que la cohomologie de $\mathbf{S}_r(\mathcal{M})$ soit formée par des faisceaux constructibles localement constants sur $W = Y \setminus Z$. On a un triangle distingué dans $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{R}[j_*]\ (\mathcal{M}) \arrow[dl] & \\ \mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathcal{M}. \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

La condition b) de la proposition 1.2.1 nous dit que le foncteur S_r transforme le triangle $(*)$ en le triangle de $D(\mathbf{C}_X)_c$:

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} & j_!\mathcal{F}_{|W} \arrow[dr] & \\ \mathcal{F} \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathbf{C}_Z \arrow[ur] & & \mathcal{F} \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

j étant toujours l'inclusion canonique $W \to X$.
Mais en vertu du théorème 2.1.2 on peut remplacer le complexe

$$\mathbf{R}[j_*](\mathcal{M}) \text{ par } \mathcal{M}\big(Z, Y, \big(j_!\mathcal{F}^{\nu}_{|W}\big)\big)$$

et on obtient un triangle distingué de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^{\vee}) \arrow[dl] & \\ \mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathcal{M}. \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Ce qui par récurrence sur dim Y permet de "dévisser" $\mathcal{M}$ et se ramener par résolution des singularités à l'extension canonique de Deligne.

Remarque 2.3.3: Dans l'énoncé du théorème 2.1.2 il aurait suffi de supposer que $\mathcal{M}$ est régulier le long de Z. Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_h$. On *a* alors une filtration naturelle de $Y = \operatorname{supp}(\mathcal{M})$ par $Y = Z_0 \supset Z_1 \supset Z_2 \ldots \supset Z_l \ldots \supset Z_N$ où $Z_{i+1} = \operatorname{sing}\ (\mathbf{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}))$. Pour récurrence sur dim Y on voit que pour tester la régularité de $\mathcal{M}$ il suffit parfois de tester la régularité de $\mathbf{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M})$ le long de Z_{i+1} pour $i = 0, 1 \ldots N$.

Notations 2.3.4: Soit $\mathcal{F}$ un complexe constructible. Nous noterons par la suite quand il n'y a pas de confusion $\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^{\vee})$ l'unique complexe de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ tel que

$$S_r(\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^{\vee})) = j_! \mathcal{F}_{|W}.$$

2.4. Dualité locale

Pour établir le théorème 2.1.1 on a besoin de savoir que le dual d'un complexe régulier est encore régulier. Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)$. Le complexe $\mathbf{R}\ \hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ est alors un complexe de $\mathcal{D}_X$-module, à droite. On le transforme en complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche en posant

$$\mathcal{M}^* = \hom_{\mathcal{O}_X}\left(\Omega_X, \mathbf{R}\ \hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)\right)[\dim X].$$

La structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche de $\mathcal{M}^*$ provient de la structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite de Ω_X, faisceau des n formes holomorphes (cf. [6]) Le foncteur contrariant $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^*$ est une équivalence de catégorie de $D(\mathcal{D}_X)_h$ dans elle-même [4]. Ce qui en vertu de [4] montre que le complexe de De Rham $DR(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}^*)$ d'un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_h$ appartient à $D(\mathbf{C}_X)_c$. En fait le théorème de dualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes (cf. [11], théorème 1.1) affirme que l'on *a* un isomorphisme canonique de $D(\mathbf{C}_X)_c$:

$$\mathbf{S}(\mathcal{M}^*) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathcal{M})^{\vee}.$$

Théorème 2.4.1: *Le complexe $\mathcal{M}^*$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ si $\mathcal{M}$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.4.1: Soient $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$, $Y = \operatorname{supp}(\mathcal{M})$, $Z = \operatorname{sing}(\mathcal{M})$ et $\mathcal{F} = \boldsymbol{S}_r(\mathcal{M})$. En vertu du théorème 2.1.2 on *a* un triangle distingué dans $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^\nu) \arrow[dl] & \\ \mathbf{R}\Gamma_{(Z)}(\mathcal{M}) \arrow[rr] & & \mathcal{M}. \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Si dim $Y = 0$ alors $\mathcal{M} = \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}_X} \mathcal{F}^\nu$ et $\mathcal{M}^* = \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}_X} \mathcal{F}$. Dans ce cas là $\mathcal{M}^*$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$. Par récurrence sur dim Y on est ramené à montrer que $\mathcal{M}(Z, Y, \mathcal{F}^\nu)^*$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$. Mais si π est un morphisme de résolution de couple (Y, Z) plongé dans X il est facile de voir que pour tout complexe $\tilde{\mathcal{M}}$ borné de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-modules à cohomologie cohérente que l'on a un isomorphisme canonique

$$\int_\pi (\tilde{\mathcal{M}}^*) \xrightarrow{\sim} \left(\int_\pi \tilde{\mathcal{M}}\right)^*$$

en factorisant au préalable le morphisme π par une immersion suivie d'une projection. Pour démontrer le théorème 2.4.1 en vertu de la conservation de la régularité par image directe on est ramené à montrer que le dual de l'extension canonique $\mathcal{M}(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \mathcal{F}^\nu)$ est régulier. Le dual $\mathcal{M}(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{\mathcal{F}}^\nu)^*$ n'est pas une extension canonique parce que

$$\mathbf{S}(\mathcal{M}(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{\mathcal{F}}^\nu)^*) = \mathbf{R}\tilde{j}_* \tilde{j}^{-2}\tilde{\mathcal{F}}^\nu \neq \tilde{j}_! \tilde{\mathcal{F}}^\nu_{|w}.$$

Donc la vérification de la régularité da $\mathcal{M}(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \mathcal{F}^\nu)^*$ doit être effectuée directement. Il va falloir encore "dévisser". Pour cela nous allons utiliser la remarque 2.3.3 et tester la régularité le long de chaque sous-espace $\tilde{Z}_i$ de la filtration $\tilde{Y} = \tilde{Z}_0 \supset \tilde{Z}_1 \ldots \tilde{Z}_i \ldots$ On est ramené à la situation suivante. Soient $Y \subset X$ un diviseur à croisements normaux, $\mathcal{L}$ un système local sur $U = X \setminus Y$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L}^\nu)$ l'extension canonique associée à cette situation. Localement si Y est réunion de diviseurs lisses $Y_1, \ldots, Y_p$ $(p \leqslant n)$ posons

$$\begin{aligned}
&Z_0 = X & &U = U_0 = X \setminus Y \xrightarrow{j} X \\
&Z_1 = Y = \bigcup_i Y_i & &U_1 = Z_1 \setminus Z_2 \xrightarrow{j_1} Z_1 \\
&Z_2 = \bigcup_{\sigma_1 \neq \sigma_2} (Y_{\sigma_1} \cup Y_{\sigma_2}) & &U_2 = Z_2 \setminus Z_3 \xrightarrow{j_2} Z_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
&Z_p = Y_1 \cap Y_2 \ldots \cap Y_p & &U_p = Z_p.
\end{aligned}$$

Soient $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}(Y, X, \mathcal{L}^\vee)^*$ le dual de $\mathcal{M}^*$. On a dim $Z_i = n - i$; $(i = 0, 1, \ldots, p)$ et $\cup_i U_i$ est une stratification de Whitney de X. Le complexe $\boldsymbol{S}(\mathcal{M}^*) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{i}_*\mathcal{L}$ est constructible dont les faisceaux de cohomologie $R^i j_*\mathcal{L}$ sont localement constants sur U_i. De plus on a Supp $R^i j_*\mathcal{L} =$ Supp $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*) = Z_i$ et sing $R^i j_*\mathcal{L} =$ sing $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*) = Z_{i+1}$. Pour $i = 0, 1 \ldots p-1$ on a un triangle le distingué

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*) \arrow[dl, "+1"'] & \\
\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_{i+1}]}(\mathcal{M}^*) \arrow[rr] & & \boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*). \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

La régularité de $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_{i+1}]}(\mathcal{M}^*)$ et de $\boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$ entraîne la régularité de $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$. Pour montrer la régularité de $\mathcal{M}^*$ on est ramené de proche en proche à montrer la régularité de $\boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$ pour $i = 0, 1, \ldots, p-1$ puisque $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_p]}(\mathcal{M}^*)$ n'a pas de points singuliers, Z_p étant lisse. Pour démontrer cette dernière propriété nous allons raisonner par récurrence sur dim X.

1er cas: dim $X = 1$

Si dim $X = 1$ il suffit de montrer que $\mathcal{M}^*$ est régulier le long des points. Soit x un point de X. En vertu de la condition a) il nous faut montrer que l'homomorphisme

$$DR(\boldsymbol{R}\Gamma_{[x]}(\mathcal{M}^*)) \to DR(\boldsymbol{R}\Gamma_x(\mathcal{M}^*))$$

est un isomorphisme. Mais en travaillant au niveau du schéma local spec $\mathcal{O}_x$ (cf. [10]) on obtient l'isomorphisme:

$$DR(\boldsymbol{R}\Gamma_{[x]}(\mathcal{M}^*)) \simeq \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \boldsymbol{R}\Gamma_{[x]}(\mathcal{O}_X)).$$

D'autre part on a:

$$DR(\boldsymbol{R}\Gamma_x(\mathcal{M}^*)) \simeq \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \boldsymbol{R}\Gamma_x(\mathcal{O}_x)).$$

Un calcul de dualité analogue au théorème de dualité locale [11] nous montre que l'on a:

$$\boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\Gamma_{[x]}(\mathcal{O}_X)) \simeq \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(R\Gamma_{[x]}(\mathcal{O}_x), \mathcal{M})^\vee.$$

Par un calcul direct on obtient

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(R\Gamma_{[x]}(\mathcal{O}_X), \mathcal{M}) &\simeq \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{R}\Gamma_{[x]}(\mathcal{M}))[2n]\\ &\simeq \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{R}\Gamma_x(\mathcal{M}))[2n].\end{aligned}$$

Soit

$$\boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\Gamma_{[x]}(\mathcal{O}_X)) \rightrightarrows \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \boldsymbol{R}\Gamma_x(\mathcal{M}))^{\vee}[2n]$$

$$\rightrightarrows \boldsymbol{R}\Gamma_x \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

D'où l'isomorphisme cherché.

En fait le même calcul montre que si un système $\mathcal{M}$ est régulier le long d'un point son dual $\mathcal{M}^*$ est régulier le long du même point et ce quelque soit dim X.

2ème cas: dim $X \geqslant 2$

Supposons la propriété établie pour dim X − 1. Il nous faut montrer que $\boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$ est régulier le long de Z_{i+1} pour $i = 0, 1, \ldots p-1$ ou qu'en vertu de la condition b) que ses solutions sont nulles sur Z_{i+1}. En tout point de Z_{i+1} qui n'est pas sur Z_n y passe une hypersurface T transverse à la stratification UU_i c'est à dire non caractéristique pour les systèmes $\boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$. En prenant le système induit sur T par $\mathcal{M}^*$ et les intersections des Z_i avec T on trouve une situation identique sur T à celle de départ sur X. En vertu de l'hypothèse de récurrence la restriction à $T \cap Z_{i+1}$ des solutions du système induit par $\boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}[_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$ sur T est nulle. Mais en vertu du problème de Cauchy cette restriction est celle des solutions de $\boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$ qui sont donc nulles sur Z_{i+1} hors de Z_n. Mais Z_n est de codimension supérieure ou égale à 2 dans Z_i. ($i = 0, 1, \ldots, n-2$). En vertu de [1] les systèmes $\boldsymbol{R}[j_{i*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_i]}(\mathcal{M}^*)$ sont réguliers le long de Z_{i+1} pour $i = 0, 1, \ldots, n-2$. Il reste à établir que $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_{n-1}]}(\mathcal{M}^*)$ est régulier le long de Z_n quand il n'est pas vide. Pour cela considérons la normalisation $\pi : \tilde{\mathbf{Z}}_{n-1} \to Z_{n-1}$ de la courbe Z_{n-1}. On *a* en vertu de la proposition 2.2.2:

$$\mathbf{L}\pi^*\boldsymbol{R}[j_{n-1*}]\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_{n-1}]}(\mathcal{M}^*) \rightrightarrows \boldsymbol{R}[\tilde{j}_{n-1*}]\mathbf{L}\pi^*\mathcal{M}^*.$$

Mais $\mathcal{M}^*$ est régulier le long des points donc son image inverse par π est régulière. Ce qui entraîne la régularité de $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Z_{n-1}]}(\mathcal{M}^*)$(c.f. [1]). Ceci achève la démonstration du théorème 2.4.1..

Remarque 2.4.2: En vertu du théorème 2.4.1 si $\mathcal{M}$ est un complexe régulier la condition a) pour $\mathcal{M}^*$ nous donne le diagramme commutatif d'isomorphismes dans $D(\boldsymbol{C}_X)_c$:

$$\begin{array}{ccc} DR(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}^*)) & \rightrightarrows & DR(\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^*)) \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)) & \rightrightarrows & \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)). \end{array}$$

2.5. Démonstration du théorème 2.1.1

Pour achever la démonstration du théorème 2.1.1. il nous reste à montrer que pour les complexes $\mathcal{M}_i (i = 1, 2)$ de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$ l'homomorphisme de $D(\mathbf{C}_X)$

$$\mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \xrightarrow{S_r} \mathbf{R}\,\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$$

est un isomorphisme où $\mathcal{F}_i = S_r(\mathcal{M}_i)(i = 1, 2)$. Posons $Y_i = \mathrm{Supp}(\mathcal{M}_i)$; $(i = 1, 2)$ $Z_i = \mathrm{Sing}(\mathcal{M}_i)$; $(i = 1, 2)$ et $p_i = \mathrm{codim}\ Y_i$. Nous allons raisonner par récurrence simultanée sur dim Y_i; $(i = 1, 2)$.

1*er cas* – dim $Y_1 = 0$. Alors $\mathcal{M}_1 = \mathbf{R}\Gamma_{[Y_1]}(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_1^{v}$

On *a* les isomorphismes canoniques dans $D(\mathbf{C}_X)$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) &\Rightarrow \mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}\big(\mathcal{M}_2^*, \mathbf{R}\Gamma_{[Y_1]}(\mathcal{O}_X)\big) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_1\\ &\Rightarrow \mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}\big(\mathcal{M}_2^*, \mathbf{R}\Gamma_{Y_1}(\mathcal{O}_x)\big) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_1\\ &\Rightarrow \mathbf{R}\Gamma_{Y_1}\big(\mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_2^*, \mathcal{O}_X)\big) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_1\\ &\Rightarrow \mathbf{R}\Gamma_{Y_1}\big(\mathbf{R}\,\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}_2, \mathbf{C}_X)\big) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_1\\ &\Rightarrow \mathbf{R}\,\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1).\end{aligned}$$

D'où la conclusion dans ce cas là.
2*ème cas* – dim $Y_2 = 0$. Alors $\mathcal{M}_2 = \mathbf{R}\Gamma_{[Y_2]}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbf{C}_X} \mathcal{F}_2^{v}$. Ce cas là se ramène au précédent par dualité. En effet on a les isomorphismes canoniques:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) &\Rightarrow \mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}\big(\mathcal{M}_1, \mathbf{R}\Gamma_{[Y_2]}(\mathcal{O}_X)\big) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_2^{v}\\ &\Rightarrow \mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}\big(\mathcal{M}_1, \mathbf{R}\Gamma_{Y_2}(\mathcal{O}_X)\big) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_2^{v}\\ &\Rightarrow \mathbf{R}\Gamma_{Y_2}\big(\mathbf{R}\,\hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{O}_X)\big) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_2^{v}\\ &\Rightarrow \mathbf{R}\Gamma_{Y_2}(\mathcal{F}_1) \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_2^{v}\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma_{Y_2}\big(\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1)\big)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1).$$

D'où la conclusion dans ce cas là.
3ème cas. En vertu des résultats du 2.4. on a deux triangles distingués dans $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\mathbf{R}[j_{2*}]\mathcal{M}_2^*)^* \arrow[dr] & \\ (\mathbf{R}\Gamma_{[Z_2]}(\mathcal{M}_2^*))^* \arrow[ur] & & \mathcal{M}_2 \arrow[ll] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbf{R}[j_{1*}]\mathcal{M}_1 \arrow[dl] & \\ \mathbf{R}\Gamma_{[Z_1]}(\mathcal{M}_1) \arrow[rr] & & \mathcal{M}_1. \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Toujours en vertu de l'hypothèse de récurrence et en vertu de Mayer-Vietoris on peut supposer que Y_i $(i=1,2)$ est irréductible. Mais dim $Z_i <$ dim Y_i $(i=1,2)$ et en vertu de l'hypothèse de récurrence on peut supposer que:

$$\mathcal{M}_2=(\mathbf{R}[j_{2*}]\mathcal{M}_2^*)^* \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_1=\mathbf{R}[j_{1*}]\mathcal{M}_1.$$

Mais le théorème d'unicité 2.1.2 nous montre que

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(Z_1,Y_1,\mathcal{F}_1)=\int_{\pi_1}\mathcal{M}(\tilde{Z}_1,\tilde{Y}_1,\mathcal{F}_1)[-p_1]$$

$$\mathcal{M}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(Z_2,Y_2,\mathcal{F}_2^{v})^*=\int_{\pi_2}\mathcal{M}(\tilde{Z}_2,\tilde{Y}_2,\tilde{\mathcal{F}}_2^{v})^*[-p_2]$$

où π_i $(i=1,2)$ est une résolution du couple (Y_i, Z_i) $(i=1,2)$ plongé dans X. Les résolutions π_i sont différentes et cela nous oblige à travailler sur le produit $\tilde{Y}_1\times\tilde{Y}_2$.
En vertu même de la définition du faisceau $\mathcal{D}_X$ on a un isomorphisme:

$$\mathbf{R}p_*\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X\times X}}\big(\mathcal{M}_2^*\,\hat{\boxtimes}\,\mathcal{M}_1,\mathbf{R}\Gamma_{[\Delta]}(\mathcal{O}_{X\times X})\big)[n]$$

$$\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$$

où $\mathcal{M}_2^*\,\hat{\boxtimes}\,\mathcal{M}_1$ est le système produit défini dans ([16], page 418), Δ est la diagonale de $X\times X$ et

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \Delta \arrow[r, hook] & X \times X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ & X & X \end{tikzcd}$$

étant le diagramme naturel. En utilisant la nucléarité et la constructibilité [11] on démontre la formule

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X\times X}}\left(\mathcal{M}_2^* \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}_1, \mathcal{O}_{X\times X}\right) \xrightarrow{\sim} q^{-1}\mathcal{F}_2^{\nu} \underset{\mathbf{C}}{\boxtimes} p^{-1}\mathcal{F}_1.$$

Appliquant la proposition 2.6 de [11] on trouve un isomorphisme:

$$\mathbf{R}p_*\mathbf{R}\Gamma_\Delta\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X\times X}}\left(\mathcal{M}_2^* \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}_1, \mathcal{O}_{X\times X}\right)[n] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}\left(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1\right).$$

D'où l'on déduit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}p_*\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X\times X}}(\mathcal{M}_2^* \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}_1),\ \mathbf{R}\Gamma_{[\Delta]}(\mathcal{O}_{X\times X}))[n] & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \\
\downarrow & & Sr \downarrow \\
\boldsymbol{R}\mathrm{p}_*\boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{X\times X}}(\mathcal{M}_2^* \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}_1,\ \mathbf{R}\Gamma_{\Delta}(\mathcal{O}_{X\times X}))[n] & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1).
\end{array}$$

Il suffit pour conclure la démonstration du théorème 2.1.1 de montrer que la flèche verticale de gauche est un isomorphisme ou en vertu de la remarque 2.4.2 que le système $\mathcal{M}_2^* \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}_1$ est régulier. Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{Y}_1 \times \tilde{Y}_2 \arrow[dl, "\tilde{p}"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{q}"] & \\
\tilde{Y} \arrow[d, "\pi_1"'] & X \times X \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \tilde{Y}_2. \arrow[d, "\pi_2"] \\
X & & X
\end{tikzcd}$$

$$\pi = (\pi_1, \pi_2)$$

$$\mathcal{M}_1 = \int_{\pi_1} \mathcal{M}(\tilde{Z}_1, \tilde{Y}_1, \tilde{\mathcal{F}})[-\mathrm{p}_1]$$

$$\mathcal{M}_2^* = \int_{\pi_2} \mathcal{M}(\tilde{Z}_2, \tilde{Y}_2, \tilde{\mathcal{F}}_2^{\nu})^*[-p_2].$$

Mais on a la formule valable pour tous complexes $\tilde{\mathcal{M}}_i$ $(i = 1, 2)$ de $\mathcal{D}_{X_i}$-modules à cohomologie cohérente

$$\mathcal{M}_2^* \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}_1 = \int_{\pi_2} \tilde{\mathcal{M}}_2^* \hat{\boxtimes} \int_{\pi_1} \tilde{\mathcal{M}}_1 = \int_{\pi} \tilde{\mathcal{M}}_2^* \hat{\boxtimes}\, \tilde{\mathcal{M}}_1.$$

Il suffit en vertu de la conservation de la régularité par images directes de montrer que $\mathcal{M}(\tilde{Z}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{\mathcal{F}}_1) \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}(\tilde{Z}_2, \tilde{Y}_2, \tilde{\mathcal{F}}_2^{\nu})$ est régulier. Mais il est facile de vérifier que

$$\mathcal{M}\left(\tilde{Z}_1, \tilde{Y}_1, \tilde{\mathcal{F}}_1\right) \hat{\boxtimes}\, \mathcal{M}\left(\tilde{Z}_2, \tilde{Y}_2, \tilde{\mathcal{F}}_2^{\nu}\right) = \mathcal{M}\left(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{\mathcal{F}}\right)$$

où

$$\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 \times \tilde{Y}_2$$

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 \times \tilde{Y}_2 \cup \tilde{Z}_2 \times \tilde{Y}_1$$

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \tilde{p}^{-1}\tilde{\mathfrak{F}}_1 \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \tilde{q}^{-1}\tilde{\mathfrak{F}}_2^{\nu}.$$

Comme $\tilde{Z}$ est un diviseur à croisements normaux dans $\tilde{Y}$ qui est lisse il en résulte que $\mathfrak{M}(\tilde{Z}, \tilde{Y}, \tilde{\mathfrak{F}})$ est une extension canonique donc régulière. D'où le théorème 2.1.1.

§ 3. Dualité relative

Dans ce paragraphe nous démons trons deux théorèmes de dualité relative pour les $\mathfrak{D}_X$-modules holonomes, selon lesquels les équivalences de catégories des §§ 1, 2 sont fonctorielles par rapport aux morphismes de variétés.

3.1. Images directes

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ un morphisme propre de variétés analytiques complexes lisses et $\tilde{\mathfrak{M}}$ un complexe de $D(\mathfrak{D}_{\tilde{X}})_h$ tel que son intégrale le long des fibres:

$$\mathfrak{M} = \int_{\pi} \tilde{\mathfrak{M}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\pi_* \left(\mathfrak{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathfrak{D}_X}{\otimes}} \tilde{\mathfrak{M}} \right)$$

appartienne à $D(\mathfrak{D}_X)_h$. C'est le cas si π est projectif et si la cohomologie de $\tilde{\mathfrak{M}}$ admet globalement une bonne filtration [5]. En fait dans les §§ 1 et 2 c'est le seul cas qu'on a eu à utiliser. Posons $\tilde{n} = \dim \tilde{X}$ et $n = \dim X$.

THÉORÈME 3.1.1: *On a un isomorphisme canonique dans $D(\mathbf{C}_X)_c$:*

$$\mathbf{R}\pi_* \mathbf{R}\, \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}_{\tilde{X}}}(\tilde{\mathfrak{M}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})[\tilde{n}] \simeq \mathbf{R}\, \mathrm{hom}_{\mathfrak{D}_X}(\mathfrak{M}, \mathcal{O}_X)[n].$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1.1: Rappelons (cf. [11]; prop. 4.3.2) que la formule de projection nous fournit un isomorphisme canonique:

$$(*) \quad DR(\mathfrak{M})[n] \simeq \mathbf{R}\pi_* DR(\tilde{\mathfrak{M}})[\tilde{n}].$$

Mais le théorème de dualité locale pour les $\mathfrak{D}_X$-modules holonomes (cf. [11] théorème 1.1) nous fournit un isomorphisme canonique:

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathfrak{M}}) \simeq \mathbf{R}\, \mathrm{hom}_{\mathbf{C}_{\tilde{X}}}(DR(\tilde{\mathfrak{M}}), \mathbf{C}_{\tilde{X}}).$$

D'où en appliquant le foncteur $\mathbf{R}\pi_*$ on obtient un homomorphisme

$$\mathbf{R}\pi_* S(\tilde{\mathfrak{M}}) \simeq \mathbf{R}\, \mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{R}\pi_* DR(\tilde{\mathfrak{M}}), \mathbf{R}\pi_* \mathbf{C}_{\tilde{X}}).$$

D'où en tenant compte de l'isomorphisme $(*)$ on obtient un homomorphisme:

$$\mathbf{R}\pi_* \boldsymbol{S}(\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(DR(\mathcal{M}), R\pi_*\mathbf{C}_{\tilde{X}})[\tilde{n}-n].$$

D'autre part on *a* un morphisme trace

$$\mathbf{R}\pi_*\mathbf{C}_{\tilde{X}} \to \mathbf{C}_X(2n-2\tilde{n}).$$

En composant on obtient un homomorphisme:

$$\mathbf{R}\pi_*\mathbf{S}(\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(DR(\mathcal{M}), \mathbf{C}_X)[n-\tilde{n}].$$

Finalement en appliquant de nouveau le théorème de dualité locale en bas parce que $\mathcal{M}$ est holonome on obtient l'homomorphisme du théorème 3.1.1:

$$(**)\quad \mathbf{R}\pi_*\mathbf{S}(\tilde{\mathcal{M}})(\tilde{n}) \to \boldsymbol{S}(\mathcal{M})(n).$$

On peut déjà déduire le théorème 3.1.1 de la dualité de Verdier. Mais nous allons utiliser la structure analytique c'est à dire, la dualité des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents [12]. Ceci peut être utile dans d'autres situations. Pour montrer que $(**)$ est un isomorphisme il suffit de montrer que son analogue global

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})[\tilde{n}] \to \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)[n]$$

soit un isomorphisme, c'est-à-dire avec les notations de [12] que l'homomorphisme pour tout *i*.

$$\mathbf{E}xt^{i-\tilde{n}}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}(\tilde{X}; \tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \mathbf{E}^{i-\tilde{n}}(\tilde{\mathcal{M}}) \to \mathbf{E}^{i-n}(\mathcal{M})$$

est un isomorphisme. Mais le théorème de dualité globale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes (cf., [12]) nous fournit le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}^{i-\tilde{n}}(\tilde{\mathcal{M}}) & \to & \mathbf{E}^{i-n}(\mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbf{E}^c_{i-\tilde{n}}(\tilde{\mathcal{M}})]^* & \to & [\mathbf{E}^c_{i-n}(\mathcal{M})]^* = \text{dual algébrique} \end{array}$$

l'indice *c* désignant la famille des compacts. Mais l'isomorphisme $(*)$ nous fournit l'isomorphisme

$$\mathbf{E}^c_{i-\tilde{n}}(\tilde{\mathcal{M}}) \rightleftarrows \mathbf{E}^c_{i-n}(\mathcal{M})$$

et le théorème 3.1.1. en résulte.

Remarque 3.1.2: Comme nous l'a signalé Brylinski, on peut donner une démonstration plus courte de ce théorème. Mais cette démonstration a l'avantage de bien expliciter les flèches.

3.2. Images réciproques

Soit $\pi: \tilde{X} \to X$ un morphisme de variétés analytiques complexes lisses, notons $\pi^!$ le foncteur image inverse estraordinaire de $D(\mathbf{C}_X)_c$ dans $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$. Le théorème de dualité de Verdier [17] affirme que $\pi^!$ est adjoint à droite du foncteur $\mathbf{R}\pi_!$ de $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$ dans $D(\mathbf{C}_X)_c$. Soit $\mathfrak{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_h$ alors $\mathbf{L}\pi^*\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}$ est encore un complexe de $D(\mathcal{D}_{\tilde{X}})_h$ [6].

Théorème 3.2.1: *On a un isomorphisme canonique de $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$ si $\mathfrak{M}$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$:*

$$DR(\tilde{\mathfrak{M}})[2 \dim \tilde{X}] \xrightarrow{\sim} \pi^! DR(\mathfrak{M})[2 \dim X].$$

Corollaire 3.2.2: *On a un isomorphisme canonique de $D(\mathbf{C}_X)_c$ si $\mathfrak{M}$ appartient à $D(\mathcal{D}_{\tilde{X}})_{hr}$*

$$\mathbf{S}(\tilde{\mathfrak{M}}) \xleftarrow{\sim} \pi^{-1}\mathbf{S}(\mathfrak{M}).$$

Démonstration du Corollaire 3.2.2: En appliquant le foncteur $\mathbf{R}$ $\hom_{\mathbf{C}_{\tilde{X}}}(*, \mathbf{C}_{\tilde{X}})$ aux deux membres de l'isomorphisme du théorème 3.2.1 on trouve en tenant compte du théorème de dualité locale pour les $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-modules holonomes:

$$\mathbf{S}(\mathfrak{M})[-2\tilde{n}] \xleftarrow{\sim} \mathbf{R} \hom_{\mathbf{C}_{\tilde{X}}}(\pi^! DR(M), \mathbf{C}_{\tilde{X}})[-2n].$$

Mais on *a* un isomorphisme canonique [17]

$$\mathbf{R} \hom_{\mathbf{C}_X}(\pi! DR(\mathfrak{M}), \mathbf{C}_{\tilde{X}})[2\tilde{n}]$$

$$\xrightarrow{\sim} \pi^{-1}\mathbf{R} \hom_{\mathbf{C}_X}(DR(\mathfrak{M}), \mathbf{C}_X)[2n]$$

En appliquant de nouveau le théorème de dualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules on trouve l'isomorphisme du corollaire 3.2.2

Démonstration du théorème 3.2.1: Pour démontrer le théorème 3.2.1 il suffit de supposer que π est une projection puis que π est une immersion fermée. Le cas d'une projection résulte du théorème de Cauchy-Kovavelska puisque toute projection est non caractéristique [16]. Supposons que π soit une immersion. On a l'isomorphisme ([13]; prop. 4.3.2):

$$\mathbf{R}\pi_* DR(\tilde{\mathfrak{M}})[\dim \tilde{X}] \xrightarrow{\sim} DR\left(\int_\pi \tilde{\mathfrak{M}}\right)[\dim X].$$

Mais l'on a isomorphisme

$$\int_{\pi} \tilde{\mathcal{M}} = \int_{\pi} \mathbf{L}\pi^* \mathcal{M} \rightrightarrows \mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{X}]}(\mathcal{M})[\dim X - \dim \tilde{X}].$$

Soit

$$\mathbf{R}\pi_* DR(\tilde{\mathcal{M}})[2\tilde{n}] = DR(\tilde{\mathcal{M}})[2 \dim \tilde{X}]$$

$$\rightrightarrows DR\big(\mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{X}]}(\mathcal{M})\big)[2 \dim X].$$

Mais $\mathcal{M}$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$[3] et les conditions (a) de la proposition 1.2.1 nous donnent l'isomorphisme:

$$DR\big(\mathbf{R}_{[\tilde{X}]}(\mathcal{M})\big) \rightrightarrows DR\big(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{X}}(\mathcal{M})\big) = \mathbf{R}\Gamma_{\tilde{X}}(DR(\mathcal{M}))$$

$$= \pi^! DR(\mathcal{M})$$

D'où le théorème 3.2.1. qui montre que le problème de Cauchy est bien posé par les complexes de $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$.

3.3. Dictionnaire

On a donc 2 équivalences de catégories $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{S}_r$

$$\begin{array}{lccc} \boldsymbol{S}_r\colon & D(\mathcal{D}_X)_{hr} & \to & D(\mathbf{C}_X)_c \\ & \downarrow T & & \| \\ \boldsymbol{F}\colon & D(\mathcal{D}_X^\infty)_h & \to & D(\mathbf{C}_X)_c. \end{array}$$

Il en résulte que le foncteur $\boldsymbol{T}$ est aussi une équivalence de catégories. On peut s'attendre à ce que tout résultat dans l'une des trois catégories $D(\mathcal{D}_X)_{hr}$, $D(\mathcal{D}_X^\infty)_h$ et $D(\mathbf{C}_X)_c$ a son analogue dans les deux autres. Voici quelques exemples:

$\mathcal{M} \in D(\mathcal{D}_X)_{hr}$	$\mathcal{M}^\infty \in D(\mathcal{D}_X^\infty)_h$	$\mathcal{F} = \boldsymbol{S}_r(\mathcal{M}) \in D(\mathbf{C}_X)_c$
$\mathcal{M}^*$	$\mathcal{M}^{*\infty}$	$\mathcal{F}^\vee$
$\int_\pi \mathcal{M}$	$(\int_\pi \mathcal{M})^\infty$	$\mathbf{R}\pi_* \mathcal{F}$
$\mathbf{L}\pi^*\mathcal{M}$	$(\mathbf{L}\pi^*\mathcal{M})^\infty$	$\pi^{-1}\mathcal{F}$
$\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$	$\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty)$	$\mathcal{F} \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathbf{C}_Y$
$\mathbf{R}[j_*]\mathcal{M}$	$\mathbf{R}j_* j^{-1}\mathcal{M}^\infty$	$j_!\mathcal{F}_{\vert W}$
$\mathcal{M}_1 \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_1^\infty \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{M}_2^\infty$	$\mathcal{F}_1 \underset{\mathbf{C}_X}{\otimes} \mathcal{F}_2$

(3) Dans le cas d'une projection π on voit directement par dévissage que $\mathbf{L}\pi^*\mathcal{M}$ est régulier si $\mathcal{M}$ est régulier.

REMARQUE: Une construction de l'inverse du foncteur S_r est proposée par Kashiwara dans [8]. L'étude des systèmes micro-différentiels à singularités régulières est entreprise par Kashiwara, M et Kawai, T dans [7].

3.4. Remarques

3.4.1. Comme nous l'a fait remarquer B. Malgrange on peut éviter d'utiliser la résolution globale des singularités dans la démonstration du théorème 2.1.1. à condition d'utiliser le théorème 1.1.1. En effet soit $\mathcal{F}$ un complexe constructible. Il nous faut montrer qu'il est de la forme $\mathbf{S}_r(\mathfrak{M})$ où $\mathfrak{M}$ est un complexe holonome régulier. Par le théorème 1.1.1, $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathbb{F}(\mathfrak{M}^\infty)$ où $\mathfrak{M}^\infty$ est un complexe de $\mathcal{D}^\infty$-modules à cohomologie holonome. De plus par construction $\mathfrak{M}^\infty$ est *localement* de la forme $\mathcal{D}^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathfrak{M}_r$ où $\mathfrak{M}_r$ est un complexe régulier. On raisonne alors par récurrence sur la longueur de $\mathfrak{M}^\infty$. On est ramené à supposer que $\mathfrak{M}^\infty$ est un $\mathcal{D}_X^\infty$-module holonome. Mais alors $\mathfrak{M}^\infty$ est *globalement* de la forme $\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathfrak{M}_r$ où $\mathfrak{M}_r$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome régulier. En effet deux $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers qui donnent naissance à un même $\mathcal{D}_X^\infty$-module holonome sont isomorphes en vertu de la pleine fidélité du foncteur S_r. Ceci sert à recoller la construction précédente et fournit finalement un complexe régulier $\mathfrak{M}$ tel que $\mathcal{F} \cong \mathbf{S}_r(\mathfrak{M})$. Du point de vue des faisceaux constructibles ceci correspond à dévisser un complexe constructible à l'aide de sa cohomologie perverse.

3.4.2. Soient $f: D \to X$ un morphisme d'une courbe lisse D sur X et $\mathfrak{M}$ un complexe régulier. Alors nous avons vu que $\mathbf{L}f^*\mathfrak{M}$ est régulier. Mais comme nous l'a fait remarquer P. Guillen le dévissage (cf. l'introduction) des complexes holonomes permet de montrer la réciproque. A savoir étant donné un complexe de $\mathcal{D}_X$-modules holonomes $\mathfrak{M}$ si pour tout morphisme $f: D \to X$ d'une courbe lisse $D\mathbf{L}f^*\mathfrak{M}$ est régulier alors $\mathfrak{M}$ est régulier. En particulier ceci permet de montrer que tout sous-$\mathcal{D}_X$-module holonome d'un module holonome régulier est régulier d'une part et de simplifier la démonstration de la régularité du dual de l'extension canonique de Deligne.

Bibliographie

[1] P. DELIGNE: Equations différentielles à Points singuliers réguliers. *Lecture Notes in Mathematics 163*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg New York (1970).

[2] A. GROTHENDIECK: On De Rham Cohomology of Algebraic variaties. *Publ. I.H.E.S. 29* (1966) 93–103.

[3] H. HIRONAKA: Desingularisation of Analytic varieties. Actes congrès intern. Math. tome 2, 1970 627–631. Gauthiers Villard (1971).

[4] M. KASHIWARA: On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University 10* (1975) 563–579.

[5] M. KASHIWARA: B-functions and holonomic systems. *Inventiones Math. 38* (1976) 33–53.

[6] M. Kashiwara: On the holonomic systems of differential equations II. *Inventiones Math 49* (1978) 121–135.
[7] M. Kashiwara and T. Kawai: On holonomic systems of micro-differential equations. *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ 17* (1981) 813–979.
[8] M. Kashiwara Faisceaux constructibles et systèmes holonomes exposé n° XIX. *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1979–1980) Centre de l'Ecole Polytechnique Paris* (1981).
[9] Z. Mebkhout: Cohomologie locale d'une hypersurface, en fonctions de plusieurs variables complexes III. *Lecture Notes in Mathematics 670*, pp. 89–114. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).
[10] Z. Mebkhout: Locals cohomology of analytic spaces. *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ 12* (1977) 247–256 (suppl.).
[11] Z. Mebkhout: Théorèmes de bidualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes. *Arkiv För Matematik 20* (1981) 111–124.
[12] Z. Mebkhout: Théorèmes de dualité globale pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. *Math. Scand 50* (1982) 25–43.
[13] Z. Mebkhout: Une équivalence de catégories. *Comp. Math.* 51 (1984) 51–61.
[14] Z. Mebkhout: Sur le problème de Hilbert-Riemann. In proceeding – Les Houches (Sept. 1979). *Lectures Notes in Physics 126*, pp. 90–110, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980).
[15] M. Sato: Hyperfunctions and partial differential equations. *Proceeding Intern, Conference in Functional Analysis and related topics.* University of Tokyo Press (1979).
[16] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: Micro-functions and pseudo differential equations. *Lectures Notes in Mathematics 287*, pp. 265–529, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1973).
[17] J-L. Verdier: Classe d'homologie associée à un cycle. Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure (1974–75). *Astérisque 36–37* (1976) 101–151.
[18] A. Grothendieck: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–66. Cohomologie l-adique et Fonctions L. *Lectures Notes in Mathematics 589.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

(Oblatum 10-VI-1981)

V.E.R. de Mathématiques
Université de Paris VII
2 place Jussieu
75221 Paris
France