COMPOSITIO MATHEMATICA

Z. MEBKHOUT

Une équivalence de catégories

Compositio Mathematica, tome 51, nº 1 (1984), p. 51-62
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1984__51_1_51_0>

Compositio Mathematica 51 (1984) 51–62

UNE ÉQUIVALENCE DE CATÉGORIES

Z. Mebkhout

Sommaire

§ 1. Introduction

On démontre que les faisceaux $Ext^i_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ sont des systèmes différentiels d'ordre infini si $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathbf{C}_X$-analytiquement constructible sur une variété analytique complexe lisse X. Compte tenu des théorèmes de *dualité* locale pour les systèmes différentiels, ceci établit l'*équivalence de catégories* entre la catégorie dérivée des complexes constructibles et la catégorie des complexes bornés de $\mathcal{D}^\infty_X$-modules à cohomologie holonome. Cela ne résulte pas tout à fait par *dévissage* au cas où $\mathcal{F}$ est le faisceau caractéristique d'un espace analytique fermé de X. Faute de disposer de "localisation étale" pour rendre *constants* des faisceaux *localement constants,* il nous faut utiliser la résolution des singularités comme *J.L. Verdier* [11], dont nous suivons la démonstration, qui établit que les faisceaux $Ext^i_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sont constructibles si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux constructibles sur un *espace analytique complexe.* Les autres ingrédients sont le théorème de *comparaison* locale de [9], l'extension canonique d'une connexion de *P. Deligne* [1], la *régularité* des systèmes holonomes, le théorème d'images directes des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes sous la condition d'existence de filtrations globales de *M. Kashiwara* [5] et on invoque enfin le théorème de *Grauert-Remmert* comme *A. Grothendieck* [2] pour conserver la *régularité* par un morphisme projectif.

Nous obtenons en fait que tout faisceau constructible est *localement* solution d'un système holonome d'ordre fini *régulier*, mais nous n'avons pas examiné la globalisation. L'équivalence établie fournit donc un dictionnaire entre énoncés *géométriques* concernant les faisceaux constructibles et énoncés *analytiques* concernant les systèmes différentiels. Un exemple est la dualité de *Poincaré-Verdier* qui trouve son analogue dans la dualité pour les systèmes différentiels (cf. [10], Chap. IV) qui a été notre motivation initiale. Nous verrons un autre exemple concernant la connexion de *Gauss-Manin* d'une singularité. Nous utilisons les notations suivantes:

$(X, \mathcal{O}_X)$: variété analytique complexe lisse de dimension n.
$\mathcal{D}_X = \mathcal{D}$: faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini sur X.
$\mathcal{D}_X^\infty = \mathcal{D}^\infty$: faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini sur X.
$D(\mathcal{D})_h$: catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}$-modules à gauche à cohomologie holonome.
$D(\mathcal{D}^\infty)_h$: catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}^\infty$-modules à gauche à cohomologie holonome.
$D(\mathbf{C}_X)_c$: catégorie dérivée des complexes $\mathbf{C}$-analytiquement constructibles.
$\mathcal{M}$: objet de $D(\mathcal{D})_h$.
$\mathcal{M}^\infty$: objet de $D(\mathcal{D}^\infty)_h$.
$\mathcal{F}$: objet de $D(\mathbf{C}_X)_c$.
$\Omega_X = \Omega$: faisceaux des n-formes holomorphes.
$DR(\mathcal{M}^\infty)$: complexe de De Rham de $\mathcal{M}^\infty$ qui est égal par définition à $\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}^\infty)$.
Y : espace analytique fermé de X défini par un idéal $\mathcal{J}_Y$.
$\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$: cohomologie locale algébrique à valeur dans $\mathcal{M}$ qui est égale par définition à $\mathbf{R}\ \varinjlim_k \mathrm{hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^k, \mathcal{M})$. C'est un objet de $D(\mathcal{D})$ [9].
$\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty)$: cohomologie locale analytique à valeur dans $\mathcal{M}^\infty$. C'est un objet de $D(\mathcal{D}^\infty)$.
$\mathcal{O}_{X|Y}$: complété formel de $\mathcal{O}_X$ le long de Y égal à $\varprojlim_k \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^k$. C'est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche.

Pour les définitions qui peuvent manquer, nous renvoyons le lecteur à [5] par exemple. Pour démontrer le théorème principal, on dévisse le complexe $\mathcal{F}$. Et on utilise les conditions (a), (b) et (c) ci-dessous introduites dans [9] dans le cas particulier du faisceau caractéristique $\mathbf{C}_Y$ d'un sous-espace analytique complexe de X.

§ 2. Régularité et dualité

On rappelle ([10], Chap. III, prop. 3.3) que les conditions (a), (b) et (c) suivantes sont équivalentes:

(a) L'homomorphisme canonique $DR(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})) \to DR(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{M}))$ est un isomorphisme dans $D(\mathbf{C}_X)_c$.

(b) On a un isomorphisme canonique dans $D(\mathbf{C}_X)_c$:

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}\big(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X\big) \leftarrow\!\!\sim \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \underset{C}{\otimes} \mathbf{C}_Y.$$

(c) L'homomorphisme canonique

$$\mathbf{R}\Gamma_Y\Big(\mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}\Big) \leftarrow \mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$$

est un isomorphisme dans $D(\mathcal{D}^\infty)_h$.

La condition (a) est *covariante.* Compte tenu de la proposition 6.20 de *P. Deligne* [1], elle est équivalente à la régularité de $\mathcal{M}$ le long de Y pour une *connexion.*

La condition (b) est *contravariante.* Compte tenu du théorème de *B. Malgrange* (théorème 1.4 de [7]) et de l'isomorphisme (cf. [10], Chap. II, prop. 6.1)

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X\right) \rightrightarrows \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}\left(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}\right),$$

elle est équivalente à la régularité du système $\mathcal{M}$ si X est une surface de *Riemann.*

La condition (c) est un isomorphisme entre *systèmes différentiels* alors que les conditions (a) et (b) sont des isomorphismes entre complexes *constructibles.* Pour le système de De Rham, $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, ces conditions sont établies sous cette forme dans [9].

La condition (b) est le théorème 1.1, la condition (c) est le théorème 1.2, et la condition (a) est le théorème 3.1 qui résulte essentiellement du théorème de comparaison de *A. Grothendieck* [2]. L'équivalence, dans le cas général, résulte des théorèmes de *dualité* locale ([10], Chap. III).

§ 3. Enoncé des théorèmes

Soit $\mathcal{F}$ un complexe de $D(\mathbf{C}_X)_c$. La structure de $\mathcal{D}^\infty$-modules à gauche de $\mathcal{O}_X$ munit le complexe $\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ d'une structure de complexe de $\mathcal{D}^\infty$-modules à gauche.

THÉORÈME 3.1: *Le complexe* $\mathbf{R}\,\mathit{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ *appartient à* $D(\mathcal{D}^\infty)_h$.

Par le théorème de *M. Kashiwara* [4] et le théorème 3.1, on dispose alors de deux foncteurs:

$$\mathbf{F}: D(\mathcal{D}^\infty)_h \to D(\mathbf{C}_X)_c$$

$$\mathbf{F}(\mathcal{M}^\infty) = \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X)$$

$$\mathbf{G}: D(\mathbf{C}_X)_c \to D(\mathcal{D}^\infty)_h$$

$$\mathbf{G}(\mathcal{F}) = \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X).$$

PROPOSITION 3.2: *Les foncteurs* **F** *et* **G** *sont inverses l'un de l'autre et établissent une équivalence de catégorie entre* $D(\mathcal{D}^\infty)_h$ *et* $D(\mathbf{C}_X)_c$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.2: Il nous faut montrer que le foncteur composé $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ est isomorphe au foncteur identique de $D(\mathcal{D}^\infty)_h$, ou que le morphisme canonique

$$\mathcal{M}^\infty \to \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}\big(\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X\big)$$

est un isomorphisme dans $D(\mathcal{D}^\infty)_h$. Mais c'est le théorème de *bidualité* locale: $\mathcal{O}_X$ est "dualisant" dans $D(\mathcal{D}^\infty)_h$, ([10], Chap. III, théorème 2.1).

Montrons que le foncteur $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ est isomorphe au foncteur identique de $D(\mathbf{C}_X)_c$: on a l'isomorphisme suivant ([10], Chap. I):

$$\begin{aligned} DR\big(\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)\big) &= \Omega \overset{L}{\underset{\mathcal{D}^\infty}{\otimes}} \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)[-n] \\ &\simeq \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}\left(\mathcal{F}, \Omega \overset{L}{\underset{\mathcal{D}^\infty}{\otimes}} \mathcal{O}_X\right)[-n] \\ &\simeq \mathbf{R}\,\mathrm{hom}(\mathcal{F}, \mathbf{C}_X). \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme résulte du lemme de *Poincaré*. Mais $\mathbf{R}$ $\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ appartient à $D(\mathcal{D}^\infty)_h$ en vertu du théorème 3.1. Par le théorème de *dualité* locale ([10], Chap. III, théorème 1.1):

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}\big(\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X\big) \\ &\quad\simeq \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}\big(DR\big(\mathbf{R}\,\mathrm{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X), \mathbf{C}_X\big)\big) \\ &\quad\simeq \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}\big(\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathbf{C}_X), \mathbf{C}_X\big) \\ &\quad\simeq \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme résulte du fait que le faisceau constant $\mathbf{C}_X$ est *"dualisant"* dans $D(\mathbf{C}_X)_c$ [11]. Donc le foncteur $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ est isomorphe au foncteur identique de $D(\mathbf{C}_X)_c$. D'où la proposition 3.2.

On déduit par exemple, de la proposition 3.2 la proposition suivante:

PROPOSITION 3.3: *La fibre du faisceau $hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ en tout point de X est un espace vectoriel complexe de dimension finie si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des $\mathcal{D}$-modules holonomes.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.3: Pour tout point x de X l'homomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_x \to \mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}\left(\mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}, \mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}\right)_x$$

est injective parce que $\mathcal{D}^\infty$ est fidèlement plat sur $\mathcal{D}$. En vertu de la ou que le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}\Big(\mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}, \mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}\Big) = \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{N}^\infty)$$

$$\rightrightarrows \mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathbf{F}(\mathcal{N}^\infty), \mathbf{F}(\mathcal{M}^\infty)).$$

Il en résulte que $Ext^i_{\mathcal{D}^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{N}^\infty)$ est un faisceau constructible en vertu de [11] (les $Ext^i_{\mathbf{C}_X}$ de faisceaux constructibles sont constructibles) et sa fibre en tout point de X est un espace vectoriel complexe de dimension fini. D'où la proposition 3.3. On trouve en particulier que si x est un point de X les endomorphismes $\mathcal{D}_x$ linéaires de $\mathcal{N}_x$ est un espace vectoriel complexe de dimension fini si $\mathcal{N}$ est un système holonome. Ce résultat a été utilisé dans [5].

Il nous reste à établir le théorème 3.1. La démonstration de ce théorème se fait en trois étapes.

§ 4. Démonstration du théorème 3.1

4.1. 1ère étape – Réduction de $D(\mathcal{D}^\infty)_h$ à $D(\mathcal{D})_h$

Il nous faut montrer que le complexe $\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ appartient à $D(\mathcal{D}^\infty)_h$. Les catégories $D(\mathcal{D}^\infty)_h$(1) et $D(\mathbf{C}_X)_c$ sont triangulées. On peut supposer que $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible. Le problème est local sur X. On peut supposer que $\mathcal{F}$ est localement constant constructible sur un ouvert *lisse* connexe W d'un fermé analytique Y de X tel que le complémentaire $Z = Y \setminus W$ est un fermé analytique de Y et nul en dehors de W. Notons $j: W \to Y$, $\alpha: Y \to X$, $\beta = \alpha \circ j: W \to X$, et $\gamma: V \to X$ les inclusions canoniques si V est le complémentaire de Z dans X.

On a alors

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \alpha_*\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_Y}\big(\alpha^{-1}\mathcal{F}, \alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)\big).$$

Mais $\alpha^{-1}\mathcal{F}$ est égal à $\mathbf{R}j_! j^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{F}$. On a par *dualité*:

$$\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \alpha_*\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_Y}\big(\mathbf{R}j_! j^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{F}, \alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)\big)$$

$$\rightrightarrows \alpha_*\mathbf{R}j_*\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}_W}\big(j^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{F}, j^{-1}\alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)\big)$$

$$\rightrightarrows \alpha_*\mathbf{R}j_*\Big(j^{-1}\alpha^{-1}\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathcal{L}\Big)$$

où $\mathcal{L}$ est égal au faisceau localement constant constructible sur W, $\mathbf{R}$

(1) Voir la remarque 1.5.1 de l'article qui suit.

$\hom_{\mathbf{C}_W}(j^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{F}, \mathbf{C}_W)$. On a

$$\mathbf{R}\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{R}\beta_*\beta^{-1}\Big(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_!\mathcal{L}\Big).$$

Mais $\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_!\mathcal{L}$ est à support contenu dans Y et on a

$$\mathbf{R}\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\Big(\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_!\mathcal{L}\Big).$$

Faute de disposer de $\mathcal{D}_Y$-modules si Y est singulier, on ne peut pas travailler sur Y comme dans [11]. On est donc obligé de rester sur X.

Mais, en vertu du théorème de *comparaison* locale du chapitre II (théorème 1.3), on a

$$\mathbf{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X) \leftleftarrows \mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X).$$

Soit

$$\mathbf{R}\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \rightrightarrows \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\Big(\mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_!\mathcal{L}\Big).$$

Pour démontrer le théorème 3.1, il suffit de montrer que le complexe

$$\gamma^{-1}\Big(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_! L\Big)$$

de $\mathcal{D}_V$-modules à cohomologie holonome se prolonge en un complexe $\mathcal{M}$ de $D(\mathcal{D})_h$ *régulier* le long de Z. En effet, la condition (c) du paragraphe 2 nous donne les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) &\rightrightarrows \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\Big(\mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_!\mathcal{L}\Big)\\ &\rightrightarrows \mathbf{R}\gamma_*\gamma^{-1}\Big(\mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}\Big)\\ &\rightrightarrows \mathcal{D}^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathbf{R}\varinjlim_k \hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_Z^k, \mathcal{M})\end{aligned}$$

Mais le complexe $\mathbf{R}\ \varinjlim_k \hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_Z^k, \mathcal{M})$ appartient à $D(\mathcal{D})_h$ [9] et $\mathbf{R}$ $\hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ appartient à $D(\mathcal{D}^\infty)_h$. D'où le théorème 3.1.

4.2. 2ème étape – Résolution des singularités de Y

On peut trouver [3] (le problème est local sur Y) un morphisme projectif

π de variétés analytiques complexes qui soit un isomorphisme hors de Z:

$$\begin{array}{cccccc} & \tilde{X} & \supset & \tilde{Y} & \supset & \tilde{Z} \\ \pi & \downarrow & & \downarrow \pi_Y & & \downarrow \\ & X & \supset & Y & \supset & Z \end{array}$$

tel que:

$\tilde{Y}$ soit le transformé strict de Y par π,

$\tilde{Z} = \pi_Y^{-1}(\tilde{Z})$ est un diviseur à croisements normaux *dans* $\tilde{Y}$.

C'est de cette façon qu'on résout localement les singularités d'un espace analytique complexe Y, X jouant le rôle d'espace *ambiant lisse* [3]. Notons

$$\tilde{j}: \tilde{W} = \pi^{-1}(W) \to \tilde{Y},\ \tilde{\alpha}: \tilde{Y} \to \tilde{X},\ \tilde{\beta}: \tilde{Z} \to \tilde{X} \text{ et } \tilde{\gamma}: \tilde{V} \to \tilde{X}$$

les inclusions canoniques.

La restriction $\tilde{\mathfrak{L}}$ de $\pi^{-1}\beta_! \mathfrak{L}$ à $\tilde{W}$ est un faisceau localement constant constructible. On a donc une variété *lisse* $\tilde{Y}$ et une connexion $\mathcal{O}_{\tilde{W}} \otimes_{\mathbf{C}} \tilde{\mathfrak{L}}$ sur $\tilde{W}$ complémentaire d'un diviseur à croisements normaux. C'est la situation de *P. Deligne* [1]. En vertu du théorème *d'existence* de [1], cette connexion se prolonge en une *connexion* méromorphe régulière le long de $\tilde{Z}$. Nous allons rappeler la construction de cette *connexion canonique* pour l'adapter au langage des $\mathfrak{D}_{\tilde{Y}}$-modules et en voir les propriétés. Nous suivons l'exposé de *N. Katz* [6].

Soit U un ouvert connexe de $\tilde{Y}$ où sont définies des coordonnées locales $y_1, \ldots, y_p$; $(p = \operatorname{codim} \tilde{Y})$ telles que $y_j = 0$ $(j = 1, \ldots, r;\ r \leqslant p)$ sont les branches du diviseur $\tilde{Z}$. La restriction de $\tilde{L}$ à $U \cap \tilde{W}$ est un faisceau localement constant constructible et correspond *donc* à une représentation du groupe fondamental $\pi_1(U \cap \tilde{W})$ dans la fibre E en un point de $U \cap \tilde{W}$. Mais le groupe $\pi_1(U \cap \tilde{W})$ est commutatif engendré par r générateurs γ_j $(j = 1, \ldots, r)$ correspondant chacun au lacet autour de la branche $y_j = 0$, $j = 1, \ldots, r$. La représentation ρ est donc déterminée par les automorphismes $\rho(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, r$ de E. On peut d'autre part trouver des endomorphismes B_j de E tels que:
- $\exp(2\pi i B_j) = \rho(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, r$;
- les endomorphismes B_j commutent mutuellement entre eux;
- $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < 1$ si λ une valeur propre de B_j.

Ces données permettent de construire l'extension canonique en munissant

$$\mathfrak{N} = \varinjlim_{k} \hom_{\mathcal{O}_{\tilde{Y}}}(\mathcal{J}^k_{\tilde{Z}}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} E$$

de la structure de $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-modules définie de la façon suivante:

$$\xi(f \otimes e) = \xi(f) \otimes e - f\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\xi(y_i)}{y_i} \otimes B_i e \right)$$

si ξ est un champ de vecteur sur $\tilde{Y}$, f une fonction méromorphe ayant des pôles le long de $\tilde{Z}$ et e un vecteur de E. Ces constructions locales se *recollent* [1] pour donner une structure globale de $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module holonome à gauche sur $\tilde{\mathcal{N}}$. On peut voir que la variété caractéristique de $\tilde{\mathcal{N}}$ est définie localement dans $T^*\tilde{Y}$ par

$$y_1\eta_1 = \dots = \eta_r y_r = \eta_{r+1} \dots = \eta_p = 0$$

où $\eta_1, \dots, \eta_p$ sont les coordonnées cotangentes duales de $y_1, \dots, y_r$. De plus, $\tilde{\mathcal{N}}$ est régulier le long de $\tilde{Z}$ en ce sens que l'on a l'isomorphisme (cf. proposition 6.20 de [1]):

$$DR(\tilde{\mathcal{N}}) \xrightarrow{\sim} DR(\mathbf{R}\tilde{j}*^{-1}\tilde{\mathcal{N}})$$

qui correspond à la condition a) du paragraphe 2.

Observons que le $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$-module $\tilde{\mathcal{N}}$ admet une *filtration* (bonne) *globale* par des $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$-modules libres de type fini.

L'extension *canonique* $\tilde{\mathcal{N}}$ est un $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module mais nous en cherchons un *prolongement* en tant que $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-module. Posons

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathbf{R}\tilde{\alpha}_* \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \underset{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}{\otimes} \tilde{\mathcal{N}}[-p] = \tilde{\alpha}_* \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \underset{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}{\otimes} \tilde{\mathcal{N}}[-p].$$

Pour la définition de $\mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}}$, voir ([10], Chap. I) ou [5]. Le $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module $\mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}}$ est plat parce que $\tilde{\alpha} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ soit une immersion. Le $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-module $\tilde{\mathcal{M}}$ est holonome. Il faut voir qu'il prolonge à $\tilde{X}$ le $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module

$$\tilde{\gamma}^{-1}\left(\mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Y}]}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \tilde{\beta}_! \tilde{L}\right) = \pi^{-1}\left(\gamma^{-1}\left(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_! L\right)\right).$$

Ceci résulte du lemme suivant.

LEMMA 4.2.1: *On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$-module*:

$$\tilde{\alpha}_*\left(\mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \underset{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}{\otimes} \mathcal{O}_{\tilde{Y}}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\tilde{Y}|X} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Y}]}(\mathcal{O}_{\tilde{X}})[p].$$

La démonstration de ce lemme se fait par un calcul local direct (tout est lisse) et nous la laissons au lecteur. En tensorisant par $\tilde{\beta}_! \tilde{L}$ l'isomorphisme du lemme 4.2.1, on voit que $\tilde{\mathcal{M}}$ prolonge $\gamma^{-1}(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \tilde{\beta}_! \tilde{L})$.

De la même façon, on peut voir que $\tilde{\mathcal{M}}$ est régulier le long de $\tilde{Z}$ parce que $\tilde{\beta}: \tilde{Z} \to \tilde{Y} \to \tilde{X}$ est une immersion. En fait, cela résultera aussi de la conservation de la régularité par morphisme projectif qui sera établi au théorème 4.3.1.

4.3. *3ème étape – Images directes de* $\tilde{\mathcal{M}}$

Posons

$$\mathcal{M} = \mathbf{R}\pi_* \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}{\otimes}} \tilde{\mathcal{M}} \overset{\text{Déf}}{=} \int_\pi \tilde{\mathcal{M}}.$$

Il est clair que $\mathcal{M}$ est un prolongement de $\gamma^{-1}(\mathbf{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \beta_! \mathcal{L})$. Il nous reste à voir qu'il appartient à $D(\mathcal{D})_h$ et qu'il est *régulier* le long de Z.

Mais, pour tout morphisme de variétés analytiques complexes lisses $f: T_2 \to T_1$, on a l'isomorphisme:

$$\mathcal{D}_{T_1 \leftarrow T_2} \xrightarrow{\sim} f^{-1}\left(\mathcal{D}_{T_1} \underset{\mathcal{O}_{T_1}}{\otimes} \check{\Omega}_{T_1}\right) \underset{f^{-1}\mathcal{O}_{T_1}}{\otimes} \Omega_{T_2}.$$

Si $\check{\Omega}_{T_1}$ est le dual $\hom_{\mathcal{O}_{T_1}}(\Omega_{T_1}, \mathcal{O}_{T_1})$ de Ω_{T_1}. La formule de *projection* appliquée à l'immersion $\tilde{\alpha}$ donne l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}{\otimes}} \tilde{\alpha}_* \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} &= \tilde{\alpha}^{-1}(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}}) \overset{L}{\underset{\tilde{\alpha}^{-1}\mathcal{D}_{\tilde{X}}}{\otimes}} \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}}) \\ &= \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{Y}}.\end{aligned}$$

On a alors $\mathcal{M} = \int_\pi \tilde{\mathcal{M}} = \int_{\pi \circ \tilde{\alpha}} \tilde{\mathcal{N}}[-p]$.

Mais $\tilde{\mathcal{N}}$ admet *globalement* une bonne filtration sur $\tilde{Y}$, il en résulte, en vertu du théorème [5] d'images directes appliqué au morphisme projectif $\pi \circ \tilde{\alpha}$, que $\mathcal{M}$ appartient à $D(\mathcal{D})_h$. Il reste à montrer que $\mathcal{M}$ est régulier le long de Z.

THÉORÈME 4.3.1: *L'homomorphisme canonique*

$$DR(\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) \to DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathcal{M}))$$

est un isomorphisme dans $D(\mathbf{C}_X)_c$.

Le théorème 4.3.1 achève la construction du "prolongement" $\mathcal{M}$ et donc la démonstration du théorème 3.1.

Pour montrer le théorème 4.3.1, on montre la proposition suivante:

Proposition 4.3.2: *Pour tout morphisme propre $f: T_1 \to T_2$ de variété analytique complexe et tout $\mathcal{D}_{T_1}$-module à gauche $\mathcal{N}$, on a un isomorphisme canonique*:

$$\mathbf{R}f_* DR(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} DR\left(\int_f \mathcal{N}\right)[\dim T_2 - \dim T_1].$$

Démonstration de la Proposition 4.3.2: On rappelle que l'on a l'isomorphisme suivant (cf. chapitre I):

$$DR\left(\int_f \mathcal{N}\right) = \Omega_{T_2} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{T_2}}{\otimes}} \int_f \mathcal{N}[-\dim T_2].$$

La formule de *projection* appliquée au morphisme *propre* f et au $\mathcal{D}_{T_2}$-module Ω_{T_2} à droite *cohérent* donne l'isomorphisme:

$$DR\left(\int_f \mathcal{N}\right)[\dim T_2] = \mathbf{R}f_*\left(f^{-1}(\Omega_{T_2}) \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{D}_{T_2}}{\otimes}} \mathcal{D}_{T_2 \leftarrow T_1} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{T_1}}{\otimes}} \mathcal{N}\right).$$

Mais $f^{-1}(\Omega_{T_2}) \otimes^{L}_{f^{-1}\mathcal{D}_{T_2}} \mathcal{D}_{T_2 \leftarrow T_1}$ est isomorphe à Ω_{T_2}. Finalement, on obtient

$$DR\left(\int_f \mathcal{N}\right)[\dim T_2] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_*\left(\Omega_{T_1} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{T_1}}{\otimes}} \mathcal{N}\right) \xrightarrow{\sim} DR(\mathcal{N})[\dim T_1].$$

D'où la proposition 4.3.2.

Démonstration du théorème 4.3.1: Nous allons d'abord construire un isomorphisme

$$\mathbf{R}\pi_* DR\big(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(\tilde{\mathcal{M}})\big) \xrightarrow{\sim} DR\big(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathcal{M})\big).$$

On a:

$$\mathbf{R}\pi_* DR\big(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(\tilde{\mathcal{M}})\big) \overset{\text{Déf}}{=} \mathbf{R}\pi_*\mathbf{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}\big(\mathcal{O}_{\tilde{X}}, \mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(\tilde{\mathcal{M}})\big)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\pi_*\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}\big(DR(\tilde{\mathcal{M}})\big)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma_Z\big(\mathbf{R}\pi_* DR(\tilde{\mathcal{M}})\big).$$

Mais, en vertu de la proposition 4.3.1 appliquée au morphisme π, on a:

$$\mathbf{R}\pi_*\big(DR(\tilde{\mathcal{M}})\big) \xrightarrow{\sim} DR\left(\int_\pi \tilde{\mathcal{M}}\right) = DR(\mathcal{M}).$$

On obtient finalement:

$$\mathbf{R}\pi_* DR\big(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(\tilde{\mathcal{M}})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma_Z(DR(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathcal{M})).$$

D'où l'isomorphisme cherché.

De même, en raisonnant algébriquement sur les fibres du morphisme projectif, et en invoquant le théorème de *Grauert-Remmert* comme *Grothendieck* dans [2] (note $n^0 7$ page 99), on construit l'isomorphisme *algébrique* analogue à l'isomorphisme analytique précédent:

$$\mathbf{R}\pi_* DR\big(\mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Z}]}(\tilde{\mathcal{M}})\big) \xrightarrow{\sim} DR\big(\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})\big).$$

Le fait que le $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module $\tilde{\mathcal{M}}$ est régulier le long de $\tilde{Z}$ exprime qu'il est *algébrisable* le long des fibres de $\pi \circ \tilde{\alpha}$.

Le complexe $DR(\tilde{\mathcal{M}})$ est formé de $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$-modules limites inductives, de $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$-modules libres de type fini. On est exactement dans la situation de *Grothendieck* [2].

Finalement, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_{[\tilde{Z}]}(\tilde{\mathcal{M}})) & \rightarrow & \mathbf{R}\pi_* DR(\mathbf{R}\Gamma_{\tilde{Z}}(\tilde{\mathcal{M}})) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
DR(\mathbf{R}\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) & \rightarrow & DR(\mathbf{R}\Gamma_Z(\mathcal{M})).
\end{array}$$

L'isomorphisme de la première ligne dans $D(\mathbf{C}_{\tilde{X}})_c$ correspondant à la régularité de $\tilde{\mathcal{M}}$ le long de $\tilde{Z}$ nous donne l'isomorphisme dans $D(\mathbf{C}_X)_c$ de la deuxième ligne. D'où le théorème 4.2.1.

Bibliographie

[1] P. Deligne: Equations différentielles à points singuliers réguliers. *Lecture Notes in Mathematics. 163*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1970).

[2] A. Gorthendieck: On the De Rham cohomology of algebraic varieties. *Publ. Math. I.H.E.S. 29* (1966) 95–103.

[3] H. Hironaka: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I-II. *Ann. Math. 1* et *2* (1964).

[4] M. Kashiwara: On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University 10* (1975) 563–579.

[5] M. Kashiwara: B-functions and holonomic systems. *Invent. Math. 38* (1976) 33–53.

[6] N. Katz: An overview of Deligne's work in Hilbert's twenty-first problem. *Proceeding of symposia in Pure Mathematics A.M.S., volume 28* (1976) 537–557.

[7] B. Malgrange: Sur les point singuliers des équations différentielles. *Enseignement Math. 20* (1974) 147–176.

[8] B. Malgrange: Le polynôme de I.N. Bernstein d'une singularité isolée. *Lecture Notes in Mathematics. 459,* pp. 99–119, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1976).

[9] Z. Mebkhout: Local cohomology of analytic spaces. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University 12* (1977) 247–256 (suppl.).

[10] Z. Mebkhout: Cohomologie locale des espaces analytiques complexes. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VII, 126 pages (1979).

[11] J.L. Verdier: Classe d'homologie associée à un cycle. Séminaire Douady-Verdier. *Astérisque 36–37* (1976) 101–151.

(Oblatum 10-VI-1981)

V.E.R. de Mathématiques
Université de Paris VII
2 place Jussieu
75221 Paris
France