

# COMPOSITIO MATHEMATICA

J. BERTIN

## **Sur la topologie des surfaces affines réglées**

*Compositio Mathematica*, tome 47, n° 1 (1982), p. 71-83

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1982\\_\\_47\\_1\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1982__47_1_71_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LA TOPOLOGIE DES SURFACES AFFINES RÉGLÉES

J. Bertin

### Introduction

Le but de cet article est de déterminer le groupe fondamental des surfaces affines réglées. Rappelant que les surfaces non complètes sont classifiées par leur dimension de Kodaira logarithmique  $\bar{k}$ , voir [MIY], nous considérerons exclusivement dans ce travail le cas  $\bar{k} = -\infty$ . Dans [M-S], il est montré que les surfaces affines avec  $\bar{k} = -\infty$  sont réglées. Soit  $S$  une telle surface, il existe alors un pinceau de droites affines  $\rho: S \rightarrow C$ , où  $C$  est une courbe lisse et  $\rho$  un morphisme surjectif avec pour tout point général  $\lambda$  de  $C$ ,  $\rho^{-1}(\lambda) \simeq A^1$ . Si  $C$  est de genre  $g > 0$ , nous dirons que  $S$  est réglée de genre  $g$ ; si  $g = 0$ ,  $S$  est rationnelle. Notons que pour une surface réglée, trivialement  $\bar{k} = -\infty$ .

Comme résultat préliminaire, nous étudions les fibres multiples d'un pinceau de droites et montrons que localement on peut les éliminer par des revêtements cycliques étales (§1). Nous en déduisons le résultat suivant.

**THÉORÈME:** *Soient  $S$  une surface réglée et  $\rho: S \rightarrow C$  un pinceau de droites. Supposons que  $\rho$  possède  $p$  fibres singulières multiples, de multiplicités  $m_1, \dots, m_p$ , et que  $C$  soit une courbe complète de genre  $g$  privée de  $n$  points. Alors le groupe  $\pi_1(S)$  est un groupe Fuchsien de signature  $(m_1, \dots, m_p; n, g)$ .*

De plus pour tout groupe Fuchsien  $\Sigma$ , il existe une surface affine réglée  $S$ , avec  $\Sigma \simeq \pi_1(S)$ .

Gurjar dans  $[Gu_1]$ ,  $[Gu_2]$  a étudié la topologie des variétés affines  $S$

telles qu'il existe un morphisme propre  $C^n \rightarrow S$ . Si  $n = 2$ ,  $S$  est isomorphe à  $C^2$  [M-S].

Dans le §3, nous donnons quelques exemples et applications. Pour ce qui concerne les notations, nos surfaces sont non singulières et définies sur  $C$ .

### 1. Fibres multiples

Soit  $S$  une surface affine; un pinceau de droites affines sur  $S$  est la donnée d'un morphisme surjectif  $\rho : S \rightarrow C$ , où  $C$  est une courbe non singulière, et pour un point général  $\lambda \in C$ ,  $\rho^{-1}(\lambda) \simeq A^1$ . Une fibre  $\rho^{-1}(\lambda)$  non isomorphe à  $A^1$  est une fibre singulière. La structure des fibres singulières est décrite par le lemme suivant [M-S].

1.1. LEMME: Soit  $\rho^{-1}(\lambda) = \sum_i m_i C_i$  une fibre singulière, avec pour tout  $i$   $m_i \geq 1$  et  $C_i$  irréductible; alors

- 1 -  $C_i \simeq A^1$  pour tout  $i$
- 2 - si  $i \neq j$ ,  $C_i \cap C_j = \emptyset$ .

Nous dirons qu'une fibre singulière  $\sum_i m_i C_i$  est une fibre multiple si  $m := \text{pgcd}(m_i) > 1$ ,  $m$  est alors la multiplicité de la fibre.

Dans la proposition qui suit, nous montrons comment éliminer (localement) les fibres singulières multiples par des revêtements cycliques. Nous pouvons supposer quitte à rétrécir  $C$ , qu'un paramètre local  $t$  de  $C$  en  $\lambda$  est défini sur  $C$ , et  $\lambda$  pour seul zéro.

1.2. PROPOSITION: Il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \tilde{\psi} \downarrow & & \downarrow \psi \\ \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

où  $\pi$  est un revêtement cyclique de degré  $m$ ,  $\varphi$  un revêtement étale et  $\tilde{\psi}$  un pinceau de droites affines sur  $\tilde{S}$ . Soit  $\tilde{\lambda}$  tel que  $\pi(\tilde{\lambda}) = \lambda$ , alors l'indice de ramification de  $\pi$  en  $\tilde{\lambda}$  est  $m$  et la fibre  $\tilde{\psi}^{-1}(\tilde{\lambda})$  est de multiplicité un.

Si  $k = C$ , nous pouvons supposer que  $C$  est un disque complexe de centre 0, de même  $\tilde{C}$ , et  $\pi(z) = z^m$ .

**PREUVE:** Considérons le diviseur effectif  $D = \psi^{-1}(\lambda)/m$ . Nous avons  $\mathcal{O}(D)^m = \mathcal{O}(\psi^{-1}(\lambda)) \simeq \mathcal{O}_S$ , en vertu de l'hypothèse faite sur  $C$ . Par une construction bien connue,  $D$  détermine un revêtement étale cyclique de degré  $m$   $\varphi: \tilde{S} \rightarrow S$ . On note  $\tilde{C}$  la normalisation de  $C$  dans le corps  $k(\tilde{S})$ . Plus précisément, si  $D$  a pour équation locale  $h_i = 0$  sur l'ouvert  $U_i$  avec  $S = \cup_i U_i$ , la fonction  $b_i = h_i^{-m} \xi$  est régulière inversible sur  $U_i$ ,  $\xi$  étant une équation de  $\psi^{-1}(\lambda)$  sur  $S$ . Le revêtement  $\tilde{S}$  est donné au-dessus de  $U_i$  comme la surface de  $S_i \times \mathbb{A}^1$  d'équation  $Y^m - b_i = 0$ . Alors  $k(\tilde{S}) = k(S)(\xi^{1/m})$  et  $\tilde{S}$  n'est autre que la normalisation de  $S$  dans  $k(\tilde{S})$ ; comme  $\xi = \psi^*(t)$ , il est clair que  $k(\tilde{C}) = k(C)(t^{1/m})$  et que  $[k(\tilde{C}) : k(C)] = m$ .

Considérons un point général  $\gamma$  de  $\tilde{C}$ . Alors  $\tilde{\psi}^{-1}(\gamma)$  est intègre et si  $\varphi(\gamma) = \mu$ ,  $\tilde{\psi}^{-1}(\gamma) \subseteq \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\mu))$ . Comme  $\lambda$  est général,  $\psi^{-1}(\mu) \simeq \mathbb{A}^1$ . Le revêtement induit  $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(\mu)) \rightarrow \psi^{-1}(\mu)$  est étale, et par simple connexité de  $\mathbb{A}^1$ ,  $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(\mu))$  est somme disjointe de  $m$  copies de  $\mathbb{A}^1$ . Donc  $\tilde{\psi}^{-1}(\gamma) = \mathbb{A}^1$  et  $\tilde{\psi}$  est un pinceau de droites sur  $\tilde{S}$ . Examinons la fibre  $\tilde{\psi}^{-1}(0)$ . On a:

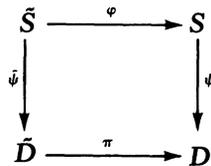
$$\tilde{\psi}^{-1}(0) = \frac{1}{m} \varphi^{-1}(\psi^{-1}(0)) = \sum \frac{m_i}{m} \varphi^{-1}(C_i)$$

Par l'argument ci-dessus,  $\varphi^{-1}(C_i) = \sum_j C_{ij}$  avec  $C_{ij} \simeq \mathbb{A}^1$  et  $C_{ij} \cup C_{il} = \phi$  si  $j \neq l$ ; d'où:

$$\tilde{\psi}^{-1}(0) = \sum_{ij} \frac{m_i}{m} C_{ij}$$

C'est une fibre singulière non multiple. c.q.f.d.

1.3. Avec les notations du début, si  $\psi^{-1}(\lambda)$  est singulière, prenons un petit disque  $D$  dans  $C$ , de centre  $\lambda$ , de telle sorte que les fibres  $\psi^{-1}(\mu)$  soient régulières pour  $\mu \in D/\{\lambda\}$ . Nous pouvons effectuer l'opération précédente; on obtient le diagramme ( $\lambda = 0$ ).



$\tilde{D}$  = disque de centre 0 et  $\pi(z) = z^m$ ; alors  $\varphi: \tilde{S} \rightarrow S$  est étale cyclique d'ordre  $m$ . i.e.  $S = \tilde{S}/Z/mZ$ .

1.4. Supposons que le morphisme  $\varphi: \tilde{S} \rightarrow S$  soit un revêtement étale galoisien de groupe de galois  $\Gamma$ ,  $|\Gamma| = n$ . Soit  $\psi: S \rightarrow C$  un pinceau de

droites. Normalisons  $C$  dans le corps  $k(\tilde{S})$ , on a un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \tilde{\psi} \downarrow & & \downarrow \psi \\ \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

$\tilde{C}$  étant une courbe normale complète et  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$  un revêtement galoisien de groupe  $\Gamma$ . Nous avons vu que  $\tilde{\psi}$  est un pinceau de droites.

1.5. LEMME: Si  $\tilde{C} \rightarrow C$  est ramifié en  $\lambda \in C$ ,  $\psi^{-1}(\lambda)$  est une fibre multiple, soit  $m$  sa multiplicité et  $e$  l'indice de ramification d'un point  $\delta \in \pi^{-1}(\lambda)$ , on a  $e|m$  et toute fibre  $\tilde{\psi}^{-1}(\delta)$  ( $\delta \in \psi^{-1}(\lambda)$ ) est de multiplicité  $m/e$ .

PREUVE: Supposons  $\psi^{-1}(\lambda) = \sum_{i=1}^t m_i C_i$ ,  $C_i \simeq A^1$ ; le revêtement  $\tilde{S} \rightarrow S$  étant étale,  $\varphi^{-1}(C_i)$  est somme disjointe de  $n$  copies de  $A^1$ , soit

$$\varphi^{-1}(C_i) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \quad i = 1 \dots t$$

d'où

$$\varphi^{-1}(\psi^{-1}(\lambda)) = \sum_{i,j} m_i C_{ij}.$$

Le groupe  $\Gamma$  permute transitivement les courbes  $\{C_{ij}\}_j$ , par suite permute transitivement les points  $\{\tilde{\psi}(C_{ij})\}$ . Ces points forment donc la fibre  $\pi^{-1}(\lambda) = \{\delta_1, \dots, \delta_p\}$  avec  $p = n/e$ . Donc pour tout indice  $\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq p$ , et tout indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , il existe un indice  $j$  tel que  $\tilde{\psi}(C_{ij}) = \delta_\alpha$ . Soit  $\Gamma_\alpha$  le stabilisateur de  $\delta_\alpha$ ,  $|\Gamma_\alpha| = e$ . Il est clair que  $\Gamma_\alpha$  agit transitivement sur les courbes  $C_{ij}$  ( $i$  fixé) qui ont pour image  $\delta_\alpha$  par  $\tilde{\psi}$ . On a:

$$\tilde{\psi}^{-1}(e\delta_\alpha) = \sum_{\tilde{\psi}(C_{ij})=\delta_\alpha} m_i C_{ij} = \sum_{i=1}^t m_i \left( \sum_{\delta \in \Gamma_\alpha} \sigma(C_{ij_\alpha}) \right),$$

( $C_{ij_\alpha}$  étant une quelconque composante au-dessus de  $\delta_\alpha$ ).

D'où :  $e|m_i$  pour tout  $i$ , donc  $e|\text{pgcd}(m_i) = m$  et

$$\tilde{\psi}^{-1}(\delta_\alpha) = \sum_i \frac{m_i}{e} \left( \sum_{\sigma \in \Gamma_\alpha} \sigma(C_{ij_\alpha}) \right), \quad \alpha = 1 \dots p = \frac{n}{e}$$

La conclusion est vérifiée.

## 2. Groupe fondamental

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème énoncé en introduction.

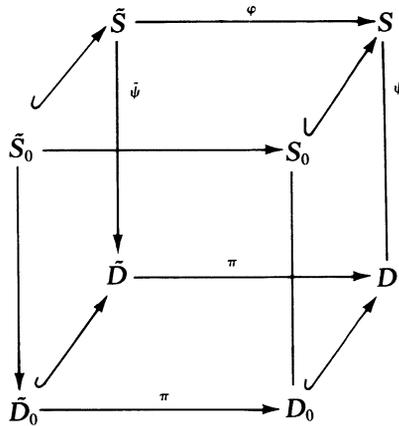
2.1. LEMME: *Supposons la fibre singulière  $\psi^{-1}(0)$  réduite ( $\psi^{-1}(0) = \Sigma_{i=1}^l C_i$ ), alors  $\pi_1(S) = \{1\}$ .*

PREUVE: Supposons  $m_i = 1$  et soit l'ouvert  $S_i = (S \setminus \psi^{-1}(0)) \cup C_i$ , on a  $S_i \simeq D \times A^1$  donc  $S_i$  est simplement connexe; comme les  $S_i$  recouvrent  $S$ ,  $\pi_1(S) = \{1\}$ .

2.2. LEMME: *Avec les mêmes notations que dans 2.1., supposons  $\psi^{-1}(0) = mC$ ,  $C \simeq \mathbb{A}^1$  et  $m > 1$ . Alors  $\pi_1(S) \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .*

[De manière précise, si  $\alpha$  est un petit lacet dans  $D$  qui tourne une fois autour de 0, et  $\gamma$  un relèvement dans  $S_0 = S \setminus \psi^{-1}(0)$ , la classe  $\langle \gamma \rangle$  de  $\gamma$  dans  $\pi_1(S)$  est un générateur].

Notons  $\tilde{D}$  (resp.  $\tilde{D}_0$ ) le disque privé de son centre. On a le diagramme:



Les flèches horizontales étant induites par  $\varphi$  et les flèches verticales par  $\psi$ . (resp.  $\tilde{\psi}$ ). Il est clair que  $\tilde{S}_0 \rightarrow \tilde{D}_0$  et  $S_0 \rightarrow D_0$  sont des équivalences d'homotopie, d'où  $\pi_1(\tilde{S}_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\tilde{D}_0)$  et  $\pi_1(S_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(D_0)$ . Considérons  $\alpha$  (resp.  $\tilde{\alpha}$ ) des petits lacets dans  $D$  (resp.  $\tilde{D}$ ) qui tournent une fois autour du centre, et  $\gamma$  (resp.  $\tilde{\gamma}$ ) des relèvements dans  $S_0$  (resp.  $\tilde{S}_0$ ) (on a fixé un point de base  $\tilde{p} \in \tilde{S}_0$  et ses images dans  $S_0, \tilde{D}_0$  et  $D_0$ ).

Alors  $\langle \gamma \rangle$  est une base du groupe abélien libre  $\pi_1(S_0)$  et de même pour  $\langle \tilde{\gamma} \rangle$  dans  $\pi_1(\tilde{S}_0)$ . D'autre part comme  $\varphi$  est le revêtement  $z \rightarrow z^m$ , il est clair que  $\varphi_* \langle \tilde{\gamma} \rangle = \langle \gamma \rangle^m$ . Soit le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\tilde{S}_0) & \xrightarrow{\tau} & \pi_1(\tilde{S}) \\
 \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\
 \pi_1(S_0) & \xrightarrow{\sigma} & \pi_1(S)
 \end{array}$$

Les flèches verticales sont injectives car  $\varphi$  est étale sur  $\tilde{S}$ , et les images d'indice  $m$ . D'autre part  $\pi_1(\tilde{S}) = \{1\}$  par 2.1. On a donc  $\langle \gamma \rangle^m = 1$  dans  $\pi_1(S)$ ; d'autre part un lacet de  $S$  se relève en un chemin de  $\tilde{S}$  qui joint deux points de  $\tilde{S}_0$ , mais  $\tilde{S}$  étant simplement connexe, ce chemin est homotope à un chemin de  $\tilde{S}_0$ . Ceci montre que  $\sigma$  est une surjection, comme  $\pi_1(S)$  est d'ordre  $m$ , on a bien  $\pi_1(S) = \langle \gamma \rangle$  avec  $\langle \gamma \rangle^m = 1$ .

Dans le lemme suivant nous conservons les notations précédentes.

2.3. LEMME: Supposons  $\psi^{-1}(0) = \sum_1^t m_i C_i$ ,  $\text{pgcd}(m_i) = m$ . Alors  $\pi_1(S)$  est cyclique d'ordre  $m$  et  $\langle \gamma \rangle$  est un générateur.

PREUVE: Soit  $S_i = S_0 \cup C_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ ,  $S_i \rightarrow D$  est une surface réglée sur le disque  $D$  de fibre singulière  $m_i C_i$ . Par 2.2.  $\pi_1(S_i)$  est cyclique de générateur  $\langle \gamma \rangle$  d'ordre  $m_i$ . Notons que  $S_i \cap S_j = S_0$  pour  $i \neq j$ . Les flèches  $\pi_1(S_0) \rightarrow \pi_1(S_i)$  étant surjectives le résultat est une application facile du théorème de Van Kampen :  $\pi_1(S)$  est engendré par  $\langle \gamma \rangle$  avec les relations  $\langle \gamma \rangle^{m_i} = 1, \dots, t$  donc  $\langle \gamma \rangle^m = 1$ .

Avant d'énoncer le résultat principal, rappelons la définition abstraite d'un groupe Fuchsien (de première espèce) [MAG].

2.4. DEFINITION: Un groupe Fuchsien de signature  $(p_1, \dots, p_n; g)$  où  $\infty \geq p_i \geq 2$  et  $g \geq 0$ , est un groupe défini par  $n + 2g$  générateurs:

$$C_1, \dots, C_n; A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$$

avec les relations:

$$C_i^{p_i} = 1, i = 1 \dots n, \text{ et } C_1 \dots C_n \prod_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = 1$$

Lorsque  $n = 0$  (resp.  $p_i = p_n = \infty$ ), ce groupe est le groupe fondamental d'une surface orientable compacte  $T_g$  de genre  $g$  (resp. de  $T_g \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $x_1, \dots, x_n$  étant des points de  $T_g$ ).

Lorsque  $g = 0$ , on retrouve les groupes triangulaires de Schwarz  $\Sigma(p, q, r)$  qui sont décrits avec beaucoup de détails par Milnor [MI]; et

plus généralement les groupes de Dyck  $\Sigma(p_1, \dots, p_n) = \langle e_1, \dots, e_n / e_1^{p_1}, \dots, e_n^{p_n}, e_1 \dots e_n \rangle$ .

2.5. THÉORÈME: Soient  $S$  une surface affine réglée et  $\psi : S \rightarrow C$  un pinceau de droites affines de fibres singulières multiples  $\psi^{-1}(\lambda_i) = \sum_j m_{ij} C_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , et de multiplicités  $m_1, \dots, m_r$ . Supposons que  $C$  soit une courbe complète de genre  $g$  privée de  $n$  points. Alors  $\pi_1(S)$  est un groupe Fuchsien de signature  $(m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_{r+n}; g)$  avec  $m_{r+1} = \dots = m_{r+n} = \infty$ .

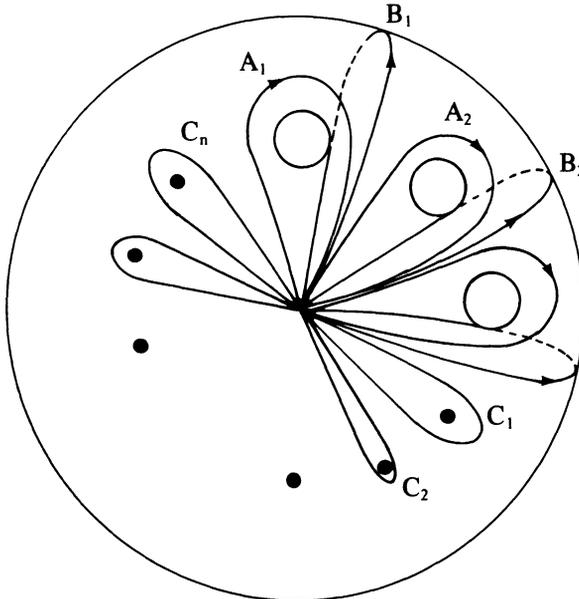
Avant de donner la démonstration du théorème, indiquons la forme que prend  $\pi_1(S)$  lorsque  $S$  est rationnelle, i.e.  $g = 0$ . Nous supposons aussi  $Alb(S) = (0)$ .

2.6. COROLLAIRE: (i) Si  $C = \mathbb{A}^1$ ,  $\pi_1(S)$  est un produit libre  $Z/m_1 Z * \dots * Z/m_r Z$  (ii) Si  $C = P^1$ ,  $\pi_1(S)$  est isomorphe au groupe de Dyck  $\Sigma(m_1, \dots, m_r)$ .

2.7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME: Rappelons la structure du groupe fondamental d'une courbe  $C = T_g \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  où  $T_g$  désigne une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . En utilisant la présentation par générateurs et relations, on a:

$$\pi_1(C) = \langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1 \dots C_n / \prod_{i=1}^g [A_i, B_i] C_1 \dots C_n \rangle$$

La signification des laces  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  étant suggérée par la figure usuelle suivante avec  $x_0 =$  point de base:



Pour démontrer le théorème, il est commode de considérer la totalité des fibres singulières  $\psi^{-1}(\lambda_1), \dots, \psi^{-1}(\lambda_r), \psi^{-1}(\lambda_i)$  de multiplicité  $m_i \geq 1$ , pour tout  $i$  et  $m_i \geq 2$  si  $\psi^{-1}(\lambda_i)$  est multiple. Nous allons procéder par récurrence sur  $r$ . Le cas  $r = 0$  est trivial car dans ce cas  $\psi : S \rightarrow C$  est une fibration localement triviale de fibre  $C$ , donc  $\psi_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(C)$  est un isomorphisme.

Supposons  $r \geq 1$ . Posons  $C^* = C \setminus \{\lambda_r\}$ , resp.  $C_0 = C \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  et  $S^* = \psi^{-1}(C^*)$ , resp.  $S_0 = \psi^{-1}(C_0)$ . Alors  $\pi_1(C_0)$  est engendré par des éléments  $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_r, \dots, C_{r+1}, \dots, C_{r+n}$  avec la relation

$$\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] C_1 \dots C_{r+n} = 1.$$

Dans cette description de  $\pi_1(C_0)$ ,  $C_{r+1}, \dots, C_{r+n}$  sont des classes de lacets qui tournent autour des points  $x_1, \dots, x_n$ . En utilisant la remarque du début, on voit que l'on peut relever des lacets  $\alpha_i \in A_i$  (resp.  $\beta_i \in B_i$  et  $\gamma_j \in C_j$ ) en des lacets  $\tilde{\alpha}_i$  (resp.  $\tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_j$ ) de  $S_0$ . L'hypothèse de récurrence donne, en désignant  $\tilde{A}_i$  (resp.  $\tilde{B}_i, \tilde{C}_j$ ) la classe de  $\tilde{\alpha}_i$  resp.  $(\tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_j)$

$$\pi_1(S^*) = \langle \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_g, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_g, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{r+n} \mid \prod_{i=1}^g [\tilde{A}_i, \tilde{B}_i] \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_{r+n}, \tilde{C}_1^{m_1}, \dots, \tilde{C}_{r-1}^{m_{r-1}} \rangle.$$

Considérons un petit disque ouvert  $D$  dans  $C$  de centre  $\lambda_r$  tel que pour  $\mu \in D$ ,  $\mu \neq \lambda_r$ , on ait  $\psi^{-1}(\mu) \simeq \mathbb{A}^1$ . Posons  $S_1 = \psi^{-1}(D)$  et  $S_2 = \psi^{-1}(D \setminus \{\lambda_r\})$ . Il est clair que  $S_1$  et  $S_2$  sont des ouverts connexes de  $S$  et que  $S_2 = S_1 \cap S^*$ . Nous pouvons supposer que les groupes fondamentaux sont calculés relativement au point de base  $y_0 \in S_2$  ( $x_0 = \psi(y_0)$ ), et que le lacet  $\gamma_r$  est contenu dans  $D$ . Il est alors clair que  $\pi_1(S_1)$  est le groupe cyclique de base  $\langle \gamma_r \rangle$  avec la relation  $\langle \gamma_r \rangle^{m_r} = 1$ . Le théorème de Van Kampen donne:

$$\pi_1(S_1) * \pi_1(S^*) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S)$$

$$\pi_1(S_2)$$

le résultat découle aussitôt de la description de  $\pi_1(S^*)$ . On ajoute simplement la relation  $\tilde{C}_r^{m_r} = 1$ . Ce qui démontre le théorème, compte tenu de la définition d'un groupe Fuchsien.

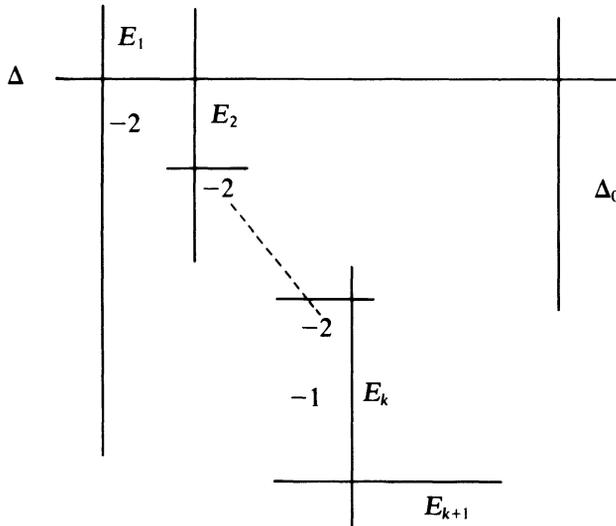
2.8. NOTE: Il est clair que si  $S$  admet un pinceau de droites  $\rho : S \rightarrow$

$C, S$  est simplement connexe si et seulement si  $g = 0$  et

- (i)  $C = \mathbb{A}^1$  et  $S$  n'a pas de fibres multiples
- ou
- (ii)  $C = \mathbb{P}^1$  et  $S$  possède une seule fibre multiple, ou deux fibres multiples de multiplicités  $m_1, m_2$  avec  $(m_1, m_2) = 1$ .

2.9. Montrons que pour tout groupe Fuchsien  $\Sigma$ , il existe une surface affine réglée  $S$  avec  $\pi_1(S) = \Sigma$ .

Partons d'une surface projective réglée  $p : P(\mathcal{O}_E \oplus L) \rightarrow E$ , avec  $L \in \text{Pic}(E)$ . La projection  $\mathcal{O}_E \oplus L \rightarrow L$  détermine une section  $\Delta$  avec  $\Delta^2 = \text{deg}(L)$ . La projection de  $\mathcal{O}_E \oplus L$  sur  $\mathcal{O}_E$ , détermine une section  $\Delta_0$  avec  $\Delta_0 \cdot \Delta = 0$ . Il est facile de voir que  $\Delta_0$  est caractérisée par cette propriété. Considérons une fibre  $F$ , et soit  $Q$  un point de  $F$  n'appartenant pas à  $\Delta \cup \Delta_0$ . Eclatons  $Q$  et soit  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) la transformée propre de  $F$  (resp. courbe exceptionnelle). On a  $E_1^2 = E_2^2 = -1$ . Eclatons le point  $Q_1 = E_1 \cap E_2$  et ainsi de suite ... Après  $k(k \geq 1)$  éclatements nous obtenons un morphisme birationnel  $\mu : W \rightarrow V$ , la fibre  $\mu^{-1}(F)$  de  $W$  étant décrite par :



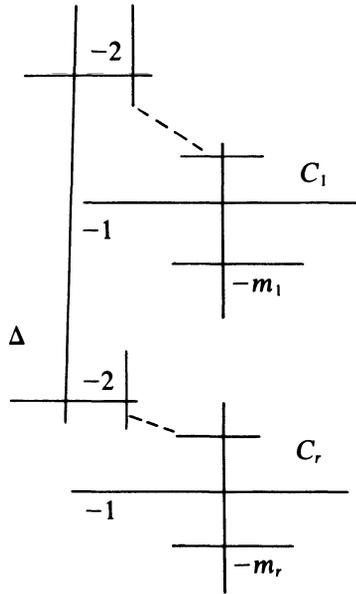
Les assertions qui suivent sont immédiates

- (i)  $E_{k+1}^2 = -k$
- (ii) La multiplicité de  $E_k$  dans sa fibre est  $k$

Nous pouvons effectuer des opérations similaires sur des fibres  $F_1, \dots, F_r$  avec pour  $k$  les valeurs  $m_1, \dots, m_r$ . Prenons un point  $A_j$  sur

la composante exceptionnelle  $E_{m_i}^j$  de  $\mu^{-1}(F_i)$  qui n'appartient pas aux autres composantes, et éclatons successivement les points  $A_1, \dots, A_r$ . On note encore  $W$  la surface résultante et  $\mu : W \rightarrow V$  le morphisme birationnel. Soient enfin  $C_1, \dots, C_r$  les composantes exceptionnelles des fibres  $\mu^{-1}(F_1), \dots, \mu^{-1}(F_r)$ . Nous posons:

$$S = V \setminus D \text{ avec } D = \Delta + \sum_{i=1}^r (\mu^{-1}(F_i) - C_i)$$



Pour vérifier que  $S$  est affine, on utilise le critère de Goodman. Supposons que  $C \subset S$  soit une courbe complète, et considérons la courbe  $\mu(C) \subset V$ ; on a  $\mu(C) \cap \Delta = \emptyset$ . Si  $\mu(C) \sim a\Delta + p^*(\delta)$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $\delta \in \text{Div}(E)$ , on a si  $F$  est une fibre de  $p$ :

$$\mu(C) \cdot F = a > 0 \text{ car } \mu(F) \not\subset \text{ une fibre}$$

et comme  $\mu(C) \neq \Delta_0$ ,  $\mu(C) \cdot \Delta_0 = \text{deg}(\delta) \geq 0$  d'où  $\mu(C) \cdot \Delta = a\Delta^2 + \text{deg} \delta \geq a\Delta^2 \geq 0$  si on choisit un faisceau inversible  $L$  de degré positif.

Pour terminer, il faut vérifier l'existence d'une courbe effective  $Y$  de support  $D$  telle que  $Y \cdot D_i > 0$  pour toute composante irréductible  $D_i$  de  $D$ . Une telle courbe  $Y$  existera si  $\Delta^2 = \text{deg} L$  est positif.

La fibration induite sur  $S$  par  $q = p \circ \mu$  a des fibres multiples de multiplicités  $m_1, \dots, m_r$ . Le groupe  $\pi_1(S)$  a pour signature

$(m_1, \dots, m_r; g)$ . Pour avoir la signature la plus générale, il suffira de sortir à  $S$   $n$  fibres non singulières.

### 3. Applications

3.1. REMARQUE: Le groupe  $\pi_1(S)$  est fini si et seulement si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée:

(1) Il existe un pinceau  $S \rightarrow A^1$  avec au plus une fibre multiple, alors  $\pi_1(S)$  est cyclique,

(2) Il existe un pinceau  $S \rightarrow P^1$  avec au plus deux fibres multiples, alors  $\pi_1(S)$  est cyclique d'ordre  $\text{pgcd}(m_1, m_2)$  si  $m_1$  et  $m_2$  sont les multiplicités.

(3) Il existe un pinceau  $S \rightarrow P^1$  avec trois fibres multiples de multiplicités  $m_1, m_2, m_3$ , et  $1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 > 1$ .

Dans cette situation, le revêtement universel est une surface affine réglée rationnelle. Un exemple évident du cas (1) est  $S = P^2 \setminus C$  où  $C$  est une conique lisse, le revêtement universel étant  $P^1 \times P^1/\Delta$ .

Supposons  $S$  simplement connexe, alors  $S$  est rationnelle et le groupe  $H_2(S, Z)$  est sans torsion de rang  $\chi - 1$  où  $\chi$  est le nombre d'Euler de  $S$ . En utilisant les théorèmes de Hurewicz et Whitehead, on conclut de suite que  $S$  a le type d'homotopie d'un bouquet de  $\chi$  exemplaires de la 2-sphère  $S^2$ . Un exemple typique est la surface  $x^n z = 1 + y^m$ , réglée par  $x = \text{const}$ . Dans cet exemple  $\chi = m$ .

Comme application du théorème 2.4, démontrons la proposition suivante [MIY, p. 187].

3.2 PROPOSITION: Soit  $S$  une surface affine non singulière telle qu'il existe un morphisme dominant  $f: A^r \rightarrow S$ . Alors  $S$  est logarithmiquement rationnelle ( $\bar{k}(S) = -\infty$ ) et

(i) Si  $S$  admet un pinceau  $S \rightarrow A^1$ , il y a au plus une fibre multiple.

(ii) Si  $S$  admet un pinceau  $S \rightarrow P^1$ , il y a au plus trois fibres multiples. Dans le cas où il y a trois fibres multiples, les multiplicités  $\{m_1, m_2, m_3\}$  coïncident à une permutation près à l'un des triples  $\{2, 2, n\}$  ( $n \geq 2$ ),  $\{2, 3, 3\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ .

PREUVE: En utilisant la description 3.1 des surfaces avec  $\pi_1$  fini, il suffit de montrer que sous l'hypothèse du théorème, le groupe  $\pi_1(S)$  est fini. Le fait que  $\bar{k}(S) = -\infty$  n'est pas difficile, nous laissons les détails au lecteur, [MIY].

Si on restreint  $f$  à un sous-espace linéaire de dimension 2 géri-

que, on obtient un morphisme dominant  $\mathbb{A}^2 \rightarrow S$ . La conclusion résulte alors du résultat plus général suivant, voir par exemple [Gu<sub>1</sub>]:

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme génériquement fini, entre variétés non singulières ;  $\pi_1(X) = 1$  implique  $\pi_1(Y)$  fini.

3.3. Comme autre conséquence de 2.5, nous pouvons donner une démonstration du résultat classique suivant, sans interpréter le groupe Fuchsien  $G$  comme groupe discontinu d'automorphismes du disque unité.

**THÉORÈME:** Soit  $G$  un groupe Fuchsien de signature  $(m_1, \dots, m_r; g)$ , et soit  $H$  un sous-groupe d'indice fini de  $G$ . Alors  $H$  est un groupe Fuchsien et si on pose:

$$\mu_H = 2g - 2 + \sum_1^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

on a:

$$\mu_H = (G : H)\mu_G.$$

**PREUVE:** Soit une surface affine réglée  $S$  avec  $\pi_1(S) = G$ . Le sous-groupe d'indice fini  $H$  détermine un revêtement étale  $\varphi : \tilde{S} \rightarrow S$  de  $S$  avec  $\pi_1(\tilde{S}) \approx H$ . Alors  $\bar{k}(\tilde{S}) = \bar{k}(S) = -\infty$  par suite  $\tilde{S}$  est réglée d'après le théorème de Miyanishi-Sugie (on peut aussi faire une vérification directe comme dans les exemples précédents). On conclut de suite que  $H = \pi_1(\tilde{S})$  est un groupe Fuchsien.

Pour vérifier l'égalité  $\mu_H = (G : H)\mu_G$ , on peut supposer le revêtement  $\tilde{S} \rightarrow S$  galoisien. Si  $\psi : S \rightarrow E$  est un pinceau de droites affines sur  $S$ , en normalisant  $E$  dans  $k(\tilde{S})$ , on obtient un pinceau de droites sur  $S$  et un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \psi \\ \tilde{E} & \xrightarrow{\pi} & E \end{array}$$

Notons  $e_i$  l'indice de ramification de  $\pi$  en un point quelconque au-dessus de  $\lambda_i \in E$ . Si  $n = (G : H)$ , la surface  $\tilde{S}$  a  $n/e_i$  fibres chacune de multiplicité  $m_i/e_i$  et on obtient par la formule de Riemann-Hurwitz:

$$2\tilde{g} - 2 = n(2g - 2) + \sum_{i=1}^r n \left(1 - \frac{1}{e_i}\right), (\tilde{g} = g(\tilde{E}))$$

d'où:

$$\begin{aligned}
 \mu(H) &= 2\tilde{g} - 2 + \sum_{i=1}^r \frac{n}{e_i} \left(1 - \frac{e_i}{m_i}\right) \\
 &= n(2g - 2) + n \left( \sum_{i=1}^r 1 - \frac{1}{e_i} \right) + \sum_{i=1}^r \frac{n}{e_i} \left(1 - \frac{e_i}{m_i}\right) \\
 &= n \left[ (2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right] \\
 &= n\mu(G).
 \end{aligned}$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Gu<sub>1</sub>] R.V. GURJAR: Affine varieties dominated by  $C^2$ . *Comment. Math. Helv.* 55 (1980) 378–389.
- [Gu<sub>2</sub>] R.V. GURJAR: Topology of affine varieties dominated by an affine space. *Inv. Math.* 59 (1980) 221–225.
- [MA] W. MAGNUS: *Non euclidian tessellations and their groups*. Academic Press, 1974.
- [MI] J. MILNOR: *On the 3-dimensional Brieskorn Manifolds  $M(p,q,r)$* , *Topology of 3-dimensional manifolds*, Princeton, 1975.
- [M-S] M. MIYANISHI and T. SUGIE: Affine surfaces containing cylinderlike open sets. *J. Math. Kyoto. Univ.* 20 (1980) 11–42.
- [MIY] M. MIYANISHI: Non complete algebraic surfaces. *Lect. Notes in Math*, n° 875, Springer-Verlag, 1981.

(Oblatum 24-VII-1981 & 15-I-1982)

UER Mathématiques  
 Université Paul Sabatier  
 118, route de Narbonne  
 31062 Toulouse Cedex-France