COMPOSITIO MATHEMATICA

JACQUES GASQUI

Sur la résolubilité locale des équations d'Einstein

Compositio Mathematica, tome 47, nº 1 (1982), p. 43-69

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1982__47_1_43_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 47, Fasc. 1, 1982, pag. 43–69

SUR LA RESOLUBILITE LOCALE DES EQUATIONS D'EINSTEIN

Jacques Gasqui

Soit X une variété différentiable de dimension finie. Appelons T^* le fibré cotangent de X et K le sous-fibré de $\otimes^4 T^*$ des éléments possédant les symétries d'un tenseur de courbure de Riemann (cf. §2). Si g est une métrique riemannienne sur X, on note $\mathcal{R}(g)$ sa courbure de Riemann, section de K sur X. La métrique g nous donne un opérateur de trace

$$\mathcal{T}_g^4\colon K \to S^2T^*,$$

où S^2T^* désigne le carré symétrique de T^*. La 2-forme symétrique $-\tau_g^4\mathcal{R}(g)$ est par définition la courbure de Ricci $\mathrm{Ric}(g)$ de g. On dit que g est une métrique d'Einstein s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Ric}(g) = \lambda g.$$

Le principal résultat que nous démontrons dans cet article est le théorème suivant, concernant l'existence locale de certaines métriques d'Einstein.

THÉORÈME: *Supposons que* $\dim X \geq 3$. *Soient* $x \in X$, g_0 *un produit scalaire sur l'espace tangent en* x *à* X *et* R_0 *un élément de la fibre en* x *de* K *tels que*

$$-\mathcal{T}_{g_0}^4 R_0 = \lambda g_0, \tag{1}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors il existe un germe en* x *de métrique riemannienne analytique réelle* g *tel que*

$$g(x) = g_0, \quad \mathcal{R}(g)(x) = R_0 \ \textit{et} \ \mathrm{Ric}(g) = \lambda g.$$

Du point de vue local, ce théorème est le meilleur possible, car il montre qu'il n'y a pas d'obstruction à étendre au niveau des germes

0010–437X/82070043–27$00.20/0

des données algébriques ponctuelles satisfaisant la condition d'Einstein. En particulier, en dimension ≥ 4, on obtient facilement des exemples de métriques à courbure de Ricci nulles et non plates.

L'opérateur courbure de Ricci est non-linéaire et nous commençons par étudier, aux paragraphes 2 et 3, le linéarisé Ric'_g de cet opérateur le long d'une métrique donnée g. Nous montrons qu'il est toujours involutif (proposition 3.1). En dimension ≥ 3, nous prouvons que l'opérateur Ric'_g est formellement intégrable si et seulement si la métrique g est à courbure de Ricci nulle. Dans cette situation, nous en déduisons une résolution explicite du faisceau des déformations infinitésimales analytiques réelles de g, préservant la platitude de la courbure de Ricci. Nous obtenons en fait (théorème 3.2) une résolution du faisceau des déformations infinitésimales d'Einstein sur une variété d'Einstein.

Par ailleurs, les calculs faits dans le cas linéaire au paragraphe 3, nous donnent des informations sur l'opérateur courbure de Ricci. Nous montrons essentiellement qu'il est formellement intégrable et involutif. Ce résultat avait déja été obtenu par Elie Cartan en dimension 4, dans le cadre de sa théorie des systèmes de Pfaff en involution (cf. [2]). Le théorème énoncé au début de cette introduction découle alors aisément de l'intégrabilité de l'opérateur Ric. Remarquons encore que cette intégrabilité formelle veut dire qu'on peut résoudre localement l'équation $\mathrm{Ric}(g) = 0$, mais ne signifie nullement qu'on peut résoudre $\mathrm{Ric}(g) = R$, où R est une 2-forme symétrique donnée sur X.

Nous utilisons, dans ce papier, la théorie formelle des équations différentielles surdeterminées linéaires ou non-linéaires de H. Goldschmidt (cf. [6] et [7]).

Tout au long de ma carrière de mathématicien, j'ai bénéficié de l'aide constante et des encouragements chaleureux de Jacques Vey. Je dédie, avec émotion, cet article à sa mémoire.

Je tiens aussi à remercier vivement J.P. Bourguignon et le Referee qui m'ont permis d'améliorer notablement la version initiale de ce papier.

1. Rappels sur la théorie formelle des équations différentielles surdéterminées

Tous les objets considérés dans cet article seront supposés de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit X une variété différentiable de dimension finie n, dont on note T le fibré tangent et T^* le fibré cotangent. On désigne par $\otimes^k T^*$, $S^\ell T^*$ et $\Lambda^m T^*$ la puissance tensorielle k-ième de T^*, la puissance symétrique ℓ-ième de T^* et la puissance extérieure m-ième de T^*, respectivement. On identifiera dans la suite $S^k T^*$ à un sous-fibré de $\otimes^k T^*$ grâce à l'application injective

$$S^k T^* \to \otimes^k T^*$$

qui, pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T^*$, envoie le produit symétrique $\alpha_1 \ldots . \alpha_k$ sur

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(k)}$$

où $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe des permutations sur $\{1, \ldots, k\}$.

Soit E un fibré vectoriel sur X. On note $\mathscr{E}$ (resp. $J_k(E)$) le faisceau des germes (resp. le fibré vectoriel des k-jets) de sections de E sur X et $\pi_k : J_{k+l}(E) \to J_k(E)$ la projection naturelle. On identifiera toujours $J_0(E)$ avec E on pose $J_k(E) = 0$, pour $k < 0$. On a, pour $\ell \geq 0$, la suite exacte

$$0 \to S^\ell T^* \otimes E \xrightarrow{\epsilon} J_\ell(E) \xrightarrow{\pi_{\ell-1}} J_{\ell-1}(E) \to 0,$$

où ϵ est le morphisme défini comme suit: si $x \in X$, $s \in E_x$ et si $f_1, \ldots, f_l$ sont des germes en x de fonctions sur X, à valeurs réelles et nulles en x, alors

$$\epsilon((df_1 \ldots .. df_\ell)(x) \otimes s(x)) = j_\ell \left(\prod_{j=1}^{\ell} f_j s \right)(x).$$

Si F est un autre fibré vectoriel sur X et si $\varphi : J_k(E) \to F$ est un morphisme de fibrés vectoriels sur X, le ℓ-ième prolongement de φ est le morphisme $p_\ell(\varphi) : J_{k+\ell}(E) \to J_\ell(F)$ de fibrés vectoriels sur X défini par

$$p_\ell(\varphi)(j_{k+\ell}(s)(x)) = j_\ell(\varphi(j_k(s)))(x)$$

pour tous $x \in X$ et $s \in \mathbf{E}_x$. Le symbole, ou symbole principal, $\sigma(\varphi)$ de φ est la composition $\varphi \circ \epsilon : S^k T^* \otimes E \to F$. Si

$$\Delta_{\ell,k} : S^{k+\ell} T^* \to S^\ell T^* \otimes S^k T^*$$

est l'inclusion naturelle (cf. [7]), le ℓ-ième prolongement du symbole de φ est le morphisme

$$\sigma_\ell(\varphi): S^{k+\ell}T^* \otimes E \to S^\ell T^* \otimes F$$

de fibrés vectoriels sur X, égal à la composition

$$S^{k+\ell}T^* \otimes E \xrightarrow{\Delta_{\ell,k}\otimes \mathrm{id}} S^\ell T^* \otimes S^k T^* \otimes E \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\sigma(\varphi)} S^\ell T^* \otimes F;$$

on pose $\sigma_0(\varphi) = \sigma(\varphi)$. Si $D: \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est l'opérateur différentiel linéaire d'ordre k tel que

$$(Ds)(x) = \varphi(j_k(s)(x))$$

pour tous $x \in X$ et $s \in \mathbf{E}_x$, on posera

$$\sigma(D) = \sigma(\varphi) \quad \text{et} \quad \sigma_\ell(D) = \sigma_\ell(\varphi), \quad \text{pour } \ell \geq 0.$$

Rappelons q'une équation différentielle d'ordre k dans E est un sous-fibré de $J_k(E)$. Si φ est de rang constant, alors $R_k = \operatorname{Ker}\varphi$ est une équation différentielle d'ordre k dont le ℓ-ième prolongement est $R_{k+\ell} = \operatorname{Ker} p_\ell(\varphi)$. Le symbole de R_k est $g_k = \operatorname{Ker}\sigma(\varphi)$ et le ℓ-ième prolongement du symbole de R_k est $g_{k+\ell} = \operatorname{Ker}\sigma_\ell(\varphi)$; on convient que $g_{k-\ell} = S^{k-\ell}T^* \otimes E$, si $\ell > 0$. La projection naturelle $\pi_{k+\ell}: J_{k+\ell+1}(E) \to J_{k+\ell}(E)$ envoie $R_{k+\ell+1}$ dans $R_{k+\ell}$ et on dit que R_k est *formellement intégrable* si, pour tout $l \geq 0$, $R_{k+\ell}$ est un fibré vectoriel et si $\pi_{k+\ell}: R_{k+\ell+1} \to R_{k+\ell}$ est surjectif (cf. [6]).

On pose pour $m \geq 0$

$$\delta = \Delta_{1,m}: S^{m+1}T^* \to T^* \otimes S^m T^*$$

et on étend δ en un morphisme de fibrés vectoriels

$$\delta: \Lambda^j T^* \otimes S^{m+1}T^* \to \Lambda^{j+1}T^* \otimes S^m T^*$$

envoyant $\omega \otimes u$ sur $(-1)^j \omega \wedge \delta u$, pour tous $\omega \in \Lambda^j T^*$ et $u \in S^{m+1}T^*$. Rappelons que, pour $m \geq 1$, on a la suite exacte

$$0 \to S^m T^* \xrightarrow{\delta} T^* \otimes S^{m-1}T^* \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes S^{m-2}T^* \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^* \otimes S^{m-n}T^* \to 0,$$

si on convient que $S^\ell T^* = 0$, pour $\ell < 0$. Le morphisme δ induit un morphisme

$$\delta : \Lambda^j T^* \otimes g_{k+\ell+1} \to \Lambda^{j+1} T^* \otimes g_{k+\ell}$$

et la cohomologie de Spencer de g_k est la cohomologie des suites

$$(1.1) \quad 0 \to g_m \xrightarrow{\delta} T^* \otimes g_{m-1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes g_{m-2} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda^{m-k} T^* \otimes g_k$$
$$\to \Lambda^{m-k+1} T^* \otimes S^{k-1} T^* \otimes E,$$

où $m \geq k$. On note $H^{m-j,j}(g_k)$ la cohomologie de (1.1) en $\Lambda^j T^* \otimes g_{m-j}$. On dit que g_k est r-acyclique si $H^{m,j}(g_k) = 0$ pour $m \geq k$ et $0 \leq j \leq r$, et que g_k est involutif s'il est n-acyclique (cf. [6]).

Soient $x \in X$ et $\{t_1, \ldots, t_n\}$ une base de T_x. Si $1 \leq j \leq n-1$, on note $S^k T^* \{t_1, \ldots t_j\}$ l'annulateur dans $S^k T^*_x$ de l'espace engendré par les vecteurs $t_1, \ldots, t_j$; c'est aussi le sous-espace de $S^k T^*$ engendré par les produits symétriques $t^*_{i_1} \cdot \ldots \cdot t^*_{i_k}$, avec $j+1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, où $\{t^*_1, \ldots, t^*_n\}$ est la base de T^*_x, duale de la base $\{t_1, \ldots, t_n\}$; on pose alors

$$g_{k\{t_1,\ldots,t_j\}} = g_k \cap S^k T^*_{\{t_1,\ldots,t_j\}} \otimes E_x.$$

On dit que $\{t_1, \ldots, t_n\}$ est une base quasi-régulière pour g_k en x si

$$\dim g_{k+1,x} = \dim g_{k,x} + \sum_{j=1}^{n-1} \dim g_{k\{t_1,\ldots,t_j\}}.$$

J.P. Serre a montré que g_k est involutif en x si et seulement s'il existe une base de T_x quasi-régulière pour g_k en x (cf. [9]).

Nous utiliserons dans la suite le critère d'intégrabilité formelle suivant, donné dans [6]:

THÉORÈME 1.1: *Soit $R_k \subset J_k(E)$ une équation différentielle d'ordre k dans E. Si R_{k+1} est un fibré vectoriel, si $\pi_k : R_{k+1} \to R_k$ est surjectif et si le symbole de R_k est 2-acyclique, alors R_k est formellement intégrable.*

2. L'opérateur courbure de Ricci

Si h est une section de $S^2 T^*$ et si $\xi \in T$, on *note* $i(\xi)h$ l'élément de T^* défini par

$$\langle \eta, i(\xi)h \rangle = h(\xi, \eta)$$

pour $\eta \in T$; on *note* alors $h^\flat : T \to T^*$ l'application qui envoie ξ sur $i(\xi)h$. Si h est non-dégénérée, alors $h^\flat$ est un isomorphisme dont l'inverse se note $h^\#$. Dans ces conditions, on peut définir un morphisme de trace

$$\mathcal{T}_h^2 : \otimes^2 T^* \to \mathbf{R}$$

égal à la composition

$$\otimes^2 T^* \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes h^\#} T^* \otimes T \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathbf{R},$$

où $\mathcal{T}$ est l'opérateur de trace usuel. *Notons* encore

$$\mathcal{T}_h^3 : \otimes^3 T^* \to T^*$$

et

$$\mathcal{T}_h^4 : \otimes^4 T^* \to \otimes^2 T^*$$

les morphismes de fibrés vectoriels définis respectivement par

$$\mathcal{T}_h^3 = \mathcal{T}_h^2 \otimes \mathrm{id}$$

et par

$$\mathcal{T}_h^4(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3 \otimes \alpha_4) = \mathcal{T}_h^2(\alpha_1 \otimes \alpha_3)\alpha_2 \otimes \alpha_4,$$

pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in T^*$.

Si h est une métrique riemannienne sur X, on note ∇^h la connexion de Levi-Civita de h et $\tilde{\mathcal{R}}(h)$ la courbure de h, section de $\Lambda^2 T^* \otimes T^* \otimes T$ définie par

$$\tilde{\mathcal{R}}(h)(\xi, \eta)\zeta = (\nabla_\xi^h \nabla_\eta^h - \nabla_\eta^h \nabla_\xi^h - \nabla_{[\xi, \eta]}^h)\zeta,$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in \mathbf{T}$. La courbure de Riemann–Christofel de h est la section $\mathcal{R}(h)$ de $\otimes^4 T^*$ déterminée par

$$\mathcal{R}(h)(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = h(\lambda, \tilde{\mathcal{R}}(\xi, \eta)\zeta)$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T$. Si K est le sous-fibré formé des éléments ω

de $\otimes^4 T^*$ vérifiant

$$\omega(\xi, \eta, \zeta, \lambda) + \omega(\eta, \xi, \zeta, \lambda) = 0,$$
$$\omega(\xi, \eta, \zeta, \lambda) + \omega(\xi, \eta, \lambda, \zeta) = 0,$$

et

$$\omega(\xi, \eta, \zeta, \lambda) + \omega(\eta, \zeta, \xi, \lambda) + \omega(\zeta, \xi, \eta, \lambda) = 0$$

pour tous ξ, η, ζ, $\lambda \in T$, il est bien connu que $\mathcal{R}(h)$ est une section de K sur X.

La courbure de Ricci d'une métrique riemannienne h sur X est la 2-forme $\mathrm{Ric}(h)$ définie par

$$\mathrm{Ric}(h)(\xi, \eta) = \mathrm{Trace}(\zeta \mapsto \tilde{\mathcal{R}}(h)(\zeta, \xi)\eta)$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T$; puisque l'image par $h^\#$ de la forme linéaire sur T

$$\lambda \mapsto \mathcal{R}(h)(\xi, \eta, \zeta, \lambda)$$

est $\tilde{\mathcal{R}}(h)(\xi, \eta)\zeta$, on obtient

$$\mathrm{Ric}(h) = -\mathcal{T}_h^4 \circ \mathcal{R}(h). \tag{2.1}$$

Si $\omega \in K$, on a (cf. [10, p. 198])

$$\omega(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \omega(\zeta, \lambda, \xi, \eta) \tag{2.2}$$

pour tous ξ, η, ζ, $\lambda \in T$. On déduit immédiatement de (2.2) que

$$\mathcal{T}_h^4(K) \subset S^2T^*.$$

Ainsi $\mathrm{Ric}(h)$ est une section de S^2T^* sur X. Si on note encore

$$\nabla^h : S^2\mathbf{T}^* \to \mathbf{T}^* \otimes S^2\mathbf{T}^*$$

la connexion dans S^2T^* induite par la connexion de Levi-Civita ∇^h de h dans T, on définit un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1

$$\mathrm{Div}_h : S^2\mathbf{T}^* \to \mathbf{T}^*,$$

en posant

$$\mathrm{Div}_h(u) = \mathcal{T}_h^3 \circ \nabla^h u$$

pour tout $u \in S^2\mathbf{T}^*$. L'operateur Div_h s'appelle *divergence des 2-formes symétriques.* On peut alors construire l'opérateur de Bianchi

$$B_h : S^2\mathbf{T}^* \to \mathbf{T}^*$$

associé à h, qui est l'opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 défini par

$$B_h(u) = \mathrm{Div}_h(u) - \tfrac{1}{2} d\mathcal{T}_h^2 u,$$

pour tout $u \in S^2\mathbf{T}^*$.

DEFINITION 2.1: *Une section u de S^2T^* vérifie l'identité de Bianchi pour une métrique riemannienne h sur X si $B_h(u) = 0$.*

Le lemme suivant est bien connu (par exemple, cf. [11]).

LEMME 2.1: *Soit h une métrique riemannienne sur X. Alors* $\mathrm{Ric}(h)$ *vérifie l'identité de Bianchi pour h.*

Soit h une métrique riemannienne sur X. Si ω (resp. u) est une section de K (resp. S^2T^*) sur X, nous poserons

$$\theta_\omega(h) = -\mathcal{T}_h^4 \omega$$

et

$$\tilde{B}_u(h) = B_h u.$$

Nous fixons, dans ce paragraphe et le suivant, une métrique riemannienne g sur X et nous supposerons que $\dim X \geq 2$. Si ω est une section de K sur X et u une section de S^2T^* sur X, notons

$$\mathcal{R}'_g : S^2\mathbf{T}^* \to \mathbf{K}, \qquad \mathrm{Ric}'_g : S^2\mathbf{T}^* \to S^2\mathbf{T}^*,$$

$$(\theta_\omega)'_g : S^2\mathbf{T}^* \to S^2\mathbf{T}^*, \qquad (\tilde{B}_u)'_g : S^2\mathbf{T}^* \to \mathbf{T}^*$$

les linéarisés le long de g des opérateurs non-linéaires $\mathcal{R}$, Ric, θ_ω et $\tilde{B}_u$ respectivement; $\mathcal{R}'_g$ et Ric'_g sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre 2 tandis que $(\tilde{B}_u)'_g$ est d'ordre 1 et que $(\theta_\omega)'_g$ est d'ordre 0. Nous poserons dans la suite

$$(\theta_{\mathcal{R}(g)})'_g = \Theta_g$$

et

$$(\tilde{B}_{\mathrm{Ric}(g)})'_g = \mathcal{B}_g.$$

Soient $x \in X$ et $h \in S^2\mathbf{T}^*_x$. Si $t \in \mathbb{R}$ est assez petit, $g + th$ définit un germe de métrique riemannienne en x, et on a

$$\mathcal{R}'_g(h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathcal{R}(g + th)\,\big|_{t=0}, \qquad \mathrm{Ric}'_g(h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Ric}(g + th)\,\big|_{t=0},$$

$$\Theta_g(h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\mathcal{T}^4_{g+th}\mathcal{R}(g))\,\big|_{t=0}, \qquad \mathcal{B}_g(h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(B_{g+th}\,\mathrm{Ric}(g))\big|_{t=0}.$$

D'après (2.1), on a, pour $h \in S^2T^*$

$$\mathrm{Ric}'_g(h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(-\mathcal{T}^4_{g+th}\mathcal{R}(g + th))\,\big|_{t=0} = -\,\mathcal{T}^4_g\mathcal{R}'_g(h) + \Theta_g(h) \tag{2.3}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(B_{g+th}\,\mathrm{Ric}(g + th))\,\big|_{t=0} = B_g\,\mathrm{Ric}'_g(h) + \mathcal{B}_g(h). \tag{2.4}$$

D'après le lemme 2.1, le membre de gauche de (2.4) est identiquement nul, donc on obtient

$$B_g \circ \mathrm{Ric}'_g = -\,\mathcal{B}_g. \tag{2.5}$$

Notons R la courbure de Ricci de g, considérée comme section de $\mathrm{Hom}(T^*, T^*) = T \otimes T^*$. On a donc

$$R = (g^\# \otimes \mathrm{id})\,\mathrm{Ric}(g),$$

où $\mathrm{Ric}(g)$ est vue comme section de $T^* \otimes T^*$ et où

$$g^\# \otimes \mathrm{id} : T^* \otimes T^* \to T \otimes T^*.$$

LEMME 2.2: *L'opérateur différentiel $\mathcal{B}_g - R \circ B_g$ est d'ordre zéro.*

DÉMONSTRATION: Soit $h \in S^2\mathrm{T}^*$. On a

$$\mathcal{B}_g(h) = \mathcal{T}^3_g \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla^{g+th} \operatorname{Ric}(g) \big|_{t=0} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d} \frac{d}{\mathrm{d}t} \mathcal{T}^2_{g+th} \operatorname{Ric}(g) \big|_{t=0},$$

modulo un opérateur d'ordre zéro. Soient ξ, η, $\zeta \in \mathrm{T}$. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla^{g+th} \operatorname{Ric}(g)) \big|_{t=0}(\xi, \eta, \zeta) = \\ - \operatorname{Ric}(g)(L^h_\xi \eta, \zeta) - \operatorname{Ric}(g)(h, L^{h\zeta}_\xi),$$

avec $L^h_\eta \eta = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla^{g+th}{}_\xi \eta \big|_{t=0}$. D'après la formule (4.) de [5], on obtient

$$\mathcal{T}^3_g \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\nabla^{g+th} \operatorname{Ric}(g)) \big|_{t=0} = - R \circ B_g(h) - \tfrac{1}{2} d\langle g^\# \operatorname{Ric}(g), h\rangle,$$

modulo un opérateur d'ordre zéro, où $g^\#: S^2T^* \to S^2T$. Par ailleurs, on voit facilement que

$$d \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{T}^2_{g+th} \operatorname{Ric}(g) \big|_{t=0} = - d\langle g^\# \operatorname{Ric}(g), h\rangle,$$

d'où le lemme.

Soit $r: J_2(S^2T^*) \to S^2T^*$, le morphisme de fibrés vectoriels sur X défini par

$$r(j_2(h)(x) = \operatorname{Ric}'_g(h)(x),$$

pour tous $x \in X$ et $h \in S^2\mathrm{T}^*_x$. Le symbole $\sigma(\mathcal{R}'_g)$ de l'opérateur différentiel $\mathcal{R}'_g$ est le morphisme de fibrés vectoriels

$$\tau: S^2T^* \otimes S^2T^* \to K$$

défini par

$$\tau(C)(\xi. \eta, \zeta, \lambda) = \tfrac{1}{2}\{C(\xi, \zeta, \eta, \lambda) + C(\eta, \lambda, \xi, \zeta) - C(\eta, \zeta, \xi, \lambda) \\ - C(\xi, \lambda, \eta, \zeta)\}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta, \lambda \in T$ et $C \in S^2T^* \otimes S^2T^*$ (cf. [5, §4]).

Comme Θ_g provient d'un morphisme de fibrés vectoriels, on déduit de (2.3) que

$$\sigma(r) = \mathcal{T}^4_g \circ \tau. \tag{2.6}$$

Soient $x \in X$ et $\{t_1, \ldots, t_n\}$ une base orthonormée pour g de T_x. D'après (2.6), on a alors

$$\begin{aligned}\sigma(r)(C)(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \{C(t_i, t_i, \xi, \eta) + C(\xi, \eta, t_i, t_i)\\ - C(t_i, \xi, t_i, \eta) - C(t_i, \eta, t_i, \xi)\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

pour tous $\xi, \eta \in T_x$ et $C \in S^2T^*_x \otimes S^2T^*_x$. De même, on a

$$\begin{aligned}\sigma_1(r)(C)(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \{C(\xi, t_i, t_i, \eta, \zeta) + C(\xi, \eta, \zeta, t_i, t_i)\\ - C(\xi, t_i, \eta, t_i, \zeta) - C(\xi, t_i, \zeta, t_i, \eta)\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

pour tous $\xi, \eta, \zeta \in T_x$ et $C \in S^3T^*_x \otimes S^2T^*_x$.

LEMME 2.3: *Le morphisme $\sigma(r): S^2T^* \otimes S^2T^* \to S^2T^*$ est surjectif, si $n \geq 3$.*

DÉMONSTRATION: Prenons $u \in T^*$ tel que $u^\# = g^\#(u)$ soit de norme 1. Si $h \in S^2T^*$ est de la forme

$$\lambda u^2 + u \otimes v + v \otimes u + h'$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $v \in T^*$ tel que $v^\#$ soit orthogonal à $u^\#$, et $h' \in S^2T^*$ tel que $i_{u^\#}h' = 0$, alors on déduit facilement de (2.7) que

$$-2\sigma(r)(u^2 \otimes h) = \tau^2_g(h')u^2 + h'. \tag{2.9}$$

En particulier, si $h' = v^2$ et si $v^\#$ est de norme 1, on a

$$-2\sigma(r)(u^2 \otimes v^2) = u^2 + v^2. \tag{2.10}$$

Il en découle immédiatement que $\sigma(r)$ est surjectif.

REMARQUE: Il y a beaucoup d'autres manières de prouver ce lemme. Par exemple, si on utilise l'égalité $\tau(S^2T^* \otimes S^2T^*) = K$, il suffit de montrer que $\mathcal{T}^4_g(K) = S^2T^*$. Remarquons encore qu'il résulte de la démonstration du lemme précédent que, pour $u \in T^* - \{0\}$, l'application

$$\sigma_u(r): S^2T^* \to S^2T^*$$
$$h \mapsto \sigma(r)(u^2 \otimes h)$$

est de rang $\frac{1}{2}n(n-1)$. Ceci signifie que l'opérateur de courbure de Ricci en Géométrie riemannienne n'est jamais déterminé (cf. [13]), contrairement à ce qui se passe pour l'opérateur courbure de Ricci en Géométrie affine (cf. [4]).

Du fait que $\sigma(r)$ est un épimorphisme, $R_2 = \operatorname{Ker} r$ est une équation différentielle d'ordre 2 dans S^2T^*.

Puisque le symbole de la connexion $\nabla^g: S^2\mathbf{T}^* \to \mathbf{T}^* \otimes S^2\mathbf{T}^*$ est l'identité de $T^* \otimes S^2T^*$, on a

$$\sigma(\mathrm{Div}_g) = \mathcal{T}_g^3: T^* \otimes S^2T^* \to T^*.$$

Clairement, on a aussi

$$\sigma(\mathrm{d}\mathcal{T}_g^2) = \mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2: T^* \otimes S^2T^* \to T^*.$$

Si $\beta: J_1(S^2T^*) \to T^*$ est le morphisme de fibrés vectoriels sur X tel que

$$\beta(j_1(h)) = B_g(h)$$

pour tout $h \in S^2\mathbf{T}^*$, alors on obtient

$$\sigma(\beta) = \mathcal{T}_g^3 - \tfrac{1}{2}\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2. \tag{2.11}$$

Si $\{t_1, \ldots, t_n\}$ est une base orthonormée de T_x, avec $x \in X$, on voit, d'après (2.11) que

$$\langle \xi, \sigma(\beta)(C)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \{C(t_i, t_i, \xi) - \tfrac{1}{2}C(\xi, t_i, t_i)\} \tag{2.12}$$

pour tout $C \in T_x^* \otimes S^2T_x^*$ et $\xi \in T_x$.

Le lecteur vérifiera facilement que $\sigma(\beta)$ est surjectif.

PROPOSITION 2.1: *Si* $\dim X \geq 3$, *on a la suite exacte*

$$S^3T^* \otimes S^2T^* \xrightarrow{\sigma_1(r)} T^* \otimes S^2T^* \xrightarrow{\sigma(\beta)} T^* \to 0. \tag{2.13}$$

La preuve de cette proposition fait l'objet du paragraphe 5.

3. Un théorème d'intégrabilité formelle

Nous supposerons désormais que $\dim X \geq 3$ et nous commençons par étudier l'involutivité du symbole de R_2.

LEMME 3.1: *Soient $x \in X$, u_1 et $u_2 \in T_x^*$ tels que $\{u_1^\#, u_2^\#\}$ soit un système orthonormé. Si $V = \mathbb{R}u_1 \oplus \mathbb{R}u_2$, on a*

$$\sigma(r)(S^2V \otimes S^2T_x^*) = S^2T_x^*.$$

DÉMONSTRATION: Posons, pour simplifier,

$$\sigma(r)(S^2V \otimes S^2T_x^*) = E,$$

et prenons v dans T_x^* tel que $v^\#$ soit orthogonal à V, et de norme 1. On a, d'après (2.10),

$$-2\sigma(r)(u_i^2 \otimes v^2) = u_i^2 + v^2, \qquad i = 1, 2,$$

et

$$-2\sigma(r)(u_1^2 \otimes u_2^2) = u_1^2 + u_2^2.$$

On en déduit que u_1^2 et u_2^2 sont dans E, et il résulte de (2.9) que les h de S^2T_x tels que $i_{u_1^\#}h = 0$ ou $i_{u_2^\#}h = 0$ sont dans E. Nous aurons terminé la preuve du lemme si nous montrons que $w = u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1$ est dans E. On vérifie facilement, avec (2.7), que

$$-2\sigma(r)((u_1 \otimes u_2 + u_2 \otimes u_1) \otimes v^2) = w,$$

d'où le résultat.

LEMME 3.2: *Soient $x \in X$ et $\{t_1, \ldots, t_n\}$ une base orthonormée de T_x. Alors l'application*

$$\sigma(r): S^2T_{\{t_1,\ldots,t_j\}} \otimes S^2T_x^* \to S^2T_x^*$$

est surjective pour $1 \leq j \leq n-2$.

DÉMONSTRATION: Posons

$$\textstyle\sum_j = S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_j\}} \otimes S^2T_x^*,$$

pour $j = 1, \ldots, n-1$. Comme $\Sigma_{j+1} \subset \Sigma_j$, si $j < n-1$, il suffit de montrer que $\sigma(r)(\Sigma_{n-2}) = S^2T_x^*$ et cette dernière égalité résulte trivialement du lemme précédent.

PROPOSITION 3.1: *Le symbole g_2 de R_2 est involutif.*

DÉMONSTRATION: Soit $x \in X$. Nous allons montrer que toute base orthonormée $\{t_1, \ldots, t_n\}$ de T_x est quasi-régulière pour $g_{2,x}$. Comme $g_2 = \operatorname{Ker} \sigma(r)$, on a, d'après le lemme 2.3,

$$\begin{aligned}\dim g_{2,x} &= \dim(S^2T_x^* \otimes S^2T_x^*) - \dim(S^2T_x^*)\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Si $1 \leq j \leq n-1$, on a

$$g_{2,\{t_1,\ldots,t_j\}} = \operatorname{Ker}(\sigma(r) : S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_j\}} \otimes S^2T_x^* \to S^2T_x^*).$$

D'après la démonstration du lemme 2.3, on obtient

$$\dim g_{2,\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}} = \dim(S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}} \otimes S^2T_x^*) - \frac{n(n-1)}{2},$$

et, d'après le lemme 3.2,

$$\dim g_{2,\{t_1,\ldots,t_j\}} = \dim(S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_j\}} \otimes S^2T_x^*) - \frac{n(n+1)}{2},$$

pour $j = 1, \ldots, n-2$. Comme

$$\dim S^2T^*_{\{t_1,\ldots,t_j\}} = \frac{(n-j)(n-j+1)}{2},$$

on a

$$\begin{aligned}\dim g_{2,x} + \sum_{j=1}^{n-1} \dim g_{2,\{t_1,\ldots,t_j\}} &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\\ &\quad - \frac{(n-1)n(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n(n+1))^2(n+2)}{12} - \frac{n^2(n+1)}{2} + n.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $g_3 = \operatorname{Ker} \sigma_1(r)$; donc, avec la proposition 2.1, on voit que

$$\begin{aligned}\dim g_{3,x} &= \dim(S^3T_x^* \otimes S^2T_x^*) - \dim(T_x^* \otimes S^2T_x^*) + \dim(T_x^*)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} + n,\end{aligned}$$

d'où la proposition.

PROPOSITION 3.2: *Si R_3 est le premier prolongement de R_2, on a la suite exacte de fibrés vectoriels à fibre variable sur X*

$$R_3 \xrightarrow{\pi_2} R_2 \xrightarrow{\Omega} T^*,$$

où $\Omega(j_2(h)(x)) = (B_g \circ \operatorname{Ric}'_g(h))(x)$ pour tous $x \in X$ et $h \in S^2T_x^*$ tels que $j_2(h)(x) \in R_2$.

DÉMONSTRATION: Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & g_3 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & S^3T^* \otimes S^2T^* \arrow[r, "\sigma_1(r)"] \arrow[d, "\epsilon"] & T^* \otimes S^2T^* \arrow[r, "\sigma(\beta)"] \arrow[d, "\epsilon"] & T^* \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] & J_3(S^2T^*) \arrow[r, "p_1(r)"] \arrow[d, "\pi_2"] & J_1(S^2T^*) \arrow[d, "\pi_0"] & & \\
0 \arrow[r] & R_2 \arrow[r] & J_2(S^2T^*) \arrow[r, "r"] \arrow[d] & S^2T^* \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

est exact et commutatif. Donc l'application $\Omega: R_2 \to T^*$ qui envoie $p \in R_2$ dans

$$\Omega(p) = \sigma(\beta)\epsilon^{-1}p_1(r)q$$

avec $q \in J_3(S^2T^*)$ vérifiant $\pi_2(q) = p$ est bien définie et on obtient une suite exacte

$$R_3 \xrightarrow{\pi_2} R_2 \xrightarrow{\Omega} T^*.$$

Soient $x \in X$ et $h \in S^2\mathrm{T}_x^*$ tels que $p = j_2(h)(x) \in R_2$. On a

$$\begin{aligned}\Omega(p) &= \sigma(\beta)\epsilon^{-1}p_1(r)j_3(h)(x)\\ &= \sigma(\beta)\epsilon^{-1}j_1(\mathrm{Ric}'_g(h))(x)\\ &= \beta(j_1(\mathrm{Ric}'_g(h))(x)) = (B_g\,\mathrm{Ric}'_g(h))(x).\end{aligned}$$

Supposons que g soit une métrique d'Einstein, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Ric}(g) = \lambda g,$$

où λ est une constante. Lichnerowicz a démontré (cf. [11, §19]) que

$$B_g \circ \mathrm{Ric}'_g = \lambda B_g. \tag{3.2}$$

On a le

THÉORÈME 3.1: *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mathscr{B}_g = 0$;
(ii) g *est à courbure de Ricci nulle*;
(iii) $B_g\,\mathrm{Ric}'_g = 0$;
(iv) R_2 *est formellement intégrable.*

DÉMONSTRATION: Puisque le symbole de B_g est surjectif, on déduit facilement du lemme 2.2 que g est Ricci plate, si $\mathscr{B}_g = 0$. Si g est à courbure de Ricci nulle, alors (iii) est vraie, d'après (3.2). Supposons que $B_g \circ \mathrm{Ric}'_g = 0$. D'après la proposition 3.2, l'application $\pi_2: R_3 \to R_2$ est surjective. Il résulte de la démonstration de la proposition 3.1 que g_3 est de rang constant, donc que R_3 est un fibré vectoriel. Comme g_2 est toujours involutif, les hypothèses du théorème 1.1 sont satisfaites et R_2 est formellement intégrable. Maintenant, si R_2 est formellement inégrable, on a $\Omega = 0$ et ainsi

$$(B_g \circ \mathrm{Ric}'_g(h))(x) = 0$$

pour tous $x \in X$ et $h \in S^2\mathrm{T}_x^*$ tels que $j_2(h)(x) \in R_2$. En fait, $B_g \circ \mathrm{Ric}'_g$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 et on aura $B_g \circ \mathrm{Ric}'_g = 0$ si on montre que $\pi_1: R_2 \to J_1(S^2T^*)$ est surjectif. Ceci résulte de l'exactitude et de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & g_2 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & S^2T^* \otimes S^2T^* \arrow[r, "\sigma(r)"] \arrow[d, "\epsilon"] & S^2T^* \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_2 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & J_2(S^2T^*) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi_1"] & S^2T^* \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & J_1(S^2T^*) \arrow[r, "id"] & J_1(S^2T^*) \arrow[r] \arrow[d] & 0. & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Enfin (i) et (iii) sont équivalentes, d'après (2.5).

Supposons que g soit Ricci-plate. Puisque g_2 est involutif, le théorème 4.3 de [6] nous donne un complexe

$$S^2\mathbf{T}^* \xrightarrow{\mathrm{Ric}'_g} S^2\mathbf{T} \xrightarrow{D} \mathbf{F},$$

où F est un fibré vectoriel sur X et D un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1, qui est formellement exact dans le sens suivant: si $\nu : J_1(S^2T^*) \to F$ est le morphisme de fibrés vectoriels tel que $D = \nu \circ j_1$, les suites

$$0 \to R_{m+3} \to J_{m+3}(S^2T^*) \xrightarrow{p_{m+1}(r)} J_{m+1}(S^2T^*) \xrightarrow{p_m(\nu)} J_m(F)$$

sont exactes pour $m \geq 0$. Comme $\sigma(r)$ est surjectif, r l'est aussi: on a donc $F = T^*$ et ν est l'unique morphisme de fibrés vectoriels de $J_1(S^2T^*)$ dans T^* tel que $\sigma(\nu) = \sigma(\beta)$ et que $\nu \circ p_1(r) = 0$. Nous déduisons de la condition (ii) du théorème 3.1 que $D = B_g$ et que $\nu = \beta$. Supposons maintenant que X soit analytique réelle. On note $\mathbf{E}_\omega$ le faisceau des germes de section analytiques réelles d'un fibré vectoriel analytique réel sur X. Dans un travail récent (cf. [16]), DeTurck et Kazdan ont montré qu'une métrique d'Einstein est toujours analytique réelle. Les résultats du paragraphe 7 de [6] nous disent que la suite

$$S^2\mathbf{T}^*_\omega \xrightarrow{\mathrm{Ric}'_g} S^2\mathbf{T}^*_\omega \xrightarrow{B_g} \mathbf{T}^*_\omega$$

est exacte.

En d'autres termes le résultat ci-dessus nous dit qu'un germe analytique réel h de $S^2\mathbf{T}^*$ est l'image par Ric'_g d'un germe analytique réel de $S^2\mathbf{T}^*$ si et seulement si h satisfait l'identité de Bianchi pour g. Il est probable qu'il puisse se généraliser au cas $\mathscr{C}^\infty$, par exemple en utilisant la décomposition de Ric'_g faisant intervenir le Laplacien de Lichnerowicz (cf. [1] ou [11]).

Par des techniques analogues à celles développées dans les lemmes 2.3 et 3.1, on peut montrer que $\sigma_1(\beta): S^2T^* \otimes S^2T^* \to \otimes^2 T^*$ est surjectif. On déduit immédiatement des résultats du paragraphe 7 de [6] que, sous les hypothèses du théorème 3.1,

$$B_g : S^2\mathbf{T}^*_\omega \to T^*_\omega$$

est surjectif.

Supposons que g soit une métrique d'Einstein, avec $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$. Posons

$$P_\lambda(h) = \mathrm{Ric}'_g(h) - \lambda h,$$

pour toute section h de S^2T^*. D'après (3.2), on a

$$B_g \circ P_\lambda = 0, \tag{3.3}$$

et on déduit immédiatement de la preuve du théorème 3.1 que l'opérateur différentiel P_λ est formellement intégrable.

Toujours d'après les résultats de [6], on obtient alors le

THÉORÈME 3.2: *Si g est une métrique d'Einstein telle que* $\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$, *alors on a la suite exacte*

$$S^2\mathbf{T}^*_\omega \xrightarrow{P_\lambda} S^2\mathbf{T}^*_\omega \xrightarrow{B_g} \mathbf{T}^*_\omega \to 0.$$

Si g est la métrique canonique plate dans $\mathbf{R}^n$, le théorème 3.2 et le théorème d'Ehrenpreis–Malgrange (cf. [12]) nous donnent, dans le cas

$\mathscr{C}^\infty$, un théorème d'existence pour un système différentiel à coefficients constants que nous allons expliciter. Si $x_1, \ldots, x_n$ désignent les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et si h est une section de $S^2T^*(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$h_{ij} = h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

pour $1 \leq i, j \leq n$. On a

$$((\mathrm{Ric})'_g(h))_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}\right\},$$

et

$$B_g(h) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial h^{ii}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j.$$

Par conséquent, si u est une section $\mathscr{C}^\infty$ donnée de $S^2T^*(\mathbb{R}^n)$, le système à coefficients constants

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 h_{kk}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}\right\} = u_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

a une solution $h \in \mathscr{C}^\infty(S^2T^*(\mathbb{R}^n))$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial u_{ii}}{\partial x_j}\right\} = 0$$

sur $\mathbb{R}^n$, pour $j = 1, \ldots, n$.

4. Résolubilité locale des équations d'Einstein

Nous utilisons dans ce paragraphe la théorie formelle des équations différentielles non-linéaires surdéterminées de [7]. Soit $S^2T^*_+$ le sous-fibré ouvert de S^2T^* dont les sections sont les métriques riemanniennes sur X. Si k est un entier ≥ 0, le fibré $J_k(S^2T^*_+)$ des k-jets de sections de $S^2T^*_+$ est un sous-fibré ouvert de $J_k(S^2T^*)$. On notera π la projection naturelle de S^2T^* sur X ou de $J_k(S^2T^*)$ sur X. Notons encore $V(E)$ le fibré vertical d'un fibré E sur X.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $r_\lambda : J_2(S^2T^*_+) \to S^2T^*$ le morphisme de fibrés sur X

défini par

$$r_\lambda(j_2(g)(x)) = (\mathrm{Ric}(g) - \lambda g)(x)$$

pour tout $x \in X$ et tout germe en x de métrique riemannienne g sur X. On posera $N_2 = \mathrm{Ker}_0 r_\lambda$, où $_0$ désigne la section nulle du fibré vectoriel S^2T^* sur X. Soit

$$\rho : S^2T^* \underset{S^2T^*_+}{\otimes'} S^2T^* \to S^2T^*$$

le morphisme de fibrés sur $\pi : S^2T^*_+ \to X$ défini comme suit: si $x \in X$ et $h \in S^2T^*_{+,x}$, on a

$$\rho(u) = -\mathcal{T}^4_h \circ \tau(u)$$

pour tout $u \in (S^2T^* \underset{S^2T^*_+}{\otimes'} S^2T)_h = S^2T^*_x \otimes' S^2T^*_x$. Le fibré $\pi_1 : J_2(S^2T^*_+) \to J_1(S^2T^*_+)$ est un fibré affine de fibré vectoriel associé $S^2T^* \underset{J_1(S^2T^*_+)}{\otimes} V(S^2T^*_+)$ (cf. [7]). Si on identifie le fibré vertical $V(S^2T^*)$ (resp. $V(S^2T^*_+)$) au fibré image réciproque $\pi^{-1}(S^2T^*)$, avec $\pi : S^2T^* \to X$ (resp. $\pi : S^2T^*_+ \to X$), le morphisme r_λ est affine sur $\pi : J_1(S^2T^*_+) \to X$ et son morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par ρ. Ceci veut dire que si h est un germe en $x \in X$ de métrique riemannienne sur X, on a

$$r_\lambda(j_2(h)(x) + a) = r_\lambda(j_2(h)(x)) + \rho(a) \tag{4.1}$$

pour tout a dans la fibre $(S^2T^* \underset{J_1(S^2T^*_+)}{\otimes} V(S^2T^*_+))_{j_1(h)(x)}$ identifiée à $(S^2T^* \underset{S^2T^*_+}{\otimes} S^2T^*)_{h(x)}$.

LEMME 4.1: *On a* $\pi_1(N_2) = J_1(S^2T^*_+)$ *et* N_2 *est une équation différentielle non-linéaire d'ordre* 2 *dans* $S^2T^*_+$.

DÉMONSTRATION: Soient $x \in X$ et $p = j_1(h)(x)$, où h est un germe en x de métrique riemannienne sur X. D'après (2.6) et le lemme 2.2, le morphisme ρ est surjectif, donc il existe $a \in (S^2T^* \underset{S^2T^*_+}{\otimes} S^2T^*)_{h(x)}$ tel que

$$\rho(a) = -r_\lambda(j_2(h)(x)).$$

Il résulte de (4.1) que $q = j_2(h)(x) + a$ est dans N_2. Comme $\pi_1(q) = p$, la première partie du lemme est démontrée. Toujours à cause de la surjectivité de ρ, la différentielle verticale

$$r_{\lambda *}: V(J_2(S^2T^*_{\ddagger})) \to V(S^2T^*)$$

est surjective, donc N_2 est un sous-fibré de rang constant de $J_2(S^2T^*_{\ddagger})$, d'où le lemme.

THÉORÈME 4.1: *L'équation différentielle* N_2 *est involutive et formellement intégrable.*

DÉMONSTRATION: Notons encore ρ le morphisme de $S^2T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^*$ dans S^2T^* induit par ρ. Le symbole de N_2 est alors le sous-fibré à fibre variable

$$h_2 = \mathrm{Ker}(\rho : S^2T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^* \to S^2T^*)$$

de $S^2T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^*$ (cf. [7]). Si $p = j_2(g)(x) \in N_2$, avec $x \in X$ et g germe en x de métrique riemannienne sur X, on a, d'après (2.6),

$$(h_2)_p = \mathrm{Ker}(\sigma(\mathrm{Ric}'_g): S^2T^*_x \otimes S^2T^*_x \to S^2T^*_x).$$

Il résulte donc de la proposition 3.1 que h_2 est involutif. La preuve de la proposition 3.1 nous permet aussi de déduire que le premier prolongement h_3 de h_2 est un fibré de rang constant sur N_2. Si $\pi^{-1}T^*$ est le fibré image réciproque de T^* par $\pi: N_2 \to X$, considérons le morphisme

$$\gamma : T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^* \to \pi^{-1}T^*$$

de fibrés vectoriels sur N_2 défini ainsi: si $x \in X$ et si g est un germe en x de métrique riemannienne sur X tel que $p = j_2(g)(x) \in N_2$, alors

$$\gamma : (T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^*)_p \to (\pi^{-1}T^*)_p$$

est le symbole en x de B_g. D'après la proposition 2.1, la suite

$$S^3T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^* \xrightarrow{\rho\circ\delta} T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^* \xrightarrow{\gamma} \pi^{-1}T^* \to 0$$

est exacte. La proposition 2.1 de [8] nous donne une suite exacte

$$N_3 \xrightarrow{\pi_2} N_2 \overset{\tilde{\Omega}}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \pi^{-1}T^*$$

de fibrés à fibre variable sur N_2, où N_3 est le premier prolongement de N_2 et où $\tilde{\Omega}$ est défini de la manière suivante: si $p = j_2(g)(x) \in N_2$, avec $x \in X$ et g germe en x de métrique riemannienne sur X, on a

$$\tilde{\Omega}(p) = \gamma\epsilon^{-1}j_1(\mathrm{Ric}(g) - \lambda g)(x)$$

où $\epsilon^{-1}j_1(\mathrm{Ric}(g) - \lambda g)(x)$ est considéré comme un élément de $(T^* \underset{N_2}{\otimes} S^2T^*)_p$. On a donc

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(p) &= \sigma(B_g)\epsilon^{-1}j_1(\mathrm{Ric}(g) - \lambda g)(x)\\ &= B_g(\mathrm{Ric}(g) - \lambda g)(x).\end{aligned}$$

On a

$$B_g(\mathrm{Ric}(g)) = 0$$

d'après le lemme 2.1, mais on a aussi

$$B_g(g) = 0,$$

puisque la connexion ∇^g parallélise g et que la trace de g est égale à n. Ainsi $\tilde{\Omega} = 0$ et $\pi_2 : N_3 \to N_2$ est surjectif. Le hypothèses du théorème 8.1 de [7] sont satisfaites et N_2 est formellement intégrable.

Considérons le morphisme

$$\omega : J_2(S^2T^*_+) \to K$$

de fibrés sur X défini par

$$\omega(j_2(g)(x)) = \mathcal{R}(g)(x).$$

Le morphisme ω est affine sur $\pi : J_1(S^2T^*_+) \to X$ et son morphisme de fibrés vectoriels associés est induit par τ. Puisque τ est surjectif (cf. [3]), on en déduit que ω est surjectif, et que $\pi_1 : \mathrm{Ker}_S\,\omega \to J_1(S^2T^*_+)$ est surjectif pour toute section S de K.

Supposons que X soit une variété analytique réelle. On a le

THÉORÈME 4.2: *Soient $x \in X$, $g_0 \in S^2T^*_{\ddagger,x}$ et $R_0 \in K_x$ tels que*

$$(4.2) \qquad -\tau^4_{g_0} R_0 = \lambda g_0.$$

Il existe un germe en x de métrique riemannienne analytique réelle g tel que

$$g(x) = g_0, \qquad \mathcal{R}(g)(x) = R_0 \quad et \quad \mathrm{Ric}(g) = \lambda g.$$

DÉMONSTRATION: Il existe $p \in J_2(S^2T^*_{\ddagger})_x$ tel que $\omega(p) = R_0$ et que $\pi_0(p) = g_0$. Avec nos hypothèses, p est dans N_2. Le théorème 4.1 et le théorème 9.1 de [7] nous donnent l'existence d'un germe en x de métrique riemannienne analytique réelle g solution de N_2 et tel que $j_2(g)(x) = p$, d'où le théorème.

Dans le cas $\lambda = 0$ et lorsque $\dim X \geq 4$, le théorème ci-dessus nous fournit beaucoup d'exemples locaux de métriques riemanniennes à courbure de Ricci nulle et non plates, car le sous-espace des R_0 satisfaisant (4.2) est de dimension $[n(n-1)(n^2-n-6)]/12$. Il est bien connu que l'existence globale de métriques riemanniennes à courbure de Ricci nulle et non plates est une question difficile, par contre, il n'apparaissait pas clairement que le problème local présente peu de difficultés. Signalons encore que les seuls exemples connus de telles métriques étaient kahlériens, à savoir ceux donnés par le théorème de Calabi-Yau pour les variétés kahlériennes compactes à première classe de Chern nulle (cf. [16]).

Lorsque $\lambda \neq 0$, le théorème 4.2 peut aussi s'obtenir plus simplement à l'aide du théorème de Cauchy-Kovalevski et des techniques de [17], où l'on utilise les coordonnées harmoniques pour résoudre les équations d'Einstein dans le cas extérieur. Remarquons aussi que les résultats de ce paragraphe s'étendent sans difficulté au cas de métriques de signature quelconque.

5. Preuve de la proposition 2.1

Comme dans le lemme 2.2, plaçons-nous en un point x de X; posons $g(x) = g$, $T_x = T$ et $T^*_x = T^*$. On déduit facilement de (2.8) et (2.12) que $\sigma(\beta) \circ \sigma_1(r) = 0$. Remarquons tout de suite que (2.13) n'est pas exacte lorsque $\dim X = 2$, car $\mathrm{Im}\, \sigma_1(r) = T^* \otimes g$, tandis que $\mathrm{Ker}\, \sigma(\beta)$ est de dimension 4. Nous supposons dans la suite que $\dim X \geq 3$.

L'espace T étant muni de la métrique g, considérons T^*, $T^* \otimes S^2T^*$, S^3T^* et $S^3T^* \otimes S^2T^*$ en tant que $0(n)$-modules. Les applications $\sigma_1(r)$ et $\sigma(\beta)$ sont clairement $0(n)$-équivariantes. L'application

$$\mu : T^* \otimes S^2T^* \to S^3T^*$$

donnée par

$$\mu(C)(\xi, \eta, \zeta) = C(\xi, \eta, \zeta) + C(\eta, \zeta, \xi) + C(\zeta, \xi, \eta)$$

pour tous $C \in T^* \otimes S^2T^*$ et $\xi, \eta, \zeta \in T$ est aussi $0(n)$-équivariante et la suite

(5.1)
$$0 \to \operatorname{Ker} \mu \to T^* \otimes S^2T^* \xrightarrow{\mu} S^3T^* \to 0$$

est exacte. Notons

$$H_3 = S^3T^* \cap \operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2)$$

l'espace des formes harmoniques de degré 3 sur T. On a la somme directe

(5.2)
$$S^3T^* = H_3 \oplus \mu(T^* \otimes g)$$

et les sous-espaces H_3 et $\mu(T^* \otimes g)$ sont des $0(n)$-modules irréductibles (cf. [14]). On a

$$\mathcal{T}_g^3 = \mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2$$

sur S^2T^*, donc $H_3 \subset \operatorname{Ker} \sigma(\beta)$. Par ailleurs, le $0(n)$-module $M_0 = (\operatorname{Ker} \mu) \cap \operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2)$ est irréductible et

(5.3)
$$\operatorname{Ker} \mu = M_0 \oplus M_1,$$

où M_1 est un $0(n)$-module isomorphe à T^* (cf. [14]). On a aussi

$$\mathcal{T}_g^3 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2$$

sur $\operatorname{Ker} \mu$. On déduit de (5.2), (5.3) et de l'exactitude de (5.1) que la décomposition du $0(n)$-module $\operatorname{Ker} \sigma(\beta)$ en somme directe de sousmodules irréductibles est donnée par

$$\operatorname{Ker} \sigma(\beta) = H_3 \oplus M_0 \oplus M,$$

où M est un module isomorphe à T^* qu'il est inutile d'expliciter pour les calculs que nous allons faire.

LEMME 5.1: *On a*

$$H_3 \subset \operatorname{Im} \sigma_1(r). \tag{5.4}$$

DÉMONSTRATION: Comme H_3 est irréductible, il suffit de trouver un élément non nul de H_3 qui soit dans l'image de $\sigma_1(r)$. On déduit facilement de (2.7) et (2.9) que

$$-2\sigma_1(r)(u^3 \otimes h) = u \otimes h,$$

pour $u \in T^*$ tel que $u^\#$ soit de norme 1 et pour $h \in S^2T$ tel que $i_{u^\#}h = 0$ et $\mathcal{T}_g^2 h = 0$. En particulier, si u, v, $w \in T^*$ sont tels que $\{u^\#, v^\#, w^\#\}$ soit un système orthonormé, alors $u \otimes (v \otimes w + w \otimes v)$ est dans l'image de $\sigma_1(r)$. On voit donc que le produit symétrique $\omega = u.v.w$, identifié à un élément de $T^* \otimes S^2T^*$, est dans $\operatorname{Im} \sigma_1(r)$. Maintenant ω est aussi $H_3 - \{0\}$, d'où le résultat.

Soit $\{t_1, \ldots, t_n\}$ une base orthonormée de T, dont on note $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ la base duale dans T^*. Appelons W le sous-espace de $\operatorname{Im} \sigma_1(r)$ engendré par les

$$-\sigma_1(r)(\mathrm{d}x_\ell^3 \otimes (\mathrm{d}x_1 \otimes \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_2 \otimes \mathrm{d}x_1))$$

$$= \tfrac{1}{2}(\mathrm{d}x_\ell \otimes (\mathrm{d}x_1 \otimes \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_2 \otimes \mathrm{d}x_1),$$

pour $\ell = 3, \ldots, n$. Il est facile de voir que $\dim W = n - 2$, que $W \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2)$ et que $W \cap S^3T^* = \{0\}$. D'autre part, le sous-espace L de $\operatorname{Im} \sigma_1(\mathcal{T})$, engendré par les

$$-\sigma_1(r)(\mathrm{d}x_\ell^3 \otimes \mathrm{d}x_n^2) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x_\ell \otimes (\mathrm{d}x_\ell^2 + \mathrm{d}x_n^2),$$

si $\ell \neq n$, a une intersection nulle avec $\operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2)$. Fixons un sous-espace U de dimension 3 de L, ce qui est toujours possible. On a $U \cap W = \{0\}$ et on pose

$$V = U \oplus W.$$

Soit $p : \operatorname{Ker} \sigma(\beta) \to H_3$ la projection sur H_3 parallèlement à $M_0 \oplus M$. Il est clair que

$$V \cap H_3 = \{0\}.$$

On en déduit immédiatement le

LEMME 5.2: *Si* $\tilde{V} = \{v - p(v) \mid v \in V\}$, *alors on a* $\dim \tilde{V} = n + 1$.

Soit $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ une base de $\tilde{V}$. On a

$$v_k = \alpha_k + \beta_k, \qquad k = 1, \ldots, n + 1,$$

où $\alpha_k \in M_0$ et $\beta_k \in M$. Comme $\dim M = n$, on a peut supposer, quitte à changer l'ordre des v_k, qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k.$$

Alors $v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$ est dans $M_0 - \{0\}$. Par construction et d'après (5.4), on a $\tilde{V} \subset \operatorname{Im} \sigma_1(r)$; comme M_0 est irréductible, on obtient

$$M_0 \subset \operatorname{Im} \sigma_1(r). \tag{5.5}$$

Prenons ω dans $U - \{0\}$; on a

$$(\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2)\omega \neq 0. \tag{5.6}$$

On peut écrire

$$\omega = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

avec $\alpha_1 \in H_3$, $\alpha_2 \in M_0$ et $\alpha_3 \in M$. Puisque

$$H_3 \oplus M_0 \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{id} \otimes \mathcal{T}_g^2),$$

on voit, d'après (5.6), que $\alpha_3 \neq 0$. Comme $U \subset \operatorname{Im} \sigma_1(r)$, il résulte de (5.4) et (5.5) que $\alpha_3 \in \operatorname{Im} \sigma_1(r)$ et donc que $M \subset \operatorname{Im} \sigma_1(r)$, ce qui achève la preuve de la proposition.

REFERENCES

[1] J.P. BOURGUIGNON: *Déformations des métriques d'Einstein* (à paraître).
[2] E. CARTAN: *Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité*, Oeuvres complètes, Partie II, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1955, pp. 1199–1229.
[3] J. GASQUI: Sur les structures de courbure d'ordre 2 dans R^n. *J. Differential Geometry 12* (1977) 493–497.
[4] J. GASQUI: Connexions à courbure de Ricci donnée. *Math. Z. 168* (1979) 167–179.
[5] J. GASQUI and H. GOLDSCHMIDT: *Déformations infinitésimales des espaces riemanniens localement symétriques* (à paraître).
[6] H. GOLDSCHMIDT: Existence theorems for linear partial differential equations. *Ann. of Math. 86* (1967) 246–270.
[7] H. GODSCHMIDT: Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations. *J. Differential Geometry 1* (1967) 269–307.
[8] H. GOLDSCHMIDT: Sur la structure des équations de Lie I. Le troisième théorème fondamental. *J. Differential Geometry 6* (1972) 357–373.
[9] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG: An algebraic model of transitive differential geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. 70* (1964) 16–47.
[10] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU: *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1. Interscience Publishers, New York, 1963.
[11] A. LICHNEROWICZ: Propagateurs et commutateurs en relativité générale. *I.H.E.S. Public. Math. 10* (1961).
[12] B. MALGRANGE: *Systèmes différentiels à coefficients constants*, Séminaire Bourbaki 15e année 1962–1963, Exp. 246.
[13] D.G. QUILLEN: *Formal properties of over determined systems of linear partial differential equations*. Ph.D. thesis, Harvard University, 1964.
[14] H. WEYL: *Classical groups*, Princeton Mathematical series no. 1. Princeton University Press, 1946.
[15] S.T. YAU: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Mongre-Ampère equation I. *Comm. Pure and Appl. Math. XXXI* (1978) 339–411.
[16] D. DETRUCK and J. KAZDAN: Some regularity theorems in Riemannian Geometry. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* (à paraître).
[17] Y. FOURES-BRUHAT: Sur l'intégration des équations de la relativité générale. *J. Rational Mech. Anal. 5* (1956) 951–966.

(Oblatum 25-XI-1981)

Université de Grenoble I
Institut Fourier,
B.P. 116,
38402 St. MARTIN D'HÈRES,
Cedex, France