COMPOSITIO MATHEMATICA

ARNAUD BEAUVILLE

Sous-variétés spéciales des variétés de Prym

Compositio Mathematica, tome 45, nº 3 (1982), p. 357-383

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1982__45_3_357_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 45, Fasc. 3, 1982, pag. 357–383

SOUS-VARIETES SPECIALES DES VARIETES DE PRYM

Arnaud Beauville

Introduction

Soit $\pi : \tilde{C} \to C$ un revêtement double étale de surfaces de Riemann (compactes). Le noyau de l'homomorphisme norme $N : J\tilde{C} \to JC$ a deux composantes connexes P et P_1; la composante neutre P est une sous-variété abélienne de $J\tilde{C}$, appelée *variété de Prym* associée à π. La polarisation principale de $J\tilde{C}$ induit sur P le double d'une polarisation principale ξ.

La géométrie de la variété abélienne principalement polarisée (P, ξ) est évidemment liée à celle de la courbe C, et en particulier à la présence de *systèmes linéaires spéciaux* sur C (courbes trigonales, courbes planes ...). Le but de cet article est de préciser cette relation en associant à un tel système une sous-variété de P, qu'on définit comme suit. Soit g_d^r un système linéaire complet sur C, et soit V l'ensemble des classes de diviseurs *effectifs* D sur C tels que $\pi_* D \in g_d^r$; par une translation convenable on peut considérer V comme une sous-variété de $J\tilde{C}$, contenue dans Ker N. Ainsi V est réunion de deux sous-variétés $V_0 \subset P$ et $V_1 \subset P_1$; on dit que V_0 est la *sous-variété spéciale* de P associée au système linéaire g_d^r. Notre résultat principal est que, si $d > 2r$, *la classe de cohomologie de V_0 dans P est* $2^{d-2r-1}(\xi^c/c\,!)$, avec $c = \operatorname{codim}(V_0, P) = g - 1 - r$.

Voici quelques applications de cette formule:

– Si C est trigonale, la sous-variété V_0 associée au g_3^1 est une courbe, et P est isomorphe à la jacobienne de V_0 (théorème de Recillas).

– Si C admet un g_4^1, la courbe V_0 est stable par multiplication par

0010–437X/82030357–27$00.20/0

-1; la variété de Prym du revêtement $V_0 \to V_0/\{\pm 1\}$ est isomorphe à P ("construction tétragonale" de Donagi).

– La jacobienne intermédiaire (JX, θ) d'une hypersurface cubique lisse X dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ est canoniquement isomorphe à la variété de Prym (P, ξ) associée à une quintique plane C; la sous-variété spéciale V_0 de P associée au système g^2_5 s'identifie à la *surface de Fano* F de X. La classe de F dans JX est donc $\theta^3/3!$ (c'est là un des résultats-clés de [C-G].

– De même, soit $X \subset \mathbb{P}^6_{\mathbb{C}}$ une intersection complète lisse de trois quadriques, et soit T la surface des coniques contenue dans X; la classe de T dans JX est $4(\theta^{12}/12!)$.

A l'exception du dernier, ces résultats ne sont pas nouveaux; il nous a cependant paru intéressant de les retrouver dans un cadre uniforme. L'interprétation dans le dernier exemple de la surface des coniques T en termes de variétés de Prym a été observée par Tjurin [T1], puis étudiée en détail par Welters [W], qui l'utilise notamment pour prouver que l'application canonique $Alb(T) \to JX$ est une isogénie.

Notations

Nous considérons des variétés sur un corps K algébriquement clos, de caractéristique $\neq 2$. Soit X une variété lisse et complète sur K; on désigne par $H(X)$ la cohomologie entière de X si $K = \mathbb{C}$, la cohomologie l-adique (avec $l \neq \operatorname{car}(K)$) sinon. Si Z est une sous-variété de codimension c de X, on note $cl_X(Z)$ la classe de cohomologie de Z dans $H^{2c}(X)$.

On note $X^{(d)}$ le d-ième produit symétrique d'une courbe lisse X; si $f: X \to Y$ est un morphisme de courbes, on note $f^{(d)}: X^{(d)} \to Y^{(d)}$ le morphisme induit.

Plan

§1. Le résultat principal

Soient C, $\tilde{C}$ deux courbes algébriques sur K, lisses et complètes, de genres g et $2g-1$ respectivement, et soit $\pi: \tilde{C} \to C$ un revêtement étale double. On note $N: J\tilde{C} \to JC$ l'homomorphisme norme. Son noyau a deux composantes connexes, P et P_1 [M]; la composante neutre P est une variété abélienne de dimension $g-1$, *la variété de Prym* associée au revêtement $\tilde{C} \to C$.

Supposons donné un système linéaire complet g_d^r sur C, de degré d, de dimension projective r. Soit L le faisceau inversible correspondant; choisissons un faisceau inversible $\tilde{L}$ sur $\tilde{C}$ tel que $N(\tilde{L}) = L$. Définissons des morphismes

$$\tilde{\varphi}: \tilde{C}^{(d)} \to J\tilde{C}, \qquad \varphi: C^{(d)} \to JC$$

par $\tilde{\varphi}(\tilde{E}) = \mathcal{O}(\tilde{E}) \otimes \tilde{L}^{-1}$, $\varphi(E) = \mathcal{O}(E) \otimes L^{-1}$ pour $\tilde{E} \in \tilde{C}^{(d)}$, $E \in C^{(d)}$, de sorte que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} \tilde{C}^{(d)} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi^{(d)}"'] & J\tilde{C} \arrow[d, "N"] \\ C^{(d)} \arrow[r, "\varphi"] & JC \end{tikzcd}$$

Nous ferons sur g_d^r les deux hypothèses suivantes:

(i) *on a* $0 < d < 2g$;
(ii) *le système linéaire* g_d^r *contient un diviseur réduit.*

En caractéristique nulle, l'hypothèse (ii) signifie que le système g_d^r n'a pas de point base de multiplicité ≥ 2 (théorème de Bertini).†

Considérons g_d^r comme une sous-variété de $C^{(d)}$ (isomorphe à $\mathbb{P}^r$), et posons $S = (\pi^{(d)})^{-1}(g_d^r)$; c'est une sous-variété réduite de $\tilde{C}^{(d)}$ (puisque g_d^r n'est pas contenu dans le lieu de ramification de $\pi^{(d)}$, par l'hypothèse (ii)), dont toutes les composantes sont de dimension r. Posons $V = \tilde{\varphi}(S)$. Par construction on a $V \subset \operatorname{Ker} N$, donc V est réunion disjointe de deux sous-variétés $V_0 \subset P$ et $V_1 \subset P_1$; de même S est réunion disjointe de deux sous-variétés S_0 et S_1 telles que $\tilde{\varphi}(S_i) = V_i$.

† L'hypothèse (ii) sert uniquement à assurer que les variétés S_i et V_i sont réduites; on peut la supprimer, à condition de considérer S_i et V_i comme des cycles avec multiplicités. De toute façons, pour les résultats que nous avons en vue, le cas où g_d^r a des points base se ramène immédiatement au cas d'un système sans point base.

Identifiant P_1 à P par translation, on peut considérer V_0 et V_1 comme deux sous-variétés de P (définies à translation près), appelées *sous-variétés spéciales de P associées au système* g_d^r.

Examinons en quoi la construction précédente dépend du choix de $\tilde{L}$. On peut remplacer $\tilde{L}$ par $\tilde{L} \otimes \tilde{M}$, avec $\tilde{M} \in \operatorname{Ker} N$; en prenant $\tilde{M}$ dans P on ne modifie V_0 et V_1 que par des translations, tandis que le choix de M dans P_1 *échange* (à translation près) V_0 et V_1. Il n'y a pas, en général, de choix canonique pour $\tilde{L}$, donc de moyen canonique de distinguer V_0 de V_1.

Notons σ l'involution de $\tilde{C}$ qui échange les deux feuillets du revêtement π. Rappelons [M] que si un diviseur $x_1 + \cdots + x_d$ appartient à S_0, alors $x_1 + \cdots + x_{d-1} + \sigma(x_d)$ appartient à S_1. Par conséquent:

– Si d est impair, l'involution $\sigma^{(d)}$ de $\tilde{C}^{(d)}$ échange S_0 et S_1. Il en résulte aussitôt que si l'on choisit d'identifier P_1 à P au moyen de la translation par l'élément $\tilde{L} \otimes (\sigma^* \tilde{L})^{-1}$, on a $V_1 = -V_0$.

– Si d est pair, S_0 et S_1 sont stables par $\sigma^{(d)}$; par suite si on choisit $\tilde{L} = \pi^* M$, avec $M^2 \cong L$, la sous-variété V_0 est stable par multiplication par -1. Il en est de même de V_1 lorsqu'on identifie P_1 à P au moyen de la translation par un point d'ordre 2.

Remarque 1: On a $S = \tilde{\varphi}^{-1}(V)$. Le morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{C}^{(d)} \to J\tilde{C}$ est un "fibré projectif" associé à un faisceau cohérent sur $J\tilde{C}$; il en est donc de même des morphismes induits $\tilde{\varphi}_i : S_i \to V_i$. Si D est un diviseur de S, la fibre $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\varphi}(D))$ s'identifie canoniquement à l'espace projectif $|D|$; pour que $\tilde{\varphi}_i : S_i \to V_i$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'on ait $h^\circ(D) = 1$ pour tout $D \in S_i$. Soit S' une composante irréductible de S; pour que le morphisme $S' \to \tilde{\varphi}(S')$ induit par $\tilde{\varphi}$ soit birationnel, il faut et il suffit que $\tilde{\varphi}(S')$ soit une composante de dimension r de V.

Remarque 2: Soit Z une composante irréductible de V, et soit M un faisceau inversible générique dans V. On a alors $h^\circ(M \otimes \tilde{L}) \leq 2$: en effet, si $h^\circ(M \otimes \tilde{L}) \geq 3$ pour tout $M \in Z$, l'application $(M, x, y) \mapsto M(x + y - \sigma x - \sigma y)$ de $Z \times \tilde{C}^2$ dans V a pour image une sous-variété de V contenant strictement Z, ce qui est impossible. Il en résulte que *toute composante de V est de dimension r ou* $r - 1$.

Proposition 1: *Supposons $d > 2r$. Alors les sous-variétés S_0 et S_1 ont même classe de cohomologie dans $\tilde{C}^{(d)}$, et V_0 et V_1 ont même classe*† *dans* $H^{2(g-1-r)}(P)$.

† La classe de V_i dans $H^{2(g-1-r)}(P)$ est par définition la somme des classes des composantes de dimension r de V_i.

DÉMONSTRATION: Soit $s:\tilde{C}^d \to \tilde{C}^{(d)}$ le morphisme canonique. L'application $s^*: H(\tilde{C}^{(d)}) \to H(\tilde{C}^d)$ étant injective, il suffit de montrer que les sous-variétés $T_0 = s^{-1}(S_0)$ et $T_1 = s^{-1}(S_1)$ sont homologiquement équivalentes dans $\tilde{C}^d$. Posons $T = s^{-1}(S) = T_0 \cup T_1$; soit p l'application de $\tilde{C}^d$ dans $\tilde{C}^{d-1}$ telle que $p(x_1,\ldots,x_d) = (x_1,\ldots x_{d-1})$, et soit $p_T: T \to p(T)$ l'application induite. Etant donné $(x_1,\ldots x_{d-1}) \in p(T)$, il existe un unique point y de C tel que $(\pi x_1 + \cdots + \pi x_{d-1} + y) \in g_d^r$; si $\pi^{-1}(y) = \{y', y''\}$, la fibre $p_T^{-1}(x_1,\ldots x_{d-1})$ se compose des deux points $(x_1,\ldots,x_{d-1},y')$ et $(x_1,\ldots,x_{d-1},y'')$, l'un de ces points se trouvant dans T_0 et l'autre dans T_1. Autrement dit, p induit un isomorphisme de T_0 sur $p(T)$ et de T_1 sur $p(T)$, de sorte que

$$p_* cl_{\tilde{C}^d}(T_0) = p_* cl_{\tilde{C}^d}(T_1) = cl_{\tilde{C}^{d-1}}(p(T)).$$

Posons $m = 2d - 2r$, et notons t l'élément $cl_{\tilde{C}^d}(T_0) - cl_{\tilde{C}^d}(T_1)$ de $H^m(\tilde{C}^d)$. Considérons l'isomorphisme de Künneth

$$H^m(\tilde{C}^d) \cong [H^{m-2}(\tilde{C}^{d-1}) \otimes H^2(\tilde{C})] \oplus [H^{m-1}(\tilde{C}^{d-1}) \otimes H^1(\tilde{C})]$$
$$\oplus [H^m(\tilde{C}^{d-1}) \otimes H^0(\tilde{C})];$$

l'homomorphisme $p_*: H^m(\tilde{C}^d) \to H^{m-2}(\tilde{C}^{d-1})$ s'identifie à la projection sur le premier facteur, via l'isomorphisme canonique $H^2(\tilde{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$. Par conséquent, la relation $p_* t = 0$ entraîne que dans la décomposition de Künneth

$$H^m(\tilde{C}^d) \cong \bigoplus_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_d=m \\ 0\le\alpha_j\le 2}} H^{\alpha_1}(\tilde{C}) \otimes \cdots \otimes H^{\alpha_d}(\tilde{C})$$

toutes les composantes t_α de t pour lesquelles $\alpha_d = 2$ sont nulles.

En considérant les d différentes projections de $\tilde{C}^d$ sur $\tilde{C}^{d-1}$, on conclut de même que toutes les composantes t_α de t pour lesquelles un des α_i est égal à 2 sont nulles. Or l'inégalité $d > 2r$, qui s'écrit aussi $m > d$, entraîne que toutes les composantes de t sont de ce type, d'où l'égalité $cl_{\tilde{C}^d}(T_0) = cl_{\tilde{C}^d}(T_1)$, et par conséquent $cl_{\tilde{C}^{(d)}}(S_0) = cl_{\tilde{C}^{(d)}}(S_1)$.

On a donc $\tilde{\varphi}_* cl_{\tilde{C}^{(d)}}(S_0) = \tilde{\varphi}_* cl_{\tilde{C}^{(d)}}(S_1)$. Or d'après la remarque 1, $\tilde{\varphi}_* cl_{\tilde{C}^{(d)}}(S_i)$ est la somme des classes des composantes de dimension r de V_i. Par conséquent, si i désigne le plongement canonique de P dans $J\tilde{C}$ et v_i la classe de V_i dans $H^{2(g-1-r)}(P)$, on a $i_* v_0 = i_* v_1$. Soit $q: J\tilde{C} \to P$ le morphisme tel que $i \circ q = 1 - \sigma^*$; on a $q \circ i = 2_P$. Appliquant q_* à l'égalité précédente, on obtient $2^{2r} v_0 = 2^{2r} v_1$, d'où $v_0 = v_1$ puisque $H(P)$ est sans torsion.

REMARQUE 3: Compte tenu de l'inégalité $0 < d < 2g$ (condition (i)) et du lemme de Clifford, l'hypothèse $d > 2r$ est toujours satisfaite, sauf dans les deux cas suivants:

(a) g_d^r est le système canonique g_{2g-2}^{g-1};

(b) C est hyperelliptique, et g_d^r est un multiple du système hyperelliptique g_2^1.

La conclusion de la prop. 1 est de fait inexacte dans ces deux cas. Dans le cas (a) , l'une des variétés V_i est égale à P, tandis que l'autre est un diviseur Θ de P. Le cas des courbes hyperelliptiques sera considéré au §3.

Nous allons maintenant calculer la classe de cohomologie des sous-variétés V_i dans P; fixons auparavant quelques notations. Nous désignerons par

$$\theta \in H^2(JC) \qquad \tilde{\theta} \in H^2(J\tilde{C}) \qquad \xi \in H^2(P)$$

les polarisations principales de JC, $J\tilde{C}$ et P. Rappelons les formules qui les relient ([M]); si i est le plongement canonique de P dans $J\tilde{C}$ et $q: J\tilde{C} \to P$ le morphisme tel que $i \circ q = 1 - \sigma$, on a:

$$i^*\tilde{\theta} = 2\xi \tag{1}$$

$$2\tilde{\theta} = N^*\theta + q^*\xi \tag{2}$$

On sait d'autre part [Mc] que la cohomologie de $C^{(d)}$ est engendrée par $\varphi^*H(JC)$ et par un élément $\eta \in H^2(C^{(d)})$; pour tout $k \geq 0$ et tout diviseur effectif E de degré k, η^k est la classe de l'image de $C^{(d-k)}$ par le plongement $(x_1 + \cdots + x_{d-k}) \mapsto x_1 + \cdots + x_{d-k} + E$. On a en particulier pour tout $k \geq 0$:

$$\varphi_*\eta^k = \frac{\theta^{k+g-d}}{(k+g-d)!} \tag{3}$$

Si on note $\tilde{\eta}$ l'élément analogue de $H^2(\tilde{C}^{(d)})$, on a de même

$$\varphi_*\tilde{\eta}^k = \frac{\tilde{\theta}^{k+2g-1-d}}{(k+2g-1-d)!} \tag{4}$$

ainsi que

$$(\pi^{(d)})^*\eta = 2\tilde{\eta} \tag{5}$$

Rappelons enfin que si $f: X \to Y$ est un morphisme de variétés lisses et propres, et si $x \in H(X)$, $y \in H(Y)$, on a

$$f_*(x \cdot f^*y) = (f_*x) \cdot y \qquad \text{(formule de projection).}$$

PROPOSITION 2: *La classe du cycle* $V_0 + V_1$ *dans* $H^{2(g-1-r)}(P)$ *est* $2^{d-2r}\dfrac{\xi^{g-1-r}}{(g-1-r)!}$.

DÉMONSTRATION: Le point de départ est la formule de Macdonald [Mc]: la classe de cohomologie de g_d^r dans $C^{(d)}$ est la composante de degré $2d-2r$ de $(1+\eta)^{d-r-g}e^{\varphi^*\theta}$; autrement dit:

$$cl_{C^{(d)}}(g_d^r) = \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g}{\alpha} \eta^\alpha \frac{\varphi^*\theta^\beta}{\beta!}$$

Par conséquent, compte tenu de (5), la classe de S dans $H^{2d-2r}(\tilde{C}^{(d)})$ est

$$(\pi^{(d)})^* cl_{C^{(d)}}(g_d^r) = \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g}{\alpha} 2^\alpha \tilde{\eta}^\alpha \frac{\tilde{\varphi}^* N^*\theta^\beta}{\beta!}$$

On obtient la classe de V dans $H^{2(2g-1-r)}(J\tilde{C})$ en appliquant $\tilde{\varphi}_*$ à l'expression précédente; en utilisant (4) et la formule de projection, on trouve:

$$cl_{J\tilde{C}}(V) = \sum_{\alpha+\beta=d-r} \binom{d-r-g}{\alpha} 2^\alpha \frac{\tilde{\theta}^{\alpha+2g-1-d}}{(\alpha+2g-1-d)!} \frac{N^*\theta^\beta}{\beta!}$$

soit, en remplacant $2\tilde{\theta}$ par $N^*\theta + q^*\xi$ (formule (2)) et en développant:

$$cl_{J\tilde{C}}(V) = 2^{d-2g+1} \sum \binom{d-r-g}{d-r-\beta} \frac{N^*\theta^{\lambda+\beta}}{\lambda!\,\beta!} \frac{q^*\xi^\mu}{\mu!}, \tag{6}$$

la somme étant prise sur les triplets d'entiers positifs β, λ, μ tels que $\beta + \lambda + \mu = 2g-1-r$. Identifions V_1 à une sous-variété de P par translation. Comme $q \circ i = 2_P$, on a:

$$cl_P(V_0) + cl_P(V_1) = 2^{-2r} q_*(cl_{J\tilde{C}}(V))$$

Pour calculer cette expression, observons que l'homomorphisme

$q_*N^*: H^k(JC) \to H^{k-2g}(P)$ est nul pour tout $k \neq 2g$, pour des raisons de degré; pour $k = 2g$, on a:

$$q_*N^*cl_{JC}(o) = q_*(cl_{J\tilde{C}}(P) + cl_{J\tilde{C}}(P_1)) = 2\deg(2_P) = 2^{2g-1}.$$

En résumé, on a:

$$q_*N^*\frac{\theta^m}{m!} = 0 \text{ pour } m \neq g$$

$$= 2^{2g-1} \text{ pour } m = g.$$

Il en résulte que dans l'expression (6), seuls les termes de la somme pour lesquels $\lambda + \beta = g$ ont une image par q_* non nulle. Pour ces termes on a $\mu = g - 1 - r$, et par suite:

$$cl_P(V_0) + cl_P(V_1) = 2^{d-2r}\frac{\xi^{g-1-r}}{(g-1-r)!}\sum_{\beta=0}^{d-r}\binom{d-r-g}{d-r-\beta}\binom{g}{\beta}$$

Pour prouver la proposition, il reste à montrer que le terme

$$\sum_{\beta=0}^{d-r}\binom{d-r-g}{d-r-\beta}\binom{g}{\beta}$$

est égal à 1; or c'est le coefficient de t^{d-r} dans le développement en série de $(1+t)^{d-r-g}(1+t)^g = (1+t)^{d-r}$, d'où le résultat.

En mettant bout à bout les propositions 1 et 2, on obtient le résultat principal de cet article:

Théorème 1: *Si $d > 2r$, la classe dans $H^{2(g-1-r)}(P)$ de la sous-variété spéciale V_i ($i = 0$ ou 1) associée au système linéaire g_d^r est* $2^{d-2r-1}\dfrac{\xi^{g-1-r}}{(g-1-r)!}$.

Rappelons (remarque 3) que la condition $d > 2r$ signifie que g_d^r n'est pas le système canonique et de plus, si C est hyperelliptique, que g_d^r n'est pas un multiple du système g_2^1.

Remarque 4: On peut, avec un peu de travail, étendre le théorème 1 aux variétés de Prym généralisées associées à des courbes $\tilde{C}$, C à points doubles ordinaires (cf. [B1]; il faut dans les définitions du §1 remplacer les produits symétriques $C^{(d)}$, $\tilde{C}^{(d)}$ par les variétés $\mathrm{Div}^d(C)$,

$\mathrm{Div}^d(\tilde{C})$ qui paramètrent les diviseurs de Cartier effectifs de degré d sur C, $\tilde{C}$). Nous laissons cet exercice au lecteur. Notons que dans la plupart des cas, la situation (C, g_d^r) provient par spécialisation d'une situation $(\bar{C}, \bar{g}_d^r)$ où $\bar{C}$ est *lisse*: dans ce cas on obtient immédiatement le théorème 1 pour (C, g_d^r) par un argument de déformation.

§2. Compléments sur les sous-variétés spéciales

On se propose dans ce paragraphe de préciser la structure des variétés S_i et V_i. Mentionnons d'abord un résultat de Welters [W]:

Proposition 3: *Supposons* $r \geq 1$.

(a) *Les variétés* S_0 *et* S_1 *sont connexes.*

(b) *Soit* D *un diviseur de* S, *et soit* A *le plus grand diviseur effectif sur* C *tel que* $\pi^* A \leq D$. *Alors* S *est lisse en* D *si et seulement si* $h^\circ(L(-A)) = h^\circ(L) - \deg A$.

Corollaire: *Supposons le système* g_d^r *sans point base, et soit* $f: C \to \mathbb{P}^r$ *le morphisme qu'il définit. On fait les deux hypothèses suivantes*:

(a) *Chaque fibre de* f *contient au plus un point de ramification, d'indice* ≤ 3;

(b) *si* $r > 1$, f *est un morphisme birationnel de* C *sur* $f(C)$.

Alors les variétés S_i *sont normales et irréductibles*; *les variétés* V_i *sont irréductibles, et de dimension* r *si* $d > 2r$. *Les morphismes* $\tilde{\varphi}_i : S_i \to V_i$ *sont birationnels.*

Démonstration: Notons $r: S \to \check{\mathbb{P}}^r = g_d^r$ la restriction de $\pi^{(d)}$. Le morphisme r étant fini et plat, S est de Cohen-Macaulay; il suffit donc de vérifier que ses singularités sont de codimension ≥ 2.

Soient D un diviseur de S, A le plus grand diviseur effectif sur C tel que $\pi^* A \leq D$, et $h = r(D)$. D'après la prop. 3, pour que D soit un point singulier de S, il faut que A soit non nul; ceci se produit dans l'un des cas suivants:

(i) (si $r > 1$) h est tangent à $f(C)$;

(ii) h passe par un point de ramification de f.

Soit h un hyperplan générique satisfaisant à (i) (resp. (ii)). Alors compte tenu de (a) et (b) le diviseur f^*h s'écrit $ep_0 + p_1 + \cdots + p_{d-e}$, où les p_i sont des points distincts de C et où $e = 2$ (resp. $e \leq 3$). On a donc $A \leq p_0$, et S est lisse au-dessus de h par la prop. 3. Il en résulte que S_i est lisse en codimension 1, donc normale, donc irréductible (prop. 3, (a)). Par suite V_i est irréductible; si $d > 2r$, sa classe dans $H^{2(g-1-r)}(P)$ est non nulle (Th. 1), de sorte que V_i est de dimension r et que $\tilde{\varphi}_i$ est birationnel (remarque 1 du §1).

§3. Le cas $r = 1$

La courbe C est munie dans ce cas d'un g_d^1, que nous supposerons sans point base. La variété S_i est alors une courbe, munie canoniquement d'un morphisme $S_i \to \mathbb{P}^1$ de degré 2^{d-1} (c'est-à-dire d'une système $g^1_{2^{d-1}}$).

a. *Courbes hyperelliptiques*

Supposons $d = 2$, de sorte que C est hyperelliptique; soient $f: C \to \mathbb{P}^1$ le revêtement double canonique, et R le lieu de ramification de f dans $\mathbb{P}^1$. Rappelons que tout revêtement double étale $\pi: \tilde{C} \to C$ se décrite de la façon suivante (cf. par exemple [M] p. 346): on se donne une partition $R = R_0 \cup R_1$ de R en deux sous-ensembles disjoints non vides, ayant un nombre pair d'éléments; soient C_i $(i = 0, 1)$ le revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié le long de R_i et σ_i l'involution de C_i correspondante. On prend $C = C_0 \times_{\mathbb{P}^1} C_1$, et $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1)$. La variété de Prym P est isomorphe à $JC_0 \times JC_1$; la variété S_i s'identifie canoniquement à la courbe hyperelliptique C_i. Soit C_i' l'image de C_i dans JC_i (isomorphe à C_i si $g(C_i) \geq 1$, à un point si C_i est rationnelle). Les sous-variétés spéciales de P associées au système g_2^1 sont (à translation près) $C_0' \times \{0\}$ et $\{0\} \times C_1'$.

b. *Courbes trigonales*

Supposons $d = 3$. La courbe S_0 (de même que S_1, qui lui est isomorphe) est lisse et irréductible (§2, corollaire); c'est une courbe tétragonale, c'est-à-dire admettant un g_4^1. Son image dans P a pour classe de cohomologie $\dfrac{\xi^{g-2}}{(g-2)!}$ (théorème 1). Du critère de Matsusaka résulte alors le *théorème de Recillas* ([Re]):

THÉORÈME 2: *La variété de Prym* (P, ξ) *est isomorphe à la jacobienne de la courbe* S_0.

c. *Courbes tétragonales*

Supposons maintenant $d = 4$, et aussi, pour simplifier, que le morphisme $f: C \to \mathbb{P}^1$ de degré 4 admette au plus un point de ramification dans chaque fibre, d'indice ≤ 3. Les courbes S_0 et S_1 sont alors lisses et irréductibles (§2, corollaire); l'involution $\sigma^{(4)}$ de $\tilde{C}^{(4)}$ induit une involution sans point fixe σ_i de S_i ($i = 0, 1$). Pour un choix convenable de l'application $\tilde{\varphi}$, l'image V_i de S_i dans P (isomorphe à S_i) est stable par (-1_P), et sa classe de cohomologie dans P est $2\frac{\xi^{g-2}}{(g-2)!}$. Un résultat de Masiewicki [Ma] entraîne alors le théorème suivant (*construction tétragonale* de Donagi, [D]):

THÉORÈME 3: *Les variétés de Prym des paires* $(S_0, S_0/\sigma_0)$ *et* $(S_1, S_1/\sigma_1)$ *sont isomorphes à* P.

Remarquons que les courbes S_0/σ_0 et S_1/σ_1 sont elles-mêmes tétragonales. Ce théorème a des conséquences remarquables, pour lesquelles nous renvoyons à [D]; parmi celles-ci figure en particulier le fait que le théorème de Torelli pour les variétés de Prym est *faux* quel que soit le genre.

§4. L'hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4$

Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$.† Rappelons (d'après [C-G], [T2], ...) comment la jacobienne intermédiaire JX s'interprète comme une variété de Prym. Soit F la *surface de Fano* associée à X, c'est-à-dire la variété des droites de $\mathbb{P}^4$ contenues dans X. On choisit une droite $l \in F$ assez générale (de manière précise, on suppose que l est de 1e espèce, cf. [C-G] §6); la variété des droites contenues dans X et incidentes à l est alors une courbe lisse connexe $\tilde{C}$ contenue dans F.

Soit X_l la variété obtenue en éclatant l dans X. La projection de centre l définit un morphisme $p: X_l \to \mathbb{P}^2$, qui fait de X_l *un fibré en coniques*: il existe une courbe $C \subset \mathbb{P}^2$ telle que la fibre $p^{-1}(t)$ soit une conique lisse pour $t \notin C$, et soit une paire de droites concourantes (incidentes à l) pour $t \in C$. On en déduit un revêtement étale double $\pi: \tilde{C} \to C$; la courbe C est une quintique lisse, donc munie d'un système linéaire g^2_5. Le faisceau inversible η sur C d'ordre deux ($\eta^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_C$) associé à π satisfait à $h^\circ(C, \mathcal{O}_C(1) \otimes \eta) = 1$ (on note $\mathcal{O}_C(1)$ la restriction à C du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$).

† Dans ce § et le suivant, nous prenons $K = \mathbf{C}$ pour disposer du langage des jacobiennes intermédiaires. Les énoncés et démonstrations s'étendent aussitôt en toute caractéristique $\neq 2$ en remplacant JX par le groupe de Chow comme dans [B2].

Considérons l'application d'Abel-Jacobi $\alpha : F \to JX$ (définie à translation près). Par restriction à $\tilde{C}$, on en déduit un homomorphisme $v : J\tilde{C} \to JX$; puisque les fibres $p^{-1}(t)$ pour $t \in \mathbb{P}^2$ sont toutes linéairement équivalentes, on a $v(\pi^* JC) = \{0\}$, de sorte que v se factorise en

$$v : J\tilde{C} \xrightarrow{q} P \xrightarrow{u} JX$$

où P est la variété de Prym associée au revêtement π. L'homomorphisme u est un *isomorphisme*, qui de plus transforme la polarisation principale θ de JX en la polarisation canonique ξ de $P = \mathrm{Prym}(\tilde{C}, C)$.

THÉORÈME 4: *La surface $\alpha(F) \subset JX$ est transformée par l'isomorphisme $u : P \to JX$ en une sous-variété spéciale de P associée au système g_5^2; la classe de $\alpha(F)$ dans $H^6(JX)$ est $\frac{\theta^3}{3!}$. De plus α est un plongement.*

Les deux dernières assertions sont démontrées dans [C-G], par des méthodes de dégénerescence assez délicates; elles jouent un rôle très important dans l'étude de l'hypersurface cubique (théorèmes de Torelli et du "double-six", cf. [C-G] §13).

DÉMONSTRATION: A. *L'isomorphisme $F_l \to S_0$.*

La projection de centre l détermine un morphisme $q' : F - \{l\} \to \check{\mathbb{P}}^2$ (l'image d'une droite f incidente à l en un point x est la projection sur $\mathbb{P}^2$ de l'espace tangent à X en x). Notons $\epsilon : F_l \to F$ l'éclatement du point l de F; on vérifie facilement, en utilisant des coordonnées locales ([C-G], 6.14), que q' se prolonge en un morphisme $q : F_l \to \check{\mathbb{P}}^2$.

Soit f une droite de F, suffisamment générale pour que l'hyperplan engendré par l et f coupe X suivant une surface lisse Σ_f. Considérons l'ensemble $D(f)$ des droites de $\tilde{C}$ qui sont incidentes à f. Dans la surface cubique Σ_f, il existe 5 paires de droites coplanaires incidentes à f, correspondant aux 5 coniques dégénérées au-dessus des 5 points de $p(f) \cap C$; dans chacune de ces paires, une et une seule des deux droites rencontre f. Autrement dit, l'image directe par π du diviseur $D(f) \subset \tilde{C}$ est le diviseur découpé sur C par la droite $q(f)$. Soit $S = S_0 \cup S_1$ la sous-variété de $\tilde{C}^{(5)}$ associée au système linéaire g_5^2, et soit $r : S \to g_5^2 = \check{\mathbb{P}}^2$ le morphisme déduit de $\pi^{(5)}$. Il résulte de ce qui précède que l'application $f \mapsto D(f)$ définit une application rationnelle

$D: F_l \dashrightarrow S$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_l \arrow[rr, dashed, "D"] \arrow[dr, "q"'] & & S \arrow[dl, "r"] \\ & \check{\mathbb{P}}^2 & \end{tikzcd}$$

On va montrer que D est en fait un *isomorphisme* de F_l sur l'une des composantes S_0 ou S_1 de S. Cela résultera aussitôt des faits suivants:

(i) les morphismes q et r sont finis; pour un point générique $t \in \check{\mathbb{P}}^2$, on a Card $q^{-1}(t) = \frac{1}{2}$Card $r^{-1}(t) = 16$.

(ii) Les surfaces F_l et S_i $(i = 0, 1)$ sont normales et connexes.

Les assertions sur F_l sont démontrées dans [C-G], et celles sur S_i résultent du §2, corollaire. Il reste à démontrer que q est fini, c'est-à-dire que tout hyperplan H passant par l ne contient qu'un nombre fini de droites de F. Or si la surface cubique $X \cap H$ contenait une infinité de droites, elle serait un cône sur une courbe elliptique, et la droite l serait de deuxième espèce, ce qui contredit l'hypothèse.

Nous appellerons désormais S_0 la composante de S égale à $D(F_l)$.

B. *L'égalité* $\alpha(F) = V_1$.

Normalisons l'application d'Abel-Jacobi $\alpha: F \to JX$ et le morphisme canonique $\tilde{\varphi}: S_0 \to P$ de facon que $\alpha(l) = 0$ et $\tilde{\varphi}(D(f_0)) = 0$ quel que soit $f_0 \in \epsilon^{-1}(l)$. Montrons que le diagramme

(7)
$$\begin{tikzcd} F_l \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\alpha \circ \epsilon"'] & S_0 \arrow[d, "-\tilde{\varphi}"] \\ JX & P \arrow[l, "u"] \end{tikzcd}$$

est commutatif; il suffit de vérifier que, pour une droite *générique* f de F, on a

$$\alpha(f) = -u \circ \tilde{\varphi}(D(f))$$

ou encore, puisque F est connexe,

$$2\alpha(f) = -2u \circ \tilde{\varphi}(D(f))$$

Choisissons un point f_0 de $\epsilon^{-1}(l)$; notons $D(f) = \Sigma_{i=1}^{5} f_i$, $D(f_0) =$

$\Sigma_{i=1}^5 f_i^0$. On a

$$2u \circ \tilde{\varphi}(D(f)) = u \circ q(D(f) - D(f_0)) = v(D(f) - D(f_0))$$
$$= \sum_i \alpha(f_i) - \sum_i \alpha(f_i^0),$$

et il suffit donc de montrer que l'élément $2\alpha(f) + \Sigma_i\, \alpha(f_i)$ de JX est indépendant de f.

Or on a dans Pic (Σ_f) la relation

$$\Sigma f_i = 3h - 2l - 2f \tag{8}$$

où h est la classe dans Pic (Σ_f) d'une section hyperplane. Pour le voir, on peut identifier Σ_f à $\mathbb{P}^2$ éclaté en 6 points, de facon que les 6 diviseurs exceptionnels correspondants $(e_i)_{1 \le i \le 6}$ vérifient $e_5 = l$, $e_6 = f$. Si d désigne la classe d'une droite générique de $\mathbb{P}^2$, les droites f_i ont pour classe dans Pic (Σ_f)

$$d - l - f \text{ et } 2d - \sum_{i \neq m} e_i \quad (m = 1, \ldots, 4);$$

on en déduit immédiatement la formule (8).

Le cycle $2f + \Sigma f_i + (2l - 3h)$ est linéairement équivalent à zéro dans Σ_f, donc dans X. Par suite l'élément $\alpha(2f + \Sigma f_i)$ de JX est indépendant de f; ceci prouve la commutativité du diagramme (7).

Par suite la sous-variété $-\tilde{\varphi}(S_0)$ de P est égale (à translation près) à la sous-variété spéciale V_1 de P associée au système linéaire g_5^2 sur C; ceci prouve la première assertion du théorème. Le théorème 1 montre alors que la classe de $\alpha(F)$ dans JX est $\frac{\theta^3}{3!}$.

C. *Injectivité de α*

Il reste à montrer que α est un plongement, c'est-à-dire que le morphisme $\tilde{\varphi}_0 : S_0 \to V_0$ est l'éclatement d'un point dans V_0. Compte tenu de la remarque 1 du §1, il s'agit de montrer qu'il existe dans V_0 un seul fibré en droites L tel que $h^\circ(L) \geq 2$.

– *existence*: considérons l'application $g : \tilde{C} \to l$ qui associe à une droite de $\tilde{C}$ son point d'intersection avec l. C'est un morphisme de degré 5, qui correspond donc à un fibré en droites M de degré 5 sur $\tilde{C}$, avec $h^\circ(M) = 2$; si $x \in l$, l'image par π du diviseur $g^*[x]$ est le diviseur découpé sur C par la projection de l'hyperplan tangent en x à X, donc

M ou σ^*M appartient à V_0.†

– *unicité*: Soit L un fibré en droites sur $\tilde{C}$ tel que $N(L) = \mathcal{O}_C(1)$ et $h^0(L) \geq 2$. Puisque

$$h^\circ(\tilde{C}, \pi^*\mathcal{O}_C(1)) = h^\circ(C, \mathcal{O}_C(1)) + h^\circ(C, \mathcal{O}_C(1) \otimes \eta) = 4,$$

le système linéaire $|\pi^*\mathcal{O}_C(1)|$, qui est sans point base, définit un morphisme $j : \tilde{C} \to \mathbb{P}^3$, birationnel sur son image. La relation $\pi^*\mathcal{O}_C(1) \cong L \otimes \sigma^*L$ entraîne que $j(\tilde{C})$ est contenue dans une quadrique Q_L de rang 3 ou 4, les deux systèmes de génératrices (éventuellement confondus) de Q_L découpant sur $j(\tilde{C})$ la partie mobile des systèmes $|L|$ et $|\sigma^*L|$ (cf. [A-M], §1). Puisque la courbe $j(\tilde{C})$ est de degré 10, elle est contenue dans une quadrique de $\mathbb{P}^3$ au plus; on a donc $Q_L = Q_M$ et, puisque $|M|$ est sans point base, $L = M$ ou σ^*M. Ceci achève la démonstration du théorème.

§5. L'intersection de trois quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+4}$

Soit X une variété lisse de dimension $2n+1$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2n+4}$, intersection complète de 3 quadriques. Rappelons, d'après [B2], comment la jacobienne intermédiaire JX s'interprète comme variété de Prym. Soit Π le système linéaire des quadriques de $\mathbb{P}^{2n+4}$ contenant X; c'est un plan projectif. La courbe $C \subset \Pi$ formée des quadriques singulières est une courbe de degré $2n+5$, n'ayant que des points doubles ordinaires. Pour simplifier nous supposerons que C est lisse (ce qui est la situation générique; cf. remarque 2 plus loin pour le cas singulier). Les cônes de C sont alors de rang $2n+4$, donc possèdent deux systèmes de génératrices, ce qui définit un revêtement étale $\pi : \tilde{C} \to C$. Une telle génératrice découpe sur X un cycle de dimension n; on en déduit une application d'Abel-Jacobi de $\tilde{C}$ dans JX, d'où un homomorphisme $v : J\tilde{C} \to JX$, qui comme dans le cas de la cubique se factorise en

$$v : J\tilde{C} \xrightarrow{q} P \xrightarrow{u} JX.$$

L'homomorphisme u est un *isomorphisme*, qui transforme la polarisation principale θ de JX en la polarisation ξ de $P = \mathrm{Prym}\,(\tilde{C}, C)$.

La jacobienne intermédiaire JX paramètre les cycles de dimension

† On peut montrer, en analysant plus précisément le morphisme $F_l \to S_0$, qu'on a en fait $M \in V_1$.

n sur X; nous nous intéressons ici aux *quadriques de dimension n*, éventuellement singulières, contenues dans X (nous dirons par la suite, pour abréger, n-quadriques de X). Soient T le schéma de Hilbert des n-quadriques de X, et $\alpha : T \to JX$ l'application d'Abel-Jacobi (définie à translation près). Notons d'autre part g^2_{2n+5} les système linéaire sur C découpé par les droites de Π.

THÉORÈME 5: *On suppose la courbe C lisse. Alors T est une surface irréductible et normale, α est un plongement, la surface $\alpha(T)$ correspond par l'isomorphisme u à une sous-variété spéciale de P associée au système g^2_{2n+5}; la classe de cohomologie de $\alpha(T)$ dans JX est* $2^{2n}\dfrac{\theta^{j-2}}{(j-2)!}$, *avec* $j = \dim JX = (n+1)(2n+5)$.

EXEMPLES: (1) $n = 0$. Une 0-quadrique est un diviseur de degré 2 sur la courbe X. La surface T s'identifie donc au carré symétrique $X^{(2)}$, l'application α correspondant au plongement naturel de $X^{(2)}$ dans JX. Le fait que la classe de $X^{(2)}$ dans $H^6(JX)$ est $\dfrac{\theta^3}{3!}$ est évidemment bien connu.

(2) $n = 1$. Le solide X est alors une variété de Fano d'indice 1 ([I]); la surface T est la surface des coniques contenues dans X, surface dont le rôle pour les variétés de Fano semble important. Le théorème 5 montre, entre autres, que la classe de cohomologie de cette surface dans JX est $4\dfrac{\theta^{12}}{12!}$.

L'interprétation dans ce cas de la surface T en termes de variétés de Prym a déjà été remarquée par Tjurin ([T1]).

Démonstration du théorème 5:

Soit q une n-quadrique de X; nous noterons $\langle q \rangle$ le $(n+1)$-plan qu'elle engendre. L'ensemble des quadriques de Π contenant $\langle q \rangle$ est une droite $p(q)$ de Π, c'est-à-dire un point du plan projectif dual $\check{\Pi}$; on obtient ainsi un morphisme $p : T \to \check{\Pi}$.

Notons que la quadrique q, égale à $\langle q \rangle \cap X$, est déterminée par $\langle q \rangle$; pour toute droite l de Π, la fibre $p^{-1}(l)$ s'identifie donc canoniquement au schéma de Hilbert des $(n+1)$-plans contenus dans la variété V_l, intersection des quadriques du pinceau l.

PROPOSITION 4: *La variété T est une surface normale, et le morphisme $p : T \to \check{\Pi}$ est fini.*

La démonstration de cette proposition est très technique; nous montrerons d'abord comment le théorème s'en déduit.

A. *L'isomorphisme* $T \xrightarrow{\sim} S_0$.

Soit q une n-quadrique de X, suffisamment générale pour que la droite $p(q)$ soit transverse à C. Soit t un point de $p(q) \cap C$, correspondant à un cône contenant $\langle q \rangle$; le sommet s de ce cône n'appartient pas à X (sans quoi X serait singulière). Par conséquent s et $\langle q \rangle$ engendrent une génératrice du cône défini par t, ce qui détermine un point $\tilde{t}$ de $\tilde{C}$ au-dessus de t. Posons $D(q) = \Sigma_{t \in p(q) \cap C} \tilde{t}$; alors $\pi_* D(q)$ est le diviseur découpé sur C par la droite $p(q)$, de sorte que $D(q)$ est un point de la variété spéciale S associée au système g^2_{2n+5}. On a ainsi défini une application rationnelle $D: T \dashrightarrow S$, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, dashed, "D"] \arrow[dr, "p"'] & & S \arrow[dl, "r"] \\ & \check{\Pi} & \end{tikzcd}$$

D'après le corollaire du §2, la surface S est normale, et ses deux composantes S_0 et S_1 sont irréductibles; chacune d'elles est de degré 2^{2n+4} sur $\check{\Pi}$. La surface T est normale (prop. 4), et le morphisme p est fini de degré 2^{2n+4}: en effet une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{2r}$ contient 2^{2r} $(r-1)$-plans (cf. [Ro], ou [R] pour une démonstration moderne). On en conclut que D est un *isomorphisme* de T sur une des surfaces S_i, que nous noterons désormais S_0.

B. *L'égalité* $\alpha(T) = V_0$.

Il s'agit maintenant de démontrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\alpha"'] & S_0 \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ JX & P \arrow[l, "u"] \end{tikzcd}$$

est commutatif à translation près. Il suffit de prouver que, pour une quadrique *générique* q de T, on a

$$2\alpha(q) = 2u \circ \tilde{\varphi}(D(q)) + C^{te}$$

ou encore, si $D(q) = \Sigma_{i=1}^{2n+5} \tilde{t}_i$,

$$2\alpha(q) - \sum_i \gamma(\tilde{t}_i) = C^{te}.$$

Soient L le $(n+1)$-plan engendré par q, et V l'intersection des quadriques de Π contenant L; on peut supposer V lisse puisque q est générique. Notons $G_X(\tilde{t}_i)$ (resp. $G_V(\tilde{t}_i)$) l'intersection avec X (resp. avec V) d'une génératrice du cône t_i appartenant à la famille $\tilde{t}_i$. Le cycle $2q - \Sigma_i G_X(\tilde{t}_i)$ est la trace sur X du cycle $2L - \Sigma_i G_V(\tilde{t}_i)$. Or $G_V(\tilde{t}_i)$ est (à équivalence linéaire près) l'intersection de la génératrice du cône t_i contenant L et d'une autre quadrique du pinceau; cette intersection se compose du $(n+1)$-plan L et d'un $(n+1)$-plan résiduel L_i, et on a la formule ([R], §3, lemma 6):

$$L \equiv \sum_{i=1}^{2n+5} L_i - (n+2)(H - 2L),$$

où H désigne le cycle découpé sur V par un $(n+2)$-plan de $\mathbb{P}^{2n+4}$, et $\equiv$ dénote l'équivalence linéaire.

Par suite

$$2L - \sum_i G_V(\tilde{t}_i) \equiv 2L - \sum_i (L + L_i) \equiv -(n+2)H,$$

d'où le résultat.

A translation près, $\alpha(T)$ est donc égale à la sous-variété spéciale V_0 associée au système linéaire g^2_{2n+5} sur C. La formule donnant la classe de cohomologie de $\alpha(T)$ résulte alors du théorème 1.

C. *Injectivité de α.*

Pour prouver que α est un plongement, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de faisceau inversible L sur $\tilde{C}$ tel que $N(L) = \mathcal{O}_C(1)$ et $h^\circ(L) \geq 2$ (cf. §1, remarque 1).

Rappelons d'abord que si l'on désigne par η le faisceau inversible sur C tel que $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_C \oplus \eta$, on a $H^\circ(C, \mathcal{O}_C(n+1) \otimes \eta) = 0$ ([B2], chap. VI), d'où en particulier $h^\circ(\tilde{C}, \pi^*\mathcal{O}_C(1)) = 3$.

Soit alors L un faisceau inversible sur $\tilde{C}$ tel que $N(L) = \mathcal{O}_C(1)$ et $h^\circ(L) \geq 2$, et soit M sa partie mobile (sous-faisceau engendré par les sections globales de L). On a

$$h^\circ(M \otimes \sigma^*M) \leq h^\circ(L \otimes \sigma^*L) = h^\circ(\pi^*\mathcal{O}_C(1)) = 3,$$

ce qui entraîne $M \cong \sigma^*M$, et par suite $M = \pi^*N$, où N est un sous-faisceau inversible de $\mathcal{O}_C(1)$ tel que $h^\circ(N) \geq 2$. Mais un tel faisceau est égal à $\mathcal{O}_C(1)$ ou $\mathcal{O}_C(1)(-p)$ pour $p \in C$; alors

$$\deg(C) = \deg(L) \geq 2\deg(N) \geq 2(\deg(C) - 1),$$

d'où contradiction. Ceci achève la démonstration du théorème (modulo la prop. 4).

REMARQUE 1: L'isomorphisme $T \cong S_0$ donne une description fort utile de la "surface de Fano" T, et en particulier de ses singularités. On déduit par exemple de la prop. 3 (§2) que T est lisse si et seulement si la courbe C n'admet ni tritangente, ni bitangente avec un des points de contact d'ordre ≥ 4, ni tangente avec point de contact d'ordre ≥ 6.

REMARQUE 2: Le théorème 5 reste vrai lorsque la courbe C a des points doubles ordinaires, pourvu que C ne contienne pas de droite (cf. §1, remarque 4); la démonstration est essentiellement la même, avec quelques complications techniques supplémentaires. Par contre le cas où C contient une droite l donne lieu à un phénomène particulier: la variété V_l est un cône sur une variété lisse V'_l, intersection de 2 quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+3}$; la variété des $(n+1)$-plans contenus dans V_l est isomorphe à la variété des n-plans contenus dans V'_l. Or celle-ci est une *variété abélienne de dimension* $n+1$: c'est la jacobienne du revêtement double de l ramifié le long de $(C-l) \cap l$ (cf. [R]). La variété T contient donc dans ce cas des composantes exceptionnelles de dimension $n+1$.

REMARQUE 3: Il est naturel, plus généralement, d'associer à tout *fibré en quadriques* X (cf. [B2]) une surface $T \subset JX$: en effet JX s'identifie à la variété de Prym associée à une courbe plane C de degré d, et l'on prend pour T la sous-variété spéciale associée au système g^2_d sur C. Il semble que cette surface ait toujours une interprétation géométrique simple. Outre les exemples des §4 et 5, citons le cas, étudié en détail par Clemens [C], du revêtement double de $\mathbb{P}^3$ ramifié le long d'une quartique admettant un certain nombre de points doubles ordinares. On montre comme ci-dessus que T s'identifie à la surface des "droites" de X; on a dans ce cas $d = 6$, de sorte que la surface T a pour classe de cohomologie $2\dfrac{\theta^{j-2}}{(j-2)!}$, avec $j = \dim JX$. On retrouve ainsi un des résultats de [C].

La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de la prop. 4. Nous avons besoin de quelques préliminaires.

Soit V une variété intersection complète de deux quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+4}$, d'équations $F = 0$ et $G = 0$.

LEMME 1: *Soit L un $(n+1)$-plan contenu dans la partie lisse de V. Alors l'homomorphisme des fibrés normaux $N_{L/\mathbb{P}} \to (N_{V/\mathbb{P}})_{|L}$ induit un isomorphisme $u : H^\circ(L, N_{L/\mathbb{P}}) \to H^\circ(L, (N_{V/\mathbb{P}})_{|L})$. En particulier, on a $H^\circ(L, N_{L/V}) = 0$.*

La seconde assertion est conséquence de la première et de la suite exacte

$$0 \to N_{L/V} \to N_{L/\mathbb{P}} \to (N_{V/\mathbb{P}})_{|L} \to 0.$$

Choisissons un système de coordonnées $(X_0, \ldots, X_{2n+4})$ dans lequel L est défini par les équations $X_1 = \cdots = X_{n+3} = 0$; alors u s'identifie à l'application de $H^\circ(L, \mathcal{O}_L(1)^{n+3})$ dans $H^\circ(L, \mathcal{O}_L(2)^2)$ définie par la matrice $\begin{pmatrix} M_1 \ldots M_{n+3} \\ N_1 \ldots N_{n+3} \end{pmatrix}$, avec $M_i = \left(\dfrac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{|L}$ et $N_j = \left(\dfrac{\partial G}{\partial X_j}\right)_{|L}$.

On a $h^\circ(L, \mathcal{O}_L(1)^{n+3}) = h^\circ(L, \mathcal{O}_L(2)^2) = (n+2)(n+3)$, et par conséquent u n'est pas bijectif si et seulement s'il existe des formes linéaires A_i sur L $(i = 1, \ldots, n+3)$ telles que

$$\sum M_i A_i = \sum N_i A_i = 0.$$

Montrons que cette condition implique que L contient un point singulier de V. D'après le critère jacobien, il s'agit de prouver que la matrice $\begin{pmatrix} M_1 \ldots M_{n+3} \\ N_1 \ldots N_{n+3} \end{pmatrix}$ est de rang ≤ 1 en un point de L, autrement dit que dans $\mathbb{P}^1 \times L$ les $(n+3)$ hypersurfaces

$$\lambda M_i + \mu N_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n+3)$$

ont une intersection non vide.

Supposons que cela ne soit pas le cas. Posons $P = \mathbb{P}^1 \times L$; pour a, $b \in \mathbb{Z}$, notons $\mathcal{O}_P(a, b)$ le faisceau $pr_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \otimes pr_2^* \mathcal{O}_L(b)$. Soient $E = \mathcal{O}_P(-1, -1)^{n+3}$, $v : E \to \mathcal{O}_P$ la forme linéaire définie par $(\lambda M_1 + \mu N_1, \ldots, \lambda M_{n+3} + \mu N_{n+3})$, $N = \operatorname{Ker} v$. L'hypothèse entraîne que

v est surjective, et d'autre part qu'il existe un homomorphisme non nul de $\mathcal{O}_P(-1,-2)$ dans N (défini par les A_i). Considérons la suite exacte (complexe de Koszul)

$$0 \to \Lambda^{n+3}E \to \cdots \to \Lambda^2 E \to E \xrightarrow{v} \mathcal{O}_P \to 0;$$

par produit tensoriel avec $\mathcal{O}_P(1,2)$, on obtient une résolution $K.$ de $N(1,2)$, avec

$$K_p = \Lambda^{p+2}E \otimes \mathcal{O}_P(1,2) = \mathcal{O}_P(-p-1,-p)^{\binom{n+3}{p+2}}$$

On a $H^i(P, K_p) = 0$ pour tout i; il en résulte aussitôt qu'on a $H^\circ(P, N(1,2)) = 0$, d'où contradiction. Ceci démontre le lemme.

LEMME 2: *Supposons que les quadriques contenant V soient de rang $\geq 2n+4$, et que l'une d'elles soit lisse. Alors l'ensemble des $(n+1)$ – plans contenus dans V est fini.*

Démontrons cette assertion par récurrence sur n, le cas $n=-1$ étant évident. Il résulte du lemme 1 et de la théorie des déformations que l'ensemble des $(n+1)$-plans contenus dans la partie lisse de V est fini; d'autre part, l'hypothèse entraîne que V n'a qu'un nombre fini de points singuliers. Il suffit donc de montrer que si s est un point singulier de V, l'ensemble des $(n+1)$-plans de V passant par s est fini.

Soient R une quadrique lisse contenant V et H l'hyperplan tangent à R en s; choisissons un hyperplan L dans H, ne passant pas par s. La variété $V \cap H$ est un cône sur $V \cap L$, de sommet s. Soit Q une quadrique contenant V. Prenons un système de coordonnées tel que $s = (1, 0, \ldots, 0)$ et que H ait pour équation $X_1 = 0$; l'équation de Q s'écrit alors $X_1 A(X_0, \ldots, X_{2n+2}) + \tilde{Q}(X_2, \ldots, X_{2n+2}) = 0$ avec $\deg A = 1$, $\deg \tilde{Q} = 2$. On peut prendre $(X_2, \ldots, X_{2n+2})$ comme coordonnées dans L, de sorte que $\tilde{Q} = 0$ est l'équation de $Q \cap L$; il en résulte aussitôt qu'on a $rg(Q) \leq rg(Q \cap L) + 2$, et qu'il y a égalité si Q est lisse en s.

On en conclut que la variété $V \cap L$ satisfait les conditions du lemme, donc ne contient qu'un nombre fini de n-plans (hypothèse de récurrence). Or un $(n+1)$-plan de V passant par s est déterminé par son intersection avec L, qui est un n-plan de $V \cap L$; ceci démontre le lemme.

Revenons maintenant à la situation de la proposition, dont nous adoptons les notations. Pour toute droite l de Π, la variété V_l, intersection des quadriques de l, vérifie les hypothèses du lemme 2; compte tenu de la remarque précédant la proposition, le lemme 2 entraîne donc que *le morphisme p est fini.*

Soit q une n-quadrique de X. Elle est localement intersection complète dans X, et le fibré normal $N_{q/X}$ apparaît dans la suite exacte

$$0 \to N_{q/X} \to \mathcal{O}_q(1)^{n+3} \oplus \mathcal{O}_q(2) \to \mathcal{O}_q(2)^3 \to 0$$

On en déduit aussitôt qu'on a $h^\circ(q, N_{q/X}) - h^1(q, N_{q/X}) = 2$; la théorie des déformations entraîne alors que toute composante irréductible de T est de dimension ≥ 2. Puisque d'autre part p est fini, on en conclut que *T est une surface* (non nécessairement irréductible).

LEMME 3:† *Supposons que la droite $p(q)$ soit transverse à C ou soit une tangente ordinaire‡ à C. Alors la surface T est lisse au point q.*

Il s'agit de démontrer qu'on a $h^\circ(q, N_{q/X}) = 2$ ou, de manière équivalente, $h^1(q, N_{q/X}) = 0$. Notons L le $(n+1)$-plan engendré par q, et V l'intersection des quadriques de Π contenant L. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^\circ(L, \mathcal{O}_L(1))^{n+3} & \xrightarrow{u} & H^\circ(L, \mathcal{O}_L(2))^2 & & \\ & & \downarrow & & \Big| & & \\ 0 \to H^\circ(q, N_{q/X}) & \to & H^\circ(q, \mathcal{O}_q(1))^{n+3} & \xrightarrow{u_q} & H^\circ(q, \mathcal{O}_q(2))^2 & \to 0 & \qquad (*) \end{array}$$

où u est l'homomorphisme considéré dans le lemme 1, u_q celui déduit de u par restriction à q, et où la ligne (*) est exacte.

On en déduit $H^\circ(q, N_{q/X}) = u^{-1}(E)$, où E est le sous-espace de dimension 2 de $H^\circ(L, \mathcal{O}_L(2))^2$ formé des éléments $(\alpha Q, \beta Q)$ pour $a, \beta \in \mathbb{C}$ (on désigne par Q une équation de q dans L). Si L est contenu dans la partie lisse de V, alors u est bijectif d'après le lemme 1, ce qui entraîne le résultat. C'est le cas notamment lorsque $p(q)$ est transverse à C, puisqu'alors V est lisse.

† Ce lemme n'est pas nécessaire si l'on se borne au cas d'une variété X générique – cf. remarque 4 à la fin de ce §.

‡ C'est-à-dire qui recoupe C en $\deg(C) - 2$ points distincts.

Supposons désormais que $p(q)$ soit une tangente ordinaire à C, et que L ne soit pas contenu dans la partie lisse de V. On peut alors trouver un système de coordonnées dans lequel V a pour équations†

$$F = X_0X_1 + F'(X_2, \ldots, X_{2n+4}) = 0$$

$$G = X_1^2 + G'(X_2, \ldots, X_{2n+4}) = 0$$

où F' et G' sont les équations de deux quadriques dans le sous-espace H de $\mathbb{P}^{2n+4}$ défini par $X_0 = X_1 = 0$; l'hypothèse sur $p(q)$ entraîne que l'intersection de ces deux quadriques (égale à $V \cap H$) est lisse dans H.

L'espace L contient le point singulier $(1, 0, \ldots, 0)$ et est contenu dans l'hyperplan tangent $X_1 = 0$; on peut supposer qu'il est défini par $X_1 = \cdots = X_{n+3} = 0$. Avec les notations de la démonstration du lemme 1, la matrice $\begin{pmatrix} M_1 \ldots M_{n+3} \\ N_1 \ldots N_{n+3} \end{pmatrix}$ de u vérifie alors $M_1 = X_0$, $N_1 = 0$.

Posons $X' = X \cap H$, $q' = q \cap H$; alors q' est une $(n-1)$-quadrique dans X'. Les suites exactes (*) pour q et q' sont reliées par le diagramme commutatif suivant, à lignes et colonnes exactes:

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & H^\circ(q, N_{q/X}) \arrow[r] \arrow[d] & H^\circ(q', N_{q'/X'}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^\circ(q, \mathcal{O}_q(1)) \oplus H^\circ(q, \mathcal{O}_q^{n+2}) \arrow[r] \arrow[d, "w"] & H^\circ((q, \mathcal{O}_q(1)^{n+3}) \arrow[r] \arrow[d, "u_q"] & H^\circ(q', \mathcal{O}_{q'}(1)^{n+2}) \arrow[r] \arrow[d, "u_{q'}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^\circ(q, \mathcal{O}_q(1)^2) \arrow[r] & H^\circ(q, \mathcal{O}_q(2)^2) \arrow[r] \arrow[d] & H^\circ(q', \mathcal{O}_{q'}(2))^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où w est défini par $w(A_1; a_2, \ldots, a_{n+3}) = (A_1 + \Sigma_2^{n+3} a_iM_i, \Sigma_2^{n+3} a_iN_i)$.

On en déduit une suite exacte (lemme du serpent)

$$0 \to \operatorname{Ker} w \to H^\circ(q, N_{q/X}) \to H^\circ(q', N_{q'/X'}) \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker} w$$

† Pour le voir, on peut procéder de la façon suivante: soient $s_0, \ldots, s_{2m+1}$ les sommets des cônes du pinceau, le point s_0 appartenant à V; on prend comme repère de $\mathbb{P}^{2m+2}$ les points $s_0, \ldots, s_{2m+1}$ et un point p polaire de $s_1, \ldots, s_{2m+1}$ par rapport à une quadrique lisse du pinceau.

Puisque $V \cap H$ est lisse, on a $h^\circ(q', N_{q'/X'}) = 2$ d'après le début de la démonstration. D'autre part le noyau et le conoyau de w s'identifient à ceux de la flèche $w' : H^\circ(q, \mathcal{O}_q^{n+2}) \to H^\circ(q, \mathcal{O}_q(1))$ définie par $(N_2, \ldots, N_{n+3})$. Puisque les $n+2$ hyperplans $N_i = 0$ ont un seul point commun (à savoir le point $(1, 0, \ldots, 0)$, unique point singulier de G), il existe entre eux une relation linéaire unique, de sorte qu'on a $\dim \operatorname{Ker} w' = \dim \operatorname{Coker} w' = 1$; il s'agit donc de montrer que la flèche $\partial : H^\circ(q', N_{q'/X'}) \to \operatorname{Coker} w'$ est non nulle. On vérifie facilement que celle-ci est définie de la façon suivante. Soit Q' une équation de q' dans $L \cap H$, telle que $Q = Q' + X_0 M$, avec $\deg(M) = 1$; soit $(A_2, \ldots, A_{n+3})$ un élément de $H^\circ(q', N_{q'/X'}) = \operatorname{Ker} u_{q'}$. Il existe des scalaires α, β tels que $\Sigma_{i=2}^{n+3} A_i M_i = \alpha Q'$, $\Sigma_{i=2}^{n+3} A_i N_i = \beta Q'$; alors $\partial(A_2, \ldots, A_{n+3})$ est la classe dans Coker w' de la forme $-\beta M \in H^\circ(q, \mathcal{O}_q(1))$. Puisque l'application $(A_2, \ldots, A_{n+3}) \to (\alpha, \beta)$ est bijective et que M ne s'annule pas en s (sans quoi s appartiendrait à q, donc à X, et serait un point singulier de X), l'homomorphisme ∂ n'est pas nul, ce qui achève de prouver le lemme 3.

Il résulte de ce lemme que les points singuliers de T ont pour images par p les tangentes non ordinaires à C, qui forment un sous-ensemble fini de $\check{\Pi}$. Puisque p est fini, la surface T n'a donc qu'un nombre fini de points singuliers. Pour conclure qu'elle est normale, il suffit (critère de Serre) de prouver qu'elle est de Cohen-Macaulay. Cela résulte du lemme suivant, que le lecteur étendra sans peine à des situations beaucoup plus générales.

LEMME 4: *La surface T est localement intersection complète.*

Soit $\mathscr{X}$ la variété qui paramètre les intersections complètes lisses de 3 quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+4}$; c'est un ouvert de la grassmannienne des 2-plans dans l'espace des quadriques de $\mathbb{P}^{2n+4}$. Soit $\mathscr{Q}$ la variété des n-quadriques dans $\mathbb{P}^{2n+4}$, et soit Z la sous-variété de $\mathscr{Q} \times \mathscr{X}$ formée des couples (q, X) tels que $q \subset X$. On vérifie aussitôt que la première projection $Z \to \mathscr{Q}$ est lisse, de sorte que Z est lisse. Soit $\pi : Z \to \mathscr{X}$ la seconde projection; pour $X \in \mathscr{X}$, la fibre $\pi^{-1}(X)$ est la surface T_X des n-quadriques de X. On a donc $\dim(Z) = \dim(\mathscr{X}) + 2$; puisque $\mathscr{X}$ est lisse, T_X est localement intersection complète dans la variété lisse Z.

REMARQUE 4: La démonstration montre de plus que lorsque X est *générique*, T_X est lisse – ce qui rend donc inutile dans ce cas le lemme 3.

§6. Cycles effectifs sur les variétés abéliennes

Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée sur $\mathbb{C}$, de dimension n. La classe de cohomologie $\frac{\Theta^p}{p!}$ est un élément non divisible de $H^{2p}(A)$, de type (p,p); si A est générique, toute classe de cohomologie entière de type (p,p) est un multiple de $\frac{\Theta^p}{p!}$.

Dans ce paragraphe, on considère, pour $2 \leq p \leq n-1$, le problème de la représentation de $\frac{\Theta^p}{p!}$ (ou de ses multiples) comme classe de cohomologie d'un cycle *effectif*† sur A. Notons ici les quelques résultats connus dans cette direction:

– Si (A, Θ) est la jacobienne d'une courbe X, la classe $\frac{\Theta^p}{p!}$ est représentable pour tout p par le cycle effectif $X^{(n-p)}$. Inversement si $\frac{\Theta^{n-1}}{(n-1)!}$ est représentable par un cycle effectif, (A, Θ) est une jacobienne (critère de Matsusaka).

– Pour (A, Θ) générique de dimension 4, $\frac{\Theta^2}{2}$ n'est pas repésentable par un cycle effectif ([B-C]).

– En dimension 4 et 5, toutes les variétés abéliennes principalement polarisées sont des variétés de Prym (au sens généralisé de [B1]); on en déduit par exemple que $2\frac{\Theta^{n-1}}{(n-1)!}$ est représentable.

Proposition 5: *Pour toute variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) de dimension 5, la classe $2\frac{\Theta^3}{3!}$ est représentable par un cycle effectif.*

En effet il suffit de le démontrer pour (A, Θ) générique; on peut donc supposer que (A, Θ) est la variété de Prym associée à une courbe lisse C de genre 6. Une telle courbe admet un g_6^2; la sous-variété spéciale de A associée a pour classe de cohomologie $2\frac{\Theta^3}{3!}$ (théorème 1).

† Un problème distinct, mais tout aussi difficile, est la représentation de $\frac{\Theta^p}{p!}$ par un cycle algébrique (non nécessairement effectif).

Remarque 1: Soit $P = \text{Prym}(\tilde{C}, C)$ une variété de Prym admettant une sous-variété spéciale V_0 de classe minimale (c'est-à-dire égale à $\frac{\Theta^p}{p!}$). On est alors dans l'un des deux cas suivants:

(a) C est une courbe hyperelliptique, une courbe trigonale ou une quintique plane; P est une jacobienne.

(b) C est une quintique plane, P est la jacobienne intermédiaire d'un solide cubique et V_0 s'identifie à la surface de Fano.

En effet l'égalité $d = 2r + 1$ (avec $1 \leq r \leq g(C) - 3$) n'a lieu que pour un g_3^1, un g_5^2 ou la série résiduelle d'un g_3^1 (par rapport au diviseur canonique).

Les jacobiennes et les jacobiennes intermédiaires de solides cubiques sont les seuls exemples connus de variétés abéliennes principalement polarisées pour lesquelles une classe minimale soit représentable. En dimension 4 et 5, il est tentant de penser qu'il n'en existe pas d'autre.

Remarque 2: Soit $P = \text{Prym}(\tilde{C}, C)$ une variété de Prym, telle que la courbe C admette un morphisme de degré 2 sur une courbe elliptique. Alors pour tout p, la classe $2\frac{\Theta^p}{p!}$ est représentable par un cycle effectif: en effet C admet une famille (de dimension un) de systèmes g_{2p+2}^p, images réciproques des systèmes g_{p+1}^p sur la courbe elliptique.

Remarque 3: Pour *toute* variété de Prym $(P, \xi) = \text{Prym}(\tilde{C}, C)$ (de dimension n) et tout entier r tel que $0 \leq r \leq n$, la classe $2^r\frac{\xi^{n-r}}{(n-r)!}$ est représentable par un cycle effectif, à savoir l'image de $q \circ \tilde{\varphi} : \tilde{C}^{(r)} \to P$, comme le montre un calcul très simple. La classe de la sous-variété spéciale associée à un g_d^r sur C est plus petite que cette classe "générique" si et seulement si $d \leq 3r$.

BIBLIOGRAPHIE

[A-M] A. Andreotti et A. Mayer: On period relations for abelian integrals on algebraic curves. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 21* (1967) 189–238.

[B1] A. Beauville: Prym varieties and the Schottky problem. *Inventiones Math. 41* (1977) 149–196.

[B2] A. Beauville: Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires. *Annales de l'E.N.S. 10* (1977) 304–379.

[B-C] C. Barton et C.H. Clemens: A result on the integral Chow ring of a generic principally polarized complex abelian variety of dimension four. *Compositio Math. 34* (1977) 49–67.

[C] C.H. CLEMENS: Double solids. A paraître.

[C-G] C.H. CLEMENS et P. GRIFFITHS: The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Ann. of Math. 95* (1972) 281–356.

[D] R. DONAGI: The tetragonal construction. *Bull. Amer. Math. Soc. 4* (1981) 181–185.

[I] V.A. ISKOVSKIH: Fano threefolds I, II. *Math. USSR Izvestija 11* (1977) 485–527; *12* (1978) 469–506.

[M] D. MUMFORD: Prym varieties I. In *Contributions to Analysis*, Academic Press, New York (1974).

[Ma] L. MASIEWICKI: Universal properties of Prym varieties with an application to algebraic curves of genus five. *Trans. Amer. Math. Soc. 222* (1976) 221–240.

[Mc] I.G. MACDONALD: Symmetric products of an algebraic curve. *Topology 1* (1962) 319–343.

[R] M. REID: The complete intersection of two or more quadrics. Cambridge Thesis (1972).

[Re] S. RECILLAS: Jacobians of curves with g_4^1's are the Prym's of trigonal curves. *Bol. Soc. Mat. Mexicana 19* (1974) 9–13.

[Ro] C. ROSATI: Sugli spazi lineari di dimensione massima contenuti in una quartica base di un fascio di quadriche in un spazio a dimensione pari. *Rend. Ist Lombardo 32* (1899) 1267–1273.

[T1] A. TJURIN: On intersection of quadrics. *Russian Math. Surveys 30* (1975) 51–105.

[T2] A. TJURIN: Five lectures on three-dimensional varieties. *Russian Math. Surveys 27* (1972) 1–53.

[W] G.E. WELTERS: Abel-Jacobi isogenies for certain types of Fano threefolds. *Mathematisch Centrum*, Amsterdam (1981).

(Oblatum 16-II-1981 & 8-V-1981)

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91 128 Palaiseau Cédex
France