

# COMPOSITIO MATHEMATICA

CONSTANTIN BĂNICĂ

## Sur les ext-globaux dans une déformation

*Compositio Mathematica*, tome 44, n° 1-3 (1981), p. 17-27

<[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1981\\_\\_44\\_1-3\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1981__44_1-3_17_0)>

© Foundation Compositio Mathematica, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES EXT-GLOBAUX DANS UNE DEFORMATION

par

Constantin Bănică

On ajoute au travail [2] quelques résultats et questions.

### I. La variation des Ext dans une déformation

1. Soient  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme d'espaces annelés,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux  $\mathcal{O}_X$ -modules. Comme on sait, on peut définir des faisceaux relatifs  $\text{Ext}'(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})$  en prenant les faisceaux associés aux préfaisceaux,  $V \mapsto \text{Ext}'_{\mathcal{O}_X}(f^{-1}(V); \mathcal{F}, \mathcal{G})$ . Considerons un diagramme commutatif d'espaces annelés

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 g' \downarrow & & \uparrow g \\
 X' & \xrightarrow{f'} & Y'
 \end{array}$$

Supposons que les fibres des faisceaux structuraux sont des anneaux locaux noethériens et que  $\mathcal{F}$  est localement de présentation finie. En plus, on suppose que

$$(*) \quad \text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X, g'(x)}}(\mathcal{F}_{g'(x)}, \mathcal{O}_{X, x'}) = 0 \text{ pour } i > 0, x' \in X'.$$

Dans cette conditions on peut définir des morphismes:

$$g^*(\text{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})) \rightarrow \text{Ext}^q(f'; \mathcal{F}', \mathcal{G}'),$$

où  $\mathcal{F}' = g'^*(\mathcal{F})$ ,  $\mathcal{G}' = g'^*(\mathcal{G})$  (voir [2] pour détails).

La condition (\*) est remplie pour un diagramme cartésien de schémas noethériens ou d'espaces complexes si  $f$  est plat et si  $\mathcal{F}$  est cohérent sur  $X$  et plat relativement à  $Y$ . On obtient ainsi des morphismes de changement de base pour les Ext-relatifs, en particulier

des morphismes:

$$\mathrm{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y / \mathcal{M}_y \mathrm{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y \rightarrow \mathrm{Ext}_{X_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y),$$

où  $X_y = (f^{-1}(x), \mathcal{O}_X / \mathcal{M}_y \mathcal{O}_X \mid_{f^{-1}(x)})$  et  $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} / \mathcal{M}_y \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}_y = \mathcal{G} / \mathcal{M}_y \mathcal{G}$ .

Par la suite nous nous bornons au cas analytique, mais on peut obtenir des résultats semblables dans le cas algébrique (voir aussi [5], appendice et [8]).

**THÉORÈME: (du complexe)** Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre et plat d'espaces complexes et soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents, plats relativement à  $Y$ .

(i) Supposons que  $\mathrm{Ext}_{X_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = 0$  pour  $q \geq 0$  et tout point  $y$  de  $Y$ . Alors il existe, localement sur  $Y$ , des complexes bornés  $\mathcal{L}'$  de faisceaux libres de rang fini vérifiant la propriété suivante: pour tout changement de base  $g: Y' \rightarrow Y$ , on a des isomorphismes fonctoriels en  $g$

$$\mathrm{Ext}^q(f'; \mathcal{F}', \mathcal{G}') = \mathcal{H}^q(g^* \mathcal{L}'), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Supposons  $Y$  non-singulier et soit  $n_0$  un entier. Alors, il existe, localement sur  $Y$ , des complexes  ${}^{(n_0)}\mathcal{L}'$  vérifiant la propriété de (i) pour des entiers  $q \leq n_0$ .

En utilisant des systèmes simpliciaux de faisceaux (Forster-Knorr, Verdier) on construit des complexes de type Čech sur  $Y$  (localement) qui donnent les Ext-relatifs. Ensuite on modifie ceci en complexes  $\mathcal{L}'$  comme dans l'énoncé; à la différence par rapport au cas des images directes de faisceaux, les complexes de type Čech ne sont pas bornés à droite et ça explique les hypothèses supplémentaires faites (voir [2] pour détails).

**QUESTION:** Eliminer les hypothèses supplémentaires, donc trouver pour un morphisme propre plat  $f: X \rightarrow Y$  d'espaces complexes et deux faisceaux cohérents  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  sur  $X$ , plat relativement à  $Y$ , des complexes  $\mathcal{L}'$  comme dans le théorème.

Faisons aussi la remarque que l'hypothèse asymptotique de (i) est vérifiée si les fibres  $X_y$  sont non-singulières.

2. On peut obtenir pour les Ext-relatif des résultats semblables au cas des images directes de faisceaux: comparaison, changement de base, semi-continuité, continuité, invariance de la caractéristique de

Euler-Poincaré (voir [2] pour détails). Seulement le théorème de continuité nous ne pouvons pas le prouver dans le cas général.

QUESTION: Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre plat d'espaces complexes et  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  faisceaux cohérents sur  $X$ , plats relativement à  $Y$ . Supposons que  $Y$  est réduit et que, pour un entier  $p$ , la fonction  $y \mapsto \dim \text{Ext}_{\mathcal{O}_y}^p(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  est constante. Est-il vrai que  $\text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})$  est localement libre et que les morphismes

$$\text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}) / \mathcal{M}_y, \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_y}^p(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$$

sont isomorphismes?

En utilisant le théorème énoncé plus haut, on peut prouver la question si en plus  $\text{Ext}_{\mathcal{O}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = 0$  pour  $q \geq 0$  (donc, si par exemple  $f$  est lisse) ou si  $Y$  est non-singulier.

Concernant le cas général, nous pouvons seulement le réduire au cas où  $Y$  est une courbe. Esquissons l'argument du pas général d'induction. Supposons  $d = \dim Y \geq 2$  et le résultat prouvé dans dimensions  $< d$ . D'après le théorème de changement de base, il suffit de prouver que pour tout  $y$  de  $Y$  l'application  $\text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_y}^p(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  est surjective. Si  $\mathcal{Y}$  est un idéal cohérent sur  $Y$ , alors la platitude implique:

$$\text{Ext}^p(f \bmod \mathcal{Y}; \mathcal{F}/\mathcal{Y}\mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y}\mathcal{G}) \simeq \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y}\mathcal{G}).$$

Supposons que  $(Y, y) = (Y_1, y) \cup (Y_2, y)$ ,  $Y_1$  et  $Y_2$  étant réduits et soient  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_2$  les idéaux associés. Les fonctions sur  $Y_1, Y_2$  concernant  $\dim \text{Ext}^p$  sont constantes et supposons qu'on peut prouver le théorème de continuité pour les bases  $Y_1, Y_2$ ; montrons qu'on peut tirer d'ici la surjectivité cherchée.

On a la suite exacte (diagonale et différence):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{Y_1} \times \mathcal{O}_{Y_2} \rightarrow \mathcal{O}_{Y_1 \cap Y_2} \rightarrow 0,$$

donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{Y}_1\mathcal{G} \times \mathcal{G}/\mathcal{Y}_2\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Par conséquence on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned} \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y &\rightarrow \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y}_1\mathcal{G})_y \oplus \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y}_2\mathcal{G})_y \\ &\rightarrow \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mathcal{G})_y. \end{aligned}$$

Soit  $\xi \in \text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^p(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$ . Il existe une préimage  $\eta_1 \in \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y}_1 \mathcal{G})_y$ . Soit  $\tau$  l'image de  $\eta_1$  dans  $\text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mathcal{G})_y$ . L'application  $\text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y}_2 \mathcal{G})_y \rightarrow \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)\mathcal{G})_y$  est surjective (conséquence du théorème de continuité sur  $Y_2$ ). Soit  $\eta_2 \in \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y}_2 \mathcal{G})_y$  une préimage de  $\tau$ . On peut donc trouver un élément  $\eta \in \text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y$ , préimage pour la paire  $(\eta_1, \eta_2)$ . L'image de  $\eta$  dans  $\text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^p(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  est  $\xi$  et l'assertion cherchée est prouvée. En utilisant ce truc de type Mayer-Vietoris, on peut supposer dans la démonstration du pas général d'induction que  $Y$  est intègre en  $y$ . Il faut prouver que l'application cobord:

$$\text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^p(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) \rightarrow \text{Ext}^{p+1}(f; \mathcal{F}, \mathcal{M}_y \mathcal{G})_y$$

est nulle. D'après le théorème de comparaison,

$$\text{Ext}^{p+1}(f; \mathcal{F}, \mathcal{M}_y \mathcal{G})_y \xrightarrow[\vec{k}]{\sim} \lim \text{Ext}^{p+1}(f; \mathcal{F}, \mathcal{M}_y \mathcal{G}/\mathcal{M}_y^{k+1} \mathcal{G})_y.$$

Soit  $k \geq 0$  un entier. Supposons qu'on peut trouver des germes  $Z_1, \dots, Z_{n(k)}$  de hypersurfaces réduites passant par  $y$  telles que, pour les idéaux associés  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_{Z_i}$  on a  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cap \dots \cap \mathcal{Y}_{n(k)} \subseteq \mathcal{M}_y^{k+1}$ . Soit  $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_{n(k)}$ , c'est un sous-germe réduit de  $(Y, y)$ , de dimension  $d-1$ . Par induction, le théorème de continuité est supposé vrai sur  $Z$ , donc on peut trouver pour tout  $\xi$  de  $\text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^p(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  une extension à  $\text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{G}/\mathcal{Y} \mathcal{G})_y$ .

Par conséquence, l'image de  $\xi$  dans  $\text{Ext}^p(f; \mathcal{F}, \mathcal{M}_y(\mathcal{G}/\mathcal{Y} \mathcal{G}))_y$  est nulle. Comme  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{M}_y^{k+1}$ , un diagramme commutatif va montrer que l'image de  $\xi$  dans  $\text{Ext}^{p+1}(f; \mathcal{F}, \mathcal{M}_y \mathcal{G}/\mathcal{M}_y^{k+1} \mathcal{G})_y$  est nulle. En somme, l'image de  $\xi$  dans  $\text{Ext}^{p+1}(f; \mathcal{F}, \mathcal{M}_y \mathcal{G})_y$  est nulle. Il faut encore prouver l'existence des  $Z_1, \dots, Z_{n(k)}$ .

Je remercie A. Buium pour l'argument qui suit.

Soit  $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ , c'est une algèbre analytique intègre. Notons par  $\hat{A}$  le complété dans la topologie de  $\mathcal{M}_A$ . Considérons une suite  $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$  de idéaux premiers de hauteur 1 de  $A$  et soient  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots$  des idéaux premiers de  $\hat{A}$  tels que  $\mathcal{Q}_i \cap A = \mathfrak{P}_i$ . Appliquons le théorème de compacité linéaire de Chevalley. Pour tout  $K$ , il y a  $n(K)$  tel que  $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \cap \dots \cap \mathcal{Q}_{n(K)} \subseteq \mathcal{M}_A^{K+1}$ . Alors  $\mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_{n(K)} \subseteq \mathcal{M}_A^{K+1}$ .

Donc le pas général d'induction pour le théorème de continuité est prouvé. Il reste le prouver pour  $\dim Y = 1$  et en utilisant de nouveau le procédé de Mayer-Vietoris on peut même supposer que la courbe  $Y$  est irréductible dans tous les points. Si  $Y$  est régulière le théorème est vrai, mais nous ignorons comment utiliser la normalisation. De même,

nous ignorons également la réponse aux deux questions dans la géométrie algébrique.

Concernant le théorème de semi-continuité, signalons qu'une autre démonstration on peut la trouver dans ([3], Satz 6.7 (3)). Comme conséquence directe du théorème du complexe, voici un énoncé plus général, inspiré par un énoncé analogue de Palamodov sur la cohomologie tangentielle ([11], théorème 4.4).

**THÉORÈME:** *Soient  $f; X \rightarrow Y$  un morphisme propre plat d'espaces complexes et  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  des faisceaux cohérents sur  $X$ , plats relativement à  $Y$ . Alors pour tout couple d'entiers  $(n, N), N \geq n$  et  $N-n$  pair, la fonction  $\tau_{n,N}(y) = \sum_{i=0}^{N-n} (-1)^i \dim \text{Ext}_{X_y}^{n+i}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  est Zariski semi-continue supérieurement.*

**DÉMONSTRATION:** Supposons d'abord que  $Y$  est non-singulier. La question étant locale sur  $Y$ , on peut supposer qu'il existe un complexe  $\mathcal{L}^\bullet$  de  $\mathcal{O}_Y$ -modules libres de rang fini tel que, pour tout  $q \leq N$  et tout  $y$ ,  $\text{Ext}_{X_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) \simeq H^q(\mathcal{L}_y^\bullet / \mathcal{M}_y \mathcal{L}_y^\bullet)$ . Notons  $d_q = \text{rang}(\mathcal{L}^q)$  et  $Z^{i,q} = \text{Coker}(\mathcal{L}^{q-1} \rightarrow \mathcal{L}^q)$ . On a  $\dim \text{Ext}_{X_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = \dim(Z^{i,q} / \mathcal{M}_y Z^{i,q}) + \dim(Z^{i,q+1} / \mathcal{M}_y Z^{i,q+1}) - d_q$ . Par conséquence ( $N-n$  est pair!)  $\tau_{n,N}(y) = \dim(Z^{n,N} / \mathcal{M}_y Z^{n,N}) + \dim(Z^{n,N+1} / \mathcal{M}_y Z^{n,N+1}) + \sum_{i=0}^{N-n} (-1)^{i+1} d_{n+i}$  et on conclut. Si  $Y$  est quelconque, on peut déduire aisément le résultat en considérant une désingularisation. Si on veut éviter ça, on peut faire un raisonnement par induction sur  $\dim Y$  (voir [2] p. 147 pour le cas  $N = n$ ).

**COROLLAIRE:** *Soit  $N \geq 0$  un entier. Alors la fonction  $y \mapsto \sum_{i=0}^N (-1)^i \dim \text{Ext}_{X_y}^i(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  est supérieurement semi-continue si  $N$  est pair, respectivement inférieurement semi-continue si  $N$  est impair.*

*En effet, on peut prendre  $n = 0$  ou  $n = -1$ .*

**COROLLAIRE:** *Soient  $N \geq n$  des entiers et supposons que les fonctions  $y \mapsto \dim \text{Ext}_{X_y}^n(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$ ,  $y \mapsto \dim \text{Ext}_{X_y}^N(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  sont constantes. Alors la fonction  $y \mapsto \sum_{i=0}^{N-n} (-1)^i \dim \text{Ext}_{X_y}^{n+i}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  est constante.*

3. Soit  $\mathcal{H}$  un faisceau cohérent sur l'espace complexe  $Y$  et  $y$  un point de  $Y$ . On peut construire un sous-germe analytique  $(Y', y)$  de  $(Y, y)$ , maximal avec la propriété que la restriction de  $\mathcal{H}$  devient libre ([9], p. 56). D'autre part, pour un couple  $(y, q)$  l'application

$$\text{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \cup \supset f^{-1}(y)}} \text{Ext}_{X|_{\cup}}^q(\mathcal{F}|_{\cup}, \mathcal{G}|_{\cup}) \rightarrow \text{Ext}_{X_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$$
 est sur-

jective (i.e. on peut prolonger des extensions définies sur la fibre analytique dans un voisinage de la fibre) si et seulement si  $Z'^{q+1}$  est libre autour de  $y$ , où  $Z'^{q+1} = \text{Coker}(\mathcal{L}^q \rightarrow \mathcal{L}^{q+1})$ . En combinant on obtient:

**PROPOSITION:** *Supposons remplie une des hypothèses faites dans le théorème du complexe. Alors pour tout couple  $(y, q)$  on peut trouver un sous-germe  $(Y', y)$  de  $(Y, y)$ , maximal avec la propriété que d'après le changement  $Y' \rightarrow Y$ , l'application*

$$\text{Ext}^q(f'; \mathcal{F}', \mathcal{G}')_y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}'_y, \mathcal{G}'_y) = \text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$$

*devient surjective.*

Le résultat doit être vrai sans les hypothèses supplémentaires faites. Remarquons également qu'on peut poser la même question simultanément pour  $q$  et  $q - 1$ . De même, on peut regarder pas seulement des sous-germes, mais des sous-espaces: on obtient ainsi des diverses stratifications pour  $Y$  en liaison avec la variation des invariants  $\text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$ .

Dans ([6], théorème 4.2), en utilisant théorie de Hodge, on démontre pour la cohomologie des fibrés un résultat plus fin.

Nous ignorons la réponse de la:

**QUESTION:** Soient  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre d'espaces complexes,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent plat relativement à  $Y$ ,  $q \geq 0$ ,  $y \in Y$  et  $S$  un sous-espace vectoriel de  $H^q(X_y, \mathcal{F}_y)$ . Existe-il un sous-germe  $(Y', y)$  de  $(Y, y)$ , maximal avec la propriété que l'image du morphisme  $R^q f'_* (\mathcal{F}')_y \rightarrow H^q(X'_y, \mathcal{F}'_y) = H^q(X_y, \mathcal{F}_y)$  contient  $S$  (et une question analogue pour les Ext).

Dans [6] le résultat est prouvé pour  $f$  morphisme régulier de variétés complexes et  $\mathcal{F}$  localement libre.

Donnons maintenant pour les Ext un analogue du théorème 4.4 de [6]. Supposons que  $Y$  est un disque de l'origine de  $\mathbb{C}$ . On va noter par  $E^q$  l'ensemble des éléments de  $\text{Ext}_{\mathcal{X}_0}^q(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$  qui se prolongent dans un voisinage de la fibre  $X_0$ . Soit  $J^q$  l'ensemble des éléments de saut de  $E^q$ , i.e. pour lesquels ils existent des prolongements  $\eta \in \text{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y$  avec la propriété:  $\eta|_{X_y} = 0$  pour tout  $y \neq 0$  petit.

**THÉORÈME:**  $E^q/J^q \simeq \text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$ , pour tout  $y \neq 0$  petit.

**DÉMONSTRATION:** La semi-continuité de Zariski de la fonction

$\dim \text{Ext}^q$  et le fait que  $\dim Y = 1$  implique qu'il existe un entier  $d \geq 0$  tel que, en diminuant éventuellement  $Y$ ,  $\dim \text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = d$  pour tout  $y \neq 0$ . Le théorème de continuité implique que le faisceau  $\mathcal{E} := \text{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})$  est localement libre de rang  $d$  sur  $Y \setminus \{0\}$  et que les morphismes  $\mathcal{E}_y/\mathcal{M}_y \mathcal{E}_y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  sont isomorphismes,  $y \neq 0$ . En particulier,  $d = \text{rang}(\mathcal{E})$ . La partie à torsion  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{E}$  est nulle sur  $Y \setminus \{0\}$  (et  $\mathcal{T}_0 = 0$  exactement pour  $d = \dim \text{Ext}_{\mathcal{X}_0}^q(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$ ) et puisque  $Y$  est régulier de dimension 1,  $\mathcal{E}/\mathcal{T}$  est localement libre. Par conséquent, comme  $(\mathcal{E}/\mathcal{T})_0 \otimes_{\mathcal{O}_0} \mathbb{C} \simeq \mathcal{E}_0/\mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0 + \mathcal{T}_0$   $\dim(\mathcal{E}_0/\mathcal{M}_0 \mathcal{E}_0 + \mathcal{T}_0) = d$ . Comme les éléments de  $\mathcal{T}_0$  sont exactement ceux dont les restrictions aux fibres  $X_y$ ,  $y \neq 0$ , sont nulles, l'application composée  $\mathcal{E}_0 \rightarrow E^q \rightarrow E^q/J^q$  se factorise à une application  $\mathcal{E}_y/\mathcal{M}_y \mathcal{E}_y + \mathcal{T}_y \rightarrow E^q/J^q$  et on vérifie aisément qu'il s'agit d'une bijection. Par conséquent  $\dim(E^q/J^q) = d$  et si  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_s$  sont des sections de  $\mathcal{E}$  dont les images dans  $E^q/J^q$  donne une base, alors leurs images dans  $\text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  ont la même propriété pour  $y \neq 0$ . On obtient alors des isomorphismes cherchés.

Remarquons que l'argument vaut aussi pour la cohomologie et on obtient une extension de [6], théorème 4.4 au cas général (morphisme propre de base surface de Riemann, faisceau cohérent plat relativement à la base).

4. On va noter par  $X_y^{(n)}$  l'espace complexe  $(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X/\mathcal{M}_y^{n+1}\mathcal{O}_X \mid f_{(y)}^{-1})$  et par  $\mathcal{F}_y^{(n)} = \mathcal{F}/\mathcal{M}_y^{n+1}\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}_y^{(n)} = \mathcal{G}/\mathcal{M}_y^{n+1}\mathcal{G}$ .

**THÉORÈME:** Soient  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre et plat d'espaces complexes,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux faisceaux cohérents sur  $X$ , plats relativement à  $Y$  et supposons que  $Y$  est régulier.

(i) Pour tout  $(y, q)$ , la fonction  $n \mapsto \dim \text{Ext}_{\mathcal{X}_y^{(n)}}^q(\mathcal{F}_y^{(n)}, \mathcal{G}_y^{(n)})$  est polynomiale pour  $n \geq 0$ .

(ii). Soit  $(a_1, a_2, \dots)$  une suite d'entiers. Alors pour tout  $q$ , l'ensemble  $\{y \mid \dim \text{Ext}_{\mathcal{X}_y^{(n)}}^q(\mathcal{F}_y^{(n)}, \mathcal{G}_y^{(n)}) \leq a_n, \text{ pour tout } n\}$  est ouvert de Zariski.

(iii). Si pour un  $q$ , le polynôme associé à la fonction  $n \mapsto \dim \text{Ext}_{\mathcal{X}_y^{(n)}}^q(\mathcal{F}_y^{(n)}, \mathcal{G}_y^{(n)})$  ne dépend pas de  $y$ , alors  $\text{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})$  est localement libre et les morphismes  $\text{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})/\mathcal{M}_y \text{Ext}^q(f; \mathcal{F}, \mathcal{G})_y \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  sont bijections,  $y \in Y$ .

**DÉMONSTRATION:** La question est locale sur  $Y$ . On peut appliquer le théorème du complexe et soit  $\mathcal{L}$  un tel complexe. Alors  $\text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y^{(n)}, \mathcal{G}_y^{(n)}) \simeq H^q(\mathcal{L}_y/\mathcal{M}_y^{n+1}\mathcal{L}_y)$  et ensuite on continue comme pour la cohomologie (voir [1] pour détails).

L'assertion (i) vaut aussi dans l'hypothèse  $\text{Ext}_{\mathcal{X}_y}^q(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = 0$  pour



$p \geq 0$  (et doit être vraie en général), mais pour les autres l'hypothèse  $Y$  non-singulier est essentielle.

**COROLLAIRE:** *Supposons que pour un couple  $(y, q)$ ,  $\text{Ext}_{X_y}^i(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = 0$  pour  $n \geq 0$ . Alors  $\text{Ext}_{X_y}^i(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = 0$ .*

## II. Applications

1. On peut utiliser les Ext d'abord pour généraliser aux faisceaux plats des résultats connus pour les fibrés [2]. Par exemple, le théorème de continuité donne le:

**COROLLAIRE:** *Supposons que  $Y$  est réduit et les fibres  $X_y$  sont non-singulières ou que  $Y$  est non-singulier.*

(i) *Si la fonction  $y \mapsto \dim \text{Hom}_{X_y}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y)$  est constante, alors l'application*

$$\varinjlim \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \rightarrow \text{Hom}_{X_y}(\mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y), \quad U \supset f^{-1}(y),$$

*est surjective.*

(ii) *Si la fonction  $y \mapsto \dim \text{End}(\mathcal{F}_y)$  est constante et si  $\mathcal{F}_y \cong \mathcal{G}_y$  pour tout  $y$ , alors  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont localement, par rapport à  $Y$ , isomorphes.*

Dans le cas  $Y$  réduit, faute de pouvoir prouver le théorème de continuité dans le cas général, on a fait l'hypothèse que les fibres  $X_y$  sont non-singulières; le résultat doit être vrai sans cette hypothèse.

**COROLLAIRE:** *Soient  $X_0$  un espace complexe compact,  $Y$  un espace complexe réduit et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X = X_0 \times Y$ , plat par rapport à  $Y$ . Supposons en plus que un des  $X_0$  et  $Y$  est nonsingulier. Alors, si  $\mathcal{F}_y \cong \mathcal{F}_{y'}$  pour tout couple  $(y, y')$ ,  $\mathcal{F}$  est localement trivial par rapport à  $Y$  (i.e. pour tout  $y$  il existe un voisinage  $V$  tel que  $\mathcal{F}|_{X_0 \times V}$  soit isomorphe avec l'image inverse de  $\mathcal{F}_y$  par la projection  $X_0 \times V \rightarrow X_0$ ) (voir [3] pour une autre démonstration qui donne le cas général,  $X_0$  quelconque et  $Y_0$  réduit).*

2. Palamodov [11] a défini des invariants généraux dans la théorie des déformations des espaces complexes. Ceci peuvent se réaliser comme invariants de type Hyper-Ext (Belkilani, Flenner). Comme les considérations précédentes se généralisent en remplaçant les fais-

ceux par des complexes convenables de faisceaux, on peut retrouver et compléter des résultats de Palamodov, voir [2]. Ajoutons les faits suivants. Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre plat d'espaces complexes avec  $Y$  non-singulier et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ , plat relativement à  $Y$ . Alors:

- pour tout  $(y, q)$ , la fonction  $n \mapsto \dim T^q(X_y^{(n)}/Y_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$  est polynomiale pour  $n \geq 0$ ;
- pour tout  $(y, q)$ , l'ensemble

$$\{y' \mid \dim T^q(X_{y'}^{(n)}/Y_{y'}^{(n)}, \mathcal{F}_{y'}^{(n)}) \leq \dim T^q(X_y^{(n)}/Y_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}), \text{ pour tout } n\}$$

est ouvert de Zariski;

-si pour un entier  $q$  le polynôme associé à la fonction  $n \mapsto \dim T^q(X_y^{(n)}/Y_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$  ne dépend pas de  $y$ , alors  $\mathcal{T}^q(f, \mathcal{F})$  est localement libre et  $\mathcal{T}^q(f, \mathcal{F})_y / \mathcal{M}_y \mathcal{T}^q(f, \mathcal{F})_y \simeq T^q(X_y, \mathcal{F}_y)$ ;

-si  $\dim Y = 1$ , alors pour tout  $(y, q)$ ,  $T^q(X_y, \mathcal{F}_y)$  est isomorphe au quotient {les classes prolongeables de  $T^q(X_y, \mathcal{F}_y)$ } / {les classes de saut} si  $y'$  est suffisamment voisin de  $y$ ,  $y \neq y'$ .

Enfin notons, comme conséquence des propriétés de semi-continuité et continuité, le

**COROLLAIRE:** Si pour un couple  $(y, q)$ ,  $T^q(X_y^{(n)}/Y_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}) = 0$  pour  $n \geq 0$ , alors  $T^q(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$  ( $Y$  lisse).

3. Une des méthodes d'étudier les fibrés vectoriels holomorphes de rang 2 est celle de Serre, en utilisant des extensions. Soient  $X$  une variété complexe,  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  des faisceaux inversibles sur  $X$  et  $A$  un sous-espace localement intersection complète de codimension 2. On considère des fibrés  $E$  donnés par des extensions

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow E \rightarrow \mathcal{Y}_A \otimes \mathcal{L}_1 \rightarrow 0.$$

Si  $H^2(X, \mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2) = 0$  et si pour les faisceaux dualisants on a  $\omega_A \simeq \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{-1} \otimes \omega_X \mid A$ , alors on peut trouver des fibrés  $E$  donnés par des extensions (\*); en plus, on peut décider quand le faisceau  $E$  donné par une extension  $\xi \in \text{Ext}^1(\mathcal{Y}_A \otimes \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  est localement libre. Pour paramétriser tels fibrés il faut savoir la variation de  $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{Y}_A \otimes \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ . Le fait suivant, conséquence des résultats précédents, est parfois utile.

**PROPOSITION:** Soient  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre lisse d'espaces complexes,  $A \subset X$  un sous-espace localement intersection complète de

*codimension 2 relativement à  $Y, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  des faisceaux inversibles sur  $X$ . Supposons vérifiée une des conditions suivantes:*

- $\text{Ext}^2(\mathcal{Y}_y \otimes \mathcal{L}_{1,y}, \mathcal{L}_{2,y}) = 0$  pour tout  $y$ ;
- $Y$  réduit et la fonction  $y \mapsto \dim \text{Ext}^2(\mathcal{Y}_y \otimes \mathcal{L}_{1,y}, \mathcal{L}_{2,y})$  est constante;
- $Y$  réduit et la fonction  $y \mapsto \dim \text{Ext}^1(\mathcal{Y}_y \otimes \mathcal{L}_{1,y}, \mathcal{L}_{2,y})$  est constante.

*Alors pour tout changement de base  $Y' \xrightarrow{g} Y$ , les morphismes*

$$g^* \text{Ext}^1(f; \mathcal{Y}_A \otimes \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \rightarrow \text{Ext}^1(f'; \mathcal{Y}_A \otimes \mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2)$$

*sont isomorphismes. En plus, si la troisième condition est vérifiée  $\text{Ext}^1(f; \mathcal{Y}_A \otimes \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  est localement libre.*

Par exemple, en utilisant la proposition et en suivant la question analogue sur le plan projectif, on peut donner une classification des fibrés vectoriels holomorphes de rang 2 topologiquement triviaux sur une surface réglée [4]. Soit  $C$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$  et  $X \xrightarrow{\pi} C$  une surface (géométriquement) réglée. On va noter par  $C_0$  une section comme dans ([7], Ch. V, Proposition 2.8) et on va fixer une fibre  $f_0$ . Un fibré (vectoriel holomorphe, de rang 2)  $E$  sur  $X$  est topologiquement trivial si et seulement si  $c_1(E) = 0, c_2(E) = 0$ . On considère d'abord pour tels fibrés les deux invariants suivants:

- l'entier  $d \geq 0$ : on a  $E|_f = \mathcal{O}_f(d) \otimes \mathcal{O}_f(-d)$  sur la fibre générale  $f$ .
- l'entier  $r$  obtenu par la normalisation suivante:  
 $-r = \inf\{\ell \mid \text{il existe } \mathcal{L} \in \text{Pic } C, \text{ degré } \mathcal{L} = \ell, H^0(X, E(-dC_0) \otimes \pi^* \mathcal{L}) \neq 0\}$  (le théorème de Riemann-Roch assure l'existence de  $r$ ; en plus  $r \geq -g$ ). Si  $E$  est de type  $(d, r)$ , alors il est donné par une extension de la forme suivante (et réciproquement):

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(dC_0 + rf_0) \otimes \pi^*(\mathcal{L}_2) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{Y}_A(-dC_0 - rf_0) \otimes \pi^*(\mathcal{L}_1) \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \text{Pic}^\circ C$  et  $A$  est soit vide (on obtient dans ce cas exactement le fibrés  $E$  uniformes sur les fibres de  $\pi$ ), soit un sous-espace localement intersection complète de dimension zéro (dont le degré est bien déterminé par  $(d, r)$ ).

On utilise ces extensions et la variation des Ext pour obtenir une structure de variété algébrique sur l'ensemble (des classes de isomorphismes) des fibrés  $E$  de type  $(d, r)$  et pour étudier ces variétés.

*Addendum:* Concernant les questions ci-dessus, voir H. Flenner: Eine Bemerkung über relative Ext-Garben. Preprint, Osnabrück, 1981.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BĂNICĂ and V. BRÎNZĂNESCU: Hilbert-Samuel polynomials of a proper morphism. *Math.-Z.* 158 (1978) 107–124.
- [2] C. BĂNICĂ, M. PUTINAR and G. SCHUMACHER: Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexen Räume. *Math. Ann.* 250 (1980) 135–165.
- [3] J. BINGENER: Offenheit der Versalität in der analytischen Geometrie. *Math. Z.* 173 (1980) 241–281.
- [4] V. BRÎNZĂNESCU and M. STOIA: Topological trivial rank-2 vector bundles on a ruled surface (in preparation).
- [5] G. ELLINGSRUD and S. A. STRØMME: On the moduli space of stable rank-2 vector bundles on  $P^2$ . Preprint, Oslo (1979).
- [6] PH. A. GRIFFITHS: The extension problem for compact submanifolds of compact manifolds, *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*, Minneapolis (1964).
- [7] R. HARTSHORNE: *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977).
- [8] H. LANGE: Families of Extensions, Erlangen (Preprint).
- [9] D. MUMFORD: *Lectures on curves on an algebraic surface*, *Annals of Math. Studies*, 59, Princeton (1966).
- [10] V. P. PALAMODOV: Deformations of complex spaces, *Russian Math. Surveys* 31 (1976) 129–197.

(Oblatum 29-IV-1981)

Nat. Inst. for Scient. and  
Techn. Creation  
Dept. of Math.  
Bd. Păcii 220  
79622 BUCHAREST  
Romania