COMPOSITIO MATHEMATICA

KLAUS REICHARD

C^{∞}-diffeomorphismen semianalytischer und subanalytischer Mengen

Compositio Mathematica, tome 42, nº 3 (1980), p. 401-416

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__42_3_401_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 42, Fasc. 3, 1981, pag. 401–416

C^∞-DIFFEOMORPHISMEN SEMIANALYTISCHER UND SUBANALYTISCHER MENGEN

Klaus Reichard

Einleitung

Es gibt zahlreiche Untersuchungen darüber, inwieweit sich analytische Eigenschaften analytischer Mengen schon durch differenzierbare Eigenschaften solcher Mengen beschreiben lassen. So kann man beispielsweise den Satz von Artin [1], als ein Ergebnis in dieser Richtung ansehen. Außerdem ist bekannt, daß für komplexanalytische Mengen ein Punkt schon dann analytisch regulär ist, wenn er C^1-regulärer Punkt ist ([2], [11]); für reellanalytische Mengen muß man dann schon verlangen, daß ein solcher Punkt C^∞-regulär ist ([9]).

Man weiß auch, daß die C^ω-Einbettungsdimension von reellanalytischen und semianalytischen Mengen in einem Punkt x schon gleich der C^N-Einbettungsdimension in diesem Punkt ist für alle N größer oder gleich einer von x abhängenden Zahl $n(x) \in \mathbb{N}$ ([13]); ein in diesem Zusammenhang noch ungelöstes Problem ist die Frage, ob $n(x)$ lokal beschränkt ist. Die Gleichheit von C^∞- und C^ω-Einbettungsdimension semianalytischer Mengen erhält man noch einmal aus Proposition 1.4 der vorliegenden Arbeit.

Weiterhin ist untersucht worden, inwieweit C^∞-diffeomorphe reell- oder komplexanalytische Mengen schon analytisch diffeomorph sind ([4]).

Solche Aussagen erweisen sich häufig als nützlich, weil man Eigenschaften analytischer Mengen mit differenzierbaren Methoden untersuchen kann. In der vorliegenden Arbeit zeige ich nun, daß zwei semianalytische Mengen, die in einem Punkt C^∞-diffeomorph sind, schon C^ω-diffeomorph sind; genau wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 0.1: *$S \subset \mathbb{R}^n$ und $S' \subset \mathbb{R}^m$ seien zwei semianalytische Mengen mit*

0010-437X/81/03401-16$00.20/0

$0 \in \bar{S}$, $0 \in \overline{S'}$ und $\varphi : S \to S'$ sei ein C^∞-Diffeomorphismus in einer Umgebung der Null. Dann gibt es in einer Umgebung der Null einen C^ω-Diffeomorphismus $f : S \to S'$.

Dabei heißt eine Abbildung auf einer Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^N, $N = 0, \ldots, \infty, \omega$ (C^ω bedeutet reellanalytisch), wenn sie lokal Spur einer C^N Abbildung auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, vgl. [12].

In den Beweis gehen neben dem Satz von Artin wesentlich die Untersuchungen von Lojasiewicz [7] über die Geometrie semianalytischer Mengen ein. Der Beweis von Satz 0.1 steht in §2 der Arbeit, §1 enthält einige vorbereitende, teilweise bekannte Überlegungen.

Viele der guten Eigenschaften semianalytischer Mengen sind auch noch bei den von H. Hironaka [6] eingeführten subanalytischen Mengen vorhanden; damit erhebt sich die Frage, ob Satz 0.1 auch für solche Mengen gilt. In §3 zeige ich, daß das nicht der Fall ist: Ich gebe zwei subanalytische Mengen S und S′ an, die zwar C^∞-diffeomorph, aber nicht C^ω-diffeomorph sind (3.6). Darüber hinaus sind für S' die C^ω- und die C^∞-Einbettungsdimension verschieden (3.7). Allerdings bleibt auch für subanalytische Mengen die Aussage richtig, daß C^∞-reguläre Punkte schon C^ω-regulär sind (3.4).

§1. Vorbereitungen

$\mathscr{E}_n$, $\mathscr{O}_n$ bzw. $\mathscr{F}_n$ bezeichne die $\mathbb{R}$-Algebren der Keime von C^∞-bzw. C^ω-Funktionen in $0 \in \mathbb{R}^n$ bzw. der formalen Reihen in n Unbestimmten mit reellen Koeffizienten.

$\mathrm{T} : \mathscr{E}_n \to \mathscr{F}_n$ sei die Taylorreihenabbildung.

Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine C^∞-Abbildung mit $\varphi(0) = 0$, so sei mit $\varphi^* : \mathscr{E}_m \to \mathscr{E}_n$ der von φ erzeugte differenzierbare Morphismus bezeichnet. Ist φ sogar analytisch, so wird auch die induzierte Abbildung $\mathscr{O}_m \to \mathscr{O}_n$ mit φ^* bezeichnet. Die durch $\mathrm{T}\varphi$ gegebene Abbildung $\mathscr{F}_m \to \mathscr{F}_n$ heiße $\hat{\varphi}^*$.

$\mathfrak{m}_n$ bezeichne jeweils das maximale Ideal in $\mathscr{E}_n$ bzw. $\mathscr{F}_n$ und "$\hat{\ }$" sei die $\mathfrak{m}_n$-adische Komplettierung. Für Ideale $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_n$ ist also $\hat{\mathscr{I}} = \mathscr{I} \cdot \mathscr{F}_n$. $m \cdot \mathscr{O}_n$, $m \cdot \mathfrak{m}_n, \ldots$ sei jeweils die m-fache direkte Summe.

Für alle Ideale $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_n$ bzw. $\mathscr{F}_n$ sei $\dim \mathscr{I}$ die Krulldimension von $\mathscr{O}_n/\mathscr{I}$ bzw. $\mathscr{F}_n/\mathscr{I}$.

Um die Formulierungen nicht zu lang werden zu lassen, werden wir nur von Mengen und Funktionen reden, auch wenn in Wirklichkeit Keime im Nullpunkt gemeint sind.

Definition 1.1: $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Menge.

(a) $\mathscr{I}(M) := \{f \in \mathcal{O}_n \mid f|M = 0\}$

$\mathscr{I}^\infty(M) := \{f \in \mathscr{E}_n \mid f|M = 0\}$

$\hat{\mathscr{I}}(M) := \mathrm{T}(\mathscr{I}^\infty(M))$.

(b) $A(M)$ sei die kleinste M umfassende reellanalytische Menge, also die zu $\mathscr{I}(M)$ gehörende analytische Menge. □

Bemerkung 1.2: $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Menge und $A \subset \mathbb{R}^n$ analytisch.

(a) Im allgemeinen ist $\mathscr{I}(M)^\wedge \subsetneq \hat{\mathscr{I}}(M)$.

(b) $\mathscr{I}^\infty(A) = \mathscr{I}(A) \cdot \mathscr{E}_n$ genau dann, wenn A in 0 kohärent ist.

(c) $\hat{\mathscr{I}}(A) = \mathscr{I}(A) \cdot \mathscr{F}_n$ $(= \mathscr{I}(A)^\wedge)$ gilt stets.

Beweis: (a) ist klar, zu (b), (c) siehe [9], IV. 3.5 und IV. 3.10. □

1.2.c. gilt auch für semianalytische Mengen. Um das zu zeigen, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1.3: *$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Menge und $d := \dim \hat{\mathscr{I}}(M)$. Dann gibt es in einer (genügend kleinen) Umgebung U der Null keine Punkte $x \in U \cap M$, in denen M C^∞-regulär von einer Dimension $> d$ ist.*

Beweis. Nach linearem Koordinatenwechsel können wir annehmen, daß $\mathscr{F}_n/\hat{\mathscr{I}}(M)$ endlich über $\mathscr{F}_d$ ist. Mit dem Weierstraß'schen Vorbereitungsatz für C^∞-Funktionen ist dann auch $\mathscr{E}_n/\mathscr{I}^\infty(M)$ endlich über $\mathscr{E}_d$. Die ganzen Relationen von $X_{d+1}, \dots, X_n$ über $\mathscr{E}_d$ mod $\mathscr{I}^\infty(M)$ mögen in einer ganzen Umgebung U der Null gelten. Dann ist $(\mathscr{E}_n/\mathscr{I}^\infty(M))_x$ für alle $x \in U \cap M$ endlich über $(\mathscr{E}_d)_x$. Daraus folgt die Behauptung. □

Proposition 1.4: *$S \subset \mathbb{R}^n$ sei semianalytisch. Dann ist $\hat{\mathscr{I}}(S) = \mathscr{I}(S)^\wedge (= \mathscr{I}(A(S)^\wedge))$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst unter der folgenden zusätzlichen Voraussetzung (*):

(*) $A := A(S)$ ist irreduzibel in 0, $S \subset A$ ist relativ offene Teilmenge.

Es sei $d := \dim A$ $(= \dim \mathcal{O}_n/\mathscr{I}(A))$. Dann erhält A und wegen (*) damit auch S in jeder Umgebung der Null reguläre Punkte der Dimension d. Weil A irreduzibel ist, ist $\mathscr{I}(A)^\wedge$ ein Primideal der Dimension d. Würde also $\hat{\mathscr{I}}(S)$ das Ideal $\mathscr{I}(A)^\wedge = \mathscr{I}(S)^\wedge$ echt umfassen, so wäre $\dim \hat{\mathscr{I}}(S) < d$; nach Lemma 1.3 dürfte es also in einer Umgebung der Null keine regulären Punkte der Dimension d in S geben. Damit ist die Behauptung im Spezialfall (*) bewiesen.

Nun sei S eine beliebige semianalytische Menge. In einer Umgebung U der Null können wir S schreiben als

$$S = \bigcup_{i=1}^{k} \{x \in A_i \mid g_{ij}(x) > 0 \text{ für } 1 \leq j \leq \ell_i\}$$

mit analytischen Mengen $A_i \subset U$ und auf U analytischen Funktionen g_{ij}. Indem wir diese Zerlegung verfeinern, können wir erreichen, daß mit $S_i := \{x \in A_i \mid g_{ij}(x) > 0$ für $1 \leq j \leq \ell_i\}$ gilt $A_i = A(S_i)$, A_i ist irreduzibel. Weil außerdem S_i offen in A_i ist, gilt nun (*) für alle S_i und es ist $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. Nun folgt

$$\begin{aligned} \mathscr{I}(S) &\subset \bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{I}(S_i) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{I}(S_i)\,\hat{} \quad \text{(nach (*))} \\ &= \Big(\bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{I}(S_i)\Big)\,\hat{} = \mathscr{I}(S)\hat{} \subset \mathscr{I}(S). \end{aligned}$$

□

Die folgenden Aussagen über die Geometrie semianalytischer Mengen sind weitgehend bekannt; weil sie im nächsten Paragraphen eine zentrale Rolle spielen, sind sie hier noch einmal aufgeführt.

LEMMA 1.5: *S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ seien zwei semianalytische abgeschlossene Mengen, dann schneiden S_1 und S_2 sich regulär.*

Das bedeutet: Zu $x_0 \in S_1 \cap S_2$ gibt es eine Umgebung U von x_0 und reelle Zahlen $C > 0$, $\alpha > 1$ mit

$$d(x, S_2) \geq C \cdot d(x, S_1 \cap S_2)^{\alpha} \text{ für alle } x \in S_1 \cap U.$$

(Dabei sei $d(x, S)$ der euklidische Abstand von x zu S)

BEWEIS: Siehe Lojasiewicz [7]. □

LEMMA 1.6: *$S \subset \mathbb{R}^n$ sei eine semianalytische Mannigfaltigkeit mit $0 \in \bar{S} \backslash S$. Dann gibt es Zahlen $C > 0$, $\alpha > 1$ und eine Nullfolge x_ν in S mit $d(x_\nu, \bar{S} \backslash S) \geq C \cdot |x_\nu|^{\alpha}$.*

BEWEIS: Es gibt eine injektive Kurve φ: $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi([0, 1] \subset S)$, deren Bild abgeschlossen und semianalytisch ist ("arc(S)-analytique", vgl. [7]). Wählt man jetzt in Lemma 1.6. $S_1 := \varphi([0, 1])$, $S_2 := \bar{S} \backslash S$ so folgt die Behauptung mit $x_\nu := \varphi(1/\nu)$. □

BEMERKUNG 1.7: Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ eine semianalytische Menge mit $0 \in \bar{S}$, so gibt es stets eine Normalzerlegung $\mathcal{N} = \{\Gamma_j \mid 1 \leq j \leq t\}$ von S in einer Umgebung Q der Null (vgl. [7]). Zu $\mathcal{N}$ gibt es nach Verkleinern von Q mit 1.5 und 1.6 Zahlen $C > 0$, $\alpha > 1$ und Nullfolgen $x_{j\nu}$ in Γ_j mit

(a) $d(x, \overline{\Gamma_i}) \geq C \cdot d(x, \overline{\Gamma_i} \cap \overline{\Gamma_j})^\alpha$ für alle $x \in \Gamma_j$ und alle $1 \leq i \leq t$.

(b) $d(x_{j\nu}, \overline{\Gamma_j} \backslash \Gamma_j) \geq C \cdot |x_{j\nu}|^\alpha$. □

BEMERKUNG 1.8: $S \subset \mathbb{R}^n$ sei semianalytisch und $x \in S$. Dann ist S in x genau dann C^∞-regulär der Dimension d, wenn S in x C^ω-regulär der Dimension d ist.

BEWEIS: Siehe auch [7]. Die Aussage läßt sich sofort zurückführen auf die entsprechende Aussage für analytische Mengen, siehe [9], VI, 3.11. □

Diese Aussage gilt auch für subanalytische Mengen, siehe hierzu Satz 3.4. der vorliegenden Arbeit.

LEMMA 1.9: *$B \subset \mathbb{R}^n$ und $B' \subset \mathbb{R}^m$ seien zwei Teilmengen und φ: $B \to B'$ sei ein C^∞-Diffeomorphismus. Zu $x_0 \in B$ gibt es dann Umgebungen U von x_0 und V von $\varphi(x_0)$ und reelle Zahlen K, $K' > 0$, so daß φ: $U \cap B \to V \cap B'$ ein Diffeomorphismus ist und für jedes $x \in U \cap B$ und jede Teilmenge $A \subset U \cap B$ gilt:*

$$K \cdot d(x, A) \leq d(\varphi(x), \varphi(A)) \leq K' \cdot d(x, A).$$

Der BEWEIS dieser Aussage beruht darauf, daß es für C^1-Abbildungen $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lokal eine Konstante K gibt mit

$$|F(x) - F(y)| \leq K \cdot |x - y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \qquad \square$$

§2. Beweis von Satz 0.1.

In diesem Paragraphen beweisen wir Satz 0.1. Neben einer Anwendung des Satzes von Artin (vgl. [1]), besteht der wesentliche Beweisgedanke in einer Induktion über die Dimension d von S (siehe Proposition 2.6.); dabei sei unter der Dimension einer semianalytischen Menge S stets die maximale Dimension d regulärer Punkte von S verstanden. Für den Induktionsschritt betrachten wir Mengen von regulären Punkten von S. Dazu benötigen wir:

DEFINITION 2.1: $S \subset \mathbb{R}^n$ sei eine semianalytische Menge mit $0 \in \bar{S}$.
$S_{\mathrm{reg}} := \{x \in S \mid S \text{ ist in } x \text{ regulär}\}$.
$S^0(S) := S$.
$S^1(S) := \{x \in S \mid S \text{ ist in } x \text{ keine Mannigfaltigkeit der Dimension } \dim S\}$.
$S^{i+1}(S) := S^1(S^i(S))$ für $1 \leq i \in \mathbb{N}$.
$S^{i,j}(S) := S^i(\overline{S^j(S)})$ für $0 \leq i, j$.
$\mathcal{J}^i(S) := \mathcal{J}(S^i(S))$, $\mathcal{J}^{i,j}(S) := \mathcal{J}(S^{i,j}(S))$. □

Wegen Bem. 1.8. spielt es bei dieser Definition keine Rolle, ob wir C^∞-oder C^ω-reguläre Punkte betrachten.

BEMERKUNG 2.2: $S \subset \mathbb{R}^n$ sei semianalytische Menge und $0 \in \bar{S}$.
(a) Alle $S^i(S)$ und $S^{i,j}(S)$ sind semianalytisch.
(b) Alle $S^{i,j}(S)$ sind abgeschlossen.
(c) $\dim S^{i+1}(S) < \dim S^i(S)$ für alle i mit $S^i(S) \neq \emptyset$.
(d) $S^i(S) = \emptyset$ für $i > \dim S$, $S^{i,j}(S) = \emptyset$ für $i + j > \dim S$.

BEWEIS: Bis auf (b) findet man alle Aussagen bei Lojasiewicz [7], (b) gilt weil $S^1(S)$ abgeschlossen ist für abgeschlossene semianalytische Mengen S. □

S läßt sich aus den so definierten $S^{i,j}(S)$ zusammensetzen:

LEMMA 2.3: $S \subset \mathbb{R}^n$ *sei semianalytisch, dann ist*

$$\bar{S} \setminus S = \bigcup_{j=0}^{\dim S} (S^{1,j}(S) \setminus S^{0,j+1}(S))$$

BEWEIS: "$\subset$": Sei $x \in \bar{S} \setminus S$ ein Punkt. $j := \max\{i \in \mathbb{N} \mid x \in \overline{S^i(S)}\} \leq \dim S$. Wegen $\overline{S^0(S)} = \bar{S}$ ist dann $x \in \overline{S^j(S)} \setminus S \subset \overline{S^j(S)} \setminus S^j(S) \subset S^1(\overline{S^j(S)}) = S^{1,j}(S)$, und es ist $x \notin \overline{S^{j+1}(S)} = S^{0,j+1}(S)$.

"$\supset$": Sei $0 \leq j \leq \dim S$ und $x \in S^{1,j}(S) \setminus S^{0,j+1}(S)$. Wegen $S^{1,j}(S) = S^1(\overline{S^j(S)}) \subset \overline{S^j(S)} \subset \bar{S}$ ist auf jeden Fall $x \in \bar{S}$. Wäre $x \in S$, so wäre $x \in S^{1,j}(S) \cap S \subset S^1(\overline{S^j(S)}) \cap S^j(S) \subset S^{j+1}(S)$, denn für alle semianalytischen Mengen S' ist $S^1(\overline{S'}) \cap S' \subset S^1(S')$. □

Dieses Lemma gestattet es uns, beliebige semianalytische Mengen S aus abgeschlossenen semianalytischen Mengen zusammenzusetzen. Außerdem gilt noch

Bemerkung 2.4: Unter den Voraussetzungen von Satz 0.1. ist $\varphi(S^{i,j}(S)) = S^{i,j}(S')$ und $\varphi^*\mathcal{J}^{i,j}(S') \subset \mathcal{J}^{i,j}(S)$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung gilt, weil φ reguläre Punkte einer Dimension d auf reguläre Punkte derselben Dimension abbildet und weil sich φ jeweils zu einem Diffeomorphismus der Abschlüsse von S und S' fortsetzen läßt. Der zweite Teil der Behauptung ist dann eine einfache Folgerung. □

Wir können uns jetzt beim Beweis von Satz 0.1. auf die einfachere Situation beschränken, daß S und S' abgeschlossen sind. Für solche Mengen gilt.

Lemma 2.5: *$S \subset A$ seien d-dimensionale semianalytische Mengen; S sei abgeschlossen und $\mathcal{N} = \{\Gamma_i \mid 1 \leq i \leq t\}$ sei eine mit S verträgliche Normalzerlegung von A. Ist $M \subset A$ eine d-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit mit $\bar{M} \backslash M \subset S^1(S)$, die nicht ganz in S liegt, so gibt es ein d-dimensionales Stratum $\Gamma \in \mathcal{N}$ mit $\Gamma \cap S = \emptyset$, $\Gamma \subset M$.*

Beweis: Weil S abgeschlossen ist, ist $M \backslash S$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es gibt dann ein d-dimensionales Stratum $\Gamma \in \mathcal{N}$ mit $\Gamma \cap S = \emptyset$, $\Gamma \cap M \neq \emptyset$. Weil A in allen Punkten von Γ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist und $M \subset A$ ist, ist $\Gamma \cap M$ ebenfalls d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wäre jetzt $\Gamma \cap M \neq \Gamma$, so wäre $\Gamma \cap (\bar{M} \backslash M) \subset \Gamma \cap S^1(S) \neq \emptyset$, denn Γ ist zusammenhängend. Dann wäre aber schon $\Gamma \subset S^1(S)$, und das ist wegen $\dim S^1(S) < d$ nicht möglich. □

Wir können jetzt eine wichtige Aussage zeigen:

Proposition 2.6: *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 0.1. seien S und S' abgeschlossen. Es gibt dann eine (von S und S' abhängende) Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:*

Ist f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ analytisch, $f^*(\mathcal{J}^i(S')) \subset \mathcal{J}^i(S)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und ist $f - T\varphi \in m \cdot \mathfrak{m}_n^N$, so ist schon $f(S) = S'$.

Beweis: (Induktion über $d := \dim S$).

"$d = 0$": In diesem Fall bestehen S und S' jeweils nur aus dem Nullpunkt, $N = 1$ erfüllt damit alle Bedingungen.

"$d - 1 \Rightarrow d$": Wegen 2.2. and 2.4. gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Zahl N_0, die die Bedingungen der Proposition 2.6. für $S^1(S)$ und $S^1(S')$ erfüllt. Außerdem seien $C > 0$ und $1 < \alpha \in \mathbb{N}$ gemäß Bemerkung 1.7. gemeinsam für S und für eine mit S' verträgliche Normalzerlegung $\mathcal{N} = \{\Gamma_j \mid 1 \leq j \leq t\}$ von $A(S')$ gegeben und $N := \max\{N_0, \alpha^2+2\}$.

Nun sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ analytisch mit den in der Voraussetzung gegebenen Eigenschaften. Dann gilt:

(2.6.1.) $f \mid S$ ist eine C^∞-Einbettung, weil $N \geq 1$ ist. Damit ist insbesondere $f: S \to f(S)$ topologisch.

(2.6.2.) $f(S^1(S)) = S^1(S')$ nach Induktionsvorraussetzung wegen $N \geq N_0$.

(2.6.3.) $f(A(S)) \subset A(S')$ weil wegen 1.4. aus $f^*(\mathcal{J}(S') \subset \mathcal{J}(S)$ folgt: $f^*(\mathcal{I}(A(S'))) = f^*(\mathcal{I}(S')) \subset \mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(A(S))$.

Nun sei $\Delta := S \setminus S^1(S)$, dann ist Δ eine d-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit, und $\bar{\Delta} \setminus \Delta \subset S^1(S)$, weil S abgeschlossen ist. Mit 2.6.1., 2.6.2. und 2.6.3. ist $f(\Delta) \subset A(S')$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\overline{f(\Delta)} \setminus f(\Delta) = f(\bar{\Delta} \setminus \Delta) \subset f(S^1(S)) = S^1(S')$. Wäre $f(\Delta) =: M$ keine Teilmenge von S', so gäbe es nach Lemma 2.5. ein d-dimensionales Stratum $\Gamma \in \mathcal{N}$ mit $\Gamma \subset M$, $\Gamma \cap S' = \emptyset$. Wegen 2.6.1. gibt es jetzt nach 1.7. eine Nullfolge x_ν in Δ, so daß $y_\nu := f(x_\nu) \in \Gamma$ ist und $d(y_\nu, \bar{\Gamma} \setminus \Gamma) \geq C \cdot |y_\nu|^\alpha$ ist. Nach Übergang zu einer Teilfolge liegen oE alle $z_\nu := \varphi(x_\nu)$ in einem Stratum $\Gamma' \in \mathcal{N}$. Wegen $z_\nu \in S'$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ ist dann $\Gamma' \neq \Gamma$.

Für $v \in \mathbb{N}$ groß genug und geeignete Konstanten C_1, $C_2 > 0$ folgte dann

$$\begin{aligned}
|x_\nu|^{N-1} &\geq |f(x_\nu) - \varphi(x_\nu)| = |y_\nu - z_\nu| \\
&\geq C \cdot d(y_\nu, \bar{\Gamma}') \\
&\geq C \cdot d(y_\nu, \bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}')^\alpha && \text{Vorgabe von } C, \alpha \\
&\geq C \cdot d(y_\nu, \bar{\Gamma} \setminus \Gamma)^\alpha && \text{denn } \Gamma \cap \bar{\Gamma}' = \emptyset \text{ weil} \\
& && \dim \Gamma = d = \dim S' \\
&\geq C_1 \cdot (|y_\nu|^\alpha)^\alpha = C_1 \cdot |y_\nu|^{\alpha^2} \\
&\geq C_2 \cdot |x_\nu|^{\alpha^2} && \text{mit 1.9.}
\end{aligned}$$

Das ist wegen $N \geq \alpha^2 + 2$ nicht möglich. Es ist also $f(\Delta) \subset S' \setminus S^1(S')$. Ist Z eine Zusammenhangskomponente von Δ, so ist $f(Z)$ zusammenhänge d-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\overline{f(Z)} \setminus f(Z) = f(\bar{Z} \setminus Z) \subset f(S^1(S)) = S^1(S')$, $f(Z)$ ist also eine Zusammenhangskomponente von $S' \setminus S^1(S')$. Macht man diese Überlegung für alle Zusammenhangskomponenten von Δ, so folgt wegen 2.6.1. und 2.6.2. daß

$f(\Delta) = S'\backslash S^1(S')$ ist, denn lokal um Null haben $S'\backslash S^1(S')$ und Δ endlichviele und gleichviele Zusammenhangskomponenten.

Damit ist insgesamt die Proposition bewiesen. □

Wir können jetzt Satz 0.1. beweisen:

Beweis von Satz 0.1: Wegen 2.2. und 2.4. können wir nach Proposition 2.6. ein gemeinsames N für alle Mengen $S^{i,j}(S)$ und $S^{i,j}(S')$, $i+j \leq \dim S$ wählen. Weil die Ideale $\mathcal{J}^{i,j}(S)$ und $\mathcal{J}^{i,j}(S')$ analytisch erzeugt sind (1.4.), können wir mit dem Satz von Artin (siehe [14], III, 4.2.) eine analytische Abbildung f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ finden mit $\hat{f}^*(\mathcal{J}^{i,j}(S')) \subset \mathcal{J}^{i,j}(S)$ für alle $i+j \leq \dim S$ und $f - T\varphi \in m \cdot \mathfrak{m}_n^N$.

Mit Proposition 2.6. ist also $f(S^{i,j}(S)) = S^{i,j}(S')$ für alle i und j, Wegen $N \geq 1$ ist f eine C^∞-Einbettung $S \to \mathbb{R}^m$ und damit sogar eine C^ω-Einbettung, denn die C^∞- und die C^ω-Einbettungsdimension von S sind gleich ([12], [13]). Die Behauptung folgt jetzt mit Lemma 2.3. □

Manchmal erweist es sich als nützlich, folgende Verallgemeinerung von Satz 0.1. zur Verfügung zu haben.

Korollar 2.7: *$S_1, \ldots, S_k \subset \mathbb{R}^n$ und $S'_1, \ldots, S'_k \subset \mathbb{R}^m$ seinen semianalytisch, $S := \bigcup_{\kappa=1}^k S_\kappa$, $S' := \bigcup_{\kappa=1}^k S'_\kappa$ und φ: $S \to S'$ sei ein C^∞-Diffeomorphismus in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(S_\kappa) = S'_\kappa$ für alle $1 \leq \kappa \leq k$. Dann gibt es einen C^ω-Diffeomorphismus mit derselben Eigenschaft.*

Beweis: Man wähle im Beweis von Satz 0.1 N so groß, daß es für alle S_κ paßt und f so, daß $\hat{f}^*(\mathcal{J}^{i,j}(S'_\kappa)) \subset \mathcal{J}^{i,j}(S_\kappa)$ ist für alle i, j und κ. □

Es ist in Korollar 2.7. nicht nötig, daß die S_κ disjunkt sind.

Korollar 2.8: *Sind in Satz 0.1. S und S' mit Stratifikationen $\mathcal{N} = \{\Gamma_j \mid 1 \leq j \leq \ell\}$ und $\mathcal{N}' = \{\Gamma'_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ versehen mit semianalytischen Strata Γ_j und Γ'_i und ist φ stratifiziert (d.h.: $\varphi(\Gamma_j)$ liegt ganz in einem Stratum von $\mathcal{N}'$ für alle $1 \leq j \leq \ell$), so kann man in Satz 0.1. auch f mit dieser Eigenschaft erhalten.*

Beweis: In Korollar 2.7. wähle man $S'_\kappa = \Gamma_\kappa$ und $S_\kappa = \varphi^{-1}(S'_\kappa)$, damit ist auch S_κ als Vereinigung von Strata aus $\mathcal{N}$ semianalytisch. □

§3. C^∞-Diffeomorphismen subanalytischer Mengen

Geht man von den semianalytischen zu den von H. Hironaka [6] eingeführten, allgemeineren subanalytischen Mengen über, so gelten viele der Ergebnisse nicht mehr. Bevor wir dafür ein Beispiel geben, zeigen wir jedoch daß auch für subanalytische Mengen ein Punkt C^∞-regulär genau dann ist, wenn er C^ω-regulär ist.

DEFINITION 3.1: $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei analytisch in einer Umgegung der $0 \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$. Dann sei der generische Rang von φ g-rkφ definiert als der Rang der Matrix $(\partial\varphi/\partial x)$ über dem Quotientenkörper von $\mathcal{O}_n$. □

BEMERKUNG 3.2: $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei analytisch in einer Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$.

(a) g-rkφ ist die größte Zahl r, so daß es in jeder Umgebung der Null ein x gibt, in dem der Jacobirang von φ gleich r ist.

(b) g-rkφ ist lokal konstant.

(c) g-rkφ ist invariant unter C^ω-Diffeomorphismen und läßt sich damit auch für C^ω-Abbildungen zwischen C^ω-Mannigfaltigkeiten definieren. □

Es gilt der folgende Satz:

SATZ 3.3: $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *sei analytisch in einer Umgebung der* $0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(0) = 0$ *und* g-rk$\varphi = m$ *in* 0. *Ist dann* $F \in \mathcal{F}_m$ *eine formale Reihe, so daß* $\hat{\varphi}^* F \in \mathcal{F}_n$ *sogar eine konvergente Reihe ist, so war schon* F *konvergent.*

BEWEIS: Siehe P. M. Eakin, G. A. Harris [3]. □

Ein Beispiel von Gabriélov [5] zeigt, daß eine solche Aussage nicht für alle analytischen Abbildungen φ richtig ist.

Mit Satz 3.3. können wir folgende Aussage zeigen:

SATZ 3.4: $S \subset \mathbb{R}^n$ *sei eine subanalytische Teilmenge,* $x_0 \in S$ *und* S *sei in* x_0 *eine d-dimensionale* C^∞*-Mannigfaltigkeit. Dann ist* S *in* x_0 *sogar eine d-dimensionale* C^ω*-Mannigfaltigkeit.*

BEWEIS: Nach linearem Koordinatenwechsel habe oE S um x_0 die Gestalt
$S = \{(x_1, \ldots, x_d, f_{d+1}(x_1, \ldots, x_d), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_d)) \mid (x_1, \ldots, x_d) \in U\}$

mit einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^d$ und C^∞-Funktionen f_j: $U \to \mathbb{R}$, $d+1 \leq j \leq n$. π: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ bezeichne die Projektion auf die ersten d Komponenten.

Weil S lokal um x_0 abgeschlossen ist, gibt es eine C^ω-Mannigfaltigkeit W und eine eigentliche C^ω-Abbildung h: $W \to \mathbb{R}^n$ mit $h(W) = S$ lokal um x_0 (vgl. [6], 3.7.8.). Weil h eigentlich ist, können wir sogar oE annehmen, daß W das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Außerdem sei oE $\pi \circ h(W) = U$.

Nun sei $W' := \{y \in W \mid \text{g-rk } \pi \circ h = d\}$ dann ist W' wegen 3.2. b abgeschlossen in W und nach dem Satz von Sard (siehe [10]) ist $\pi \circ h(W')$ dicht in U. Weil $\pi \circ h$ auch eigentlich und damit abgeschlossen ist, folgt $\pi \circ h(W') = U$, das heißt aber $h(W') = S$. Wir können also oE W durch W' ersetzen.

Ist nun $y \in W$ irgendein Punkt und $x := h(y) \in S$ so folgt für $d+1 \leq j \leq n$: $h_j = f_j(\pi \circ h)$ und g-rk $\pi \circ h = d$ in einer Umgebung von y.

Betrachtet man in einem geeigneten Koordinatensystem um y formale Taylorreihen, so folgt mit Satz 3.3., daß die formale Taylorreihe T f_j von f_j in $\pi(x)$ konvergieren muß. $\tilde{f}_j$ bezeichne die durch T f_j definierte analytische Funktion, so sind $h_j = f_j \circ (\pi \circ h)$ und $\tilde{f}_j \circ (\pi \circ h)$ zwei um y analytische Funktionen mit derselben Taylorreihe in y und damit gleich. Dann muß $\tilde{f}_j = f_j$ auf dem $\pi \circ h$-Bild einer Umgebung von y sein.

Macht man diese Uberlegung für alle $y \in W$, so folgt wegen $\pi \circ h(W) = U$, daß alle f_j auf U analytisch sind, und das bedeutet gerade, S ist in x_0 eine C^ω-Mannigfaltigkeit. □

Das folgende Beispiel ist eine Abwandlung eines Beispiels von Gabriélov [5], Gabriélov gibt ein Beispiel für formale Reihen anstelle von C^∞-Funktionen. Da man dort keine C^∞-Konvergenz benötigt, ist sein Beispiel kürzer.

Beispiel 3.5: Es gibt eine C^ω-Abbildung φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und eine C^∞-Funktion F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $F \circ \varphi$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist analytisch.

(b) Es gibt keine analytische Funktion F_1: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F_1 \circ \varphi = F \circ \varphi$. (Auch hier werden alle Funktionen jeweils nur in geeigneten Umgebungen der Null definiert.)

Die reellen Koeffizienten α_j, β_k and γ_k werden später in geeigneter Weise festgelegt; solange nichts darüber ausgesagt wird, gelten alle Aussagen für alle derartigen Festlegungen.

Es sei $f(x_2) := \sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_2^j$ analytisch mit Konvergenzradius ∞ und

(1) $$\varphi(x_1, x_2) := (x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot f(x_2)).$$

(2) $g(y_1, y_2) := e^{-(y_1^2+y_2^2)} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} \cdot y_1^i \cdot y_2^j$ (dadurch sind die $a_{i,j}$ definiert)

Für $k \in \mathbb{N}$ sei nun

(3) $$\phi_k(y) := g(\beta_k \cdot y_1, \beta_k \cdot y_2) \cdot (y_1^{k-1} \cdot y_3 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot y_1^{k-j} \cdot y_2^j)$$

Durch Einsetzen von φ erhält man

(4) $$\phi_k(\varphi(x)) = e^{-(\beta_k \cdot x_1)^2(1+x_2^2)} \left(x_1^k \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j \cdot x_2^j \right)$$

Nun sei $\hat{F}$ die folgende formale Reihe:

(5) $$\hat{F}(y) := \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot \phi_k(y) =: \sum_{k,j=1}^{\infty} (b_{kj} + c_{kj} \cdot y_3) \cdot y_1^k \cdot y_2^j,$$

$\hat{F}$ läßt sich für alle Wahlen von γ_k bilden, denn der Untergrad von ϕ_k ist k. b_{kj} und c_{kj} sind durch diese Gleichung wohl definiert. Setzt man (2) und (3) in (5) ein, so erhält man

(6) $$c_{k,0} = \gamma_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_{k-i+1,0} \cdot \beta_i^{k-i+1} \cdot \gamma_i .$$

Weil die Funktion e^{-x^2} gegen ∞ schneller fällt, als alle Potenzen von x, sind die folgenden Zahlen alle kleiner als ∞, $\|f\|_{U,k}$ bezeichne dabei die C^k-Norm einer C^k-Funktion f auf U.

(7) $$C_k := \max\{\|y_1^i \cdot y_2^j \cdot g(y_1, y_2)\|_{\mathbb{R}^2,k-2} \,|\, 0 \le i, j;\ k-1 \le i+j \le k\}.$$

Dann gilt für alle $\beta \ge 1$ und alle i, j mit $k-1 \le i+j \le k$:

(8) $$\|y_1^i \cdot y_2^j \cdot g(\beta \cdot y_1, \beta \cdot y_2)\|_{\mathbb{R}^2,k-2} = \left\| \frac{z_1^i \cdot z_2^j \cdot g(z)}{\beta^{i+j}} \Big|_{z=\beta \cdot y} \right\|_{\mathbb{R}^2,k-2}$$
$$\le C_k/\beta.$$

Jetzt sei $U = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, |y_3| \le 1\}$ und oE alle $|\alpha_j| \le 1$. Wir definieren rekursiv:

$$\gamma_1 = \beta_1 = 1$$

$$\left.\begin{array}{ll}(9) & \gamma_k := k! - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i \cdot a_{k-i,0} \cdot \beta_i^{k-i} \\ \\ (10) & \beta_k := (k+1) \cdot (|\gamma_k| + 1) \cdot C_k \cdot 2^k \end{array}\right\} \text{ für } k > 1.$$

Wegen (6) ist dann $c_{k,0} = (k+1)!$, mit (5) ist also $\hat{F}(y)$ divergent. Weiterhin folgt mit (8) und (10), wenn man ϕ_k als Funktion auf U betrachtet:

$$(11) \qquad \|\gamma_k \cdot \phi_k\|_{U,k-2} \leq |\gamma_k| \cdot (k+1) \cdot C_k/\beta_k \leq 2^{-k}$$

$F(y) := \Sigma_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot \phi_k$ ist dann eine C^∞-Funktion auf U und die formale Taylorreihe von F im Nullpunkt ist $\hat{F}$.

Nun seien reelle Koeffizienten $d_{\nu\mu k}$ durch folgende Gleichung definiert:

$$(12) \qquad \gamma_k \cdot e^{-(\beta_k \cdot x_1)^2(1+x_2^2)} = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} d_{\nu\mu k} \cdot x_1^\nu \cdot x_2^\mu.$$

Weil für festes k diese Funktion den Konvergenzradius ∞ hat, gilt auf jeden Fall:

(13) Für jedes feste k sind jeweils nur endlich viele $|d_{\nu\mu k}| > 1$. Mit (4) erhalten wir jetzt:

$$(14) \qquad \begin{aligned} \hat{F}(\varphi(x)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot \phi_k(\varphi(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} d_{\nu\mu k} \cdot x_1^\nu \cdot x_2^\mu \right) \cdot x_1^k \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j \cdot x_2^j \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=k+1}^{\mu} d_{\nu-k,\, u-j,\, k} \cdot \alpha_j \right) x_1^\nu \cdot x_2^\mu, \end{aligned}$$

wenn man nach Potenzen von x_1 und x_2 sortiert.

Wegen (13) können wir jetzt $0 < \alpha_j \leq 1$ so klein wählen, daß gilt:

(15) $|d_{\nu-k,\, \mu-j,\, k} \cdot \alpha_j| \leq 2^{-k}$ für alle $k \leq j$ und alle ν und μ und daß außerdem der Konvergenzradius von $f \infty$ ist.

Damit erhält $\hat{F}(\varphi(x))$ einen Konvergenzradius größer oder gleich 1, definiert also in einer Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^2$ eine analytische Funktion H.

Nun sei H_n die analytische Funktion $H_n := \Sigma_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \phi_k(\varphi(x))$. Für

$|x_1| \leq 1/2$ und $|x_2| \leq 1/2$ folgt dann aus (14)

$$|(H-H_n)(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} d_{\nu\mu k} \cdot x_1^{\nu} \cdot x_2^{\mu} \cdot x_1^{k} \cdot \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j \cdot x_2^{j} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\nu} \sum_{j=k+1}^{\mu} 2^{-k} \cdot |x_1^{\nu}| \cdot |x_2^{\nu}| \qquad \text{(mit (15))}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-k-j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu'=0}^{\infty} 2^{-\nu-\mu'} \text{ weil } |x_1|, |x_2| \leq 1/2 \text{ und } j \leq \mu =: j+\mu'$$

$$= 2^{-2n+2}$$

Weil $\Sigma_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \phi_k$ auf U gegen F konvergiert, haben wir damit gezeigt, daß $F \circ \varphi = H$ ist in einer Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^2$.

Um nun Behauptung (b) einzusehen, zeigen wir folgende Aussage:

(16) Es gibt keine formale Reihe $0 \neq G \in \mathcal{F}_3$ mit $G \circ \varphi = 0$. Ist nämlich G_ν der ν-te homogene Anteil von G, so folgt wegen (1):

$$0 = G \circ \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu \circ \varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_1^{\nu} \cdot G_\nu(1, x_2, f(x_2)).$$

Wäre also $G \neq 0$ und damit ein $G_\nu \neq 0$, so gäbe es ein Polynom $0 \neq P(z, w) := G_\nu(1, z, w)$ in zwei Variablen z und w mit

(17) $P(z, f(z)) = 0$.

Diese Gleichung gilt dann auch, wenn man z als komplexe Variable betrachtet. Weil f den Konvergenzradius ∞ haben sollte und weil alle $\alpha_j \neq 0$ sind, findet man mit der Cauchy'schen Integralformel eine Folge $z_n \in \mathbb{C}$, mit $\lim |z_n| = \infty$ und mit $|f(z_n)| > |z_n|^n$.

Weil Polynome auf z_n nur von endlicher Ordnung wachsen, kann f dann (17) nicht erfüllen. Damit ist (16) gezeigt.

Gäbe es nun eine analytische Funktion F_1 auf $\mathbb{R}^3$ mit $F_1 \circ \varphi = F \circ \varphi$, so wäre $(F_1 - \hat{F}) \circ \varphi = 0$ und $F_1 - \hat{F} \neq 0$ weil $\hat{F}$ nicht konvergiert. Das ist nach (16) nicht möglich. Damit ist auch (b) bewiesen. $\square$

Mit diesem Beispiel können wir nun zwei subanalytische Mengen angeben, die zwar C^∞-diffeomorph, aber nicht C^ω-diffeomorph sind:

Beispiel 3.6: $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ sei so klein gewählt, daß in dem vorhergehenden Beispiel $F \circ \varphi$ und H auf $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \epsilon^2\}$ gleich sind und daß H in einer Umgebung dieser Menge konvergiert. K sei die kompakte analytische Mannigfaltigkeit $K := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =$

$\epsilon^2\}$, dann sind $\varphi(x_1, x_2)$ und $H(x_1, x_2)$ analytische Funktionen auf K. $S := \varphi(K) \subset \mathbb{R}^3$ und $S' := (\varphi, H)(K) \subset \mathbb{R}^4$ sind subanalytisch, weil $\varphi \mid K$ und $(\varphi, H) \mid K$ eigentlich sind. Mit den Bezeichnungen aus 3.5 ist dann S' der Graph der C^∞-Abbildung F über S, weil $F \circ \varphi = H$ auf K ist. S und S' sind also C^∞-diffeomorph.

Nun sei $\mathcal{I} := \{g \in \mathcal{O}_4 \mid g \circ (\varphi, H) = 0\}$ und $\mathcal{J} = \{g \in \mathcal{F}_4 \mid g \circ (\varphi, H) = 0\}$. Wegen 3.5. (16) ist $\mathcal{J}$ das von $y_4 - \hat{F}(y_1, y_2, y_3)$ erzeugte Ideal und damit ist $\dim \mathcal{J} = 3$.

Wäre $\mathcal{I} \neq 0$, so wäre $\dim \mathcal{I} = \dim \hat{\mathcal{I}} \leq 3$. Weil $\hat{\mathcal{I}} \subset \mathcal{J}$ zwei Primideale sind, müßten sie aus Dimensionsgründen damit gleich sein. Weil jetzt $y_4 - \hat{F}(y_1, y_2, y_3) \in \hat{\mathcal{I}}$ ist, folgt mit dem Weierstraß'schen Vorbereitungssatz, daß es in $\mathcal{I}$ eine Reihe der Gestalt $y_4 - F_1(y_1, y_2, y_3)$ mit einer konvergenten Reihe F_1 geben müßte. Das hieße aber, es wäre $H = F_1 \circ \varphi$ und das ist nach 3.5. b unmöglich. Damit ist $\mathcal{I} = \mathcal{I}(S') = 0$ und das bedeutet insbesondere, daß die C^ω-Einbettungsdimension von S' im Nullpunkt 4 ist. Damit kann S' nicht zu $S \subset \mathbb{R}^3$ C^ω-diffeomorph sein. □

KOROLLAR 3.7. *Für S' sind die C^∞-Einbettungsdimension (=3) und die C^ω-Einbettungsdimension (=4) im Nullpunkt verschieden.* □

LITERATUR

[1] M. ARTIN: On the solutions of analytic equations. *Inv. Math. 5* (1968) 277–291.
[2] T. BLOOM: C^1 functions on a complex analytic variety. *Duke Math. J. 36* (1969) 283–296.
[3] P.M. EAKIN and G.A. HARRIS: When $\phi(f)$ convergent implies f is convergent. *Math. Ann. 229* (1977) 201–210.
[4] R. EPHRAIM: The cartesian product structure and C^∞ equivalence of singularities. *Trans AMS 224* (1976) 299–311.
[5] A.M. GABRIÉLOV: Formal relations between analytic functions. *Funct. Anal. Appl. 5* (1971) 318–319.
[6] H. HIRONAKA: Subanalytic sets. *Number Theory, Alg. Geom. and Comm. Alg.* in honour of Y. Akizuki, Tokyo (1973) 453–493.
[7] S. LOJASIEWICZ: Ensembles sémi-analytiques. *polycopie. IHES* (1965).
[8] B. MALGRANGE: Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques. *Bull. Soc. Math. France 91* (1963) 113–127.
[9] B. MALGRANGE: Ideals of differentiable functions. *Oxford University Press* (1966).
[10] A. SARD: The measure of critical values of differentiable maps. *Bull. AMS 48* (1942) 883–890.
[11] K. SPALLEK: Über Singularitäten analytischer Mengen. *Math. Ann. 172* (1967) 249–268.
[12] K. SPALLEK: Differenzierbare Räume. *Math. Ann. 180* (1969) 269–296.

[13] K. SPALLEK: ℓ-Platte Funktionen auf semianalytischen Mengen. *Math. Ann. 227* (1977) 277–286.
[14] J.C. TOUGERON: Idéaux de fonctions différentiables. *Erg. d. Math. 71.* Springer (1972).

(Oblatum 30-V-1980)

Ruhr-Universität Bochum
Institut für Mathematik
Postfach 102148
D 4630 Bochum 1