MICHEL TALAGRAND

Moyennes invariantes s'annulant sur des idéaux

Compositio Mathematica, tome 42, nº 2 (1980), p. 213-216

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__42_2_213_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 42, Fasc. 2, 1981, pag. 213–216

Printed in the Netherlands

MOYENNES INVARIANTES S'ANNULANT SUR DES IDEAUX

Michel Talagrand

Soit G un groupe localement compact. On appelle moyenne invariante à gauche sur $L^\infty(G)$ toute forme linéaire positive m telle que $m(1) = 1$ et $m(f_a) = m(f)$ pour $f \in L^\infty$ et $a \in G$, où f_a est donnée par $f_a(x) = f(ax)$. On dit que G est moyennable s'il existe une telle moyenne. (On dira par convention moyenne au lieu de moyenne invariante).

L'ensemble des moyennes s'identifie à l'ensemble des probabilitiés sur le spectre S de $L^\infty(G)$ qui sont invariantes par l'action naturelle de G sur S. Lorsque G est moyennable et non compact, ou est compact, et moyennable en tant que groupe discret, il est prouvé dans [1], [3] qu'en divers sens l'ensemble des moyennes est tres grand. C'est donc une question naturelle, (posée par E. Granirer dans [1]) de demander si lorsque F est un fermé invariant non-vide de S, l'ensemble des moyennes sur G qui sont, en tant que mesures sur S, portées par F est également grand. (Une telle moyenne est nulle sur l'idéal I des fonctions de L^∞ qui s'annulent sur F). Le but de ce travail est d'apporter un élément de résponse à cette question.

THÉORÈME[1]: *Soit G un groupe infini localement compact, moyennable en tant que groupe discret. Il existe une famille* $(f_i)_{i\in I}$ *de fonctions* $0 \le f_i \le 1$, *où card.* I = *card. IR, telle que pour tout fermé invariant non-vide F de S et tout* $i \in E$, *il existe une moyenne* m_i *portée par F et telle que* $m_i(f_i) \ge \frac{2}{3}$, *et* $m_i(f_j) \le \frac{1}{3}$ *pour* $j \ne 1$. *Ainsi* $\|m_i - m_j\| \ge \frac{1}{3}$

[1] Lors de la correction des épreuves, nous avons remarqué qu'un argument modifié permet de prendre card. $I = 2^{\text{card. IR}}$.

0010–437X/81/02213–04$00.20/0

pour $i \neq j$, ce qui montre que l'ensemble des moyennes partées par F n'est pas séparable en norme.

DÉMONSTRATION: Il faut distinguer suivant que G est compact ou non. Nous n'écrirons la preuve que dans le cas où G est compact; les idées essentielles sont les mêmes quand G n'est pas compact, et les quelques complications qui s'introduisent sont purement techniques.

On suppose donc G compact. La mesure de Haar normalisée d'un sous-ensemble mesurable A de G sera notée $|A|$. On désigne par χ_A la fonction caractéristique de A.

LEMME: *Soit U un ouvert de G, avec $|U| > \frac{2}{3}$. Soient n un entier et $\epsilon > 0$. Il existe alors un ouvert V de U tel que $|V| = |\bar{V}| < \epsilon$ et que pour tout n-uple $(t_1, \ldots, t_n)$ de G, il existe $t \in G$ tel que $\frac{1}{n}\sum_{i\leq n} \chi_{t_iV}(t) \geq \frac{2}{3}$.*

PREUVE: Soit H un ouvert dense dans U, tel que $|H| \leq \epsilon$ et que $H = \cup H_\ell$ ou H_ℓ est ouvert et $|H_\ell| = |\bar{H}_\ell|$. (L'existence de H découle du fait que G n'est pas discret). Soit $(t_1, \ldots, t_n)$ un n-uple de G. On a

$$\int_G \frac{1}{n} \sum_{i\leq n} \chi_{t_iU}(t)\,\mathrm{d}t = \|U\| > \tfrac{2}{3}.$$

Il existe donc t tel que $\frac{1}{n}\sum_{i\leq n} \chi_{t_iU}(t) \geq \frac{2}{3}$. Il existe alors une partie $J \subset [1, n]$, avec card. $J \geq \dfrac{2n}{3}$ telle que $t \in \bigcap_{i\in J} t_iU$, i.e., $\bigcap_{i\in J} t_iU$ est un ouvert non-vide. Il en résulte sans peine que $\bigcap_{i\in J} t_iH$ est non-vide, car en fait cet ouvert est dense dans le précédent. Il existe donc $u \in G$ avec $\frac{1}{n}\sum_{i\leq n} \chi_{r_iH}(u) \geq \frac{2}{3}$. Si on pose $H^k = \bigcup_{\ell\geq k} H_\ell$, il existe k tel que $\frac{1}{n}\sum_{i\leq n} \chi_{t_iH^k}(u) \geq \frac{2}{3}$. Puisque H^k est ouvert, ceci est encore vrai pour tout n-uple $(t_1', \ldots, t_n')$ voisin de $(t_1, \ldots, t_n)$. Mais puisque G^n est compact, on voit qu'il suffit de choisir $V = H^k$ pour k assez grand.

c.q.f.d.

Il est clair avec ce lemme que l'on peut alors construire par double induction des ouverts disjoints (V_s^n) pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \{0, 1\}^n$ tels que pour tout n, tout $s \in \{0, 1\}^n$ et tout n-uple $(t_1, \ldots, t_n)$ de G il existe $u \in G$ avec $\frac{1}{n}\sum_{i\leq n} \chi_{t_iV_s^n}(u) \geq \frac{2}{3}$. (Pour rendre possible la construction, on choisit de plus

$$|\bar{V}_s^n| = |V_s^n| \leq \frac{1}{3}2^{-2n}.)$$

On pose $I = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et pour $\sigma \in I$ on désigne par σ_n la suite de longueur n formée des n premiers éléments de σ. On pose $f_\sigma = \chi_{V_\sigma}$, où $V_\sigma = \bigcup_n V^n_{\sigma_n}$. On va montrer que ces fonctions conviennent.

Soient F un fermé non-vide invariant de S, $\sigma \in I$ et J une partie finie de I. Il suffit de montrer qu'il existe une moyenne $m = m_{\sigma,J}$ portée par F et telle que $m(f_\sigma) \geq \frac{2}{3}$ et $m(f_\rho) \leq \frac{1}{3}$ pour $\rho \in J$ et $\rho \neq \sigma$. (Si on fixe σ, tout point μ adhérent aux $m_{\sigma,J}$ selon le filtre naturel sur les parties finies de I ne contenant par σ est tel que $\mu(f_\sigma) \geq \frac{2}{3}$ et $\mu(f_\rho) \leq \frac{1}{3}$ pour $\rho \neq \sigma$.) Soit p un entier tel que les suites finies σ_p et ρ_p pour $\rho \in J$ soient deux à deux distinctes. Soit $n \geq p$. Pour tout n-uple $(t_1, \ldots, t_n)$ de G il existe $u \in G$ tel que $\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} \chi_{t_i V^n_{\sigma_n}}(u) \geq \frac{2}{3}$. Puisque $\sigma_n \neq \rho_n$ pour $\rho \in J$, on a $V^n_{\sigma_n} \cup V_p = \emptyset$ et donc $\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} \chi_{t_i V_p}(u) \leq \frac{1}{2}$ pour $\rho \in J$. Il existe donc un ouvert non vide W tel que pour $u \in W$ on ait

$$\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (f_\sigma)_{t_i}(u) \geq \frac{2}{3}, \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (f_\rho)_{t_i}(u) \leq \frac{1}{3} \text{ pour tout } \rho \in J.$$

Pour un ensemble mesurable A (resp. $g \in L^\infty$) désignons par $\tilde{A}$ l'ouvert fermé correspondant dans S (resp. $\tilde{g}$ la fonction continue associée de (S)). Puisque W est ouvert et G compact, G est réunion finie de translatés de W. Puisque F est invariant par translation on a $F \bigcap \tilde{W} \neq \emptyset$.

En résumé on a donc montré: pour $n \geq p$ et tout n-uple $t_1, \ldots, t_n$ de G il existe $x \in F$ tel que

$$\frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (\tilde{f}_\sigma)_{t_i}(x) \geq \frac{2}{3} \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} (\tilde{f}_\rho)_{t_i}(x) \geq \frac{1}{3} \text{pour tout } \rho \in J \tag{1}$$

ou pour $g \in \mathscr{C}(S)$ et $t \in G$ on à $g_t(x) = g(t, x)$, désignant l'opération naturelle de G sur S. Si $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, désignons par $\mu_{\bar{t},x}$ la moyenne non-invariante donnée pour $f \in L^\infty$ par

$$\mu_{\bar{t},x}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n} \tilde{f}_{t_i}(x).$$

Cette moyenne est portée par F si $x \in F$. Puisque G est moyennable en tant que groupe discret, il existe un filtre $\mathscr{F}$ sur l'ensemble des n-uples, (n variant) tel que, quelque soit le choix des $x_{\bar{t}} \in S$, $\lim_{t \in \mathscr{F}} \mu_{\bar{t},x_{\bar{t}}}$ soit invariante. La condition (1) montre alors qu'on choix convenable des $x_{\bar{t}}$ assure que cette limite satisfait aux conditions requises.

c.q.f.d.

C'est un problème intéressant [1], et qui semble inabordable, de savoir si l'ensemble des moyennes portées par F peut admettre un point exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Granirer: Exposed points of convex sets and weak sequential convergence. Mem. Amer. Math. Soc., No. 123 (1972).

[2] F.P. Greenleaf: Invariant means on topological groups and their applications. Van Nostrand Math. studies 16, Van Nostrand, 1969.

[3] J.M. Rosenblatt: Invariant Means and Invariant Ideals in $L_\infty(G)$ for a locally compact group G, *J. Funct. Anal.*, *21*, (1976) 31–51.

[4] M. Talagrand: Géométrie des simplexes des moyennes. (A paraitre dans *J. of Funct. Analysis*).

(Oblatum 17-IV-1979 & 30-X-1979)

Equipe d'Analyse–Tour 46
Université Paris VI
4 Place Jussieu
75230 Paris, Cedex 05