COMPOSITIO MATHEMATICA

ECKART VIEHWEG

Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei

Compositio Mathematica, tome 41, nº 3 (1980), p. 361-400

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1980__41_3_361_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 41, Fasc. 3, 1980, pag. 361–400

KLASSIFIKATIONSTHEORIE ALGEBRAISCHER VARIETÄTEN DER DIMENSION DREI

Eckart Viehweg

Inhalt

Wir betrachten in dieser Arbeit normale, projektive und irreduzible Varietäten einen *Faserraum* (bzw. flachen; bzw.... Faserraum), nicht ausdrücklich anders vermerken, soll jede "Varietät" diese Eigenschaften haben.

(0.1) BEZEICHNUNG: Wir nennen einen Morphismus $f: V \to W$ von Varietäten einen *Faserraum* (bzw. flachen; bzw.... Faserraum), wenn die allgemeine Faser $V_w = f^{-1}(w)$ von f eine reguläre irreduzible Varietät ist und f surjektiv (bzw. flach und surjektiv; bzw.... und surjektiv) ist. $f: V \to W$ heißt *étales Faserbündel* (mit Faser F), wenn zusätzlich eine étale Überlagerung $W' \to W$ existiert, so daß $W' \times_W V \simeq W' \times F$ ist.

Die benötigten numerischen Invarianten einer regulären Varietät V, d.h.: die Kodaira Dimension $\kappa(V)$, die Irregularität $q(V)$, sind am

0010-437X/80/060361-40 $00.20/0

Ende der Einleitung (0.6) definiert. Man beachte, daß $q(V) = \dim(A(V))$ ist, wobei $\alpha_V : V \to A(V)$ die Albanese Abbildung ist. Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist der folgende Satz:

SATZ I: *Es sei $\hat{V}$ eine reguläre Varietät der Dimension drei. Dann existiert eine birational äquivalente Varietät V, ebenfalls regulär, so daß gilt*:

$\kappa(V)$	$q(V)$	$\dim \alpha_V(V)$	*Struktur von V*	
3			*Varietät von allgemeinem Typ*	
2			*Es existiert ein Faserraum $f: V \to W$ mit allgemeiner Faser F*	$\dim(F) = 1, \kappa(F) = 0$
1				$\dim(F) = 2, \kappa(F) = 0$
0	0	0	???	
	1	1	*$\alpha_V : V \to A(V)$ ist ein étales Faserbündel mit Faser F*	$\dim(F) = 2, \kappa(F) = 0$
	2	2		$\dim(F) = 1, \kappa(F) = 0$
	3	3	*abelsche Varietät*	
$-\infty$	0	0	???	
	≥ 1	1	*Die Steinfaktorisierung $f: V \to W$ von $\alpha_V : V \to \alpha_V(V)$ hat eine allgemeine Faser F und W hat eine Desingularisierung W′*	$\dim(F) = 2, \kappa(F) = -\infty$ $q(W') = q(V), \kappa(W') \geq 0$
		2		$F \simeq \mathbf{P}^1$ $q(W') = q(V), \kappa(W') \geq 0$

BEMERKUNG: Wie wir im folgenden erläutern werden, sind die ersten drei Zeilen dieser Tabelle "wohlbekannt" und der "$\kappa(V) = 0$, $q(V) \neq 1$" Teil wurde bereits von K. Ueno bewiesen.

In [19] findet man ein "Programm", wie man eine solche Klassifikationstabelle aus einer Reihe von Vermutungen (auch für $\dim(V) > 3$) ableiten könnte. Zunächst einmal muß man Überlagerungen abelscher Varietäten studieren:

SATZ II (Vermutung B_n in [19]): *Es sei A eine abelsche Varietät der Dimension n und $h: V \to A$ ein surjektiver Morphismus. Ist V eine reguläre Varietät, ebenfalls von Dimension n, und $\kappa(V) = 0$, so ist V birational zu einer abelschen Varietät A′, isogen zu A.*

Dieser Satz wurde von Ueno in [20] für $n = 3$ bewiesen. Für den Beweis für beliebiges n verweisen wir auf die Arbeit [8]. Wesentlich für den dort gegebenen Beweis ist das genaue Studium von Differentialformen auf Untervarietäten abelscher Varietäten, welches auf Y. Kawamata zurückgeht.

DEFINITION 0.2: Es sei $f: V \to W$ ein Faserraum. Var(f), die *Variation* von f, ist definiert als die kleinste Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: Es existieren Varietäten W' und $\hat{W}$ mit $\dim(\hat{W}) = k$ und $\dim(W') = \dim(W)$, surjektive Morphismen $W' \to W$ und $W' \to \hat{W}$ und ein Faserraum $\hat{f}: \hat{V} \to \hat{W}$, so daß $\hat{V} \times_{\hat{W}} W'$ birational zu $V \times_W W'$ ist.

Existiert für den Typ von Varietäten, der als reguläre Faser von $f: V \to W$ auftritt, ein grobes Modulschema M, so induziert f eine rationale Abbildung $\Psi: W \to M$. In diesem Fall ist $\mathrm{Var}(f) = \dim(\Psi(W))$.

Mit dieser Bezeichnung können wir die folgende Vermutung formulieren, die eine Verstärkung der Vermutung C_n von Iitaka ist (siehe [19]):

VERMUTUNG $C_{n,m}$: *Es sei* $f: V \to W$ *ein Faserraum,* V *und* W *regulär und* $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$. *Dann gilt (hoffentlich)* $\kappa(V) \geq \kappa(V_w) + \kappa(W)$. *Ist* $\kappa(V_w) \geq 0$ *und* $\kappa(W) \geq 0$, *so gilt* $\kappa(V) > \mathrm{Var}(f)$.

Leider ist $C_{n,m}$ bisher nur in Spezialfällen bewiesen. Ueno leitete $C_{2,1}$ zunächst aus der Klassifikationstheorie der Flächen ab. 1975 gab er einen direkten Beweis. Kurz darauf fand der Autor einen Beweis für $C_{n,n-1}$ und einen etwas elementareren Beweis für $C_{2,1}$ (siehe [22]). In [21] zeigt Ueno, daß $C_{n,m}$ richtig ist, falls die allgemeine Faser eine abelsche Varietät ist. Fujita und Ueno beweisen $C_{n,1}$, falls $\kappa(V) \geq 0$ und W eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ ist [1]. Dieses zuletzt angeführte Resultat reicht zusammen mit $C_{3,2}$ und B_3 aus, um den "$\kappa(V) = 0$" Teil von Satz I zu beweisen, bis auf die Zeile "$q(V) = 1$". Dies wurde von Ueno in [20] durchgeführt.

Der größte Teil dieser Arbeit (§§3–9) enthält den Beweis von:

SATZ III: $C_{3,1}$ *ist richtig.*

Da es ohne viel zusätzlichen Aufwand möglich ist, geben wir außerdem einen etwas von [22] abweichenden Beweis von:

SATZ IV: $C_{n,n-1}$ *ist richtig.*

Einen Leitfaden für die einzelnen Fälle, die wir bei dem Beweis von III und IV zu berücksichtigen haben, findet der Leser in §9. Als Nebenresultat finden wir einige weitere Beweise für $C_{2,1}$. Einer von diesen ist auch gültig über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper k, gleich welcher Charakteristik. Jedoch ist in diesem Falle $C_{2,1}$ von wenig Nutzen für die Klassifikationstheorie der Flächen, da im Allgemeinen die allgemeine Faser der Albanese Abbildung nicht glatt ist.

In §1 und §2 zeigen wir, wie man aus Satz II und $C_{3,1}$ und $C_{3,2}$ den Satz I erhält. Die dazu notwendigen Schlüsse sind jedoch auch für höhere Dimensionen richtig. Um dies präzisieren zu können formulieren wir:

VERMUTUNG $D_n(-\infty)$: *Es sei $\hat{V}$ eine reguläre Varietät der Dimension n mit $\kappa(\hat{V}) = -\infty$. Ist $\hat{f}: \hat{V} \to W$ die Steinfaktorisierung der Albanese Abbildung $\alpha_{\hat{V}}: \hat{V} \to \alpha_{\hat{V}}(\hat{V})$, so ist für eine Desingularisierung W' von W $\kappa(W') \geq 0$, $q(W') = q(\hat{V})$ und die allgemeine Faser F von $\hat{f}$ hat $\kappa(F) = -\infty$.*

VERMUTUNG $D_n(0)$: *Es sei $\hat{V}$ eine reguläre Varietät der Dimension n mit $\kappa(\hat{V}) = 0$.*

(a) *Die Albanese Abbildung $\alpha_{\hat{V}}: \hat{V} \to A(\hat{V})$ ist ein Fasserraum mit allgemeiner Faser F, $\kappa(F) = 0$ und* $\mathrm{Var}(\alpha_{\hat{V}}) = 0$.

(b) *Wir können eine zu $\hat{V}$ birational äquivalente reguläre Varietät $\tilde{V}$ finden mit: Es existiert eine offene Untervarietät $U \subset \tilde{V}$ und eine endliche Überlagerung $W'' \to A(\tilde{V})$, so daß $A(\tilde{V}) - \alpha_{\tilde{V}}(U)$ von Codimension größer gleich zwei ist und eine offene Einbettung über W'' von $U \times_{A(\tilde{V})} W''$ in $F \times W''$ existiert.*

(c) *Hat F ein projektives reguläres minimales Modell, so können wir eine zu $\hat{V}$ birational äquivalente reguläre Varietät V finden, so daß $\alpha_V: V \to A(V)$ ein étales Faserbündel ist.*

BEMERKUNG 0.3: Die in $D_n(0)$, (c) gestellte Bedingung, daß ein projektives minimales Modell von F exisitiert, scheint etwas stark zu sein. Sie soll gewährleisten (siehe §2), daß jede birationale Abbildung von $F \times W'$ für reguläres W' auch biregulär ist, sofern sie mit der Projektion auf W' verträglich ist. Vielleicht kann man diese Bedingung abschwächen. Auf der anderen Seite folgt die minimalität eines Modelles F' von F, sofern $\omega_{F'}^k = O_{F'}$ ist. Dieses folgt für drei-dimensionale F mit $\kappa(F) = 0$, $q(F) > 1$ aus Satz I.

In §1 zeigen wir, daß aus $C_{n,m}$ und Satz II $D_n(-\infty)$ und $D_n(0)$, (a) folgt. In §2 beenden wir dann den Beweis von:

SATZ V: *Aus der Vermutung $C_{n,m}$ für $m = 1, \ldots, n-1$ folgt Vermutung $D_n(-\infty)$ und $D_n(0)$.*

Die Existenz eines solchen Satzes wurde von Ueno [19, S.: 133] vermutet. Natürlich ist mit III, IV und V der "$\kappa(V) \leq 0$" Teil von Satz I bewiesen. Für $\kappa(V) > 0$ ist die Aussage von Satz I jedoch nichts als eine Folgerung aus dem "*Fundamentalsatz über plurikanonische Faserungen*" von Iitaka: (siehe (1.3)).

SATZ 0.4: *Es sei $\hat{V}$ eine reguläre Varietät der Dimension n mit $\kappa(\hat{V}) > 0$. Dann existiert ein reguläres Modell V von $\hat{V}$ und ein Faserraum $f: V \to W$ mit allgemeiner Faser F, so daß* $\dim(W) = \kappa(V)$ *und* $\kappa(F) = 0$ *ist.*

Die in §1 benutzten Argumente stammen zum größten Teil aus [19] und gehen auf Iitaka und Ueno zurück. Der in dieser Arbeit gegebene Beweis von $C_{n,n-1}$ besteht einfach aus dem Zusammenfügen von Argumenten aus [22] und der von Mumford in [14] gegebenen Beschreibung von Garben auf dem Modulschema der stabilen Kurven. Die Vermutung $C_{3,1}$ ist nach den Arbeiten von Ueno und Fujita richtig, wenn die allgemeine Faser eine abelsche Varietät oder K3 Fläche ist (siehe §5). Wie man im Prinzip vorzugehen hat, um $C_{3,1}$ für Familien elliptischer Flächen zu erhalten (siehe §9) ist im wesentlichen klar, wenn auch – soweit dem Autor bekannt – bisher nicht ausgearbeitet worden. Der Beweis von $C_{3,1}$ für Faserräume von Flächen vom allgemeinen Typ beruht stark auf den Erbegnissen von Gieseker [3] und Fujita [2], [1].

Aus der langen Liste der Mathematiker, die mir durch Gespräche und Hinweise geholen haben, möchte ich (aus Platzmangel) nur Dr. T. Fujita, Y. Kawamata, Prof. H. Popp und Prof. K. Ueno erwähnen. Ihnen und allen ungenannten sei herzlich gedankt. Eine "Ankündigung" der Ergebnisse mit einem Überblick über die Beweismethode erschien in *Rend. Sem. Mat. Univers. Politcn. Torino*; 37 (1979).

(0.5) BEZEICHNUNGEN: Wir benutzen die Terminologie der algebraischen Geometrie, wie sie zum Beispiel in [5] beschrieben wird.

(a) Es seien $f_i: V_i \to W_i$ für $i = 1, 2$ zwei Faserräume (oder zwei dominante rationale Abbildungen von Varietäten). Dann bezeichnen wir f_1 und f_2 als *birational äquivalent*, wenn birationale Abbildungen $\eta': V_1 \to V_2$ und $\eta: W_1 \to W_2$ existieren, so daß $f_1 \cdot \eta$ und $\eta' \cdot f_2$ dieselbe birationale Abbildung definieren.

(b) Die Aussage: "Für $f_1: V_1 \to W_1$ gilt ... nach Wahl eines geeignetten Modelles von f_1" bedeutet natürlich, daß man einen birational äquivalenten Faserraum $f_2: V_2 \to W_2$ finden kann, für den ... richtig ist.

(c) Die aus der Dualitätstheorie benutzten Bezeichnungen und Ergebnisse werden in dem Anhang erläutert.

(d) Ist $f: V \to W$ ein Morphismus von Varietäten, so ist die allgemeine Faser $V \times_W \operatorname{Spec}(\overline{\mathbb{C}(W)}) = V_w$, wobei $\overline{\mathbb{C}(W)}$ der algebraische Abschluß des Funktionenkörpers von W ist. Die von uns über die allgemeine Faser gemachten Aussagen gelten jedoch entweder für alle Fasern von f über einer Zariski-offenen Menge in W (z.B.: regulär, Dimension der Faser, etc.) oder zumindest (Kodaira Dimension der Faser) über einer Untermenge $U \subset W$, die das Komplement von abzählbar vielen echten abgeschlossenen Untervarietäten ist. Ist die allgemeine Faser von f jedoch eine Kurve oder Fläche, so können wir auch in diesem Fall für U eine Zariski-offene Menge wählen (siehe [19, S.: 85] und [11]).

DEFINITION 0.6:

(i) Es sei V eine Varietät und $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe. Es ist

$$\kappa(V, \mathscr{L}) = \begin{cases} -\infty & \text{falls für alle } n > 0 \quad \text{gilt: } H^0(V, \mathscr{L}^n) = 0 \\ \operatorname{trz} \operatorname{grd}\left(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(V, \mathscr{L}^n)\right) - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) Ist $f: V \to W$ ein flacher Faserraum, so daß $\omega_{V/W}$ existiert und invertierbar ist (siehe A.1), so ist die *relative Kodaira Dimension* von $f: \kappa(V/W) = \kappa(V, \omega_{V/W})$.

(iii) Ist V eine Varietät, so daß ω_V existiert und invertierbar ist, so ist die *Kodaira Dimension* von $V: \kappa(V) = \kappa(V, \omega_V)$.

(iv) Ist V eine reguläre Varietät, so bezeichnet $q(V) = \dim_{\mathbb{C}}(H^1(V, O_V))$ die *Irregularität* von V.

BEMERKUNG 0.7: Die in 0.6 definierte Kodaira Dimension und relative Kodaira Dimension ist erst dann invariant unter birationalen Abbildungen, wenn wir uns auf rationale Gorenstein Singularitäten bzw. Gorenstein Faserräume mit relativ rationalen Singularitäten beschränken (A.4).

Die Numerierung der Sätze, Definitionen, wichtiger Gleichungen oder Abschnitte ist in §b oder dem Anhang fortlaufend mit *b.i* oder *A.i* ($i = 1, \ldots$). Eine Ausnahme bilden die Sätze I–V und die Vermutungen $C_{n,m}$ und D_n, die in der Einleitung zu finden sind.

§1. Folgerungen aus der Vermutung $C_{n,m}$

In diesem § wollen wir zunächst einige Eigenschaften der Kodaira Dimension und der Albanese Abbildung zusammenstellen. Die Beweise findet man in [19].

LEMMA 1.1 (siehe [19, §8]): *Es sei V eine Varietät und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe. Es sei* $\mathsf{N}(V, \mathcal{L}) = \{i > 0;\ H^0(V, \mathcal{L}^i) \neq 0)$. *Für* $i \in \mathsf{N}(V, \mathcal{L})$ *sei* $\Phi_{i,\mathcal{L}}: V \to \mathbb{P}^N$ *die rationale Abbildung, die durch* $\Phi_{i,\mathcal{L}}(x) = (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_N(x))$ *gegeben ist. Dabei ist* $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ *eine Basis von* $H^0(V, \mathcal{L}^i)$. *Dann ist* $\kappa(V, \mathcal{L}) = -\infty$, *falls* $\mathsf{N}(V, \mathcal{L}) = \emptyset$ *ist und* $\kappa(V, \mathcal{L}) = \mathrm{Max}\{\dim(\Phi_{i,\mathcal{L}}(V));\ i \in \mathsf{N}(V, \mathcal{L})\}$ *falls* $\mathsf{N}(V, \mathcal{L}) \neq \emptyset$.

LEMMA 1.2 (*siehe* [19, §5]):

(i) *Ist* $g: V' \to V$ *ein surjektiver Morphismus von Varietäten, so ist* $\kappa(V, \mathcal{L}) = \kappa(V', g^*\mathcal{L})$ *für jede invertierbare Garbe* $\mathcal{L}$ *auf* V.

(ii) *Sind* $\mathcal{L}$ *und* $\mathcal{L}'$ *invertierbare Garben auf* V *und* $\mathcal{L}'^a \subset \mathcal{L}^b$ *für* $a, b > 0$, *so ist* $\kappa(V, \mathcal{L}) \geq \kappa(V, \mathcal{L}')$.

LEMMA 1.3: (siehe [19, §6]): *V sei eine reguläre Varietät.*

(i) (Satz von Iitaka) *Es existiert m_0 und ein Fasserraum* $f: V' \to W$, *so daß gilt:*

(a) *V' und W sind regulär.*

(b) *Für* $\underline{m \in \mathsf{N}(V, \omega_V)}$, $m \geq m_0$, *ist f birational äquivalent zu* $\Phi_{m,\omega_V}: V \to \overline{\Phi_{m,\omega_V}(V)}$.

(c) *Es ist* $\kappa(V) = \dim(W)$.

(d) *Es existiert eine Menge U in W, die das Komplement abzählbar vieler echter abgeschlossener Untervarietäten ist, so daß für jedes* $y \in U$ *die Faser* $V'_y = f^{-1}(y)$ *eine reguläre Varietät mit* $\kappa(V'_y) = 0$ *ist.*

(ii) *Es sei* $g: V' \to V$ *ein surjektiver Morphismus regulärer Varietäten mit* $\dim(V') = \dim(V)$. *Dann ist* $\kappa(V') \geq \kappa(V)$.

(iii) *Es sei* $f: V \to W$ *ein Faserraum. Dann ist* $\kappa(V) \leq \kappa(V_w) + \dim(W)$, *wobei – wie üblich – V_w die allgemeine Faser bezeichnet.*

(1.4) DIE ALBANESE ABBILDUNG (siehe [19, §9]):

(i) Es sei V eine reguläre Varietät. Dann existiert eine abelsche Varietät $A(V)$ und ein Morphismus $\alpha = \alpha_V: V \to A(V)$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jeden Morphismus $\beta: V \to B$ von V in eine abelsche Varietät B existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus abelscher Varietäten $g: A(V) \to B$ und ein $b \in B$, so daß

$\beta(v) = g(\alpha(v)) + b$ ist, für alle $v \in V$. Man bezeichnet $\alpha: V \to A(V)$ als die *Albanese Abbildung* von V.

(ii) Es ist $\dim(A(V)) = q(V)$.

(iii) $\alpha(V)$ erzeugt $A(V)$ (d.h.: $A(V)$ hat keine echte abelsche Untervarietät, die das Bild von α enthält).

In [19, §10] findet man den Beweis, daß eine Untervarietät W einer abelschen Varietät nie $\kappa(W) = -\infty$ haben kann und nur dann $\kappa(W) = 0$, wenn W selbst eine abelsche Varietät ist. Zusammen mit 1.4(iii) gibt dies:

SATZ 1.5 (Ueno): *Es sei V eine reguläre Varietät und $\alpha: V \to A(V)$* die allgemeine Faser von f. Wegen $C_{n,m}$ ist $\kappa(\hat{V}) \geq \kappa(F) + \kappa(W')$. Da aus (1.5) und (1.3), (ii) folgt, daß $\kappa(W') \geq 0$ ist, muß $\kappa(F) = \infty$ sein, falls $\kappa(\hat{V}) = -\infty$ ist.

Mit Hilfe dieser Lemmata können wir wie in [19] beweisen:

(1.6) *Aus Satz II und Vermutung $C_{n,m}$ (für $m = 1, \ldots, n-1$) folgt $D_n(-\infty)$ und $D_n(0), a$).*

BEWEIS: Es sei $\hat{f}: \hat{V} \to W$ die Steinfaktorisierung von $\alpha: \hat{V} \to \alpha(\hat{V})$ und $d: W' \to W$ eine Desingularisierung. Wir dürfen natürlich annehmen, daß $f: \hat{V} \to W'$ existiert, so daß $\hat{f} = d \cdot f$ ist. Es sei F die allgemeine Faser von f. Wegen $C_{n,m}$ ist $\kappa(\hat{V}) \geq \kappa(F) + \kappa(W')$. Da aus (1.5) und (1.3), (ii) folgt, daß $\kappa(W') \geq 0$ ist, muß $\kappa(F) = \infty$ sein, falls $\kappa(\hat{V}) = -\infty$ ist.

Ist hingegen $\kappa(\hat{V}) = 0$, so ist wegen (1.3), (iii) $\kappa(F) \geq 0$ und wegen $C_{n,m}$ gilt: $\kappa(F) = \kappa(W') = \mathrm{Var}(f) = 0$. Wegen (1.5) und (1.3), (ii) ist α surjektiv und aus Satz II folgt, daß W' birational zu einer abelschen Varietät B ist. Betrachte

$$\begin{tikzcd} \hat{V} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "f"'] & A(\hat{V}) \arrow[d, shift left, "g"] \\ W' \arrow[r, "\alpha_{W'}"'] & A(W') \arrow[u, dashed, shift left, "g'"] \end{tikzcd}$$

Wegen der universellen Eigenschaft (1.4), (i) existieren g und g'. Ebenso folgt, daß $g \cdot g'$ und $g' \cdot g$ Isomorphismen sein müssen. Also ist $q(\hat{V}) = q(W')$. Da aber W' birational zu einer abelschen Varietät ist, ist $\alpha_{W'}$ birational und somit α ein Faserraum, falls $\kappa(\hat{V}) = 0$ ist.

§2. Der Beweis von Satz V

In diesem § wollen wir den Beweis von Satz V abschließen. Zunächst beweisen wir das folgende Lemma, dessen Beweis dem Autor von K. Ueno gezeigt wurde:

LEMMA 2.1: *Es sei Z eine Varietät und $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, die birational auf Z operiert. Dann existiert eine reguläre Varietät Z', auf der $\mathfrak{G}$ biregulär operiert, und ein $\mathfrak{G}$-invarianter birationaler Morphismus $Z' \to Z$.*

BEWEIS: Es sei $X = \Pi_{\sigma \in \mathfrak{G}} Z_\sigma$, wobei $Z = Z_\sigma$ ist. Jedes $\tau \in \mathfrak{G}$ definiert einen Isomorphismus von X indem τ den Faktor Z_σ identisch auf $Z_{\sigma\tau^{-1}}$ abbildet. Es sei $\psi: Z \to X$ die rationale Abbildung, die z abbildet auf das Tupel (z_σ) mit $z_\sigma = \sigma(z) \in Z_\sigma$. Es ist ψ verträglich mit der Operation von $\mathfrak{G}$ auf Z und X. Es sei Z'' der Abschluß des Bildes von ψ. Dann ist Z'' invariant unter der Operation von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}$ operiert biregulär auf Z''. $pr_1: Z'' \to Z$ ist $\mathfrak{G}$-invariant. Nun kann man Z'' so desingularisieren, daß $\mathfrak{G}$ auch auf der Desingularisierung biregulär operiert (vergleiche mit [19, S.: 22]).

(2.2): Es sei $\alpha = \alpha_{\hat{V}}: \hat{V} \to A(\hat{V}) = A$ wie in $D_n(0)$, (a). D.h.: α ist ein Faserraum mit $\mathrm{Var}(\alpha) = 0$.

Nach Definition der Variation, existiert eine Überlagerung von A, über der der induzierte Faserraum trivial ist. Durch "eingebettetes Desingularisieren" des Verzweigungsortes erhalten wir einen birationalen Morphismus $\gamma: W \to A$ und eine Galoissche Überlagerung $\eta: W' \to W$ mit Galoisgruppe $\mathfrak{G}$, so daß gilt:

(i) W ist regulär und $\Delta(W'/W)$ is gut (A.9)

(II) $\hat{V} \times_A W'$ ist birational zu $W' \times F$, mit F regulär, $\kappa(F) = 0$. Nach (2.1) finden wir ein $Z' \to W' \times F$, birational, so daß die Operation von $\mathfrak{G}$ auf $\hat{V} \times_A W'$ auf Z' eine bireguläre Operation induziert.

Es sei $\tilde{V}$ eine Desingularisierung von $Z'/\mathfrak{G}$, so gewählt, daß der Verzweigungsort der Normalisierung V' von $\tilde{V} \times_W W'$ über $\tilde{V}$ ebenfalls gut ist. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
W' \times F & \xleftarrow{\rho} & V' & \xrightarrow{\eta'} & \tilde{V} & & \\
\downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\
W' & \xleftarrow{id} & W' & \xrightarrow[\eta]{} & W & \xrightarrow[\gamma]{} & A,
\end{array}$$

so daß die Voraussetzungen von (A.10) erfüllt sind. $\tilde{V}$ ist birational zu $\hat{V}$.

Nun sei E der exzeptionelle Ort von ρ. Indem wir $\tilde{V}$ noch ein wenig mehr aufblasen, dürfen wir annehmen, daß $\eta'(E) \cup \Delta(V'/\tilde{V})$ ebenfalls nur reguläre Komponenten mit transversalen Schnitten hat.

Es sei D ein Prim-Weil-Divisor von W'. Dann ist auch $g^{-1}(D)$ ein Prim-Weil-Divisor. Sein eigentliches Urbild in V' bezeichnen wir mit D'. Es sei $e_W(D)$ (bzw. $e_{\tilde{V}}(D')$) die Verzweigungsordnung von D über W (bzw. D' über $\tilde{V}$).

Lemma 2.3: *Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in* (2.2) (*insbesondere* $\kappa(\tilde{V}) = 0$). *Dann ist für jeden Prim-Weil-Divisor D von W', für den $\gamma(\eta(D))$ ein Divisor von A ist,* $e_W(D) = e_{\tilde{V}}(D')$.

Beweis: Angenommen das Lemma sei falsch. Es seien $D_1, \ldots, D_k$ die Divisoren mit $e_W(D_i) > e_{\tilde{V}}(D'_i)$ und $\gamma(\eta(D_i))$ Divisor auf A. Offensichtlich permutiert $\mathfrak{G}$ diese Divisoren. Es seien $E_1, \ldots, E_\ell$ die exzeptionellen Divisoren von V' bezüglich ρ, die über $D_1, \ldots, D_k$ liegen.

Nach (A.11) und (A.12) enthält der Kokern von

$$\rho^* \omega_{W' \times F/W'} \hookrightarrow \eta'^*(\omega_{\tilde{V}} \otimes f^* \omega_W^{-1})$$

die Untervarietäten D'_i und E_j für $i = 1, \ldots, k$ und $j = 1, \ldots, \ell$. Also ist für $\nu \gg 0$

$$\rho^* \omega^{\nu}_{W' \times F/W'} \otimes f'^* O_{W'} \left(\sum_{i=1}^{k} D_i \right) \hookrightarrow \eta'^*(\omega^{\nu}_{\tilde{V}} \otimes f^* \omega_W^{-\nu}).$$

Da $\kappa(F) = 0$ und $\kappa(W) = 0$ ist, ist nach (1.2):

$$\kappa \left(W, \omega_W \otimes O_W \left(\eta \left(\sum_{i=1}^{k} D_i \right) \right) \right) \leq \kappa(\tilde{V}).$$

Sind $F_1, \ldots, F_\lambda$ die exzeptionellen Divisoren von γ, so ist $\omega_W = O_W(\Sigma_{j=1}^{\lambda} \alpha_i F_i)$, $\alpha_i > 0$, (A.7).

Also ist für $\mu \gg 0$ die Garbe $\gamma^*(O_A(\gamma(\eta(\Sigma_{i=1}^{k} D_i))))$ eine Untergarbe von $(\omega_V \otimes O_W(\eta(\Sigma_{i=1}^{k} D_i)))^{\mu}$. Da aber ein nicht trivialer positiver Divisor auf einer abelschen Varietät immer eine echt positive κ-Dimension hat, steht dieses im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lemma 2.4: *Es sei E ein Prim-Weil-Divisor von V', exzeptionell für*

ρ, so daß $f'(E) \neq W'$ ist. Dann ist für jedes $\sigma \in \mathfrak{G}$ auch $\sigma(E)$ ein exzeptioneller Divisor.

BEWEIS: Da W' normal ist und W'_{reg} invariant unter $\mathfrak{G}$, können wir annehmen, daß $\rho(E)$ nicht im singulären Ort von $W' \times F$ liegt. Nach (A.7) ist die allgemeine Faser des Morphismus $\rho|_E : E \to \rho(E)$ ein projektiver Raum. Also ist die allgemeine Faser von $f'|_E : E \to f'(E)$ nach (1.3), (iii) von Kodaira Dimension $-\infty$. Angenommen $\rho(\sigma(E))$ ist für ein $\sigma \in \mathfrak{G}$ ein Divisor, dann ist, da $\sigma(f'(E)) = g(\rho(\sigma(E))) \neq W'$ ist, $\rho(\sigma(E)) = F \times g(\rho(\sigma(E)))$. Also ist $\kappa(F) = -\infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Jetzt können wir zeigen, daß aus $D_n(0)$, (a) *auch* $D_n(0)$, (b) *folgt*:

(2.5): Es sei W'' die Normalisierung von A in $\mathbb{C}(W')$ und $\gamma' : W' \to W''$ die induzierte Abbildung.

Es seien $E_1, \ldots, E_k$ die exzeptionellen Weil-Divisoren von V' bezüglich ρ mit $f'(E_i) \neq W'$. Wir setzen $\hat{U}' = V'_{\text{reg}} \cap (\bigcup_{i=1}^k E_i)$ und U' sei die größte offene Untervarietät von $\hat{U}'$, so daß γ' auf $f'(U')$ ein Isomorphismus ist. Es sei $\tilde{U} = \eta'(U')$. Es ist $\operatorname{codim}(W' \times F - \rho(\hat{U}')) \geq 2$ und $\operatorname{codim}(W'' \times F - (\gamma' \times id) \cdot \rho(U')) \geq 2$. Also folgt:

BEHAUPTUNG 1: $H^0(U', O_{U'}) = \mathbb{C}$.

BEHAUPTUNG 2: Es ist $\tau : U' \to U_1 = \tilde{U} \times_W W'$ ein Isomorphismus.

BEWEIS: Es ist U' invariant unter $\mathfrak{G}$ wegen (2.4). Also ist $\eta'^{-1}(\tilde{U}) = U'$. Es sei D' ein Divisor auf U', der über $\tilde{U}$ verzweigt ist. Nach Konstruktion kann D' nicht die allgemeine Faser von f' treffen und $f'(D') = D$ ist ein Divisor. Da wir gerade U' so gewählt haben, daß U' weder den exzeptionellen Ort von ρ noch das Urbild des exzeptionellen Ortes von γ trifft, erfüllt D die Voraussetzungen von (2.3) und $e_{\tilde{V}}(D') = e_W(D)$. Nun ist U' regulär, ebenso wie $f'(U')$. Nach (A.1) (viii) und (iv) ist $\omega_{U'/\tilde{U}} = \tau^* \omega_{U_1/\tilde{U}}$ und $\omega_{U'} = \tau^* \omega_{U_1}$. Wegen (A.1) (v) und (vi) ist

$$\omega_{U_1} \hookrightarrow \tau_* \omega_{U'} = \mathcal{H}om_{U_1}(\tau_* O_{U'}, \omega_{U_1}) \hookrightarrow \omega_{U_1}.$$

ω_{U_1} und $\omega_{U'}$ sind invertierbar, und wegen Behauptung 1 ist die zusammengesetzte Abbildung von Garben ein Isomorphismus. Dies ist nur möglich, falls $\tau_* O_{U'} = O_{U_1}$ ist und τ ein Isomorphismus.

Wir wählen für U'' die Menge der Punkte von U', in denen ρ ein

Isomorphismus ist. D.h.: Wir verkleinern U' um exzeptionelle Divisoren von ρ, die surjektiv auf W' abgebildet werden. Es sei $U = \eta'(\bigcap_{\sigma\in\mathfrak{G}} \sigma(U''))$.

BEHAUPTUNG 3: U und W'' erfüllen die Bedingungen aus $D_n(0)$ (b).

BEWEIS: Es ist $U \times_A W'' = U \times_A W' \hookrightarrow \tilde{U} \times_A W' \simeq U'$ und $(\gamma' \times id) \cdot \rho$ ist auf U eine offene Einbettung. Die Albanese Abbildung von V ist gerade $\gamma \cdot f$ und

$$\operatorname{codim}(A - \gamma \cdot f(U)) \geq \operatorname{codim}\left(W'' - f'\left(\bigcap_{\sigma\in\mathfrak{G}} \sigma(U'')\right)\right).$$

Nach Wahl von U'' ist $\operatorname{codim}(f'(U') - f'(\bigcap_{\sigma\in\mathfrak{G}} \sigma(U''))) \geq 2$.

Zum Beweis, daß aus $D_n(0)$ (b) auch $D_n(0)$ (c) folgt, benötigen wir:

LEMMA 2.6 (*siehe auch* [12]): *Es sei F eine reguläre Varietät mit $\kappa(F) \geq 0$. Es sei F ein minimales Modell. X sei eine reguläre (nicht notwendig vollständige) Varietät und $\tau: X \times F \to X \times F$ eine birationale Abbildung über X. Dann ist τ biregulär.*

BEWEIS: *Es sei T* die Menge der Punkte, in denen τ nicht definiert ist und für $x \in X$ sei $T_x = T \cap F \times \{x\}$. Es sei E_x das totale Bild von T_x (siehe z.B. [5, S.: 410]). Für einen allgemeinen Punkt x aus $pr_1(T)$ existiert eine dominante birationale Abbildung $E_x \to T_x$, deren allgemeine Faser von Dimension größer oder gleich eins ist. Also ist $T_x \neq F \times \{x\}$. Angenommen $E_x \neq F \times \{x\}$, dann induziert τ einen surjektiven Morphismus von $F \times \{x\} - T_x$ auf $F \times \{x\} - E_x$ und, da F minimal ist, ist dieser biregulär auf F und $T_x = E_x$. Also ist $E_x = F \times \{x\}$. Ist $d: Y \to X \times F$ ein birationaler Morphismus, so daß $\tau^{-1} \cdot d$ ein Morphismus ist. so folgt aus (A.7), daß die Zusammenhangskomponenten der algemeinen Faser von $d^{-1}(E_x) \to T_x$ birational zu projektiven Räumen sind. Wegen (1.3) (iii) wäre dann aber $\kappa(E_x) = \kappa(F) = -\infty$.

LEMMA 2.7: *Es sei F eine reguläre Varietät und $\eta: X \to Z$ eine galoissche Überlagerung (nicht notwendigerweise vollständiger) regulärer Varietäten mit Galoisgruppe $\mathfrak{G}$. Es sei eine Operation von $\mathfrak{G}$ auf $X \times F$ gegeben, verträglich mit der Operation von $\mathfrak{G}$ auf X, so daß gilt: Ist $x \in X$ ein Fixpunkt von $\sigma \in \mathfrak{G}$, so lässt σ die Faser $\{x\} \times F$*

punktweise fest. Es sei $\tau:(F\times X)/\mathfrak{G}=Y\to Z$ der Quotient. Dann ist τ ein glatter Morphismus und $Y\times_Z X\simeq X\times F$.

BEWEIS: Man kann natürlich änlich wie in (2.5) argumentieren. Eine andere Möglichkeit ist: Es sei $z\in Z$ und $\mathfrak{J}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die einen festen Punkt $x\in\eta^{-1}(z)$ festlässt. Wir wollen zunächst zeigen, daß der nätürliche Morphismus $\{x\}\times F\to\tau^{-1}(z)$ ein Isomorphismus ist. Ist B der lokale Ring von x auf X und Spec(A) ein offenes $\mathfrak{J}$-invariantes Unterschema von Spec$(B)\times F$, und M das maximale Ideal von B, so wird der Morphismus beschrieben durch $A^{\mathfrak{J}}/(B^{\mathfrak{J}}\cap M)\cdot A^{\mathfrak{J}}\to A/M\cdot A$. Nun wird jedes Element $a\in A$ modulo $M\cdot A$ durch ein $\mathfrak{J}$-invariantes Element repräsentiert, und zwar $(1/|\mathfrak{J}|)\cdot\Sigma_{\sigma\in\mathfrak{J}}\,\sigma(a)$. Also ist obiger Ringhomomorphismus surjektiv. Die Injektivität folgt sofort, wenn $\tau^{-1}(z)$ reduziert ist. Dazu genügt es, den Fall zu betrachten, daß A der lokale Ring des allgemeinen Punktes der Faser ist. Wegen obiger Beschreibung der Elemente von A erzeugt $B^{\mathfrak{J}}\cap M$ das Ideal $A^{\mathfrak{J}}\cap(M\cdot A)$ modulo $(A^{\mathfrak{J}}\cap(M\cdot A))^2$, und nach Nakayamas Lemma folgt die Behauptung.

Also hat τ glatte Fasern, und da Y als Quotient einer regulären Varietät rationale Singularitäten hat (siehe [23]) und damit Cohen–Macauley ist, ist τ flach und glatt. Beachtet man, daß $X\times F$ die Normalisierung von $Y\times_Z X$ ist, und daß letztere Varietät regulär ist, so folgt das Lemma.

Wir behalten die Bezeichnungen aus (2.7) bei und betrachten die Funktoren $\mathfrak{Isom}_Z(Y,Z\times F)$ und $\mathfrak{Aut}(F)=\mathfrak{Isom}(F,F)$ (siehe [4, 195–13]). Nach [4, 221–20] werden beide Funktoren repräsentiert (man beachte, daß für uns alle Varietäten projektiv sind), sagen wir durch $I\to Z$ bzw. A. A ist ein Gruppenschema. Es sei A_0 die Zusammenhangskomponente der $0\in A$. Wie in [12] folgt aus (2.6):

FOLGERUNG 2.8: *A_0 ist eine abelsche Varietät, falls F ein minimales Modell mit $\kappa(F)\geq 0$ ist.*

BEWEIS: Es genügt zu zeigen, daß A_0 vollständig ist. Dies folgt aber aus (2.6) und dem Bewertungskriterium.

LEMMA 2.9: *Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in* (2.6) *und* (2.7). *Dann existiert eine étale Überlagerung X' von Z, so daß $X'\times_Z Y\simeq X'\times F$ ist.*

BEWEIS: Nach Definition ist $I\times_Z X=X\times A$ und daher ist $I\times_Z X$ glatt über X. Also ist auch I glatt über Z. Ist I_0 eine Zusammenhangskomponente von I, so operiert $A_0 \times Z$ auf I_0 und I_0 ist ein Fasersystem (in der Bezeichnung aus [18]). I_0 ist glatt über Z und daher sind die Kriterien (SL) und (FP) aus [18, S.: 10] erfüllt. Wir wissen also, daß $I_0 \to Z$ sogar ein prinzipaler Faserraum mit Gruppe A_0 ist. Nach [18, S.: 28] existiert eine abelsche unverzweigte Überlagerung $X' \to Z$ mit einer Galoisgruppe $\mathfrak{G}'$ in A_0, so daß $I_0 \simeq X' \times^{\mathfrak{G}'} A_0$ ist (siehe [18, S.: 17]). Mit anderen Worten: $X' \times A_0 \simeq I_0 \times_Z X'$ und daher hat $I_0 \times_Z X'$ einen Schnitt über X'. Nach Definition von I existiert also der gesuchte Isomorphismus.

(2.10) Schluß des Beweises von Satz V: Nach (2.5) haben wir bereits $D_n(0)$, (b) erhalten. Wir benutzen die Bezeichnungen aus $D_n(0)$. Es sei $\alpha \simeq \alpha_{\tilde{V}}$ und $A = A(\tilde{V})$. Wir können annehmen, daß $\eta : W'' \to A$ galoissch ist, und daß F bereits das minimale Modell ist. Es sei $Z \simeq \alpha(U)$ und $X = \eta^{-1}(Z)$. Indem wir U etwas verkleinern, dürfen wir voraussetzen, daß X regulär ist.

Es sei $\sigma \in \mathfrak{G}$. Auf $F \times X$ operiert σ als $\sigma' = \mathrm{id}_F \times \sigma$ und auf $U \times_Z X$ als $\sigma'' = \mathrm{id}_U \times \sigma$. Nach (2.6) ist die birationale Abbildung $\sigma'' \cdot \sigma'^{-1}$ von $F \times X$ auch biregulär und damit ist σ'' ein Isomorphismus von $F \times X$. Ist $x \in X$ ein Fixpunkt von σ, so lässt σ'' die offene Menge $U \times_Z X \cap F \times \{x\}$ punktweise fest, und somit auch ganz $F \times \{x\}$. Nach (2.7) ist der Quotient Y (bezüglich der zweiten Operation von $\mathfrak{G}$) glatt über Z und nach (2.9) existiert eine galoissche étale Überlagerung $X' \to Z$ mit Gruppe $\mathfrak{G}'$, so daß $X' \times_Z Y \simeq X' \times F$ ist.

Es sei W' die Normalisierung von A in $\mathbb{C}(X')$. Da $\operatorname{codim}(A - Z) \geq 2$ ist, ist W' über A étale. Nach Konstruktion ist Y birational zu V und $W' \times_A V$ birational zu $W' \times F$. Indem wir ein zweites Mal (2.6) anwenden, erhalten wir, daß die Operation von $\mathfrak{G}'$ auf $W' \times_A V$ eine bireguläre Operation von $\mathfrak{G}'$ auf $W' \times F$ induziert. Da $\mathfrak{G}'$ auf W' fixpunktfrei operiert, existiert nach (2.7) der Quotient $V = (W' \times F)/\mathfrak{G}' \to A$ als glattes Schema über A und $V \times_A W' = W' \times F$.

§3. Reduktionsschritte für den Beweis von $C_{n,m}$

Genau wie in [22] beginnen wir den Beweis von $C_{3,1}$ und $C_{n,n-1}$, indem wir die "relative Version" formulieren und zeigen, wie $C_{n,m}$ daraus folgt. Als zweiten Schritt reduzieren wir das Problem auf die Situation der semistabilen Familien. Dieser Schritt ist möglich für $C_{n,n-1}$ und $C_{n,1}$. Die Beweise sind ähnlich zu denen in [22]. Da wir dort – leider – alles nur für $C_{n,n-1}$ formuliert haben, und sich darüber hinaus ein dummer (aber hebbarer) Fehler eingeschlichen hat (siehe die Korrektur am Ende des entsprechenden Bandes der Zeitschrift), müssen wir diese Schritte wiederholen.

(3.1) VERMUTUNG $C'_{n,m}$: *Es sei $f: V \to W$ ein Faserraum, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ und V und W regulär. Dann existiert (hoffentlich) ein birational äquivalenter Faserraum $f_1: V_1 \to W_1$, V_1 und W_1 regulär, so daß*

$$\kappa(V_1, \omega_{V_1} \otimes f_1^* \omega_{W_1}^{-1}) \geq \mathrm{Max}\{\kappa(V_w), \mathrm{Var}(f)\} \textit{ ist falls } \kappa(V_w) \neq -\infty.$$

SATZ 3.2: *Ist $C'_{n-r,m-r}$ richtig für $0 \leq r < m$, so ist $C_{n,m}$ ebenfalls richtig.*

BEMERKUNG: Wie wir im Beweis sehen werden, genügt es, um für einen festgewählten Faserraum $f: V \to W$ $C_{n,m}$ nachzuweisen, $C'_{n,m}$ für diesen Faserraum zu verifizieren, und $C'_{n-r,m-r}$ für $r = \kappa(W)$ und für die Einschränkung von f auf das Urbild eines $(m-r)$-dimensionalen Teilraum von W in genügend allgemeiner Lage.

BEWEIS: Ist $\hat{f}: \hat{V} \to \hat{W}$ ein Faserraum mit $\dim(\hat{V}) = n - r$ und $\dim(\hat{W}) = m - r$, $\kappa(\hat{W}) \geq 0$ und $\kappa(\hat{V}_w) \geq 0$ und $\hat{f}_1: \hat{V}_1 \to \hat{W}_1$ das nach $C'_{n-r,m-r}$ existierende Modell, so liefert die Inklusion $(k \gg 0)$

$$\omega_{\hat{V}_1}^{k} \otimes \hat{f}^* \omega_{\hat{W}_1}^{-k} \to \omega_{\hat{V}_1}^{k}$$

die Ungleichung

$$\kappa(\hat{V}) = \kappa(\hat{V}_1) \geq \mathrm{Max}\{\kappa(\hat{V}_w), \mathrm{Var}(\hat{f})\}. \tag{3.3}$$

Nun sei $f: V \to W$ wie in $C_{n,m}$. Wir dürfen annehmen, daß $\kappa(W) \geq 0$ und $\kappa(V_w) \geq 0$ ist, und daß f selbst gerade das Modell ist, für welches die in $C'_{n,m}$ geforderte Ungleichung bekannt ist. Wir haben für $\nu = \mu \cdot c$, mit $c \gg 0$ und $\mu \in \mathbb{N}$ Inklusionen $f^* \omega_W^\nu \to \omega_V^\nu$ und $H^0(W, \omega_W^\nu) \to H^0(V, \omega_V^\nu)$. Es sei (wie in (1.1)) $\Phi'_\nu = \Phi_{\nu,\omega_V}$ und $\Phi_\nu = \Phi_{\nu,\omega_W}$ und $\tilde{V}_\nu$ (bzw. $\tilde{W}_\nu$) der Abschluß des Bildes von Φ'_ν (bzw. Φ_ν). Die obige Inklusion besagt gerade, daß ein kommutatives Diagramm dominanter rationaler Abbildungen existiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi'_\nu} & \tilde{V}_\nu \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ W & \xrightarrow[\Phi_\nu]{} & \tilde{W}_\nu \end{array}$$

Wählen wir (wie in (1.3) (i)) μ genügend groß und schränken wir dieses Diagramm auf den allgemeinen Punkt a von $\tilde{W}_\nu$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} V_a & \xrightarrow{\Phi'_{\nu a}} & \tilde{V}_{\nu a} \\ {\scriptstyle f_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_a} \\ W_a & \longrightarrow & a \end{array}$$

mit: $\kappa(W_a) = 0$; die allgemeine Faser von f_a ist V_w und die allgemeine Faser von $\Phi'_{\nu a}$ ist von Kodaira Dimension 0. Aus (3.3) folgt: $\kappa(V_a) \geq \kappa(V_w)$ und aus (1.3) (i) und (iii)

$$\begin{aligned} \kappa(V) = \dim(\tilde{V}_\nu) &= \dim(\tilde{V}_{\nu a}) + \dim(\tilde{W}_\nu) = \dim(\tilde{V}_{\nu a}) + \kappa(W) \\ &\geq \kappa(V_a) + \kappa(W) \geq \kappa(V_w) + \kappa(W). \end{aligned}$$

DEFINITION 3.4: Wir bezeichnen einen flachen Faserraum $g: T \to S$ als *semistabilen Faserraum* (von r-dimensionalen Varietäten, $r = \dim(T) - \dim(S)$), wenn für jeden geometrischen Punkt $p \in S$ die Faser $T_p = g^{-1}(p)$ reguläre Zweige hat, die sich transversal schneiden d.h.: Für jeden Punkt $t \in T_p$ ist

$$\hat{O}_{t,T_p} \simeq \frac{\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_{r+1}]]}{x_1 \cdot \ldots \cdot x_\nu}.$$

BEMERKUNG 3.5: Es sei $g: T \to S$ ein semistabiler Faserraum. Dann ist g ein flacher Gorenstein Faserraum.

Damit wir einige technische Voraussetzungen nicht immer wiederholen müssen, definieren wir:

DEFINITION 3.6: Wir bezeichnen einen semistabilen Faserraum als *präparierten semistabilen Faserraum*, wenn gilt:

(0) Für $n \gg 0$ ist $g_* \omega^n_{T/S}$ lokal frei.

Für jede (generische) Überlagerung $S' \to S$ hat $T' = T \times_S S'$ nur relativ rationale Singularitäten (A.4).

Ist $\mathrm{Var}(g) = 0$, so ist $T \simeq S \times F$.

(1) Ist die allgemeine Faser T_s eine Kurve vom Geschlecht $\pi > 1$, so ist $g: T \to S$ sogar stabil (d.h.: jede nicht singuläre rationale Komponente einer Faser T_p schneidet die Vereinigung der restlichen Komponenten in drei oder mehr Punkten). Darüber hinaus soll für

$\pi \geq 1$ die Kurve $T \times \operatorname{Spec}(\mathbb{C}(S))$ eine "Level-μ-Struktur" haben für $\mu \geq 3$.

(2) Ist T_s eine Fläche, so ist T_s ein minimales Modell.

(2') Ist T_s eine elliptische Fläche, so existieren Morphismen von Varietäten

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{k} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ S & \xrightarrow[id]{} & S \end{array}$$

so daß gilt:

(i) h ist ein semistabiler Faserraum von Kurven. Ist $\operatorname{Var}(h) = 0$, so existiert ein birationaler Morphismus $Y \to S \times E$.

(ii) k ist ein Faserraum, dessen algemeine Faser T_y eine elliptische Kurve ist. Es existiert eine galoissche Überlagerung $Y' \to Y$, so daß gilt: $T \times \operatorname{Spec}(\mathbb{C}(Y'))$ hat eine "Level-μ-Struktur" ($\mu \geq 3$). $\Delta(Y'/Y) = s_1(S) \cup s_2(S) \cup \cdots \cup s_\nu(S) \cup D$, wobei D ein Divisor ist, der in endlich vielen Fasern von h liegt, und $s_i : S \to Y$ für $i = 1, \ldots, \nu$ Schnitte sind.

Es ist $s_i(S) \cap s_j(S) = \emptyset$ für $i \neq j$ und $s_i(S) \cap D = \emptyset$. h ist in den Punkten von $s_i(S)$, $i = 1, \ldots, \nu$, glatt.

(3.7) Vermutung $C''_{n,m}$: *es sei $g : T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum von $(n-m)$-dimensionalen Varietäten und $m =$* $\dim(S)$. *Ist $\kappa(T_s) \geq 0$, so ist (hoffentlich)*

$$\kappa(T/S) \geq \operatorname{Max}\{\kappa(T_s), \operatorname{Var}(g)\}.$$

Bemerkung 3.8: Wir dürfen – um $C''_{n,m}$ zu beweisen – S durch eine (generische) Überlagerung S' ersetzen (siehe (1.2) (i) und (A.1) (iv)). Ebenso dürfen wir T durch eine "Aufblasung" T' ersetzen, solange auch T' ein semistabiler Faserraum ist (A.5). Ist S Gorensteinsch und $d : \hat{T} \to T$ eine Desingularisierung, so ist $d_*(\omega_{\hat{T}}^n \otimes (g \cdot d)^* \omega_S^{-n}) = \omega_{T/S}^n$ (siehe (A.3)).

Voraussetzung 3.9 "Existenz der semistabilen Reduktion": Es sei $f : V \to W$ ein Faserraum. Wir sagen, daß f die Voraussetzung (3.9) erfüllt, falls ein präparierter semistabiler Faserraum $g : T \to S$ existiert (S vollständig!) und rationale Abbildungen $\eta : S \to W$ und $\eta' : T \to V$, so daß gilt: Es existieren offene Mengen

$U_V \subset V$ und $U_W \subset W$, $f(U_V) \subset U_W$, so daß $\eta|_{\eta^{-1}(U_W)}$ und $\eta'|_{\eta'^{-1}(U_V)}$ galoissche Überlagerungen sind und

$$\begin{tikzcd} \eta'^{-1}(U_V) \arrow[r] \arrow[d] & U_V \arrow[d, "f"] \\ \eta^{-1}(U_W) \arrow[r] & U_W \end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt.

Leider wissen wir nicht, ob diese Voraussetzung im Allgemeinen erfüllt ist. Es gilt aber:

LEMMA 3.10: *Es sei* $f: V \to W$ *ein Faserraum,* $\kappa(V_w) \geq 0$. *Es sei entweder* V_w *eine Kurve oder* W *eine Kurve. Dann erfüllt* $f: V \to W$ *die Voraussetzung* (3.9).

BEWEIS: (1) $\dim(V) - \dim(W) = 1$.

Das Geschlecht der allgemeinen Faser sei π. Es existiert das grobe Modulschema M_π der stabilen Kurven vom Geschlecht π (siehe [14]). Nach [16], [17] und [0] ($\pi = 1$) existiert für jedes $\mu \geq 3$ eine endliche Überlagerung $M_\pi^\mu \to M_\pi$, so daß M_π^μ ein feines Modulschema der stabilen Kurven mit "Level-μ-Struktur" ist. Wählen wir für U_W den Ort in W, über dem f glatt ist, so induziert $U_V = f^{-1}(U_W) \to U_W$ einen Morphismus $\psi: U_W \to M$. Für S wählen wir nun eine generische Überlagerung von W, galoissch, so daß die Morphismen

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr] \arrow[d] & & M_\pi^\mu \arrow[d] \\ W & U_W \arrow[l, hook'] \arrow[r] & M_\pi \end{tikzcd}$$

existieren und verträglich sind. Für $g: T \to S$ wählen wir das "Pullback" der universellen Kurve über M_π^μ. In [23] haben wir nachgerechnet, daß für jede generische Überlagerung $S' \to S$ die Varietät $T' = T \times_S S'$ nur relativ rationale Singularitäten über S' hat. Es ist also g ein präparierter semistabiler Faserraum und (3.9) ist erfüllt.

(2) $\dim(W) = 1$ und $\dim(V) \geq 3$. (a) V_w sei eine Fläche: V_w hat ein minimales Modell $\hat{V}_w$, welches über einer endlichen galoisschen Überlagerung W_1 von W definiert ist. Ist V_1 ein Modell von $V \times_W W_1$ mit allgemeiner Faser $\hat{V}_w$, so genügt es (3.9) für $f_1: V_1 \to W_1$ nach-

zuweisen. Ist $\hat{V}_w$ eine elliptische Fläche, so existiert eine Kurve C_w über $\overline{\mathbb{C}(W)}$, so daß $\hat{V}_w \to C_w$ eine Familie elliptischer Kurven ist. Wir können eine Überlagerung W_2 von W_1 wählen, so daß C_w über $\mathbb{C}(W_2)$ definiert ist und über W_2 ein semistabiles Modell besitzt: $Y_2 \to W_2$. Wir können Y_2 als reguläre Varietät wählen, und annehmen, daß $h_2: Y_2 \to W_2$ bereits die Bedingung (2′) (i) aus (3.6) erfüllt.

Es sei $V_2 \to Y_2$ ein Modell von $V \times_W W_2$ mit allgemeiner Faser $\hat{V}_w$. Es existiert eine galoissche Überlagerung Y_2' von Y_2, so daß $V_2 \times \operatorname{Spec}(\mathbb{C}(Y_2'))$ eine "Level-μ-struktur" hat. Indem wir $\mathbb{C}(W_2)$ groß genug wählen, können wir annehmen, daß $\Delta(Y_2'/Y_2)$ aus Schnitten von $Y_2 \to W_2$ und aus Komponenten der Fasern besteht. Ein Schnitt des semistabilen Faserraumes h_2 liegt notwendigerweise in der offenen Menge, in der h_2 glatt ist (sonst könnte die Schnittzahl mit den Fasern nicht eins sein). Indem wir Punkte aufblasen in denen h_2 glatt ist, dürfen wir annehmen, daß $\Delta(Y_2'/Y_2)$ aus paarweise disjunkten Schnitten besteht und aus Komponenten der Fasern, sagen wir $D_1, \ldots, D_\lambda$. Nun wählen wir eine verzweigte galoissche Überlagerung $W_3 \to W_2$, so daß die Verzweigungsordnung von $h_2(D_i)$ in W_3 durch die Verzweigungsordnung von D_i in Y_2' teilbar ist. Wählen wir für Y_3 eine Desingularisierung von $Y_2 \times_{W_2} W_3$ und für Y_3' die Normalisierung von $Y_2' \times_{Y_2} Y_3$, so ist (nach Abhyankars Lemma) $\Delta(Y_3'/Y_3)$ die Vereinigung endlich vieler disjunkter Schnitte von $h_3: Y_3 \to W_3$ und Komponenten der Faser, die diese Schnitte nicht treffen. Nun sei V_3 ein reguläres Modell von $V_2 \times_{Y_2} Y_3$. Dann erfüllt $V_3 \to Y_3 \to W_3$ die Bedingung (2′) aus (3.6) – nur daß V_3 nicht semistabil ist.

Ist V_w keine elliptische Fläche, so setzen wir $V_3 = V_1$ und $W_3 = W_1$.

(b) Ist $\dim(V_w) > 2$, so setzen wir $V_3 = V$ und $W_3 = W$.

Mumford hat in [9] bewiesen, daß über einer endlichen überlagerung S von W_3 ein birationaler Morphismus $T \to V_3 \times_{W_3} S$ exisistiert, der ein Isomorphismus entlang der allgemeinen Faser ist, so daß $g: T \to S$ semistabil ist und T regulär. Ist nun $S' \to S$ eine Überlagerung, so ist $T' = T \times_S S'$ eine Überlagerung von T mit gutem Verzweigungsort. Also hat T' nur rationale Singularitäten.

Nach Konstruktion erfüllt g die Bedingung (2) und (2′) aus (3.6). Da S eine Kurve ist, und da $g_*\omega_{T/S}^n$ torsionsfrei ist, ist diese Garbe auch lokal frei. Ist $\operatorname{Var}(f) = 0$, so ist nach Definition der Variation nichts zu beweisen. Als haben wir den gesuchten präparierten semistabilen Fasseraum konstruiert und (3.10) bewiesen.

Satz 3.11: *Es sei $f: V \to W$ ein Faserraum, der die Voraussetzung (3.9) erfüllt, und $g: T \to S$ der zugehörige präparierte Faserraum. Erfüllt g die Vermutung $C''_{n,m}$ so gilt $C'_{n,m}$ für f.*

BEMERKUNG 3.12: Wir werden sehen, daß dieser Reduktionsschritt für den Beweis von $C'_{n,n-1}$ wesentlich ist. Für $C_{3,1}$ ist er nicht unbedingt erforderlich. Da wir in §4 jedoch benötigen, daß die allgemeine Faser minimales Modell ist, und in §5 Basiswechsel anwenden wollen ist auch hier (3.11) von Nutzen. Auch in §8 werden wir von den erreichten "Vereinfachungen" wesentlich profitieren. Wir nehmen sozusagen alle Schwierigkeiten, die mit Singularitäten beim Basiswechsel auftreten können, an dieser Stelle vorweg. Wichtig für einen eventuellen Beweis von $C'_{n,m}$ scheint die Frage zu sein, ob man wenigstens – ähnlich wie in (3.9) – das Problem auf die Betrachtung flacher Cohen–Macauly Faserräume reduzieren kann.

BEWEIS: Die Eigenschaft "präparierter semistabiler Faserraum" ist mit Basiswechsel verträglich. Also dürfen wir zunächst einmal annehmen, daß $\eta : S \to W$ eine Morphismus ist, und daß die Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von S über W auf S biregulär operiert (2.1). Es sei $S/\mathfrak{G}$ der Quotient und W_1 eine Desingularisierung. Es sei S' die Normalisierung von W_1 in $\mathbb{C}(S)$. Wir dürfen (nach eingebettetem Aufblasen) annehmen, daß $\Delta(S'/W_1)$ gut ist (siehe (A.9)). Natürlich können wir annehmen, daß wir von Anfang an S so gewählt haben, daß $S = S'$ ist. $\mathfrak{G}$ operiert auf T birational. Es sei V_1' ein nach (2.1) existierendes Modell, auf dem $\mathfrak{G}$ biregulär operiert. Dann wählen wir für V_1 eine Desingularisierung von $V_1'/\mathfrak{G}$. Wieder dürfen wir annehmen, daß $\Delta(V'/V_1)$ gut ist für die Normalisierung V' von V_1 in $\mathbb{C}(T)$. Zusammenfassend haben wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, "g"'] & V' \arrow[l] \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "f'"] & V_1 \arrow[d, "f_1"] \\
S & W' \arrow[l, "id"] \arrow[r, "\eta"'] & W_1
\end{tikzcd}$$

welches die Voraussetzungen von Beispiel (A.10) erfüllt. Nach (A.11) existiert eine Inklusion

$$\rho^* \omega_{T/S} \hookrightarrow \eta'^*(\omega_{V_1} \otimes f_1^* \omega_{W_1}^{-1}).$$

Also ist ((1.2) (i) und (ii)) $\kappa(T/S) \leq \kappa(V_1, \omega_{V_1} \otimes f_1^* \omega_{W_1}^{-1})$. Da nach Konstruktion $\kappa(T_s) = \kappa(V_w)$ und $\mathrm{Var}(f_1) = \mathrm{Var}(f) = \mathrm{Var}(g)$ ist, ist (3.11) damit bewiesen.

§4. Folgerungen aus der geometrischen Invariantentheorie

In den §§4–7 wollen wir für semistabile Faserräume (von Flächen und Kurven) Informationen über das direkte Bild der Potenzen der relativ dualisierenden Garben sammeln. Wir benutzen dabei die folgenden.

BEZEICHNUNGEN 4.1: Es sei $g: T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum. Nach Definition (3.6) ist für $n \gg 0$ die Garbe $g_* \omega^n_{T/S}$ lokal frei. Es sei $r(n) = \mathrm{rank}(g_* \omega^n_{T/S}) = \dim(H^0(T_s, \omega^n_{T_s}))$ und $\lambda_n = \wedge^{r(n)} g_* \omega^n_{T/S}$.

In diesem § betrachten wir nur präparierte semistabile Faserräume, deren allgemeine Faser entweder eine Fläche von allgemeinem Typ oder eine Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ ist. Der Grund für diese Einschränkung ist, daß nur in diesen beiden Fällen die folgende Aussage bekannt ist (siehe [13] bzw. [3]):

(4.2): (i) *Es sei T_y eine glatte Faser von g und für $n \gg 0$ sei $T_{y,n}$ das Bild von T_y unter $\Phi_{n,\omega_{T_y}}$ in $\mathbb{P}^N$ (siehe* (1.1)). *Dann erfüllt der Punkt des Hilbert-Schemas, der der Einbettung von $T_{y,n}$ in $\mathbb{P}^N$ entspricht, das Stabilitäts-Kriterium von Mumford (siehe* [13] *oder* [14]). *Insbesondere existiert das entsprechende grobe Modulschema M zusammen mit einer natürlich Einbettung $i: M \to \mathbb{P}^\mu$.*
(ii) *Der kanonische Ring von T_y ist endlich erzeugt.*

Nehmen wir an, (4.2) ist erfüllt. Dann induziert g eine rationale Abbildung $\Psi: S \to M$. Wir dürfen annehmen, daß $i \cdot \Psi$ ein Morphismus ist. Ziel des § ist es, $(i \cdot \Psi)^* O_{\mathbb{P}_\mu}(1)$ zu beschreiben, oder – genauer gesagt – eine geeignete invertierbare Untergarbe. Man beachte, daß es nicht notwendig ist, eine "gute" Kompaktifizierung von M zu kennen.

BEMERKUNG 4.3: Es ist $\mathrm{Var}(g) = \dim(\Psi(S))$.

SATZ 4.4: *Es sei $g: T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum für den* (4.2) *gilt. Dann ist (mit den Bezeichnungen* (4.1)) $\kappa(S, \lambda^{r(n)}_{n \cdot m} \otimes \lambda_n^{-m \cdot r(n \cdot m)}) \geq \mathrm{Var}(g)$ *für $n, m \gg 0$.*

KOROLLAR 4.5: *Ist S eine Kurve, so ist für $n, m \gg 0$ $r(n) \cdot \mathrm{grad}(\lambda_{n \cdot m}) \geq m \cdot r(n \cdot m) \cdot \mathrm{grad}(\lambda_n)$ und aus der Gleichheit folgt* $\mathrm{Var}(g) = 0$.

BEWEIS: Es sei $\omega = \omega_{T/S}$. Für genügend großes n und m (es genügt $n \geq 5$) haben wir eine natürliche Abbildung $S^m(g_*\omega^n) \to g_*\omega^{n \cdot m}$, die auf einer offenen Menge surjektiv ist. Es sei $\mathscr{L}$ das Bild von $\wedge^{r(n \cdot m)}(S^m(g_*\omega^n))$ in $\wedge^{r(n \cdot m)} g_*\omega^{n \cdot m}$. Da (4.4) mit Basiswechsel mit surjektiven Morphismen verträglich ist, dürfen wir $\mathscr{L}$ als invertierbar annehmen. Nun sei $U \subset S$ offen, so daß ein Isomorphismus $\psi : g_*\omega^n|_U \xrightarrow{\cong} O_U^{\oplus r(n)}$ existiert. ψ definiert eine Abbildung $\delta_\psi : \wedge^{r(n \cdot m)}(S^m(\mathbb{C}^{\oplus r(n)})) \otimes_{\mathbb{C}} O_U \to \mathscr{L}|_U$ und dadurch $f_\psi : U \to \mathbb{P} = \mathbb{P}(\wedge^{r(n \cdot m)}(S^m(\mathbb{C}^{\oplus r(n)})))$. Ist $u \in U$, so daß $g^{-1}(u)$ glatt ist, so ist $f_\psi(u)$ gerade der entsprechende Punkt des Hilbert-Schemas (wie in (4.2)).

Die Gruppe $SL(\mathbb{C}^{\oplus r(n)})$ operiert auf $\mathbb{P}$.

SATZ 4.6 (Mumford [13], [14] und Gieseker [3]): *Ist $g^{-1}(u)$ glatt, so ist für $n, m \gg 0$ der Punkt $f_\psi(u)$ stabil bezüglich der Operation der* $SL(\mathbb{C}^{\oplus r(n)})$.

Dies bedeutet: Es existiert ein homogenes Polynom auf $\mathbb{P}$ von Grad $p > 0$ (sagen wir $s \in S^p(\wedge^{r(n \cdot m)}(S^m(\mathbb{C}^{\oplus r(n)}))))$ welches invariant unter der Operation der $SL(\mathbb{C}^{\oplus r(n)})$ ist, so daß $s(f_\psi(u)) \neq 0$ ist. Solche Polynome trennen verschiedene $SL(\mathbb{C}^{\oplus r(n)})$ – Bahnen.

Jedes solches s induziert über δ_ψ einen Schnitt $s_\psi \in H^0(U, \mathscr{L}^p|_U)$. Für ein $\sigma \in GL_{r(n)}(U)$ sei $\psi' = \sigma \cdot \psi$ und $s_{\psi'}$ der von s und $\delta_{\psi'}$ induzierte Schnitt.

BEHAUPTUNG 4.8: Ist $r(n)$ ein Teiler von p, so ist

$$s_{\psi'} = s_\psi \cdot \det(\sigma)^{p \cdot m \cdot r(n \cdot m) \cdot r(n)^{-1}}.$$

BEWEIS: Beide Seiten definieren Schnitte von $\mathscr{L}^p|_U$. Wir können Faser für Faser die Gleichheit nachrechnen. Für $u \in U$ ist $\sigma_u = \det(\sigma_u)^{1/r(n)} \cdot \eta$ für ein $\eta \in SL(\mathbb{C}^{\oplus r(n)})$. s ist invariant unter η und wird unter $c \cdot id$, $c \in \mathbb{C}$ mit $c^{p \cdot m \cdot r(n \cdot m)}$ multipliziert.

BEHAUPTUNG 4.9: s definiert einen nicht trivialen Schnitt von $\mathscr{L}^p \otimes \lambda_n^{-p \cdot m \cdot r(n \cdot m) \cdot r(n)^{-1}}$ über S.

BEWEIS: ψ definiert $\tau_\psi : O_U \xrightarrow{\cong} \lambda_n^{-p \cdot m \cdot r(n \cdot m) \cdot r(n)^{-1}}|_U$ und wegen (4.8) ist $s_\psi \otimes \tau_\psi$ unabhängig von der gewählten "Trivialisierung" ψ, kann also zu einem globalen Schnitt zusammengeklebt werden. Nach (4.6) ist dieser Schnitt nicht trivial, und es existieren genügend viele solche Schnitte, um Punkte zu trennen, die nicht isomorphe Fasern haben.

§5. Folgerungen aus der Theorie der Variation der Hodge-Struktur

Der Vollständigkeit halber beginnen wir mit dem folgenden Satz, dessen Beweis man in den Arbeiten von Arakelov oder Namikawa findet (siehe [22, §7 und §8]):

SATZ 5.1: *Es sei $g: T \to S$ ein semistabiler Faserraum von Kurven vom Geschlecht $\pi \geq 1$. Dann ist $\kappa(S, \lambda_1) \geq \mathrm{Var}(g)$.*

Für Faserräume höherdimensionaler Varietäten sind so weitreichende Aussagen nicht bekannt. Fujita beweist jedoch in [1] mit Hilfe der Theorie der Variation der Hodge-Struktur von Griffiths den Satz (5.3).

DEFINITION 5.2: Es sei S eine Kurve und $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe auf S. Man bezeichnet $\mathscr{E}$ als *pseudo-semipositiv*, wenn für jede invertierbare Quotienten-Garbe $\mathscr{L}$ von $\mathscr{E}$ gilt: $\mathrm{grad}(\mathscr{L}) \geq 0$.

SATZ 5.3 (Fujita): *Es sei $f: V \to W$ ein Faserraum*, $\dim(W) = 1$, *V und W regulär. Dann ist $f_* \omega_{V/W}$ pseudo-semipositiv.*

Der Beweis von Fujita benutzt die Variation der Hodge-Struktur auf $R^k f_* \mathbb{C}$, $k = \dim(V) - 1$. Eine genaue Betrachtung des Beweises zeigt, daß sogar eine invertierbare Quotientengarbe $\mathscr{L}$ von $f_* \omega_{V/W}$ echt positiven Grad haben muß, sofern diese Variation der Hodge-Struktur nicht trivial ist. Dies ist aber erfüllt, wen $\omega_{V_w} \simeq O_{V_w}$ und $\mathrm{Var}(g) \neq 0$ ist. So erhält man:

SATZ 5.4 (Fujita; siehe auch [2]): *Es sei $f: V \to W$ wie in* (5.3) *und $\omega_{V_w} \simeq O_{V_w}$. Dann ist* $\mathrm{grad}(\lambda_1) \geq \mathrm{Var}(f)$.

FOLGERUNG 5.5: *Es sei $f: V \to W$ wie in* (5.4). *Dann gilt $C'_{n,1}$ für f (und damit,* (3.8), *auch $C''_{n,1}$ für die entsprechenden semistabilen Faserräume).*

BEWEIS: $f_* \omega_{V/W}$ ist invertierbar und $f^* f_* \omega_{V/W} \to \omega_{V/W}$ eine Injektion. Also ist für $\nu > 0$ $(f_* \omega_{V/W})^\nu$ eine Untergarbe von $f_* \omega^\nu_{V/W}$.

FOLGERUNG 5.6: *Es sei $g: T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum elliptischer Kurven. Dann gilt $C''_{n,n-1}$. Es ist $\kappa(S, g_* \omega_{T/S}) =$* $\mathrm{Var}(g)$.

BEWEIS: Das feine Modulschema der elliptischen Kurven mit level-μ-Struktur ist selbst eine Kurve. Es genügt also, den Fall zu betrachten, daß $\dim(S)=1$ ist. Wählt man für T ein relativ minimales Modell über S, so sind die Fasern entweder glatte elliptische Kurven, oder Sequenzen reduzierter regulärer rationaler Kurven mit Selbstschnittzahl -2. Also ist $g^*g_*\omega_{T/S}=\omega_{T/S}$ und $g_*\omega^{\nu}_{T/S}=(g_*\omega_{T/S})^{\nu}$.

Wir wollen (5.3) und (4.5) benutzen, um $C''_{3,1}$ für Faserräume von Flächen von allgemeinem Typ zu beweisen. Es kann jedoch passieren, daß $f_*\omega_{V/W}$ trivial ist. In jedem Fall mach (4.5) Aussagen über λ_n für $n \gg 0$ und (5.3) Aussagen über λ_1. Um dennoch beide Resultate Zusammenfügen zu können, müssen wir geeignet gewählte Überlagerungen betrachten. Zunächst benötigen wir das folgende einfache Lemma, welches auch in [1] zu finden ist:

LEMMA 5.7: *Es sei S eine Kurve and $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe, $\mathscr{E}$ sei pseudo-semipositiv. Dann gilt:*

(i) *Jede lokal freie Quotientengarbe von $\mathscr{E}$ ist pseudo-semipositiv.*

(ii) *Ist $\mathscr{E}$ eine Untergarbe der lokalfreien Garbe $\mathscr{F}$ und* $\operatorname{rang}(\mathscr{E})=\operatorname{rang}(\mathscr{F})$, *so ist auch $\mathscr{F}$ pseudo-semipositiv.*

(iii) *Für jede endliche Überlagerung $\eta: S'\to S$ sei $\eta^*\mathscr{E}$ pseudosemipositiv. Dann ist $\mathscr{E}\otimes O_S(P)$ ampel für jeden Punkt $p\in S$ (siehe* [7; III, §1]).

BEWEIS: (i) ist klar nach Definition. Ist $\mathscr{L}$ eine Quotientengarbe von $\mathscr{F}$, so ist die induzierte Abbildung $\mathscr{E}\to\mathscr{L}$ nicht trivial und $\mathscr{L}$ enthält eine Quotientengarbe von $\mathscr{E}$. (iii) Es sei $\mathbb{P}=\mathbb{P}(\mathscr{E})$ und $\pi:\mathbb{P}\to S$ die zugehörige Abbildung. Ist $C\subset\mathbb{P}$ eine Kurve, die in einer Faser über S liegt, so ist $\operatorname{grad}(O_{\mathbb{P}}(1)|_C)$ der Grad von C in dem projektiven Raum $\pi^{-1}(\pi(C))$ und daher größer als die Multiplizität der singulären Punkte von C. Ist C eine Kurve die über S liegt, sagen wir $\pi_1=\pi|_C$, so ist $O_{\mathbb{P}}(1)|_C$ eine Quotientengarbe von $\pi_1*\mathscr{E}$. Also ist $\operatorname{grad}(O_{\mathbb{P}}(1)|_C)\geq 0$. Da der Grad der endlichen Abbildung π_1 größer ist, als die Multiplizität der Singularitäten von C, folgt die Behauptung aus dem Kriterium von Seshadri [7; I, §7], angewandt auf $O_{\mathbb{P}}(1)\otimes\pi_1^*O_S(P)$.

PROPOSITION 5.8: *Es sei $g:T\to S$ ein Faserraum,* $\dim(S)=1$, *T mit nur rationalen Gorenstein Singularitäten. Es sei $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe. Es existiere ein offene Untervarietät $U\subset S$ und ein $m>0$, so daß $H^0(T_s,\mathscr{L}^{-\nu}|_{T_s})=0$ ist für $\nu=1,\ldots,m-1$ und $\mathscr{L}^m$ auf $g^{-1}(U)$ von globalen Schnitten aus $H^0(T,\mathscr{L}^m)$ erzeugt wird. Dann ist $g_*(\mathscr{L}\otimes\omega_{T/S})$ pseudo-semipositiv.*

Beweis: Nach Bertini's Theorem hat $H^0(T_s, \mathscr{L}^m|_{T_s})$ einen Schnitt, dessen Nullstellenmenge regulär ist. Also hat $\mathscr{L}^m$ einen globalen Schnitt $s: O_T \to \mathscr{L}^m$, so daß der zugehörige Divisor entlang T_s regulär ist. Die Voraussetzungen und Aussagen der Proposition sind verträglich mit "Desingularisieren und Aufblasen von T", und daher dürfen wir annehmen, daß T regulär ist und s einen Divisor der Form $\Sigma_i D_i + \Sigma_j \nu_j \cdot E_j$ definiert, so daß die D_i reguläre Primdivisoren sind, die surjektiv auf S abgebildet werden und sich paarweise nicht schneiden, und die E_j reguläre Komponenten der Fasern von g und alle auftretenden Schnitte transversal sind.

Wie in (A.8) definiert s auf $\mathscr{A} = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathscr{L}^{-i}$ eine Struktur als O_T-Algebra. Es sei $\eta: \hat{T} = \mathbf{Spec}(\mathscr{A}) \to T$ und $\eta': T' \to \hat{T}$ die Normalisierung. $T' \to T$ ist étale außerhalb der Nullstellenmenge von s, und daher ist der Verzweigungsort $\Delta(T'/T)$ gut (A.9). Also hat T' nur rationale Singularitäten und ist flach über T. Es sei $g' = g \cdot \eta \cdot \eta': T' \to S$. Es ist $g'_* O_{T'} = g_* \mathscr{A} = g_* O_T = O_S$ und die Einschränkung von $\Delta(T'/T)$ auf T_s regulär. Also ist g' ein Faserraum. (5.3) und (A.3)(ii) angewandt auf eine Desingularisierung von T' ergeben, daß $g'_* \omega_{T'/S}$ pseudo-semipositiv ist. Nach (A.8) ist $g'_* \omega_{T'/S}$ eine Untergarbe von $g_*(\omega_{T/S} \otimes (\bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathscr{L}^i))$. Da $\hat{T}$ entlang der allgemeinen Faser bereits normal ist (s hat entlang T_s nur einfache Nullstellen), haben beide Garben denselben Rang und die Behauptung folgt aus (5.7)(ii) und (i).

(5.9) Folgerungen aus (5.8): Es sei von nun an $g: T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum von Flächen vom allgemeinem Typ oder von Kurven vom Geschlecht $\pi \geq 2$ über der Kurve S (in Wirklichkeit benötigen wir nur, daß die Potenzen der kanonischen Garbe der allgemeinen Faser keine Basispunkte oder Fixkomponenten haben und nicht trivial sind). Es sei $\omega = \omega_{T/S}$ und $P \in S$ ein fest gewählter Punkt. Für $l, r > 0$ formulieren wir die folgende Aussage: $A(l, r)$: *Es existiert eine offene Menge $U \subset S$ und ein $m > 0$, so daß $\omega^{r \cdot m} \otimes_{O_T} g^* O_S(l \cdot m \cdot P)$ auf $g^{-1}(U)$ von globalen Schnitten aus $H^0(T, \omega^{r \cdot m} \otimes_{O_T} g^* O_S(l \cdot m \cdot P))$ erzeugt wird.*

Behauptung 2: Ist $A(l, r)$ richtig, so ist $g_* \omega^{r+1} \otimes_{O_S} O_S((l+1) \cdot P)$ ampel.

Beweis: Dies folgt, da $\omega_{T_s}^{r \cdot m}$ von globalen Schnitten erzeugt wird.

Behauptung 2: Ist $A(l, r)$ richtig, so ist $g_* \omega^{r+1} \otimes_{O_S} O_S((l+1) \cdot P)$ ampel.

BEWEIS: Wegen $A(l, r)$ und da der kanonische Divisor der allgemeinen Faser nicht trivial ist, sind die Voraussetzungen aus (5.8) erfüllt und daher $g_*(\omega^{r+1}) \otimes_{O_S} O_S(l \cdot P)$ pseudo-semipositiv. Nun sei $\eta : S' \to S$ eine endliche Überlagerung und $g' : T' \to S'$ der "Pullback-Faserraum" und $\eta' : T' \to T$ die Projektion. g' und $\mathcal{L}' = \eta'^*(\omega^r \otimes_{O_T} g^* O_S(l \cdot P))$ erfüllen ebenfalls die Voraussetzungen und auch $g'_*(\mathcal{L}' \otimes \omega_{T'/S'}) = \eta^*(g_*(\omega^{r+1}) \otimes_{O_S} O_S(l \cdot P))$ ist pseudo-semipositiv. Die Behauptung folgt aus (5.7)(iii).

BEHAUPTUNG 3: Aus $A(l, r)$ folgt $A(l + k, r + k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

BEWEIS: Wegen Behauptung 2 ist für $m \gg 0$ die Garbe

$$\mathcal{F} = S^m(g_*\omega^{r+1} \otimes_{O_S} O_S((l+1) \cdot P)) = S^m(g_*\omega^{r'+1}) \otimes_{O_S} O_S((l+1) \cdot m \cdot P)$$

von globalen Schnitten erzeugt. Die kanonische Abbildung $\mathcal{F} \to g_*\omega^{(r+1) \cdot m} \otimes_{O_S} O_S(m \cdot (l+1) \cdot P)$ ist für $m \gg 0$ surjektiv auf einer offenen Menge U in S. Also gilt $A(l+1, r+1)$ und so weiter.

BEHAUPTUNG 4: Es sei $r \geq 5$. Dann gilt $A(r+1, r)$.

BEWEIS: Es sei $A(l, r)$ richtig. Wähle ein $\mu \geq l$. Dann ist $\omega^{(r + r \cdot \mu) \cdot m} \otimes_{O_T} g^* O_S((l + r \cdot \mu) \cdot m \cdot P) = \mathcal{F}_1$ eine Untergarbe von $\omega^{r \cdot (m + m \cdot \mu)} \otimes_{O_T} g^* O_S((r+1) \cdot (m + m \cdot \mu) \cdot P) = \mathcal{F}_2$. Wegen Behauptung 3 wird $\mathcal{F}_1$ auf einer offenen Menge von globalen Schnitten erzeugt.

FOLGERUNG 5.10: *$g : T \to S$ sei wie in* (5.9). *Dann ist für $r \geq 5$* $\operatorname{grad}(\lambda_{r+1}) = \operatorname{grad}(g_*\omega_{T/S}^{r+1}) \geq 0$.

BEWEIS: Wegen Behauptung 2 und 4 ist für $r \geq 5$ $g_*\omega^{r+1} \otimes_{O_S} O_S((r+2) \cdot P)$ ampel und daher $\operatorname{grad}(\lambda_{r+1}) > -(r+2) \cdot \operatorname{rang}(g_*\omega^{r+1})$. Nun sei $\eta : S' \to S$ wieder eine endliche Überlagerung und $g' : T' \to S'$ das Faserprodukt. Da auch g' wieder die Voraussetzung aus (5.9) erfüllt, ist auch

$$\operatorname{grad}(\eta) \cdot \operatorname{grad}(\lambda_{r+1}) = \operatorname{grad}(g'_*\omega_{T'/S'}^{r+1}) > -(r+2) \cdot \operatorname{rang}(g_*\omega^{r+1}).$$

Wählen wir $\operatorname{grad}(\eta)$ genügend groß, so folgt, daß $\operatorname{grad}(\lambda_{r+1}) \geq 0$ sein muß.

BEMERKUNG: Ein ähnliches Argument zeigt: $g_*\omega_{T/S}^r$ ist für $r \geq 6$ pseudo-semipositiv und $g_*\omega_{T/S}^r \otimes_{O_S} O_S(P)$ ist ampel.

§6. Folgerungen aus dem Satz von Riemann–Roch

(6.1) RIEMANN–ROCH'SCHER SATZ FÜR LOKAL FREIE GARBEN AUF KURVEN: *Es sei S eine Kurve und $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe auf S:*

$$\dim(H^0(S, \mathscr{E})) - \dim(H^1(S, \mathscr{E})) = \operatorname{grad}(\mathscr{E}) - \operatorname{rang}(\mathscr{E}) \cdot (\operatorname{Geschlecht}(S) - 1).$$

FOLGERUNG 6.2: *Es sei $g: T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum von Kurven vom Geschlecht $\pi \geq 2$ oder von Flächen vom allgemeinen Typ über einer Kurve S. Dann gilt $C''_{2,1}$ bzw. $C''_{3,1}$.*

BEWEIS: Ist $\operatorname{Var}(g) = 0$, so ist nach Definition (3.6) nicht zu zeigen. Wegen (5.10) ist für $r \geq 5$ $\operatorname{grad}(\lambda_{r+1}) \geq 0$. Nach (4.5) ist dann für $r \gg 0$ sogar $\operatorname{grad}(\lambda_r) > 0$. Indem wir (4.5) nocheinmal anwenden, erhalten wir für ein $c > 0$, daß $\operatorname{grad}(\lambda_{r \cdot n}) \geq n \cdot r(r \cdot n) \cdot c$ ist, für alle $n \geq 1$. Nach (6.1) ist für eine Konstante a

$$\dim(H^0(T, \omega_{T/S}^{r \cdot n})) = \dim(H^0(S, g_* \omega_{T/S}^{r \cdot n})) \geq n \cdot r(r \cdot n) \cdot c + r(r \cdot n) \cdot a.$$

Letzteres ist ein Polynom in n vom Grad $(\kappa(T_s) + 1)$ mit positivem höchsten Koeffizienten.

(6.3): Wir können natürlich den Riemann–Roch'schen Satz in der verallgemeinerten Form von Grothendieck auch auf den Morphismus $g: T \to S$ selbst anwenden. Für die Formulierung des Satzes und Literaturangaben verweisen wir auf [5]. Die Einzelheiten (und Idee) der Anwendung findet man in [15; 5.10]. Es sei $g: T \to S$ ein semistabiler Faserraum. Es sei $g_!(\mathscr{F}) = \Sigma_i (-1)^i [R^i g_* \mathscr{F}]$ in der Grothendieck–Gruppe von S. Dann ist (modulo Torsion) für eine invertierbare Garbe $\mathscr{F}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Chern}(g_! \mathscr{F}) = g_*[&(1 + c_1(\mathscr{F}) + \tfrac{1}{2} \cdot c_1(\mathscr{F})^2 + \tfrac{1}{6} \cdot c_1(\mathscr{F})^3 + \cdots) \\ &\times (1 - \tfrac{1}{2} \cdot c_1(\Omega^1_{T/S}) + \tfrac{1}{12} \cdot (c_1(\Omega^1_{T/S})^2 + c_2(\Omega^1_{T/S})) \\ &- \tfrac{1}{24} \cdot c_1(\Omega^1_{T/S}) \cdot c_2(\Omega^1_{T/S}) + \cdots)]. \end{aligned}$$

Dabei stehen die ... für Chernklassen vom Grad größer als 4.

FOLGERUNG 6.4 (Mumford): *Es sei $g: T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum von Kurven vom Geschlecht $\pi \geq 2$. Dann ist (bis auf Torsion) $\lambda_n = (\lambda_1^{12} \otimes \delta)^{n \cdot (n-1) \cdot (1/2)} \otimes \lambda_1$, für eine Idealgarbe δ.*

Der Beweis vom Mumford zeigt diese Gleichung auf dem Hilbert-Schema und – da diese Garben schon auf dem Modulschema M_g der stabilen Kurven definiert sind – auf M_g.

BEWEISSKIZZE: Die explizite Beschreibung der Singularitäten gibt: $c_1(\Omega^1_{T/S}) = c_1(\omega_{T/S})$ und $c_2(\Omega^1_{T/S}) = [\mathrm{Sing}(T/S)] = [\Delta]$. Da für Faserräume stabiler Kurven $g_!\omega^n_{T/S} = g_*\omega^n_{T/S}$ ist, erhält man (bis auf Torsion):

$$\begin{aligned}\lambda_n &= g_*[\tfrac{1}{2}\cdot c_1(\omega_{T/S})^2\cdot n^2 - \tfrac{1}{2}\cdot c_1(\omega_{T/S})^2\cdot n + \tfrac{1}{12}\cdot(c_1(\omega_{T/S})^2 + [\Delta])]\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)\cdot g_*c_1(\omega_{T/S})^2 + \lambda_1 \quad \text{(setze } n=1\text{) und}\\ & g_*(c_1(\omega_{T/S})^2 + [\Delta]) = 12\cdot\lambda_1.\end{aligned}$$

FOLGERUNG 6.5: *Es sei $g: T\to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum von Kurven vom Geschlecht $\pi\geq 2$. Dann ist $\kappa(S,\lambda_1)\geq$ Var(g).*

BEWEIS: Nach (6.4) ist $\mathcal{M} = \lambda_{n\cdot m}^{r(n)}\otimes\lambda_n^{-m\cdot r(n\cdot m)} = \lambda_1^a\otimes\delta^b$ für

$$\begin{aligned}a = {}&(6\cdot n\cdot m\cdot(n\cdot m-1)+1)\cdot r(n)\\ &-(6\cdot n\cdot(n-1)+1)\cdot m\cdot r(n\cdot m)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}b = {}&\tfrac{1}{2}\cdot(n\cdot m\cdot(n\cdot m-1))\cdot r(n)\\ &-\tfrac{1}{2}\cdot(n(n-1))\cdot m\cdot r(n\cdot m).\end{aligned}$$

Beachtet man, daß $r(n) = (2n-1)\cdot(\pi-1)$ ist, so folgt, daß der Koeffizient von $m^2\cdot n^3$ in a und b verschwindet, der Koeffizient von $m^2\cdot n^2$ gleich $6\cdot(\pi-1)$ bzw. $\frac{1}{2}\cdot(\pi-1)$ ist. Also ist für $n, m\gg 0$ sowohl a als auch b positiv und $\mathcal{M}$ eine Untergarbe von λ_1^a. Nach (4.4) folgt die Behauptung.

FOLGERUNG 6.6: *Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen aus* (6.5) *S eine Kurve, so gilt $C''_{2,1}$.*

BEWEIS: Die explizite Berechnung von a und b in (6.5) gibt: $a = 12\cdot b - 6\cdot(m\cdot r(n\cdot m) - r(n))$. Für $n, m\gg 0$ erhält man, daß $\lambda_1^a\otimes\delta^b$ eine Untergarbe von $(\lambda_1^{12}\otimes\delta)^b$ ist. Also ist $\mathrm{grad}(\lambda_1^{12}\otimes\delta)\geq$ Var(g) und $\mathrm{grad}(\lambda_n)\geq c\cdot\mathrm{Var}(g)\cdot n^2$ für $c>0$ und $n\gg 0$. Wie in (6.2) folgt die Behauptung aus (6.1).

Bemerkung 6.7: Eine entsprechende "Auswertung" des Satzes von Riemann–Roch für einen semistabilen Faserraum von Flächen liefert ($\dim(S)=1$):

$$grad(g_!\omega^n_{T/S}) = \tfrac{1}{6}\cdot c_1(\omega_{T/S})^3\cdot n^3 - \tfrac{1}{4}\cdot c_1(\omega_{T/S})^3\cdot n^2 + \cdots.$$

Vergleicht man eine solche Formel mit (4.5) so erhält man: Angenommen as existiert ein Modell für T und ein Polynom $P(n)$ vom Grad$(\dim(T_s)-2)$, so daß für $n \gg 0$ gilt $0 \le (\operatorname{grad}(g_*\omega^n_{T/S}) - \operatorname{grad}(g_!\omega^n_{T/S})) \le P(n)$, so ist $c_1(\omega_{T/S})^3 \ge 0$.

§7. Weierstraß-Schnitte

Satz 7.1 (Arakelov; siehe [22; 2.10]): *Es sei $g: T \to S$ ein semistabiler Faserraum von Kurven vom Geschlecht $\pi \ge 1$. Dann existiert eine Injektion*

$$g^*\lambda_1 \to \omega_{T/S}^{\pi\cdot(\pi+1)\cdot(1/2)}.$$

Folgerung 7.2: *Es sei $g: T\to S$ wie in 7.1, und $\pi \ge 2$. Dann gilt $C''_{n,n-1}$.*

Beweis: Wegen (7.1) ist $\kappa(T/S) \ge \kappa(S, \lambda_1)$ und nach 6.5 ist $\kappa(S,\lambda_1) \ge \operatorname{Var}(g)$. Ist $\operatorname{Var}(g)=0$, so ist nichts zu zeigen.

§8. Faserräume elliptischer Flächen

In diesem § beweisen wir den folgenden Satz unter Ausnutzung von $C''_{2,1}$, $C'_{3,2}$ *für elliptische Kurven und* (5.6).

Satz 8.1: *Es sei $g: T\to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum,* $\dim(S)=1$. *Die allgemeine Faser T_s sei eine elliptische Fläche. Dann gilt $C''_{3,1}$.*

Beweis: Nach der Definition von "präpariert" in (3.6) existieren Morphismen

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{k} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ S & \xrightarrow{id} & S \end{array}$$

und Y und T haben rationale Gorenstein Singularitäten. $C'_{3,2}$, (A.3)(i) und (A.1)(iii) geben uns für $\gamma \gg 0$ eine Inklusion $k^*\omega^{\gamma}_{Y/S} \to \omega^{\gamma}_{T/S}$.

Da $\kappa(T_s)$ und $\mathrm{Var}(g)$ bestenfalls eins seien können, genügt es wegen (1.2) den Fall zu betrachten, daß $\kappa(Y/S) \leq 0$ ist. Wegen $C''_{2,1}$ und (3.6) ist dies nur möglich, falls ein birationaler Morphismus $\tau: Y \to E \times S$ existiert, wobei entweder E eine elliptische Kurve ist oder $E \simeq \mathbb{P}^1$. Es sei $X \to Y$ eine Desingularisierung, ebenfalls semistabil über S, und X' die Normalisierung von X in $\mathbb{C}(Y')$. Es ist $\Delta(X'/X) = \hat{s}_1(S) \cup \hat{s}_2(S) \cup \cdots \cup \hat{s}_\nu(S) \cup \hat{D}$ wobei auch die $\hat{s}_i$ und $\hat{D}$ die in (3.6), (2') geforderten Eigenschaften haben. Nach Wahl von Y' existiert ein Morphismus $X' \to M^{\mu}_1$ wobei M^{μ}_1 das feine Modulschema der elliptischen Kurven mit level-μ-Struktur ist. Ist Z die Steinfaktorisierung und $\mathfrak{G}$ die Galoisgruppe von X' über X, so operiert $\mathfrak{G}$ auch auf Z (die Abbildung $X' \to M_1$ ist invariant unter $\mathfrak{G}$). Es sei $\hat{C} \to Z$ das Pullback der universellen elliptischen Kurve. Es operiert $\mathfrak{G}$ birational auf $\hat{C}$ über Z.

Behauptung 8.2: Es existiert ein Modell $C \to Z$ von $\hat{C}$, so daß $\mathfrak{G}$ biregulär operiert und transitiv auf der Menge der irreduziblen Komponenten konjugierter Fasern.

Beweis: $\mathfrak{G}$ operiert natürlich biregulär auf dem minimalen Modell von $\hat{C}$. Die singulären Fasern dieses Modelles sind Sequenzen regulärer rationaler Kurven mit Selbstschnittzahl -2. Hat $\mathfrak{G}$ verschiedene Bahnen in der Menge der irreduziblen Komponenten konjugierter Fasern, so blasen wir einfach alle Komponenten, bis auf die einer Bahn, zusammen.

Wir setzen $\Gamma = X' \times_Z C$ und $\hat{T} = \Gamma/\mathfrak{G}$. Es ist $\hat{T}$ birational zu T. Zusammenfassend haben wir:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\eta'} & \hat{T} \\ {\scriptstyle k'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{k}} \\ X' & \xrightarrow{\eta} & X \end{array}$$

Behauptung 8.3:

(i) $\hat{k}$ ist flach und $\hat{T}$ hat nur rationale Singularitäten. Die Fasern von $\hat{k}$ sind irreduzibel.

(ii) Es sei $D_i = \hat{s}_i(S)$ für $i = 1, \ldots, \nu$. Dann ist X' regulär entlang $\eta^{-1}(D_i)$.

(iii) $\hat{k}_*\omega_{\hat{T}/X}$ ist eine invertierbare Garbe.

BEWEIS: X' hat nur rationale Singularitäten und k' ist semistabil, Also hat Γ rationale Singularitäten. Die Argumente aus [23] übertragen sich wörtlich auf $\Gamma/\mathfrak{G}$ und daher hat auch $\hat{T}$ rationale Singularitäten. Da $\hat{k}$ äquidimensional ist, ist $\hat{k}$ flach. Die Irreduzibilität der Fasern folgt aus (8.2).

Da der Verzweigungsort von X' über X entlang D_i regulär ist, ist (ii) richtig. Es sind η und η' affin und η ist flach. Also ist $\eta_* R^1 k'_* O_\Gamma = R^1 \hat{k}_* \eta'_* O_\Gamma$. Da alle Fasern von k' reduzierte und zusammenhängende Kurven sind ist $R^1 k'_* O_\Gamma$ lokal frei [15; §5] und somit auch $R^1 \hat{k}_* \eta'_* O_\Gamma$. Da wir in Charakteristik 0 arbeiten, ist $O_{\hat{T}}$ ein direkter Summand von $\eta'_* O_\Gamma$ und auch $R^1 \hat{k}_* O_{\hat{T}}$ ist lokal frei. Nach (A.1)(i) ist $\hat{k}_* \omega_{\hat{T}/X} = \mathcal{H}om_X(R^1 \hat{k}_* O_{\hat{T}}, O_X)$. Also ist (iii) richtig.

Es sei für $i = 1, \ldots, \nu$ $F_i = (\hat{k}^{-1}(D_i))_{\text{red}}$. Wie üblich bezeichne "$s$" die Einschränkungen auf den allgemeinen Punkt von S.

BEHAUPTUNG 8.4: Es sei $\nu_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, \nu$.

(i) Es ist $\nu_i \cdot F_i$ ein Cartier-Divisor genau dann, wenn $\nu_i \cdot F_{is}$ ein Cartier-Divisor ist.

(ii) Ist (i) erfüllt für die gewählten ν_i, so gilt: Es ist $\hat{k}^* \hat{k}_* \omega_{\hat{T}/X} \otimes O_{\hat{T}}(\Sigma_{i=1}^{\nu} \nu_i \cdot F_i)$ eine Untergarbe von $\omega_{\hat{T}/X}$ genau dann, wenn $\hat{k}_s^* \hat{k}_{s*} \omega_{\hat{T}_s/X_s} \otimes O_{\hat{T}_s}(\Sigma_{i=1}^{\nu} \nu_i \cdot F_{is})$ eine Untergarbe von $\omega_{\hat{T}_s/X_s}$ ist.

BEWEIS: Da $\omega_{\hat{T}/X}$ mit Basiswechsel verträglich ist, und da die erste der beiden in (ii) aufgeführten Garben jeweils invertierbar ist, gilt (ii) auf $\hat{T}_{\text{reg}}$. Wegen (A.3)(i) setzt sich eine Inklusion einer invertierbaren Garbe in die dualisierende Garbe jedoch auf ganz $\hat{T}$ fort.

Nehmen wir an, $\nu_i \cdot F_{is}$ sei ein Cartier-Divisor. Dann ist $\nu_i \cdot F_i$ über einer offenen Menge von S ein Cartier-Divisor oder $\nu_i \cdot F_i + H$ ist ein Cartier-Divisor, wobei H ein Weil-Divisor ist, der in Fasern von $\hat{T} \to S$ liegt. Da in einer genügend kleinen Umgebung von D_i der Morphismus $X' \to X$ nur D_i als Verzweigungsort hat, sind alle Fasern von $\hat{k}$ außerhalb D_i reduziert und H muß sebst über dieser Umgebung ein Cartier-Divisor sein.

BEHAUPTUNG 8.5: Es seien für $i = 1, \ldots, \nu$ $\hat{\nu}_i$ maximal, so daß die Bedingungen aus (8.4)(i) und (ii) erfüllt sind. Es sei μ_i die Vielfachheit von F_i, d.h.: $\hat{k}^* D_i = \mu_i \cdot F_i$. Es sei n so, daß n/μ_i eine natürliche Zahl ist für $i = 1, \ldots, \nu$. Dann ist

$$\kappa(T_s) = \kappa\left(X_s, (\hat{k}_{s*}\omega_{\hat{T}_s})^n \otimes O_{X_s}\left(\sum_{i=1}^{\nu} \frac{n}{\mu_i} \cdot \nu_i \cdot D_{is}\right)\right).$$

BEWEIS: $T_s \to X_s = Y_s$ ist ein minimales reguläres Modell von $\hat{T}_s \to X_s$. Ist $\rho : T_d \to T_s$ ein reguläres Modell, so daß ein Morphismus $\hat{\rho} : T_d \to \hat{T}_s$ existiert, so ist $\kappa(T_s) = \kappa(T_d) = \kappa(T_d, \rho^*\omega_{T_s})$ (siehe (A.3)).

Nun ist (z.B.: benutze man die explizite Beschreibung der degenerierten Fasern einer Familie von elliptischen Kurven) $\omega_{T_s|B} \simeq O_B$ für jede Komponente B einer Faser von $T_s \to X_s$ und dasselbe gilt für die Einschränkung von $\rho^*\omega_{T_s}$ auf die Komponenten der Fasern von $T_d \to X_s$. Da $\hat{T}_s$ rationale Singularitäten hat, existiert in einer genügend kleinen Umgebung eines Divisors B', der durch $\hat{\rho}$ zu einem Punkt zusammengeblasen wird, eine Schnitt von $\rho^*\omega_{T_s}$, der auf B' keine Nullstellen hat. Damit ist $\hat{\rho}_*\rho^*\omega_{T_s}$ eine invertierbare Garbe. Da

$$\hat{k}_s^*\hat{k}_s^*\omega_{\hat{T}_s} \otimes O_{\hat{T}_s}\left(\sum_{i=1}^{\nu} \hat{\nu}_i \cdot F_{is}\right) \subset \hat{\rho}_*\rho^*\omega_{T_s} \subset \hat{\rho}_*\omega_{T_d} \simeq \omega_{\hat{T}_s}$$

ist, und die $\hat{\nu}_i$ maximal gewählt sind, ist die erste Inklusion ein Isomorphismus. Da aber $\hat{\rho}^*\hat{\rho}_*\rho^*\omega_{T_s} \simeq \rho^*\omega_{T_s}$ ist, folgt (8.5).

Wegen (5.6) und (A.11) ist für ein $n \gg 0$ welches zusätzlich die Voraussetzung aus (8.5) erfüllt $(\hat{k}_*\omega_{\hat{T}/X})^n \simeq O_X(D_0 + E_0)$ für positive Divisoren D_0 und E_0, wobei E_0 in endlich vielen Fasern liegt und D_0 keine Komponenten der Fasern von $X \to S$ enthält.

Es sei $D_n' = D_0 + \Sigma_{i=1}^{\nu} \hat{\nu}_i \cdot n/\mu_i \cdot D_i$ und D_n'' der Divisor in $E \times S$, dessen eigentliches Urbild D_n' ist.

Setze $C_0 = \{e\} \times S$ für $e \in E$, falls $E \simeq \mathbb{P}^1$ ist und $C_0 = 0$ falls E elliptisch ist. Dann ist $\omega_{E\times S/S} \simeq O_{E\times S}(-2 \cdot C_0)$. Einen Divisor K der Garbe $\omega_{X/S}$ erhalten wir, indem wir zu dem eigentlichen Urbild von $-2 \cdot C_0$ die exzeptionellen Komponenten mit echt positiver Vielfachheit addieren. Also ist für geeignette $a, b > 0$ $a \cdot \tau^*(D_n'' - 2 \cdot n \cdot C_0) \leq b \cdot (D_n' + K)$. Zusammenfassend erhalten wir aus (8.4) und (8.5), daß $\kappa(T_s) = \kappa(E \times \{s\},\ O_{E\times\{s\}}(D_n'' - 2 \cdot n \cdot C_0|_{E\times\{s\}}))$ und $\kappa(T/S) \geq \kappa(E \times S,\ O_{E\times S}(D_n'' - 2 \cdot n \cdot C_0))$ ist.

Aus dieser Beschreibung erhält man (mit dem Rieman Roch'schen Satz und der Schnittheorie auf $E \times S$) sofort, daß $\kappa(T/S) \geq \kappa(T_s)$ ist, und daß die Gleichheit nur dann möglich ist, wenn D_n'' aus paarweise disjunkten Schnitten besteht. Letzteres bedeutet, daß wir $X = E \times S$ und $X' = E' \times S$ wählen können für eine Galoissche Überlagerung $E' \to E$. Außerdem faktorisiert die Abbildung $X' \to M_i^\mu$ über die Projektion auf E'. Ist $\hat{C} \to E'$ die induzierte elliptische Kurve, so ist nach Konstruktion $\hat{T} = (C/\mathfrak{G}) \times_E (E \times S) \simeq (C/\mathfrak{G}) \times S$ (Bezeichnungen wie in (8.2)).

§9. Leitfaden für den Beweis von $C''_{n,n-1}$ und $C''_{3,1}$

(9.1) Es sei $g: T \to S$ ein präparierter semistabiler Faserraum, $m = \dim(S)$ und $n = \dim(T)$

n	m	*Struktur von T_s*	*Beweis von $C''_{n,m}$*	*der Beweis benutzt: (Bemerkungen:)*
2	1	elliptische	5.5	5.4 oder 5.1
		Kurve	oder 9.3	(unabhängig von der Charakteristik des Grundkörpers)
n	$n-1$	elliptische	5.6	$C''_{2,1}$ für elliptische Kurven
		Kurve	oder [22]	5.1 und 7.1
2	1	Kurve vom Ge-	6.2	4.5, 5.10 und 6.1
		schlecht ≥ 2	oder 6.6	4.5, 6.4 und 6.1 (unabhängig von der Charakteristik des Grundkörpers)
n	$n-1$	Kurve vom Ge-	7.2	4.4, 6.4 und 7.1
		schlecht ≥ 2	oder [22]	5.1 und 7.1
3	1	Fläche von allgemeinem Typ	6.2	4.5, 5.10 und 6.1
3	1	Abelsche Varietät oder K-3 Fläche	5.5	5.4 (Fujita) (für abelsche Varietäten gilt $C_{n,m}$ nach [21])
3	1	elliptische Fläche Fläche	8.1	$C''_{2,1}$ und $C''_{3,2}$ für elliptische Kurven

(9.2): Eine weitere Methode für den Beweis von $C''_{2,1}$ besteht in den expliziten Berechnungen, die wir in [22; §3] durchgeführt haben. Sie benutzen (7.1) und den relativen Riemann Roch'schen Satz (oder – was im wesentlichen dasselbe ist – den Riemann Roch'schen Satz für Flächen und Kurven und die Leray-Spektral-Sequenz).

(9.3): Ein anderer Beweis von $C''_{2,1}$ für einen präparierten semistabilen Faserraum $g: T \to S$ elliptischer Kurven, der auch in Charakteristik $p \neq 0$ richtig ist:

Wir dürfen annehmen, daß $\mathrm{Var}(g) = 1$ ist. Also hat g degenerierte Fasern. Die kanonische Abbildung $g^*g_*\omega_{T/S} \to \omega_{T/S}$ muß surjektiv sein. Wäre nämlich E der Träger des Kokerns, so müsste E aus Komponenten der degenerierten Fasern bestehen, könnte aber keine vollständigen Fasern enthalten. Da die degenerierten Fasern aber nur reguläre rationale Komponenten mit Selbstschnittzahl -2 haben, ist dies unmöglich.

Also ist $g^*\lambda_1^n = \omega_{T/S}^n$ und $c_1(\omega_{T/S})^2 = 0$. Daraus folgt: $g_*\omega_{T/S}^n = \lambda_1^n$ und $R^1g_*\omega_{T/S}^n = \lambda_1^n \otimes R^1g_*O_T = \lambda_1^{n-1}$.

Wenden wir wie in (6.3) und (6.4) den relativen Riemann Roch'schen Satz an, so erhalten wir:

$$\operatorname{grad}(g_!\omega_{T/S}^n) = \operatorname{grad}(\lambda_1) = g_*(\tfrac{1}{12} \cdot [\Delta]) > 0$$

und $\operatorname{grad}(\lambda_n) = n \cdot c$ für $c > 0$.

Anhang: Dualisierende Garben und Verzweigungstheorie

In der ersten Hälfte des Anhangs fassen wir einfach die Definitionen und Sätze der Dualitätstheorie zusammen, die wir im Verlauf der Arbeit benötigt haben. Wir verweisen für die allgemeine Dualitätstheorie auf die (kurze und gut lesbare) Darstellung von Kleiman [10]. Die entsprechenden Aussagen findet man (mit einigen für uns unwesentlichen Abänderungen) auch in [6]. In der zweiten Hälfte wenden wir diese Erbegnisse auf einige konkretere Situationen an.

(A.1) Definitionen und Existenzaussagen: Es sei $f: X \to Y$ ein flacher, lokal projektiver Morphismus von (nicht notwendigerweise vollständigen oder normalen) Varietäten. Die Fasern von f seien Cohen–Macauley Varietäten (Dies folgt, wenn X und Y Cohen–Macauley sind).

(i) Es sei $r = \dim(X) - \dim(Y)$. Dann existiert eine Garbe $\omega_{X/Y}$, die *dualisierende Garbe*, mit der folgenden Eigenschaft: Es sei $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine quasikohärente Garbe auf Y. Dann ist

$$f_* \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \omega_{X/Y} \otimes_{O_X} f^*\mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}om_Y(R^rf_*\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

(ii) $\omega_{X/Y}$ ist quasikohärent und flach über Y. Durch (i) ist $\omega_{X/Y}$ eindeutig festgelegt, bis auf Isomorphie.

((i) und (ii) sind Spezialfälle von (2), (4), (6), (9) und (21) aus [10])

(iii) Es sei $h: Z \to X$ ein weiterer flacher, lokal projektiver Morphismus, dessen Fasern Cohen–Macauley sind. Dann ist $\omega_{Z/Y} = \omega_{Z/X} \otimes_{O_Z} h^* \omega_{X/Y}$. ((26)(vii) in [10]).

(iv) $\omega_{X/Y}$ ist verträglich mit Basiswechsel ((9) in [10]).

(v) Es sei $h: Z \to X$ ein (nicht notwendigerweise flacher) endlicher Morphismus von Varietäten, so daß $g = f \cdot h$ flach mit Cohen–Macauley Varietäten als Fasern ist. Dann ist $\omega_{Z/Y}$ dasselbe, wie der von dem $h_* O_Z$ - Modul $\mathcal{H}om_X(h_* O_Z, \omega_{X/Y})$ induzierte O_Z - Modul (Siehe (15) in [10] und auch [5; III, Ex. 7.2]).

(vi) Ist $h: Z \to X$ ein beliebiger endlicher Morphismus von (nicht notwendigerweise normalen) Varietäten und $\mathcal{G}$ ein quasikohärenter O_X - Modul, so bezeichnen wir den von $\mathcal{H}om_X(h_* O_Z, \mathcal{G})$ induzierten O_Z - Modul mit $h^! \mathcal{G}$. Dann gilt: $h_* \mathcal{H}om_Z(\mathcal{F}, h^! \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}om_X(h_* \mathcal{F}, \mathcal{G})$ für jeden kohärenten O_X - Modul $\mathcal{F}$ (siehe [5; III, Ex. 6.10]).

(vii) Sind $e: T \to Z$ und $h: Z \to X$ wie in (vi) und $\mathcal{G}$ ein quasikohärenter O_X - Modul, so ist $e^! h^! \mathcal{G} = (h \cdot e)^! \mathcal{G}$.

(viii) Ist $Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, so schreiben wir $\omega_X = \omega_{X/Y}$. Ist $U \subset X$ eine offene Untervarietät, so bezeichnen wir $\omega_{U/f(U)} = \omega_{X/Y}|_U$. Ist X_g der Ort der Punkte in X, in denen f glatt ist, und $Y_g = f(X_g)$, so ist $\omega_{X_g/Y_g} = \wedge^r \Omega^1_{X_g/Y_g}$. Ist f ein Gorenstein Morphismus (zum Beispiel ein lokal vollständiger Durchschnitt), so ist $\omega_{X/Y}$ invertierbar (Siehe (22) und (23) in [10] und S.: 298 und 388 in [6]).

(ix) Es sei $h: Z \to X$ ein endlicher Morphismus von Varietäten und $U = Z_{\mathrm{reg}} \cap h^{-1}(X_{\mathrm{reg}})$. Dann ist $h^! O_X|_U \simeq O_U(\Sigma(e_D - 1)D)$. Dabei erstreckt sich die Summe über alle Primdivisoren von U und e_D ist die Verzweigungsordnung von D über X. (Dies ist eine Möglichkeit, die Verzweigungsordnung zu definieren. Die Übereinstimmung mit anderen Definitionen erhält man durch die Beschreibung der dualisierenden Garbe durch die relativen Differentiale).

(A.2) Wiederholen wir den Begriff der *rationalen Singularität*: Es sei X eine Varietät und $d: X' \to X$ eine Desingularisierung. X hat nur rationale Singularitäten, wenn $d_* O_{X'} = O_X$ und $R^i d_* O_{X'} = 0$ ist. Es folgt, daß X Cohen–Macauley ist (siehe [9]).

FOLGERUNG A.3: *Es sei X eine Cohen–Macauley Varietät und $i: Z \to X$ eine reguläre offene Einbettung, so daß* $\mathrm{codim}(X - Z) \geq 2$ *ist* (z.B.: $Z = X_{\mathrm{reg}}$). *Es sei $d: X' \to X$ ein birationaler Morphismus. Dann gilt*:

(i) *$\omega_X = i_* \omega_Z$. Ist X sogar Gorensteinsch, so ist $\omega_X^n = i_* \omega_Z^n$. Insbesondere sind ω_X (bzw. ω_X^n) torsionsfreie Garben.*

(ii) *Haben X und X' rationale Singularitäten, so ist $d_* \omega_{X'} = \omega_X$.*

(iii) *Ist E ein positiver Cartier-Divisor in X', so daß* $\operatorname{codim}(d(E)) \geq 2$ *ist und haben X und X' nur rationale Singularitäten, so ist* $d_*(\omega_{X'} \otimes_{O_{X'}} O_{X'}(E)) = \omega_X$. *Ist außerdem X Gorensteinsch, so ist* $d_*(\omega_{X'}^n \otimes_{O_{X'}} O_{X'}(E)) = \omega_X^n$.

Beweis: (i) X ist eine endliche Überlagerung einer regulären Varietät, sagen wir $h: X \to Y$. Wir können annehmen, daß $Z = h^{-1}(U)$ ist für $i': U \hookrightarrow Y$. Dann ist $i_* \omega_Z$ die Garbe, die induziert wird durch

$$i'_* \mathcal{H}om_U(h_* O_Z, \omega_U) = i'_* \mathcal{H}om_U(i'^* h_* O_X, \omega_U) = \mathcal{H}om_Y(h_* O_X, i'^* \omega_U)$$
$$= \mathcal{H}om_Y(h_* O_X, \omega_Y).$$

Ist ω_X invertierbar, so ist

$$i_* \omega_Z^n = i_* i^* \omega_X^n = i_* O_Z \otimes \omega_X^n = \omega_X^n.$$

(ii) Es sei $d'': X'' \to X'$ eine Desingularisierung. Nach [9; S. 50] ist $d_* d''_* \omega_{X''} = d_* \omega_{X'} = \omega_X$.

(iii) Wir dürfen annehmen, daß eine Injektion $g: Z \to X'$ existiert. Es sei $n = 1$ oder – falls X Gorensteinsch ist – $n \in \mathbb{N}$. Wegen (ii) ist $d^* \omega_X^n \subset \omega_{X'}^n$ und daher

$$\omega_X^n \subset d_*(\omega_{X'}^n \otimes_{O_{X'}} O_{X'}(E)) \subset d_* g_* g^*(\omega_{X'}^n \otimes_{O_{X'}} O_{X'}(E)).$$

Die letzte Garbe ist jedoch $i_* g^* \omega_{X'}^n = i_* \omega_Z^n = \omega_X^n$.

Definition und Lemma A.4: Es sei $g: X \to S$ ein flacher Faserraum. g hat nur *relativ rationale Singularitäten*, wenn für jeden birationalen Morphismus $h: S' \to S$, falls S' nur rationale Singularitäten hat, auch $X \times_S S'$ nur rationale Singularitäten hat. Dabei genügt es, dies für ein S' nachzuprüfen, welches regulär ist.

Beweis: Folgt direkt aus "flachem Basiswechel".

Folgerung A.5: *Es seien $g: X \to S$ und $g': X' \to S$ flache Gorenteinsche Faserräume mit nur relativ rationalen Singularitäten. Es sei $d: X' \to X$ ein birationaler Morphismus über S und E ein positiver Cartier-Divisor mit* $\operatorname{codim}(E) \leq 2$. *Dann ist*

$$d_*(\omega_{X'/S}^n \otimes_{O_{X'}} O_{X'}(E)) = d_*(\omega_{X'/S}^n) = \omega_{X/S}^n.$$

BEWEIS: Falls S regulär ist, folgt dies direkt aus (A.3). Der allgemeine Fall folgt wieder durch Basiswechsel.

BEMERKUNG A.6: (A.3) und (A.5) geben uns, daß die in (0.6) definierte Kodaira Dimension bzw. relative Kodaira Dimension invariant unter birationalen Transformationen ist, wenn wir nur rationale Gorenstein Singularitäten zulassen.

Betrachten wir einen birationalen Morphismus $d: X' \to X$ zwischen Varietäten mit rationalen Singularitäten. Wir wissen, daß eine kanonische Injektion $d^*\omega_X \to \omega_{X'}$ existiert. Der Träger des Kokerns kann trivial sein, z.B.: wenn X' eine minimale Desingularisierung einer Fläche mit Gorenstein Singularitäten ist. Im allgemeinen gilt jedoch über $d^{-1}(X_{\text{reg}})$:

LEMMA A.7: *Es sei E ein exzeptioneller Divisor von X' (Weil-Divisor), so daß $d(E) \cap X_{\text{reg}} \neq \emptyset$* ist. Dann gilt:

(i) *E liegt im Träger des Kokerns von $d^*\omega_X \to \omega_{X'}$.*

(ii) *Die allgemeine Faser von $d|_E : E \to d(E)$ ist ein projektiver Raum.*

BEWEIS: Nach den in [19; S. 22] zusammengestellten Sätzen sei $h: Y \to X$ eine Desingularisierung, so daß h^{-1} auf X_{reg} definiert ist. Es existiert eine Sequenz von monoidalen Transformationen mit nicht singulären Zentren $m: Y' \to Y$, so daß $h' = m \cdot d^{-1} \cdot h$ ein Morphismus ist.

(i) und (ii) sind nach [5; II, Ex. 8.5] richtig für m. Da aber h^{-1} auf X_{reg} ein Isomorphismus ist und h'^{-1} zumindest auf einer offenen Menge in E definiert ist, folgt die Behauptung (ii) auch für d.

Nun ist E in Träger des Kokerns von $h'_* m^* \omega_Y \to h'_* \omega_{Y'} = \omega_{X'}$. Die erste der beiden Garben ist aber auf $d^{-1}(X_{\text{reg}})$ gerade $h'_* h'^* d^* \omega_X$ und enthält $d^*\omega_X$.

Als erstes Beispiel betrachten wir das "*Wurzelziehen aus dem Schnitt einer invertierbaren Garbe*":

BEISPIEL A.8: Es seien Y und S Cohen–Macauley Varietäten $g: Y \to S$ ein flacher Morphismus und $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf Y. $s: O_Y \to \mathscr{L}^m$ sei ein festgewählter Schnitt. Dann ist $\mathscr{A} = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathscr{L}^{-1}$ eine O_Y – Algebra. Es sei $\eta: X = \mathbf{Spec}(\mathscr{A}) \to Y$ der natürliche Morphismus und $\eta': X' \to X$ die Normalisierung. Wir nehmen an, daß X' Cohen–Macauley ist. Dann ist X' flach über S.

BEHAUPTUNG: Es existiert eine Injektion von $(\eta\cdot\eta')_*\omega_{X'/S}$ in $\omega_{Y/S}\otimes(\bigoplus_{i=0}^{m-1}\mathscr{L}_i)$ über Y_{reg} und der Kokern dieser Abbildung ist trivial in allen Punkten aus Y über denen X normal ist.

BEWEIS: Wir dürfen annehmen, daß Y regulär (und nicht vollständig) ist. Nach (A.1)(vi) ist $\eta^!\omega_{Y/S}$ gerade der O_X-Modul, der von dem $\mathscr{A}$-Modul $\omega_{Y/S}\otimes\mathscr{H}om_Y(\mathscr{A},O_Y)$ induziert wird. Also ist $\eta^!\omega_{Y/S}=\eta^*(\mathscr{L}^{m-1}\otimes\omega_{Y/S})$.

Nach (A.1)(v) und (vii) ist $\omega_{X'/S}=\eta'^!\eta^!\omega_{Y/S}$. Die Abbildung $O_X\to\eta'_*O_{X'}$ induziert eine Abbildung $\eta'_*\eta'^!\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ für jede kohärente Garbe $\mathscr{G}$. Für $\mathscr{G}=\eta^!\omega_{Y/S}$ erhalten wir $\eta'_*\omega_{X'/S}\to\eta^!\omega_{Y/S}$ und dies ist ein Isomorphismus in allen Punkten, in denen η' ein Isomorphismus ist. Durch Anwenden von η_* erhalten wir

$$(\eta\cdot\eta')_*\omega_{X'/S}\hookrightarrow\eta_*\eta^*(\omega_{Y/S}\otimes\mathscr{L}^{m-1})=\omega_{Y/S}\otimes\mathscr{L}^{m-1}\otimes\mathscr{A}.$$

DEFINITION A.9: Es sei Y eine reguläre Varietät und X eine normale Varietät. Es sei $\eta:X\to Y$ ein endlicher Morphismus. Der Verzweigungsort sei $\Delta(X/Y)=\{y\in Y;$ ein Punkt aus $\eta^{-1}(y)$ ist verzweight über $Y\}$. Wir bezeichnen $\Delta(X/Y)$ als *gut*, wenn $\Delta(X/Y)$ reguläre Komponenten hat, die sich transversal schneiden.

In [23] haben wir gezeigt, daß unter dieser Voraussetzung X nur Quotientensingularitäten hat (und damit rationale Singularitäten) Wir hatten dies nur für den Galoisschen Fall ausgeführt, aber die Argumente lassen sich Wort für Wort auch auf nicht galoissche Überlagerungen anwenden.

BEISPIEL A.10: Es sei

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, "g"'] & V' \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "f'"] & V \arrow[d, "f"] \\
S & S \arrow[l, "id"'] \arrow[r, "\eta"] & W
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Morphismen von Varietäten, so daß f und f' Fasserräume und g ein flacher Gorensteinscher Faserraum mit relativ rationalen Singularitäten sind. Es seien V und W regulär und η' und η Galoissche Überlagerungen mit Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ und V' die Normalisierung von $\hat{V}=V\times_W S$. Wir nehmen an, daß $\Delta(V'/V)$ und $\Delta(S/W)$ gut sind. Also haben S und V' nur rationale Singularitäten und damit per Definition auch T. Wir schreiben $\eta'=\eta_1\cdot\eta_2$, wobei

$\eta_2: V' \to \hat{V}$ und $\eta_1: \hat{V} \to V$ und $p: \hat{V} \to S$ die natürlichen Abbildungen sind.

Nach (A.3)(ii) und (A.7)(i) haben wir eine Inklusion $\rho_* \omega_T \to \omega_{V'}$, deren Kokern einen Träger hat, der jeden bezüglich ρ exzeptionellen Weildivisor E enthält, für den $\rho(E)$ den regulären Ort von T schneidet.

Dasselbe ist richtig, falls $\rho(E)$ Punkte enthält, in denen g glatt ist. Um dieses einzusehen, überlegt man sich, daß diese Aussage mit Basiswechsel (in S) verträglich ist. Ersetzt man S durch eine Überlagerung, für die $g(\rho(E))$ im regulären Ort liegt (das ist nach Abhyankars Lemma möglich), kann man wieder (A.7) anwenden.

Da η flach ist, ist $\omega_{\hat{V}/V} = p^* \omega_{S/W}$. Nach (A.1)(v) und (vi) ist $\eta_2^! \omega_{\hat{V}/V} = \omega_{V'/V}$ und wie in (A.8) erhält man eine natürliche Inklusion $\eta_{2*} \omega_{V'/V} \to p^* \omega_{S/W}$ und $\eta_2^* \eta_{2*} \omega_{V'/V} \to f'^* \omega_{S/W}$. Auf V'_{reg} ist $\omega_{V'/V}$ invertierbar. Es sei auf V'_{reg} $\mathscr{F} = \eta_2^* \eta_{2*} \omega_{V'/V} \otimes \omega_{V'/V}^{-1}$. Dann haben wir die Inklusion $\mathscr{F} \to f'^* \omega_{S/W} \otimes \omega_{V'/V}^{-1}$ und eine Surjektion $\mathscr{F} \to O_{V'}$ (η_2 ist affin).

Zusammen erhalten wir auf V'_{reg}:

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \otimes \rho^* \omega_{T/S} &\to f'^* \omega_{S/W} \otimes \omega_{V'/V}^{-1} \otimes \rho^* \omega_{T/S} \\ &\simeq \rho^* \omega_T \otimes \eta'^* f^* \omega_W^{-1} \otimes \omega_{V'}^{-1} \otimes \eta'^* \omega_V \to \eta'^*(\omega_V \otimes f^* \omega_W^{-1}). \end{aligned}$$

Man beachte, daß der Kokern des zusammengesetzten Morphismus einen größeren Träger hat, als der Kokern von $\rho^* \omega_T \to \omega_{V'}$. Nun ist $\eta'^*(\omega_V \otimes f^* \omega_W^{-1})$ invertierbar und der Kern von $\mathscr{F} \to O_{V'}$ eine Torsionsgarbe. Also existiert auf V'_{reg} (und damit auch auf V) die Inklusion invertierbarer Garben $\rho^* \omega_{T/S} \to \eta'^*(\omega_V \otimes f^* \omega_W^{-1})$.

Es sei $U = V'_{\text{reg}} \cap f'^{-1}(S_{\text{reg}})$. Für einen Weil-Divisor D auf V' (bzw. C auf S) sei $e_V(D)$ (bzw. $e_W(C)$) die Verzweigungsordnung über V bzw. W.

Dann ist $f'^* \omega_{S/W} \otimes \omega_{V'/V}^{-1}|_U$ isomorph zu

$$O_U \left(\sum (e_W(C) - 1) \cdot f'(C) - \sum (e_V(D) - 1) \cdot D \right).$$

Damit folgt:

LEMMA A.11: *In Beispiel* (A.10) *existiert eine Inklusion*

$$\rho^* \omega_{T/S} \to \eta'^*(\omega_V \otimes f^* \omega_W^{-1}).$$

Der Träger des Kokerns enthält jeden Prim-Weil-Divisor E von V', der eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) $\operatorname{codim}(\rho(E)) \geq 2$ *und* $\rho(E) \cap T_{\text{reg}} \neq \emptyset$.

(b) $f'(E)$ *ist ein Weildivisor von* S *und* $e_W(f'(E)) > e_V(E)$.

LEMMA A.12: *Ist zusätzlich $g: T \to S$ glatt, so enthält der Träger des Kokerns jeden Prim-Weil-Divisor E mit* $\operatorname{codim}(\rho(E)) \geq 2$.

LITERATUR

[0] P. DELIGNE und M. RAPOPORT: Les schémas de modules de courbes elliptique; Modular Functions of one Variable II. *Springer Lecture Notes in Math.* 349.
[1] T. FUJITA: On Kähler fibre spaces over curves. *J. Math. Soc. Japan, 30* (1978) 779–794.
[2] T. FUJITA: The sheaf of relative canonical forms of a Kähler fibre space over a curve. *Proc. Japan Acad., 54* (1978) 183–184.
[3] D. GIESEKER: Global moduli for surfaces of general type; *Inv. math., 43* (1977) 233–282.
[4] A. GROTHENDIECK: Fondements de la géométrie algébrique; *Extraits du Séminaire Bourbaki*; 1957–1962.
[5] R. HARTSHORNE: *Algebraic Geometry*; Springer Verlag 1977.
[6] R. HARTSHORNE: Residues and Duality; *Springer Lecture Notes in Math.* 20.
[7] R. HARTSHORNE: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties; *Springer Lecture Notes in Math.* 156.
[8] Y. KAWAMATA und E. VIEHWEG: On a characterisation of an abelian variety in the classification theory of algebraic varieties. *Compositio Math., 41* (1980) 355–359.
[9] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD und B. SAINT-DONAT: Toroidal Embeddings I. *Springer Lecture Notes in Math.* 339.
[10] S. KLEIMAN: Relative duality for quasi-coherent sheaves; *Manuskript.*
[11] D. LIEBERMAN and E. SERNESI: Semicontinuity of L-dimension; *Math. Ann. 225* (1977) 77–88.
[12] T. MATSUSAKA und D. MUMFORD: Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties. *Am. J. Math., 86* (1964) 668–684.
[13] D. MUMFORD: *Geometric Invariant Theory*; Springer Verlag 1965.
[14] D. MUMFORD: Stability of projective varieties; *l'Enseignement Math., 23* (1977).
[15] D. MUMFORD: *Abelian Varieties.* Oxford University Press, 1970.
[16] H. POPP: Moduli Theory and Classification Theory of Algebraic Varieties. *Springer Lecture Notes in Math.* 620.
[17] H. POPP: On Moduli of algebraic varieties III. Fine moduli spaces; *Compositio Math. 31* (1975) 237–258.
[18] J.-P. SERRE: Espaces Fibrés Algébriques. *Séminaire C. Chevalley*, 1958, Exp. 1.
[19] K. UENO: Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. *Springer Lecture Notes* 439.
[20] K. UENO: Classification of algebraic varieties II – Algebraic threefolds of parabolic type. *Intl. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto*, 1977, 693–708.
[21] K. UENO: On algebraic fibre spaces of abelian varieties; *Math. Ann. 237* (1978) 1–22.
[22] E. VIEHWEG: Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension. *Comp. Math., 35* (1977) 197–223.
[23] E. VIEHWEG: Rational singularities of higher dimensional schemes. *Proc. of the AMS, 63* (1977) 6–8.

(Oblatum 11-V-1979)

Institut für Mathematik und Informatik
A5, Seminargebäude
D-68 Mannheim