

# COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

DANIEL CORAY

## **L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques**

*Compositio Mathematica*, tome 39, n° 3 (1979), p. 301-332

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1979\\_\\_39\\_3\\_301\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1979__39_3_301_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## L'ÉQUIVALENCE RATIONNELLE SUR LES POINTS FERMÉS DES SURFACES RATIONNELLES FIBRÉES EN CONIQUES

Jean-Louis Colliot-Thélène\* et Daniel Coray\*\*

### Introduction

On désigne dans tout cet article par  $k$  un corps parfait infini, par  $\bar{k}$  une clôture algébrique fixe, et par  $\mathcal{G}$  le groupe de Galois de  $\bar{k}$  sur  $k$ . Une  $k$ -variété est un  $k$ -schéma séparé de type fini. On appelle ici  $k$ -variété (resp.  $k$ -courbe, resp.  $k$ -surface) rationnelle une  $k$ -variété  $X$  géométriquement intègre (resp. et de dimension 1, resp. et de dimension 2) telle que  $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$  ait un corps des fractions transcendant pur sur  $\bar{k}$ .

Dans [12] et [13], Manin, reprenant une classification d'Enriques [6], a montré que toute  $k$ -surface rationnelle est  $k$ -birationnellement équivalente à (au moins) une  $k$ -surface rationnelle propre et lisse sur  $k$  de l'un des trois<sup>1</sup> types suivants ([13], 1.8 et 2.1):

(a) Surfaces de Del Pezzo non dégénérées. A une telle surface est associé son *degré*  $n = (\omega \cdot \omega)$ , self-intersection de la classe canonique, satisfaisant  $1 \leq n \leq 9$ .

(b) Surfaces de Del Pezzo dégénérées.

(c) Surfaces rationnelles fibrées en coniques (cf. §1). On associe à une telle surface son *invariant*  $r = 8 - (\omega \cdot \omega)$ , entier qui est positif ou nul. Ces surfaces ont été étudiées par Iskovskih ([9], [10]).

Etant donnée  $X$  une  $k$ -variété, les deux conditions équivalentes suivantes sont clairement nécessaires à l'existence d'un  $k$ -point sur  $X$ :

(h) Il existe sur  $X$  un ensemble fini de points fermés  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tels que les degrés  $[k(P_i) : k]$  des extensions résiduelles pour  $i = 1, \dots, n$  soient premiers entre eux dans leur ensemble.

\* CNRS Paris.

\*\* Soutenu par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

(h') Il existe sur  $X$  un zéro-cycle  $\sum_{i=1}^n n_i P_i$  ( $n_i \in \mathbb{Z}$ ) de  $k$ -degré

$$\sum_{i=1}^n n_i [k(P_i) : k] = 1$$

A la suite des travaux de l'un d'entre nous sur les surfaces du type (a), il est apparu naturel de poser la question:

(Q) Soit  $X$  une  $k$ -surface rationnelle, propre et lisse sur  $k$ . Si  $X$  satisfait (h), a-t-on  $X(k) \neq \emptyset$ ?

On sait que la réponse à cette question est oui si  $X$  est une surface du type (a) de degré  $n \geq 4$  ([4]). Les surfaces de Del Pezzo non dégénérées de degré 3 ne sont autres que les surfaces cubiques lisses. Pour une telle surface, (h) implique l'existence d'un point fermé de degré résiduel 1, ou 4, ou 10; si  $k$  est un corps  $p$ -adique, (h) implique l'existence d'un point rationnel ([3]).

Dans cet article, nous étudions la question (Q) pour les surfaces du type (c).

**DÉFINITION:** *On dit qu'une  $k$ -variété propre  $X$  satisfait  $(P_s)$ , ou que l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles de  $X$  est stablement positive de degré  $s$  (entier  $\geq 0$ ) si tout zéro-cycle de  $X$  de  $k$ -degré  $n \geq s$  est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.*

Le lien entre cette notion et les questions du type (Q) est fourni par la remarque: si une  $k$ -variété propre  $X$  satisfait  $(P_1)$ , et si elle satisfait (h), donc (h'), alors  $X(k)$  est non vide (le  $k$ -degré d'un zéro-cycle sur une  $k$ -variété propre étant invariant par équivalence rationnelle). Comme une  $k$ -courbe géométriquement intègre, propre et lisse de genre  $g$ , satisfait  $(P_g)$  (inégalité de Riemann), pour une telle courbe avec  $g = 0$  ou 1, la question (Q) a une réponse affirmative (cf. [3], §6).

En utilisant la même méthode de descente que dans [3] et [4], facilitée par le fait que le groupe de Picard des surfaces de type (c) est de rang au moins 2, nous obtenons:

**THÉORÈME B:** *Soit  $X$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, d'invariant  $r$ . Si  $X$  satisfait (h), il existe sur  $X$  un point fermé de degré résiduel au plus 2, et un point fermé de degré résiduel impair  $\leq s$ , avec  $s = \max(1, [r/2])$ . En particulier, pour  $r < 6$ , la question (Q) a une réponse affirmative.*

**THÉORÈME C:** *Soit  $X$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques,*

d'invariant  $r$ . Si la base de la fibration est  $k$ -isomorphe à  $\mathbb{P}_k^1$ , l'équivalence rationnelle sur les zéro-cycles de  $X$  est stablement positive de degré  $s = \max(0, \lceil r/2 \rceil - 1$ ).

(On note  $[x]$  la partie entière d'un réel  $x$ ).

Ces deux énoncés sont des conséquences d'un résultat plus précis (théorème A, §1). Cependant, le théorème B est le meilleur que l'on puisse espérer<sup>2</sup>:

**CONTRE-EXEMPLE:** *Il existe une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, avec  $k$  corps  $p$ -adique, et d'invariant  $r = 6$ , ayant un point fermé de degré résiduel 2, un point fermé de degré résiduel 3, et n'ayant pas de point rationnel sur  $k$ .*

Ainsi, la question (Q) a, en général, une réponse négative.

Le plan de l'article est le suivant: après des rappels et définitions sur l'équivalence rationnelle et les surfaces rationnelles fibrées en coniques, on énonce au §1 le théorème A, et on en tire les conséquences. Le §2 contient des lemmes généraux sur l'équivalence rationnelle, et le §3 des lemmes sur les courbes tracées sur les surfaces rationnelles fibrées en coniques, ainsi que deux lemmes (3.7 et 3.8) qui sont à la base de la démonstration, au §4, du théorème A. Au §5, on construit des contre-exemples à (Q). Au §6 on établit un résultat général sur la torsion de la composante de dimension zéro du groupe de Chow des  $k$ -variétés rationnelles, et, avec les méthodes de cet article, on précise le résultat dans le cas des surfaces de type (c).

Nous sommes heureux de remercier ici H.P.F. Swinnerton-Dyer pour son enseignement, et pour nous avoir communiqué le texte [18], dans lequel est appliquée la méthode de [3] à l'étude de l'équivalence rationnelle sur une  $k$ -surface cubique lisse possédant une droite  $k$ -rationnelle: une telle surface est une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, d'invariant  $r = 5$ , et la plupart des énoncés de cet article sont des généralisations de ceux de [18].

## 1. Le théorème principal; énoncé et conséquences

### 1.1. Cycles et équivalence rationnelle

Nous utilisons le formalisme des cycles et de l'équivalence rationnelle donné par W. Fulton [7], dont nous conservons les notations. On trouvera ci-après quelques rappels et définitions supplémentaires.

Etant donnée une  $k$ -variété  $X$ , on note  $Z_d(X)$  le groupe des  $d$ -cycles de  $X$ , formé des combinaisons linéaires finies  $\sum n_i V_i$ , avec  $n_i \in \mathbb{Z}$  et  $V_i$

sous-schéma fermé intègre de dimension  $d$  de  $X$ . Un  $d$ -cycle est dit *effectif* s'il s'écrit  $\sum n_i V_i$ , avec  $n_i > 0$  pour tout  $i$ . Les  $d$ -cycles effectifs forment un monoïde  $Z_d^+(X)$ . On appelle *support* d'un cycle  $A = \sum n_i V_i$ , et on note  $\text{supp}(A)$ , la réunion des fermés  $V_i$ .

Comme  $k$  est parfait, l'application image réciproque (cf. [7], 1.6) par le morphisme plat  $\bar{X} \rightarrow X$ , notée  $A \mapsto \bar{A}$ , identifie les cycles de  $X$  avec les cycles de  $\bar{X}$  fixes par  $\mathcal{G}$  (cf. [17], V-26): ceci permet de faire le lien entre le point de vue "schématique" adopté dans cet article et le point de vue proche de celui de Weil adopté dans [3].

Notons, ce qui est clair aussi bien en [7], 1.8 qu'en [7], 2.1 et 2.2, que la définition de l'équivalence rationnelle sur les cycles de  $X$  ne fait pas intervenir le morphisme structural  $X \rightarrow \text{Spec } k$ .

Parmi les multiples définitions équivalentes de l'équivalence rationnelle, on déduit facilement de [7], 1.8, Proposition (2) et Remarque (2), la suivante:

**DÉFINITION:** *Deux  $d$ -cycles  $A$  et  $B$  de  $X$  sont rationnellement équivalents si et seulement si il existe des  $k$ -variétés intègres (en nombre fini)  $Y_i$  de dimension  $(d + 1)$ , des  $k$ -morphisms  $f_i: Y_i \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  plats (c'est-à-dire dominants), des  $k$ -morphisms propres  $p_i: Y_i \rightarrow X$ , et un  $d$ -cycle  $C$  de  $X$  tels que:*

$$A + C = \sum_i p_{i*}([f_i^{-1}(0)])$$

$$B + C = \sum_i p_{i*}([f_i^{-1}(\infty)])$$

On voit aussi bien sur cette définition que cette relation, notée  $A \sim B$ , est une relation d'équivalence compatible avec l'addition des cycles. On note  $A_d(X)$  le groupe  $Z_d(X)/\sim$ . Pour  $X$  intègre et  $d = \dim X - 1$ , cette relation coïncide avec l'équivalence linéaire ([7], 1.8, Corollaire (2)).

**DÉFINITION:** *Deux  $d$ -cycles effectifs  $A$  et  $B$  de  $X$  sont dits effectivement liés s'ils sont rationnellement équivalents et si, dans la définition précédente, on peut prendre  $C = 0$ .*

Cette relation sur  $Z_d^+(X)$  est réflexive et symétrique, mais n'est pas a priori transitive. On appelle *équivalence effective*, notée  $A \approx B$ , ou  $A \approx^X B$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, la relation d'équivalence engendrée: ainsi,  $A$  et  $B$  dans  $Z_d^+(X)$  satisfont  $A \approx B$  si et seulement s'il existe une chaîne finie  $\{A = A_0, \dots, A_s = B\}$  de cycles de  $Z_d^+(X)$  tels que  $A_i$

est effectivement lié à  $A_{i+1}$ , pour  $0 \leq i < s$ . On voit facilement que si  $A$  est effectivement lié (resp. équivalent) à  $B$ , et  $C$  effectivement lié (resp. équivalent) à  $D$ , alors  $A + C$  est effectivement lié (resp. équivalent) à  $B + D$ .

Pour  $X$  une  $k$ -variété propre, deux  $k$ -points de  $X$  définissent des 0-cycles effectivement équivalents si et seulement si les deux  $k$ -points sont  $R$ -équivalents, au sens de Manin ([11], II.4).

A tout 0-cycle  $A$  sur  $X$ , on associe dans  $\mathbb{Z}$  son ( $k$ -) degré  $\deg_k(A)$ , noté  $\deg(A)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, par linéarité à partir de l'application qui à un point fermé  $P$  associe son degré résiduel  $[k(P):k]$ . A la différence de l'équivalence rationnelle (cf. plus haut), cette notion fait appel au morphisme structural  $X \rightarrow \text{Spec } k$ . On désigne par  $S^n X$  le sous-ensemble de  $Z_0(X)$  formé des 0-cycles effectifs de degré  $n$ . On a donc  $S^1 X = X(k)$  et  $Z_0^+(X) = \bigcup_{n \geq 0} S^n X$ .

Pour  $f: X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme propre de  $k$ -variétés, et  $A \in Z_0(X)$ , on a:  $\deg_k(f_*(A)) = \deg_k(A)$ . Pour  $K/k$  une extension de corps, et  $A \in Z_0(X)$ , notant  $A \mapsto A_K$  l'image réciproque ([7], 1.6) par le morphisme plat  $X_K = X \times_k K \rightarrow X$ , on a:  $\deg_K(A_K) = \deg_k(A)$ .

Etant donnée  $X$  une  $k$ -variété propre, deux 0-cycles rationnellement équivalents ont même degré: dans la définition rappelée ci-dessus, les  $Y_i$  sont de dimension 1, et propres sur  $k$ , donc les  $f_i$  sont propres et quasi-finis, donc finis; comme ils sont plats, ils sont localement libres, de rang constant car  $\mathbb{P}_k^1$  est connexe: comme  $p_{i*}$  conserve le  $k$ -degré, ceci établit l'assertion. Cela permet de définir l'application degré:  $A_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . On note  $\tilde{A}_0(X)$  son noyau.

**DÉFINITION:** *Etant donnée  $X$  une  $k$ -variété propre, on dit que l'équivalence rationnelle en dimension zéro, ou que  $\tilde{A}_0(X)$ , est de dimension finie s'il existe un entier  $n \geq 0$  pour lequel l'application naturelle:*

$$\begin{aligned} \gamma_n: S^n X \times S^n X &\rightarrow \tilde{A}_0(X) \\ (A, B) &\mapsto cl(A - B) \end{aligned}$$

*est surjective. La dimension  $n_0$  de  $\tilde{A}_0(X)$  est par définition le plus petit entier  $n \geq 0$  pour lequel  $\gamma_n$  est surjective.*

Il importe de noter que si, pour  $k$  algébriquement clos, cette définition coïncide avec l'une de celles de Mumford [14] et a alors un contenu géométrique, dans le cas non algébriquement clos qui nous intéresse ici, cette notion est "arithmétique" (de fait, pour  $X$  une  $k$ -surface rationnelle, projective et lisse,  $\tilde{A}_0(\bar{X}) = 0$ , cf. §6).

On renvoie à l'introduction pour la définition de l'équivalence rationnelle (en dimension zéro) *stablement positive* de degré  $s$ .

On voit facilement que *si l'équivalence rationnelle en dimension zéro est stablement positive, elle est aussi de dimension finie*. Les énoncés prennent une forme plus élégante lorsque  $X(k)$  est non vide; sous cette hypothèse, on a, avec les notations ci-dessus,  $n_0 \leq s$ . En effet, si  $A$  et  $B$  sont dans  $S^{s+\nu}X$  ( $\nu \in \mathbb{Z}$ ) et  $P$  est dans  $X(k)$ , on a:

$$A - B = (A - \nu P) - (B - \nu P) \sim A^+ - B^+$$

avec  $A^+, B^+$  dans  $S^sX$ . La réciproque de l'énoncé en italiques est d'ailleurs vraie quand  $k$  est algébriquement clos ([16], lemme 8).

REMARQUES:

(1) L'inégalité de Riemann montre qu'une  $k$ -courbe  $X$  géométriquement intègre, propre et lisse de genre  $g$  satisfait  $(P_g)$ . Ainsi, si  $X(k)$  est non vide,  $\tilde{A}_0(X)$  est de dimension  $n_0 \leq g$ . Pour  $g = 0$ , on a toujours  $n_0 = 0$ ; pour  $g = 1$ , on a  $n_0 = 0$  si  $X(k)$  est réduit à un élément, et  $n_0 = 1$  si  $X(k)$  a au moins deux éléments.

(2) Pour  $X$  comme en (1),  $g \geq 2$  et  $k = \bar{k}$ , on a  $n_0 \leq g - 1$ . Considérons en effet  $K = P_1 + \cdots + P_{2g-2}$  un diviseur effectif dans la classe canonique, et soient  $A, B \in S^gX$ . Le diviseur  $A - B + P_1 + \cdots + P_g$  est rationnellement équivalent à un diviseur effectif  $A' \in S^gX$ ; soit  $P$  un point dans le support de  $A'$ . On peut écrire:

$$A - B \sim A' - (P_1 + \cdots + P_g) = (A' - P) - (P_1 + \cdots + P_g - P).$$

Or,  $A' - P = A^+ \in S^{g-1}X$  et, notant  $\ell(D) = h^0(\mathcal{O}_X(D))$  et utilisant Riemann-Roch et le théorème de dualité, on trouve:

$$\begin{aligned} \ell(P_1 + \cdots + P_g - P) &= \ell(K - (P_1 + \cdots + P_g - P)) \\ &= \ell(P_{g+1} + \cdots + P_{2g-2} + P) > 0. \end{aligned}$$

Il existe donc  $B^+ \in S^{g-1}X$  avec  $B^+ \sim (P_1 + \cdots + P_g - P)$ , et l'on a  $A - B \sim A^+ - B^+$ .

(3) Signalons enfin les résultats de Mumford [14] et de Roitman [16] selon lesquels, pour  $X$  une  $C$ -variété projective et lisse,  $\tilde{A}_0(X)$  ne peut être de dimension finie que si  $\dim X \leq 1$  ou  $p_g(X) = 0$ .

## 1.2. Surfaces rationnelles fibrées en coniques

DÉFINITION: *On appelle  $k$ -surface rationnelle avec un pinceau de courbes rationnelles, ou  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, une*

*k*-surface rationnelle  $X$  propre et lisse sur  $k$ , équipée d'un  $k$ -morphisme propre et plat (i.e., ici, surjectif)  $\varphi: X \rightarrow C$ , où  $C$  est une  $k$ -courbe rationnelle, propre et lisse sur  $k$ , satisfaisant: la fibre générique de  $\varphi$  est une  $k(C)$ -courbe rationnelle, propre et lisse sur  $k(C)$ .

(On note  $k(X)$  le corps des fractions d'une  $k$ -variété intègre).

La surface  $X$  est appelée *standard* si le  $C$ -schéma  $X$  est relativement minimal, c'est-à-dire si l'on ne peut pas contracter de courbes exceptionnelles de première espèce sur  $X$  en respectant la fibration  $\varphi: X \rightarrow C$  (cf. [12], 1.4).

On définit l'entier  $r = r(X)$  par la formule  $r = 8 - (\omega \cdot \omega)$ . Il résulte de la formule de Riemann-Roch  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1/12 ((\omega \cdot \omega) + \chi_{\text{top}}(X))$  (où la première caractéristique d'Euler-Poincaré est cohérente, et la seconde topologique, i.e. classique en caractéristique nulle, étale sinon) et de  $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$  pour une  $k$ -surface rationnelle propre et lisse (ce nombre se calculant sur  $\bar{k}$ , et étant un invariant birationnel) que l'on a:  $r = \chi_{\text{top}}(X) - 4$ . On reconnaît là le classique invariant de Zeuthen-Segre (noté d'habitude  $I$ ). Il résulte d'autre part d'un lemme de Manin (cf. 3.2 ci-dessous) que pour  $(X, C, \varphi)$  comme dans la définition,  $\bar{\varphi}: \bar{X} \rightarrow \bar{C}$  est lisse en dehors d'un nombre fini de points fermés de  $\bar{X}$ . On peut déduire de tout cela, et de  $\chi_{\text{top}}(C)\chi_{\text{top}}(X_\eta) = 4$  (on note  $X_\eta$  la fibre générique de  $\varphi$ ), que – au moins en caractéristique zéro –  $r$  est le nombre de points de  $\bar{X}$  où  $\bar{\varphi}$  n'est pas lisse (i.e. le nombre de points singuliers des fibres dégénérées – il faut aussi utiliser que les fibres dégénérées sont des réunions de courbes à croisements normaux, du type:

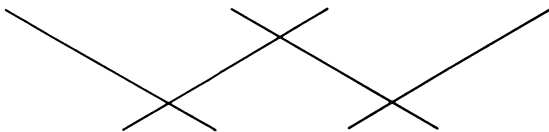


Fig. 1.

ce qui résulte du lemme de Manin).

Iskovskih obtient d'ailleurs ce résultat par une méthode directe ([9]). Ceci explique pourquoi  $r$  est positif ou nul. Remarquons que le même lemme de Manin montre que, pour  $X$  *standard*,  $r$  est le nombre de fibres dégénérées.

### 1.3. Énoncé du théorème A; corollaires

**THÉORÈME A:** Soit  $\varphi: X \rightarrow C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, d'invariant  $r$ . Alors, si  $C(k)$  est non vide, i.e.  $C \simeq \mathbb{P}^1_k$ :



(a) Pour  $A \in S^\nu X$ ,  $B \in S^{\nu_0} X$  et  $\nu > \max(\nu_0 - 1, [r/2] + 2\nu_0 - 3)$ , il existe un 0-cycle effectif  $A^+$  tel que  $A \approx B + A^+$ .

(b) Soit  $B_0 \in S^2 X$  un 0-cycle effectif de degré 2, dont le support est contenu dans une fibre de  $\varphi$  au-dessus d'un  $k$ -point de  $C$ ; pour  $A \in S^\nu X$  et  $\nu > \max(1, [r/2])$ , il existe  $A^+ \in Z_0^+(X)$  tel que  $A \approx B_0 + A^+$ .

**COROLLAIRE 1 (THÉORÈME C):** Soit  $\varphi: X \rightarrow C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, d'invariant  $r$ , avec  $C(k) \neq \emptyset$ . Alors  $X$  satisfait  $(P_s)$ , avec  $s = \max(0, [r/2] - 1)$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $Q \in S^2 X$  un 0-cycle effectif de degré 2, dont le support est contenu dans une fibre de  $\varphi$  au-dessus d'un  $k$ -point de  $C$  (il existe bien de tels 0-cycles; par exemple, puisque  $k$  est infini, il existe  $P \in C(k)$  tel que  $\varphi^{-1}(P)$  est une  $k$ -conique lisse, sur laquelle on trouve un 0-cycle du type voulu). Etant donné un 0-cycle  $R$  et un entier naturel  $\mu$ , on pose  $R(\mu) = R + \mu Q$ . Soit  $A$  dans  $Z_0(X)$ , de degré  $n \geq s$ , et écrivons  $A = A^+ - B^+$ , avec  $A^+, B^+ \in Z_0^+(X)$ . Considérons l'assertion:

$(\mathcal{A}_\mu)$  Il existe un 0-cycle effectif rationnellement équivalent à  $A(\mu)$ .

Comme on a:  $\deg(A^+(\mu)) = \deg(A^+) + 2\mu$ , il résulte du théorème A (a), appliqué aux 0-cycles effectifs  $A^+(\mu)$  et  $B^+$ , que, pour  $\mu$  assez grand, il existe un 0-cycle effectif  $A_\mu^+$  tel que  $A^+(\mu) \approx B^+ + A_\mu^+$ , et donc  $A(\mu) = A^+(\mu) - B^+ \sim A_\mu^+$ . Ainsi, pour  $\mu$  assez grand, on a  $(\mathcal{A}_\mu)$ .

Soit  $\mu \geq 1$ , et supposons que l'on ait  $(\mathcal{A}_\mu)$ . Soit  $A_\mu^+ \in Z_0^+(X)$  tel que  $A_\mu^+ \sim A(\mu)$ . On a:  $\deg(A_\mu^+) = \deg(A(\mu)) = n + 2\mu \geq s + 2 > s + 1 = \max(1, [r/2])$ . Le théorème A (b), appliqué à  $Q$  et  $A_\mu^+$  montre qu'il existe  $A_{\mu-1}^+ \in Z_0^+(X)$  tel que  $A_\mu^+ \approx Q + A_{\mu-1}^+$ , donc  $A_{\mu-1}^+ \sim A_\mu^+ - Q \sim A(\mu) - Q = A(\mu - 1)$ .

On a vu que l'on a  $(\mathcal{A}_\mu)$  pour  $\mu$  assez grand, et on vient de montrer que, pour  $\mu \geq 1$ ,  $(\mathcal{A}_\mu)$  entraîne  $(\mathcal{A}_{\mu-1})$ . Par récurrence descendante, on a donc  $(\mathcal{A}_0)$ , c'est-à-dire que  $A = A(0)$  est rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif. ■

**COROLLAIRE 2:** Supposons  $X(k) \neq \emptyset$ . Alors  $\tilde{A}_0(X)$  est de dimension finie  $n_0 \leq \max(0, [r/2] - 1)$ .

**DÉMONSTRATION:** On a vu en effet (§1.1) que, si  $X(k)$  est non vide et si  $X$  satisfait  $(P_s)$ , on a  $n_0 \leq s$ . ■

**COROLLAIRE 3 (THÉORÈME B):** Soit  $\varphi: X \rightarrow C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, d'invariant  $r$ , satisfaisant (h), c'est-à-dire ici possédant un point fermé de degré résiduel impair. Alors il

existe sur  $X$  un point fermé de degré résiduel au plus 2, et un point fermé de degré résiduel impair  $\leq \max(1, [r/2])$ .

DÉMONSTRATION: Comme l'image par  $\varphi$  d'un point fermé  $P$  de  $X$  est un point fermé de  $C$  dont le degré résiduel divise celui de  $P$ , si  $X$  satisfait (h), il en est de même de  $C$ ; comme  $C$  est une  $k$ -courbe rationnelle, propre et lisse, on a donc (cf. introduction)  $C(k) \neq \emptyset$ . La première assertion est alors immédiate (voir le début de la démonstration du corollaire 1 ci-dessus). La condition (h') permet par ailleurs de construire sur  $X$  un 0-cycle de degré impair égal à  $s = \max(0, [r/2] - 1)$  ou à  $s + 1$ . D'après le corollaire 1, ce 0-cycle est rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif, de degré impair  $\leq s + 1 = \max(1, [r/2])$ . L'un au moins des points fermés du support de ce 0-cycle a son degré résiduel impair – et évidemment inférieur ou égal à  $\max(1, [r/2])$ . ■

COROLLAIRE 4: *Pour les  $k$ -surfaces rationnelles fibrées en coniques d'invariant  $r \leq 5$ , la question (Q) de l'introduction a une réponse affirmative.*

En effet, dans ce cas,  $[r/2] < 3$ .

REMARQUES:

1. Dans le cas  $r$  impair, l'hypothèse (h) est toujours vérifiée: les  $r$  points singuliers des fibres dégénérées de  $\bar{\varphi}$  forment un 0-cycle effectif de  $\bar{X}$  stable par  $\mathcal{G}$ , et de  $\bar{k}$ -degré impair, ce qui définit un 0-cycle effectif de  $X$  de  $k$ -degré impair, et implique l'existence d'un point fermé de degré résiduel impair: dans ce cas, on a toujours  $C \simeq \mathbf{P}_k^1$ , et la conclusion du corollaire 3. En particulier, pour  $r = 1, 3, 5$ , on a toujours  $X(k) \neq \emptyset$ .

2. Dans le cas  $r \leq 3$ , on peut aussi utiliser les résultats d'Iskovskih ([10], théorème 2: observer que dans le cas  $(\omega \cdot \omega) = 6$ , le  $G$ -morphisme de l'énoncé est birationnel) pour établir le résultat du corollaire 4.

3. Dans le cas  $r = 5$ , on peut aussi voir par un argument simple utilisant un diviseur effectif sur  $X$  de classe  $(-\omega)$  que  $X(k)$  est non vide.

4. On peut donner une démonstration directe du théorème B, i.e. n'utilisant pas l'équivalence rationnelle sur  $X$ , mais seulement sur les courbes tracées sur  $X$ , suivant la méthode de [3]. Disons ici seulement que la méthode consiste, étant donné un point fermé  $P$  de degré impair  $d > \max(1, [r/2])$ , à faire passer par  $P$  un diviseur effectif de classe  $\ell_d$  (cf. §3), qui est possible, et à faire ensuite une descente du

degré sur ce diviseur. Comme dans [3], §7, et [4], il y a un certain nombre de cas dégénérés à examiner. Comme ce découpage en cas correspond à peu près à celui qui sera fait au §4, nous n'avons pas jugé utile de donner ici cette démonstration.

## 2. Lemmes généraux sur l'équivalence rationnelle

**LEMME 2.1:** *Soit  $X$  une  $k$ -variété intègre régulière en codimension 1 (par exemple normale), de dimension  $d$ . Si deux diviseurs de Weil effectifs  $A, B \in Z_{d-1}^+(X)$  sont rationnellement équivalents, ils sont effectivement liés, et a fortiori  $A \approx B$ .*

**DÉMONSTRATION:** Pour  $C$  dans  $Z_{d-1}^+(X)$ , et  $A$  et  $B$  diviseurs effectifs,  $A$  effectivement lié à  $B$  implique  $A + C$  effectivement lié à  $B + C$ . On peut donc supposer  $A$  et  $B$  étrangers (i.e., pour  $C \in Z_{d-1}^+(X)$ ,  $A - C$  et  $B - C \in Z_{d-1}^+(X)$  entraîne  $C = 0$ ) et non tous deux nuls. D'après [7], 1.8, Corollaire, il existe  $f$ , fonction rationnelle sur  $X$  telle que  $A - B = [\text{div}_X(f)]$ . Soit  $U \subset X$  l'ouvert de  $X$  où  $f: X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1$  est morphique. Comme  $X$  est régulière en codimension 1, cet ouvert contient tous les points de codimension 1 de  $X$ . Notons  $Y \hookrightarrow X \times_k \mathbb{P}_k^1$  l'adhérence du graphe de  $f$  dans  $U \times_k \mathbb{P}_k^1$ , notons  $p: Y \rightarrow X$  le  $k$ -morphisme propre birationnel induit par la première projection, et  $q: Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  le  $k$ -morphisme dominant induit par la seconde projection; la fonction rationnelle sur  $Y$  définie par  $q$ , encore notée  $q$ , coïncide, via le morphisme birationnel  $p$ , avec  $f$ . D'après [7], 1.5, Proposition 1 (1), on a:

$$p_*([\text{div}_Y(q)]) = [\text{div}_X(f)]$$

Par ailleurs, comme  $q: Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  est plat, on a, d'après [7], 1.6, Proposition (1):

$$[\text{div}_Y(q)] = [q^{-1}(0)] - [q^{-1}(\infty)]$$

On a donc obtenu:

$$A - B = p_*([q^{-1}(0)] - [q^{-1}(\infty)])$$

et il existe donc  $C_1$  et  $C_2$  étrangers dans  $Z_{d-1}^+(X)$  tels que:

$$A + C_1 - C_2 = p_*([q^{-1}(0)])$$

$$B + C_1 - C_2 = p_*([q^{-1}(\infty)])$$

Comme ces diviseurs sont effectifs, et que  $C_1$  et  $C_2$  sont étrangers,  $A - C_2$  et  $B - C_2$  sont effectifs, ce qui,  $A$  et  $B$  étant étrangers, implique  $C_2 = 0$ . Par ailleurs,  $p$  induit un isomorphisme entre  $p^{-1}(U)$  et  $U$ : ainsi un sous-schéma fermé intègre  $V$  de dimension  $d - 1$  contenu dans  $Y - p^{-1}(U)$  a une image par  $p$  incluse dans  $X - U$ , qui est de dimension au plus  $d - 2$ , ce qui, par définition de  $p_*$ , implique  $p_*([V]) = 0$ , et de plus  $p_*$  définit une bijection entre  $Z_{d-1}(p^{-1}(U))$  et  $Z_{d-1}(U) = Z_{d-1}(X)$ . Ceci implique,  $[q^{-1}(0)]$  et  $[q^{-1}(\infty)]$  étant étrangers, que leurs images par  $p_*$  le sont, donc  $C_1 = 0$ , et on a fini. ■

LEMME 2.2: *Soit  $p: X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme propre de  $k$ -variétés. Si deux cycles  $A, B \in Z_d^+(X)$  sont effectivement liés (resp. effectivement équivalents), il en est de même de  $p_*(A)$  et  $p_*(B)$  sur  $Y$ .*

DÉMONSTRATION: Cela résulte immédiatement de la définition et de la functorialité de  $p_*$  ([7], 1.2). ■

LEMME 2.3 (Définition équivalente de l'équivalence effective): *Deux  $d$ -cycles effectifs  $A$  et  $B$  de la  $k$ -variété  $X$  sont effectivement liés si et seulement si il existe un  $(d + 1)$ -cycle effectif  $W = \sum n_i V_i$  de  $X \times_k \mathbb{P}_k^1$ , où les  $k$ -morphisms  $V_i \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  induits par la seconde projection sont plats (i.e., ici, dominants), tel que:*

$$\begin{aligned} A &= p_*(W \cdot_q [0]) \\ B &= p_*(W \cdot_q [\infty]) \end{aligned}$$

où  $p$ , resp.  $q$ , est la projection de  $X \times_k \mathbb{P}_k^1$  sur le premier, resp. second, facteur.

DÉMONSTRATION: Cf. [7], 2.1, Proposition. ■

LEMME 2.4: *Soit  $f: X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme de  $k$ -variétés, avec  $Y$  régulier. Soient  $A$  et  $B$  deux  $d$ -cycles effectifs de  $Y$  tels que  $f^*A$  et  $f^*B$  soient définis ([7], 2.1:  $[X]$  et  $A$ , resp.  $B$ , se coupent proprement le long de  $f$ ). Alors, si  $A$  et  $B$  sont effectivement liés (sur  $Y$ ), il en est de même de  $f^*A$  et  $f^*B$  sur  $X$ .*

DÉMONSTRATION: Adapter celle de [7], 2.3 Proposition (1), en utilisant le lemme 2.3 ci-dessus. ■

Soit  $X$  une  $k$ -surface régulière,  $P$  un point fermé de  $X$  de corps résiduel  $K$ ,  $p: Y \rightarrow X$  l'éclatement de  $X$  en  $P$ . La fibre  $E = p^{-1}(P)$  est un  $K$ -schéma isomorphe à  $\mathbb{P}_K^1$ .

LEMME 2.5: Pour  $p: Y \rightarrow X$  comme ci-dessus, et  $A$  et  $B$  dans  $Z_0^+(Y)$ , si l'on a  $p_*(A) \approx_X p_*(B) + C_1$ , avec  $C_1 \in Z_0^+(X)$ , alors il existe  $C_2 \in Z_0^+(Y)$  tel que:

$$A \underset{Y}{\approx} B + C_2$$

Pour la démonstration, nous définissons par linéarité une application  $p^*: Z_0(X) \rightarrow Z_0(Y)$  de la façon suivante: on fixe un point  $Q$  de  $E(K) = \mathbb{P}_K^1(K)$ , et pour  $M$  point fermé de  $X$ , on définit  $p^*(M) = p^{-1}(M)$  si  $M \neq P$ , et  $p^*(P) = Q$ . Il est clair que  $p^*$  transforme 0-cycles effectifs en 0-cycles effectifs. On a alors:

LEMME 2.5.1.: Soient  $A$  et  $B$  dans  $Z_0^+(X)$ , avec  $A \approx_X B$ . Alors  $p^*(A) \approx_Y p^*(B)$ .

DÉMONSTRATION DE 2.5 À PARTIR DE 2.5.1.

Soit  $A = A_0 + A_1$ , avec  $A_0$  à support étranger à  $E$  et  $A_1$  à support dans  $E$ . On a:

$$p_*(A) = p_*(A_0) + \deg_K(A_1)P$$

donc:

$$p^*p_*(A) = A_0 + \deg_K(A_1)Q.$$

Et comme, sur  $E \approx \mathbb{P}_K^1$ , on a:  $A_1 \approx_E \deg_K(A_1)Q$  (Riemann-Roch et lemme 2.1) donc, sur  $Y$ :  $A_1 \approx_Y \deg_K(A_1)Q$  (via lemme 2.2), on en tire:

$$(1) \quad p^*p_*(A) \underset{Y}{\approx} A$$

De l'hypothèse du lemme 2.5 résulte, via 2.5.1:

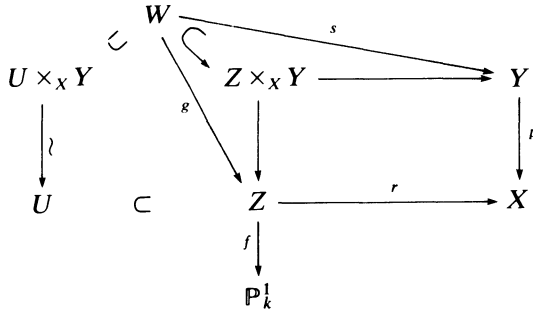
$$p^*p_*(A) \underset{Y}{\approx} p^*p_*(B) + p^*(C_1)$$

Appliquant (1) à  $A$  et  $B$ , et posant  $C_2 = p^*(C_1)$ , on conclut.

DÉMONSTRATION DE 2.5.1: Par linéarité (à partir de la définition donnée en 1.1), il suffit de montrer: Soit  $Z$  une  $k$ -variété intègre de dimension 1,  $r: Z \rightarrow X$  un  $k$ -morphisme propre,  $f: Z \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  un  $k$ -morphisme fini localement libre. Alors:

$$(1) \quad p^*(r_*([f^{-1}(0)])) \cong p^*(r_*([f^{-1}(\infty)]))$$

si l'image de  $r$  est le point  $P$ , ceci est clair, car  $r_*([f^{-1}(0)])$  et  $r_*([f^{-1}(\infty)])$  sont égaux à un même multiple de  $P$ . Supposons donc l'ouvert  $U$  de  $Z$ , image réciproque de  $X - P$  par  $r$ , non vide, et considérons le diagramme:



où  $W$  est le sous-schéma fermé intègre de  $Z \times_X Y$  adhérence de  $U \times_X Y$ , où  $s$  et  $g$  sont les flèches composées évidentes; notons de plus  $h = f \circ g$ . Le morphisme  $h: W \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  est fini localement libre (car  $W$  est intègre et  $h$  est propre et quasi-fini), et de même rang que  $f$ , puisque  $g$  induit un isomorphisme  $g^{-1}(U) \cong U$ . Si l'on a:

$$(2) \quad \begin{aligned} r_*([f^{-1}(0)]) &= A_0 + nP && \text{avec } \text{supp}(A_0) \subset X - P \\ r_*([f^{-1}(\infty)]) &= A_1 + mP && \text{avec } \text{supp}(A_1) \subset X - P \end{aligned}$$

on a:

$$(3) \quad \begin{aligned} s_*([h^{-1}(0)]) &= p^*(A_0) + Q_0 && \text{avec } \text{supp}(Q_0) \subset E \\ s_*([h^{-1}(\infty)]) &= p^*(A_1) + Q_1 && \text{avec } \text{supp}(Q_1) \subset E \end{aligned}$$

De plus, comme  $f$  et  $h$  sont finis localement libres de même rang, il résulte des égalités ci-dessus, par comparaison des  $k$ -degrés, que l'on a:

$$\text{deg}_k(Q_0) = \text{deg}_k(nP) = \text{deg}_k(nQ)$$

où  $Q$  est le point de  $E(K)$  fixé au début. On a donc  $\text{deg}_K(Q_0) = \text{deg}_K(nQ)$ , d'où  $Q_0 \cong_E nQ$ , donc (2.2)  $Q_0 \cong_Y nQ = p^*(nP)$ , et de même

$Q_1 \approx_Y p^*(mP)$ . On a donc:

$$p^*(A_0 + nP) \approx_Y p^*(A_0) + Q_0 \approx_Y p^*(A_1) + Q_1 \approx_Y p^*(A_1 + mP)$$

où la deuxième équivalence est obtenue via (3) et le système  $(W, h, s)$ . Compte tenu de (2), ceci achève de prouver (1). ■

### 3. Surfaces rationnelles fibrées en coniques

Etant donnée  $X$  une  $k$ -surface propre et lisse, l'application composée  $A_1X \times A_1X \rightarrow A_0X \xrightarrow{\text{deg}_k} Z$  (où la première flèche est définie via [7], §2, ou en adaptant sur un corps quelconque [15], Lecture 12) définit une forme bilinéaire, notée  $(\cdot)$  sur  $A_1X = \text{Pic } X$ , donc aussi sur  $\text{Div } X$ , et on vérifie que cette forme est invariante par changement de corps de base.

On note  $\omega \in \text{Pic } X$  la classe canonique. Etant donné  $\ell$  dans  $\text{Pic } X$ , et  $D \in \text{Div } X$  tel que  $\ell =$  classe de  $\mathcal{O}_X(D)$ , on définit classiquement:

$$p_a(D) = p_a(\ell) = \frac{(\ell, (\ell + \omega))}{2} + 1$$

LEMME 3.1. (a) (formel) Pour  $D_1$  et  $D_2$  dans  $\text{Div } X$ , on a :

$$p_a(D_1 + D_2) = p_a(D_1) + p_a(D_2) + (D_1, D_2) - 1$$

(b) (Riemann-Roch) Soit  $D$  un diviseur de Cartier effectif sur  $X$ , définissant une courbe  $D$ . On a :

$$h^1(D, \mathcal{O}_D) = p_a(D) + h^0(D, \mathcal{O}_D) - 1$$

En particulier, pour  $D/k$  géométriquement intègre, on a  $p_a(D) = h^1(D, \mathcal{O}_D)$ .

Cf. [15], Lectures 11, 12.

LEMME 3.2 (Manin, [12], 1.6): Soit  $X \xrightarrow{\varphi} C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques, standard (cf. 1.2). Pour  $P \in C(\bar{k})$ , la fibre de  $\bar{\varphi}$  en  $P$  est soit une  $\bar{k}$ -courbe rationnelle propre et lisse, soit (comme diviseur sur  $\bar{X}$ ) de la forme  $Y + Z$ , avec  $Y$  et  $Z$  deux courbes exceptionnelles de première espèce sur  $\bar{X}$  satisfaisant  $(Y, Z) = 1$ , et transformées l'une de l'autre par un élément de  $\mathcal{G}$ .

On désigne dans la suite de ce paragraphe par  $X$ , ou  $X \xrightarrow{\varphi} C$ , une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques.

**LEMME 3.3:** *Soit  $D \in \text{Div } \bar{X}$  un diviseur effectif, et soit  $F \in \text{Div } \bar{X}$  une fibre de  $\bar{\varphi}$  au-dessus d'un point de  $C(\bar{k})$ . Alors  $(D.F) \geq 0$ , l'égalité ayant lieu si et seulement si  $D$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de composantes de fibres de  $\bar{\varphi}$ .*

C'est clair, car deux fibres quelconques de  $\bar{\varphi}$  définissent des diviseurs linéairement équivalents sur  $\bar{X}$ .

**LEMME 3.4:** *Supposons  $X \xrightarrow{\varphi} C$  standard. Soit  $F$  comme dans 3.3, et  $D \in \text{Div } X$  un diviseur effectif tel que  $(\bar{D}.F) = 0$ . Alors  $\bar{D}$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de fibres de  $\bar{\varphi}$ , donc  $D$  est une combinaison linéaire à coefficients positifs de fibres de  $\varphi$  au-dessus de points fermés de  $C$ .*

**DÉMONSTRATION:** Ecrivons  $\bar{D} = \sum n_i C_i$  avec chaque  $n_i > 0$  et chaque  $C_i$  intègre. Du lemme 3.3 et de  $(\bar{D}.F) = 0$  résulte que chaque  $C_i$  est une composante d'une fibre de  $\bar{\varphi}$ . C'est donc (lemme 3.2) soit une fibre de  $\bar{\varphi}$ , auquel cas il n'y a rien à prouver, soit une composante irréductible  $Y$  d'une fibre dégénérée. Comme  $\bar{D}$  est laissé fixe par  $\mathcal{G}$ , il résulte de 3.2 que  $Z$  (notation de 3.2), qui est conjugué de  $Y$  par  $\mathcal{G}$ , apparaît dans la décomposition de  $\bar{D}$  avec la même multiplicité que  $Y$ , ce qui achève la démonstration. ■

Dans le groupe  $\text{Pic } \bar{X}$ , on note  $f$  la classe d'une fibre  $F$  de  $\bar{\varphi}$ , et on note  $\ell_d = -\omega + (d-3)f$ , pour  $d \in \mathbb{Z}$ .

- LEMME 3.5:** (a)  $(\ell_d.f) = 2$   
 (b)  $p_a(\ell_d) = d - 2$   
 (c)  $h^0(\ell_d) \geq 3d - r$ .

**DÉMONSTRATION:** (a) résulte de  $p_a(f) = 0$  et  $(f.f) = 0$ , donc  $(f.\omega) = -2$  (une fibre non dégénérée est lisse de genre zéro, et deux fibres distinctes ne se coupent pas). Le point (b) est un calcul immédiat. Le théorème de Riemann-Roch donne  $\chi(\ell_d) = 3d - r$ . La dualité de Serre donne:  $h^2(-\omega + (d-3)f) = h^0(2\omega - (d-3)f)$ , et ce dernier nombre est nul, comme le montrent le lemme 3.3 et la relation

$$((2\omega - (d-3)f).f) = -4 < 0. \quad \blacksquare$$



LEMME 3.6: Si  $\ell \in \text{Pic } \bar{X}$  satisfait  $(\ell.f) = 2$ , on a, pour tout  $b \in \mathbb{Z}$ :

$$p_a(\ell + bf) = p_a(\ell) + b$$

DÉMONSTRATION: On utilise  $(f.f) = 0$  et  $(f.\omega) = -2$ . ■

LEMME 3.7: Soit  $X \xrightarrow{\varphi} C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques standard, soit  $P$  un point fermé de  $C$ , et  $F = \varphi^{-1}(P)$  la fibre (schématique) de  $\varphi$  en  $P$ . Soient  $A$  et  $B$  deux 0-cycles effectifs sur  $F$  tels que  $\deg_k(A) \geq \deg_k(B)$ . Il existe alors un 0-cycle effectif  $A^+$  de  $F$  tel que:

$$A \underset{F}{\approx} B + A^+$$

Notons  $K$  le corps résiduel de  $P$ . La fibre  $F$  est une  $K$ -variété, et aussi une  $k$ -variété via  $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } k$ , et c'est ainsi qu'est défini le  $k$ -degré d'un 0-cycle  $A$  sur  $F$ ; comme on a  $\deg_k(A) = [K:k] \deg_K(A)$ , l'hypothèse équivaut à:  $\deg_K(A) \geq \deg_K(B)$ . Notons de plus que  $F$  est un sous-schéma fermé de  $X$ , si bien que la conclusion implique (lemme 2.2):

$$A \underset{X}{\approx} B + A^+$$

DÉMONSTRATION DU LEMME: Il résulte du lemme 3.2 le choix suivant:

(a)  $F/K$  est une  $K$ -courbe rationnelle propre et lisse sur  $K$ . L'hypothèse  $\deg_K(A) \geq \deg_K(B)$  entraîne (Riemann) l'existence d'un 0-cycle effectif  $A^+$  sur  $F$  tel que  $A - B \sim_F A^+$ , donc  $A \sim_F B + A^+$ , donc (lemme 2.1)  $A \underset{F}{\approx} B + A^+$ .

(b) La  $\bar{K}$ -courbe  $F \times_K \bar{K}$  est la réunion de deux  $\bar{K}$ -courbes isomorphes à  $\mathbb{P}_{\bar{K}}^1$ ; plus précisément, il existe une extension quadratique  $L$  de  $K$ , un  $K$ -point  $x$  de  $F$ , un  $K$ -morphisme propre  $p: \mathbb{P}_L^1 \rightarrow F$ , un  $L$ -point  $y$  de  $\mathbb{P}_L^1$ , tels que  $y = p^{-1}(x)$  (au sens schématique), et  $p$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{P}_L^1 - y$  sur  $F - x$ : voir figure 2.

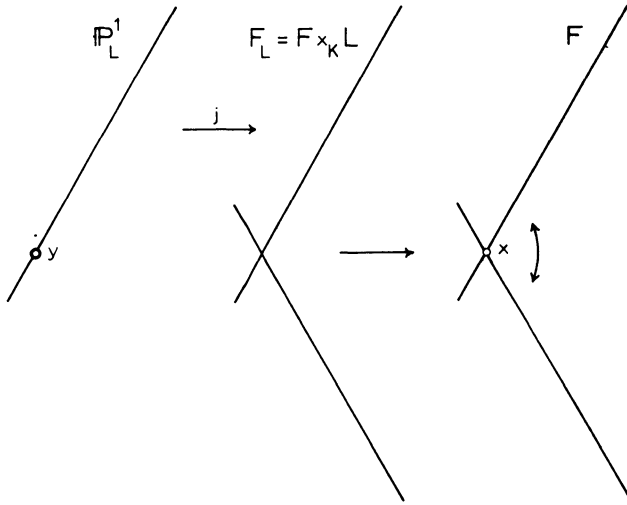


Fig. 2

( $p$  est l'application composée de  $j$ , qui identifie  $\mathbb{P}_L^1$  à une composante de  $F_L$ , et de la projection naturelle  $F_L \rightarrow F$ ; plutôt que  $F$ , on a représenté  $F \times_k \bar{k}$ .)

Ceci implique, au niveau des 0-cycles sur  $\mathbb{P}_L^1$  et  $F$ :

$$(1) \quad p_*([y]) = 2[x]$$

et tout 0-cycle (effectif) sur  $F$  à support hors de  $x$  est image par  $p_*$  d'un 0-cycle (effectif) sur  $\mathbb{P}_L^1$  à support hors de  $y$ .

Soit  $A$  un 0-cycle effectif sur  $F$ . On peut donc écrire:

$$(2) \quad A = A_1 + n[x] = p_*(A_2) + n[x]$$

avec  $A_1$  effectif à support hors de  $x$ ,  $n \geq 0$ , et  $A_2$  effectif sur  $\mathbb{P}_L^1$ . Sur  $\mathbb{P}_L^1$ , on a:  $A_2 \approx \text{deg}_L(A_2)[y]$ , donc via le lemme 2.2 et la formule (1):

$$p_*(A_2) \approx \text{deg}_L(A_2)p_*([y]) = 2 \text{deg}_L(A_2)[x]$$

De  $A_1 = p_*(A_2)$  on tire:  $\text{deg}_K(A_1) = \text{deg}_K(A_2) = 2 \text{deg}_L(A_2)$ , ce qui, joint à (2) et à l'équivalence précédente, montre:  $A \approx_F \text{deg}_K(A)[x]$ . Ap-

pliquant ceci à  $A$  et  $B$ , on obtient:

$$A \underset{F}{\approx} B + (\deg_K A - \deg_K B)[x]. \blacksquare$$

LEMME 3.8: Soit  $X \xrightarrow{\varphi} C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques standard; soit  $D$  un diviseur effectif sur  $X$ , sans composantes verticales, et tel que  $(\bar{D}.f) = 2$ . Soient  $A \in S^v D$  et  $B \in S^{v_0} D$  deux 0-cycles effectifs. Si l'on a  $v - v_0 \geq \max(0, p_a(D))$ , il existe un 0-cycle effectif  $A^+ \in S^{v-v_0} D$  tel que  $A \approx_X B + A^+$ .

REMARQUE PRÉLIMINAIRE: Précisons qu'on appelle ici composante verticale une composante de  $\text{supp}(D)$  dont l'image par  $\varphi$  est un point fermé de  $C$ . L'hypothèse équivaut donc à: le morphisme  $p: D \rightarrow C$  induit par  $\varphi$  est fini localement libre de rang 2. En particulier, soit  $Q$  un point fermé de  $C$ . Le 0-cycle  $p^*([Q])$  sur  $D$  et le 0-cycle  $D \cdot_{\varphi} [Q]$  sur  $X$  s'identifient au 0-cycle associé au sous-schéma fermé  $p^{-1}(Q)$  de  $D$  (donc de  $X$ ). Si  $P$  est un point fermé de  $D$  d'image  $Q$ , on a donc les possibilités:

- (i)  $p^*([Q]) = [P], [k(P): k(Q)] = 2$
- (ii)  $p^*([Q]) = [P] + [P'], P \neq P', [k(P): k(Q)] = [k(P'): k(Q)] = 1$
- (iii)  $p^*([Q]) = 2[P], [k(P): k(Q)] = 1$

et (iii) équivaut à  $p$  non étale en  $P$ , ce qui est en particulier le cas si  $P$  n'est pas un point régulier de  $D$ .

La figure 3 décrit les différentes possibilités:

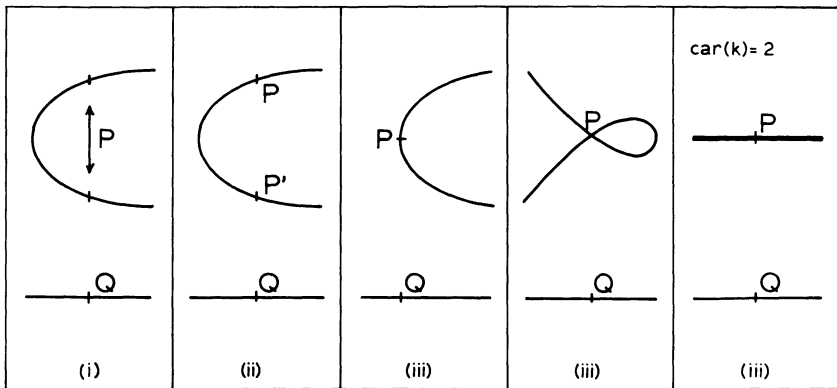


Fig. 3.

DÉMONSTRATION:

Supposons établi le cas où  $B$  est un point fermé de  $D$ . Pour

$B = B_1 + B_2$ , avec  $B_1$  point fermé et  $B_2$  effectif, posons  $\nu_i = \text{deg}(B_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Comme on a  $\nu - \nu_1 \geq \nu - \nu_0$ , on peut écrire  $A \approx_X B_1 + A^+$ , avec  $A^+ \in S^{\nu^+}D$ , pour  $\nu^+ = \nu - \nu_1$ . Comme  $\nu^+ - \nu_2 = \nu - \nu_0$ , on peut répéter ce raisonnement avec  $A^+$ , en décomposant  $B_2$ . On peut donc se limiter au cas  $B$  point fermé.

Commençons par établir le cas où la courbe  $D$  n'est pas intègre, ce qui, vu le lemme 3.3, correspond à une décomposition du diviseur  $D$  de la forme  $D = D_1 + D_2$  (avec éventuellement  $D_1 = D_2$ ), avec  $(\bar{D}_i.f) = 1$  pour  $i = 1, 2$ . Les flèches  $D_i \rightarrow C$  induites par  $\varphi$  sont donc des isomorphismes. Il résulte alors du lemme 3.7 que tout point fermé de  $D_2$  est effectivement équivalent sur  $X$  au point fermé de  $D_1$  ayant même image par  $\varphi$  que lui. Ceci permet de supposer  $A$  et  $B$  à supports dans  $D_1$ . Comme  $D_1$  est une  $k$ -courbe rationnelle propre et lisse, et que l'on a  $\text{deg}(A) \geq \text{deg}(B)$ , via Riemann et 2.1, on trouve  $A^+ \in Z_0^+(D_1)$  tel que  $A \approx_{D_1} B + A^+$ , et, via 2.2, on obtient  $A \approx_X B + A^+$ , avec  $A^+ \in Z_0^+(D)$ . Dans la suite, on suppose donc  $D$  intègre. On peut bien entendu supposer que les supports de  $A$  et  $B$  sont disjoints. Ecrivons  $A = A_1 + A_2$ , somme de deux 0-cycles effectifs, où le support de  $A_2$  est inclus dans le lieu singulier (non régulier) de  $D$ , alors que celui de  $A_1$  en est disjoint. D'après les remarques préliminaires, si  $P$  est un point singulier de  $D$ , d'image par  $\varphi$  le point fermé  $Q$  de  $C$ , on a :  $p^*([Q]) = 2[P]$ . En utilisant le lemme 2.4 (appliqué à  $p : D \rightarrow C$ ), le fait que  $C$  est de genre zéro et que  $k$  est infini, on en déduit que  $2[P]$  est effectivement équivalent, sur  $D$ , à un 0-cycle effectif à support disjoint du support de  $B$  et du lieu singulier de  $D$ . On peut donc supposer que tout point fermé  $R$  contenu dans  $A_2$  a pour coefficient 1. Notons  $\nu_i = \text{deg}(A_i)$  ( $i = 1, 2$ ).

CAS 1:  $\bar{D}$  intègre.

Posons  $\epsilon = 0$  ou 1 suivant que  $B$  est régulier ou non sur  $D$ . Il résulte des mêmes arguments que ci-dessus que, sur  $D$ ,  $(1 + \epsilon)B$  est effectivement équivalent à un 0-cycle effectif  $B'$  à support étranger au lieu singulier de  $D$  (prendre  $B' = B$  si  $B$  est régulier).

Soit  $Y \xrightarrow{a} D$  la normalisation de  $D$ . On va utiliser: s'il existe sur  $D$  un 0-cycle effectif  $\sum_i P_i$ , où les  $P_i$  sont des points fermés deux à deux distincts et singuliers sur  $D$ , alors:

$$h^1(Y, \mathcal{O}_Y) \leq h^1(D, \mathcal{O}_D) - \text{deg}_k \left( \sum_i P_i \right) = p_a(D) - \text{deg}_k \left( \sum_i P_i \right)$$

(pour l'égalité, voir 3.1(b); en fait, on sait bien qu'il existe des inégalités plus précises, faisant intervenir les multiplicités, mais celle mentionnée nous suffit).

Vu les hypothèses sur  $A_1, A_2, B$ , on a donc:

$$\begin{aligned} h^1(Y, \mathcal{O}_Y) &\leq p_a(D) - \epsilon\nu_0 - \nu_2 \leq \nu - \nu_0 - \epsilon\nu_0 - \nu_2 \\ &= \nu_1 - (1 + \epsilon)\nu_0 = \deg_k(q^*(A_1) - q^*(B')) \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de ce que  $q$  induit un isomorphisme  $q^{-1}(D_{\text{reg}}) \xrightarrow{\sim} D_{\text{reg}}$ , ce qui permet de définir de façon évidente  $q^*$  sur les 0-cycles à support dans  $D_{\text{reg}}$ . En utilisant l'inégalité de Riemann sur la courbe régulière  $Y$ , et en utilisant 2.1, on trouve  $C_1 \in Z_0^+(Y)$  tel que

$$q^*(A_1) \underset{Y}{\approx} q^*(B') + C_1$$

donc, posant  $C_2 = q_*(C_1)$ , et appliquant 2.2 à  $q: Y \rightarrow D$ :

$$A_1 = q_*(q^*(A_1)) \underset{D}{\approx} q_*(q^*(B')) + C_2 = B' + C_2 \underset{D}{\approx} (1 + \epsilon)B + C_2$$

ce qui implique:

$$A = A_1 + A_2 \underset{D}{\approx} B + (\epsilon B + A_2 + C_2)$$

donc aussi l'équivalence effective sur  $X$  (via 2.2).

CAS 2:  $\bar{D}$  non intègre.

De  $(\bar{D}.f) = 2$  résulte que le diviseur  $\bar{D}$  est la somme de deux diviseurs qui sont des  $\bar{k}$ -courbes rationnelles propres et lisses; ces deux diviseurs sont conjugués par  $\mathcal{G}$ , car  $D$  est intègre (et  $k$  parfait). Il existe donc une extension quadratique  $K/k$  telle que  $D_K = D_1 + D_2$ , avec  $D_1$  (et  $D_2$ )  $K$ -isomorphe à  $\mathbb{P}_K^1$ . On dispose donc d'un ( $k$ -)morphisme propre  $q: \mathbb{P}_K^1 \rightarrow D$  (défini via  $\mathbb{P}_K^1 \simeq D_1 \hookrightarrow D_K \rightarrow D$ ), qui possède les propriétés (cf. démonstration du lemme 3.7):  $q$  définit un isomorphisme de  $q^{-1}(D_{\text{reg}})$  avec  $D_{\text{reg}}$ , et, pour  $P$  point singulier de  $D$ , on a:

$$q_*([q^{-1}(P)]) = 2[P]$$

(Notons que l'image réciproque ensembliste par  $q$  du lieu singulier de  $D$  n'est autre que l'intersection de  $D_1$  et  $D_2$ ).

Posons  $\epsilon = 0$  ou 1 suivant que  $B$  est régulier ou non sur  $D$ . On a:

$$(1) \quad (1 + \epsilon)B = q_*([q^{-1}(B)])$$

$$(2) \quad A_1 = q_*(a_1)$$

pour  $a_1$  convenable dans  $Z_0^+(\mathbb{P}_k^1)$ . De 3.1(a) et des hypothèses résulte:

$$\nu - \nu_0 \geq p_a(D) = p_a(D_K) = (D_1, D_2) - 1 \geq \nu_2 + \epsilon \nu_0 - 1$$

donc:

$$(3) \quad \nu_1 \geq (1 + \epsilon)\nu_0 - 1$$

De (1) et (2) on tire:

$$(4) \quad \nu_1 = \deg_k(A_1) = \deg_k(a_1) = 2 \deg_k(a_1)$$

$$(5) \quad (1 + \epsilon)\nu_0 = \deg_k((1 + \epsilon)B) = \deg_k([q^{-1}(B)]) = 2 \deg_k([q^{-1}(B)])$$

Un argument de parité évident montre alors que (3), (4) et (5) impliquent:

$$\deg_k(a_1) \geq \deg_k([q^{-1}(B)])$$

ce qui, via Riemann et 2.1, implique l'existence de  $C_1 \in Z_0^+(\mathbb{P}_k^1)$  tel que:

$$a_1 \underset{\mathbb{P}_k^1}{\approx} [q^{-1}(B)] + C_1$$

donc, via 2.2:

$$A_1 = q_*(a_1) \underset{D}{\approx} q_*([q^{-1}(B)]) + q_*(C_1) = (1 + \epsilon)B + q_*(C_1)$$

donc, en posant  $q_*(C_1) = C_2 \in Z_0^+(D)$ :

$$A = A_1 + A_2 \underset{D}{\approx} B + (\epsilon B + A_2 + C_2)$$

donc aussi, via 2.2, l'équivalence effective sur  $X$ . ■

#### 4. Démonstration du théorème A

Ce théorème a été énoncé au §1.3. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de le démontrer dans le cas où  $\varphi: X \rightarrow C$  est standard. En effet, si  $X$  n'est pas standard, il existe une contraction  $X \xrightarrow{p} X'$ , au-dessus de  $C$ , avec  $X' \rightarrow C$  standard, et l'invariant  $r'$  de  $X'$  est plus petit que l'invariant  $r$  de  $X$ . Comme les  $k$ -degrés des 0-cycles sont respectés

par  $p_*$ , le lemme 2.5 montre que si le théorème vaut pour  $X'$ , il vaut pour  $X$ .

Notons que l'hypothèse  $C(k) \neq \emptyset$  implique que  $f$ , qui a priori est un élément de  $(\text{Pic } \bar{X})^{\mathcal{G}}$ , provient d'un élément de  $\text{Pic } X$ : la classe d'une fibre de  $\varphi$  au-dessus d'un  $k$ -point de  $C$ . On note encore cet élément  $f$ . De même,  $\ell_d = -\omega + (d-3)f \in \text{Pic } X$ .

DÉMONSTRATION DE (a):

Comme, pour  $\mathcal{L} \in \text{Pic } X$ , on a:

$$h^0(\mathcal{L}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}) = \dim_{\bar{k}} H^0(\bar{X}, \bar{\mathcal{L}}) = h^0(\bar{\mathcal{L}})$$

le lemme 3.5 (c) implique:

$$h^0(\ell_{\nu-\nu_0+2}) \geq 3(\nu - \nu_0 + 2) - r > \nu + \nu_0 = \deg_k(A + B)$$

la dernière inégalité provenant de l'hypothèse de (a). On peut donc trouver un diviseur effectif  $D'$  sur  $X$ , de classe  $\ell_{\nu-\nu_0+2}$ , passant par tous les points fermés du support de  $A + B$ . Rappelons (lemme 3.5) que l'on a:  $P_d(D') = \nu - \nu_0$  et  $(D'.f) = 2$ . D'après le lemme 3.4,  $D'$  s'écrit comme une somme:

$$D' = D + \sum_{i=1}^s t_i \Phi_i \quad (t_i \in \mathbb{N})$$

avec  $D$  sans composantes verticales,  $(D.f) = 2$ , et  $\Phi_i = \varphi^{-1}(P_i)$  pour  $P_i$  point fermé de  $C$ . Si  $D' = D$ , la conclusion est apportée par le lemme 3.8. Notre tâche consiste donc à montrer que les composantes verticales ne sont pas gênantes. Pour ce faire, il y a avantage à introduire un opérateur  $*$ , défini comme suit:

Soit  $Q$  un 0-cycle de  $X$ ; soient  $\Psi_1, \dots, \Psi_h$  les fibres de  $\varphi$  au-dessus des points fermés de  $C$  qui sont images par  $\varphi$  des points du support de  $Q$ . On désigne par  $Q^*$  le 0-cycle (de  $D$  ou de  $X$ )  $Q^* = (\Psi_1 + \dots + \Psi_h) \cdot D$ .

Soit  $C_i$  un 0-cycle effectif de  $\Phi_i$ . Posons  $\deg_{k(P_i)}(C_i) = 2\gamma_i + \epsilon_i$  avec  $\epsilon_i = 0$  ou 1. Comme on a:  $\deg_{k(P_i)}(C_i^*) = \deg_{k(P_i)}(\Phi_i \cdot D) = 2$ , il résulte du lemme 3.7 qu'on a:

$$C_i \underset{X}{\approx} \gamma_i C_i^* + R_i$$

où  $R_i$  satisfait:

- (1)  $R_i$  est soit nul, soit défini par un  $k(P_i)$ -point de  $\Phi_i$

(et donc, dans le second cas, on a  $\deg_k(R_i) = \deg_k(P_i)$ ).

Pour  $A \in Z_0^+(D')$ , on peut écrire  $A = A_1 + \sum_{i=1}^s C_i$ , avec  $A_1 \in Z_0^+(D)$ , et  $C_i \in Z_0^+(\Phi_i)$ . D'après ce qui précède, on a:

$$A \underset{X}{\approx} A_1 + \sum_{i=1}^s \gamma_i C_i^* + \sum_{i=1}^s R_i$$

avec  $A_1 + \sum_{i=1}^s \gamma_i C_i^* \in Z_0^+(D)$ , et  $R_i$  (dont on peut si l'on veut supposer le support étranger à  $D$ ) satisfaisant la condition (1). Comme on peut appliquer ceci aussi bien à  $A$  qu'à  $B$ , on voit qu'on peut supposer:

$$A = A_1 + A_2$$

$$B = B_1 + B_2$$

avec  $A_1$  et  $B_1$  dans  $Z_0^+(D)$  et  $A_2 = \sum_{i=1}^s R_i$ ,  $B_2 = \sum_{i=1}^s S_i$ , où  $R_i$ ,  $S_i$  satisfont la condition (1). De plus, si, pour un même  $i$ ,  $R_i$  et  $S_i$  sont simultanément non nuls, ils sont, d'après le lemme 3.7, effectivement équivalents sur  $X$ . On peut donc supposer de plus que, pour  $i$  donné, au moins l'un des  $R_i$ ,  $S_i$ , est nul: en effet, si un couple d'entiers  $(\nu, \nu_0)$  satisfait l'hypothèse (a) du théorème A, pour  $a$  entier positif,  $(\nu - a, \nu_0 - a)$  satisfait encore cette hypothèse.

Posons  $\nu_j = \deg_k(A_j)$ ,  $\mu_j = \deg_k(B_j)$  ( $j = 1, 2$ ). De la dernière réduction résulte:

$$\nu_2 + \mu_2 \leq b = \sum_{i=1}^s t_i \deg_k(P_i)$$

De cette inégalité, du lemme 3.6, et de l'hypothèse du théorème résulte:

$$(2) \quad p_a(D) = p_a(D') - b \leq \nu - \nu_0 - \nu_2 - \mu_2 = \nu_1 - \mu_1 - 2\mu_2$$

(compte tenu de  $\nu = \nu_1 + \nu_2$  et  $\nu_0 = \mu_1 + \mu_2$ ).

*Premier cas.*  $\nu_1 - \mu_1 - 2\mu_2 \geq 0$ .

On a:  $\nu_1 - \mu_1 - 2\mu_2 = \deg_k(A_1 - B_1 - B_2^*)$ . Il résulte donc de (2) et du lemme 3.8 qu'il existe un 0-cycle effectif  $A_1^+$  tel que:

$$A_1 \underset{X}{\approx} B_1 + B_2^* + A_1^+$$

En utilisant  $\deg_k(S_i^*) = 2\deg_k(S_i)$  et le lemme 3.7, on voit qu'il existe un 0-cycle effectif  $B_2^+$  tel que:  $B_2^* \underset{X}{\approx} B_2 + B_2^+$ . On obtient donc:



$$A = A_1 + A_2 \underset{X}{\approx} B_1 + B_2 + A_2 + A_1^+ + B_2^+ = B + A^+$$

avec  $A^+ = A_2 + A_1^+ + B_2^+$ .

*Deuxième cas*  $\nu_1 - \mu_1 - 2\mu_2 < 0$ .

De (2) résulte  $p_a(D) < 0$ , donc (lemme 3.1(b))  $\bar{D}$  n'est pas intègre; comme  $\bar{D}$  n'a pas de composantes verticales et que  $(\bar{D}.f) = 2$ , le diviseur  $\bar{D}$  s'écrit forcément  $\bar{D} = \Delta_1 + \Delta_2$ , avec  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux courbes de  $\bar{X}$  isomorphes à  $\bar{C} = \mathbb{P}_k^1$ , ce qui, via 3.1(a), implique:  $p_a(D) = (\Delta_1.\Delta_2) - 1$ . De (2) résulte alors  $(\Delta_1.\Delta_2) < 1$ .

Montrons que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont définis sur  $k$  (i.e. proviennent de diviseurs sur  $X$ ). C'est sûrement le cas si  $\Delta_1 = \Delta_2$  (car  $k$  est parfait). Pour  $\Delta_1 \neq \Delta_2$ , de  $(\Delta_1.\Delta_2) \geq 0$  et de l'inégalité ci-dessus résulte  $(\Delta_1.\Delta_2) = 0$ . On a alors:

$$-1 = p_a(D) \leq \nu_1 - \mu_1 - 2\mu_2 < 0$$

donc  $\nu_1 - \mu_1 - 2\mu_2 = -1$ . Ainsi  $\nu_1 + \mu_1 = \deg_k(A_1 + B_1)$  est impair. Comme  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  ne se rencontrent pas  $((\Delta_1.\Delta_2) = 0)$ , cela implique que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont fixes par  $\mathcal{G}$ , i.e. définis sur  $k$ : en effet, si ce n'était pas le cas, il existerait  $\sigma \in \mathcal{G}$  tel que  $\sigma\Delta_1 = \Delta_2$ , et tout 0-cycle de  $\bar{D}$  invariant par  $\mathcal{G}$  (comme c'est le cas pour  $\bar{A}_1 + \bar{B}_1$ ) serait de  $\bar{k}$ -degré pair (ce qui n'est pas le cas de  $\bar{A}_1 + \bar{B}_1$ ). Il existe donc  $D_1$  et  $D_2$  dans  $\text{Div } X$  tels que  $\bar{D}_j = \Delta_j$  ( $j = 1, 2$ ). De plus, de  $(D_1.f) = (D_2.f) = 1$  résulte que  $\varphi$  induit des isomorphismes  $D_j \xrightarrow{\sim} C$  ( $j = 1, 2$ ).

Il résulte de  $(D_1.f) = 1$  et du lemme 3.7 que tout 0-cycle effectif sur  $X$  est effectivement équivalent sur  $X$  à un 0-cycle effectif de  $D_1$  (considéré comme 0-cycle sur  $X$ ): pour  $P$  point fermé de  $X$ , on a

$$[P] \underset{X}{\approx} [k(P): k(\varphi(P))] \varphi^{-1}(\varphi(P)) \cdot D_1.$$

Ainsi, on peut supposer  $A$  et  $B$  0-cycles de  $D_1$ . Utilisant  $D_1 \approx C$ , l'inégalité de Riemann, et le lemme 2.1, on termine.

**DÉMONSTRATION DE (b):**

Comme (lemme 3.5(c))  $h^0(\ell_\nu) \geq 3\nu - r > \nu$ , la dernière inégalité provenant de l'hypothèse de (b), il existe un diviseur effectif  $D'$  sur  $X$ , de classe  $\ell_\nu$ , passant par tous les points fermés du support de  $A$ . Ecrivant  $D'$  comme la somme d'un diviseur  $D$  sans composantes verticales et de fibres de  $\varphi$ , on peut comme en (a) supposer  $A =$

$A_1 + A_2$ , avec  $A_1 \in Z_0^+(D)$ , de  $k$ -degré  $\nu_1$ , et  $A_2$ , de  $k$ -degré  $\nu_2$ , de la forme  $\sum_{i=1}^s R_i$ , où les  $R_i$  satisfont les mêmes conditions (1) que dans la démonstration de (a). Comme ci-dessus, on trouve:

$$p_a(D) \leq p_a(D') - \nu_2 = \nu - 2 - \nu_2 = \nu_1 - 2$$

*Premier cas.*  $\nu_1 - 2 \geq 0$ .

Soit  $F$  la fibre de  $\varphi$  (au-dessus d'un  $k$ -point de  $C$ ) dans laquelle  $B_0$  a son support, et soit  $B = D \cdot F$ . Il résulte du lemme 3.8 (appliqué à  $D$ ,  $A_1$  et  $B$ ) que l'on a:  $A_1 \approx_X B + A^+$ , avec  $A^+$  effectif. Il résulte du lemme 3.7 et de  $(D.F) = 2$  que l'on a  $B \approx_X B_0$ . On a donc:

$$A \underset{X}{\approx} B_0 + A^+ + A_2$$

*Deuxième cas.*  $\nu_1 - 2 < 0$ .

La discussion est analogue au second cas de (a): on trouve  $p_a(D) < 0$ , donc  $\bar{D} = \Delta_1 + \Delta_2$ , d'où  $(\Delta_1, \Delta_2) < 1$ . Si  $\Delta_1 \neq 2$ , on trouve:

$$-1 = p_a(D) \leq \nu_1 - 2 < 0$$

donc  $\nu_1 = 1$ , d'où l'on conclut que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont définis sur  $k$ . La fin de la démonstration est identique à celle de (a). ■

### 5. Contre-exemples

On utilise les surfaces du §3 de [9], avec le modèle lisse de [2]. On prend pour  $k$  le corps  $p$ -adique  $\mathbb{Q}_p$ , avec  $p$  impair (pour simplifier), on choisit  $a \in \mathbb{Z}_p^*$  une unité  $p$ -adique qui n'est pas un carré: ainsi  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{a})$  est l'extension quadratique non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ . On se donne un entier  $m > 1$ , et  $(e_1, \dots, e_{2m})$  des éléments de  $\bar{k}$ , distincts deux à deux et formant un ensemble stable sous l'action de  $\mathcal{G}$ .

On définit  $X_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2 \times_k \mathbb{A}_k^1$  avec coordonnées  $(y, z, t; \lambda)$  par l'équation:

$$y^2 - az^2 = p \prod_{i=1}^{2m} (\lambda - e_i)t^2,$$

on définit  $X_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2 \times_k \mathbb{A}_k^1$  avec coordonnées  $(Y, Z, T; \mu)$  par l'équation:

$$Y^2 - aZ^2 = p \prod_{i=1}^{2m} (1 - e_i\mu)T^2$$

et on recolte ces surfaces en une surface  $X$  via l'isomorphisme:

$$X_1 - \{\lambda = 0\} \xrightarrow{\sim} X_2 - \{\mu = 0\}$$

$$(y, z, t; \lambda) \mapsto (Y, Z, T; \mu) = (\lambda^{-m}y, \lambda^{-m}z, t; \lambda^{-1})$$

La  $k$ -surface  $X$  est projective et lisse sur  $k$ , c'est une  $k$ -surface rationnelle avec un pinceau de courbes rationnelles  $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}_k^1$  défini par recollement des projections de  $X_1$  sur  $\mathbb{A}_k^1$  et de  $X_2$  sur  $\mathbb{A}_k^1$ . La fibration  $\bar{\varphi}$  a  $r = 2m$  fibres dégénérées, correspondant à  $\lambda = e_1, \dots, e_{2m}$ . Le morphisme  $\bar{\varphi}$  admet, sur  $k(\sqrt{a})$ , deux sections évidentes:

$$\lambda \mapsto (\pm\sqrt{a}, 1, 0; \lambda).$$

On choisit les  $e_i$  ( $i = 1, \dots, 2m$ ) et  $n$  entier impair ( $1 \leq n < 2m$ ) de telle façon que les polynômes  $P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - e_i)$  et  $Q(\lambda) = \prod_{i=n+1}^{2m} (\lambda - e_i)$  appartiennent chacun à  $\mathbb{Q}_p[\lambda]$ , qu'ils n'aient ni l'un ni l'autre de zéro dans  $\mathbb{Q}_p$ , et que l'on ait:

$$(*) \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}_p \quad v_p(P(\lambda)) + v_p(Q(\lambda)) \equiv 0 \pmod{2}$$

(où  $v_p$  désigne la valuation  $p$ -adique). On verra ci-dessous des constructions explicites de tels polynômes.

Il est clair que  $X$  a des points dans l'extension quadratique  $k(\sqrt{a})$ : utiliser les sections de  $\bar{\varphi}$  décrites plus haut. Par ailleurs, dans la décomposition de  $P(\lambda)$  en facteurs irréductibles sur  $k[\lambda]$ , l'un au moins des facteurs est de degré impair, puisque  $P$  est de degré impair. Soit  $P_1$  ce facteur, soit  $\alpha \in \bar{k}$  une racine de  $P_1$ , et soit  $K = k(\alpha)$ . Alors  $[K : k]$  est impair, et  $X_1$  possède dans  $K$  le point  $(0, 0, 1; \alpha)$ . Ce point est un point singulier de fibre dégénérée; mais  $X$  étant lisse sur  $k$ , le corps  $K$   $p$ -adique, et  $X(K)$  non vide,  $X(K)$  est dense—pour la topologie de Zariski—dans  $X_K$ , ce qui montre qu'il existe aussi des points de  $X$  à valeurs dans  $K$  non situés sur les fibres dégénérées.

Cependant  $X(\mathbb{Q}_p)$  est vide; par l'argument de densité qu'on vient d'indiquer, il suffit de voir  $X_1(\mathbb{Q}_p) = \emptyset$  (en fait on vérifie facilement que  $X_2(\mathbb{Q}_p)$  n'a pas de point avec  $\mu = 0$ ). Si  $(y, z, t; \lambda)$  est un point de  $X_1(\mathbb{Q}_p)$ , on a nécessairement  $t \neq 0$ , car  $a$  n'est pas un carré. On a donc une équation:

$$\beta^2 - \alpha\gamma^2 = pP(\lambda)Q(\lambda)$$

avec  $\beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{Q}_p$ . Mais la valuation  $p$ -adique du membre de gauche est celle d'une norme de l'extension quadratique non ramifiée

de  $\mathbb{Q}_p$ , et donc est paire; la valuation du membre de droite est, d'après (\*), impaire, ce qui est absurde.

*Construction explicite de polynômes  $P$  et  $Q$  satisfaisant (\*)*

*Première méthode.* On prend  $P, Q \in \mathbb{Z}_p[\lambda]$  unitaires de degré  $n$ , resp.  $2m - n$ , se réduisant modulo  $p$  en des polynômes de  $\mathbb{F}_p[\lambda]$  sans zéro dans  $\mathbb{F}_p$ . On vérifie que, pour  $\lambda$  dans  $\mathbb{Q}_p$ ,

$$\begin{aligned} v_p(P(\lambda)) + v_p(Q(\lambda)) &= 0 && \text{si } v_p(\lambda) \geq 0 \\ &= 2mv_p(\lambda) && \text{si } v_p(\lambda) < 0 \end{aligned}$$

*Deuxième méthode.* On prend  $m$  impair,  $P(\lambda) = \lambda^m + p$  et  $Q(\lambda) = \lambda^m + \epsilon p$ , avec  $1 \neq \epsilon \in \mathbb{Z}_p^*$ . On voit que  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéro dans  $\mathbb{Q}_p$ , et, pour  $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ :

$$v_p(P(\lambda)) = \inf(mv_p(\lambda), 1) = v_p(Q(\lambda))$$

les égalités provenant de  $mv_p(\lambda) \neq 1$ .

EXEMPLES: Par la première méthode, on trouve la surface  $X_1$  sur  $\mathbb{Q}_7$ :

$$y^2 - 3z^2 = 7(\lambda^3 - 2)(\lambda^3 + 5)t^2$$

Par la seconde, on trouve la surface  $X_1$  sur  $\mathbb{Q}_3$ :

$$y^2 + z^2 = 3(\lambda^3 - 3)(\lambda^3 + 3)t^2$$

REMARQUE: Si l'on considère les équations obtenues par ces méthodes comme définissant des  $\mathbb{Z}_p$ -schémas propres, on voit que la réduction modulo  $p$  n'est pas lisse. De façon générale, il est impossible de fabriquer un  $\mathbb{Z}_p$ -schéma propre et lisse, à fibres des surfaces rationnelles, tel que la fibre générique (au-dessus de  $\mathbb{Q}_p$ ) n'ait pas de  $\mathbb{Q}_p$ -point: il résulte en effet d'un théorème de Weil ([11], IV.5.1) que, dans cette situation, la fibre spéciale (au-dessus de  $\mathbb{F}_p$ ) a un  $\mathbb{F}_p$ -point; comme ce point est lisse, on peut, d'après le lemme de Hensel, le relever en un  $\mathbb{Q}_p$ -point de la fibre générique.

## 6. Torsion de $\tilde{A}_0$

PROPOSITION 6.1 (Severi): Soit  $k$  un corps quelconque, et  $n$  un entier naturel. L'anneau de Chow  $A^*(\mathbb{P}_k^n)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}[T]/(T^{n+1})$ ,  $T$  correspondant à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)$ . En particulier  $\tilde{A}_0(\mathbb{P}_k^n) = 0$ .

La seconde assertion résulte évidemment de la première, le degré d'une intersection de  $n$  hyperplans étant 1. La première est contenue dans [8], dans le cas d'un corps algébriquement clos; mais on vérifie, par exemple en utilisant la théorie de l'intersection de [7], qui est développée au-dessus d'un corps quelconque, que l'axiomatique de [8] est encore valable dans ce cas (cf. [5], lemme 3, p. II-14).

**LEMME 6.2:** *Soient  $X$  et  $Y$  deux  $k$ -variétés intègres, de même dimension, avec  $Y$  lisse et quasi-projective sur  $k$ , et  $f: X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme propre surjectif tel que l'extension de corps des fractions  $k(X)/k(Y)$  définie par  $f$  soit de degré  $n$ . Alors la flèche composée:*

$$A_d(Y) \xrightarrow{f^*} A_d(X) \xrightarrow{f_*} A_d(Y)$$

( $d$  entier quelconque) est la multiplication par  $n$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $y \in A_d(Y)$ . Il résulte de la formule de projection ([7], 3.1) que l'on a:

$$f_*(f^*y) = f_*(f^*y \cdot [X]) = y \cdot f_*([X]) = y \cdot (n[Y]) = ny. \quad \blacksquare$$

**PROPOSITION 6.3:** *Pour  $X$  variant parmi les  $k$ -variétés géométriquement intègres, projectives et lisses,  $\tilde{A}_0(X)$  est un invariant  $k$ -birational dans chacun des cas suivants:*

- (i)  $k$  est parfait et  $X$  est de dimension 2.
- (ii)  $k$  est de caractéristique nulle.

**DÉMONSTRATION:** D'après les théorèmes connus sur la résolution des singularités d'applications rationnelles (cf. [11], III.2.1), il suffit de traiter le cas où l'on a un  $k$ -morphisme propre birationnel  $f: X \rightarrow Y$  de  $k$ -variétés géométriquement intègres, projectives et lisses. Il résulte de 6.2 (avec  $n = 1$ ) que  $f^*: \tilde{A}_0(Y) \rightarrow \tilde{A}_0(X)$  est injectif. Il existe  $U \subset X$  et  $V \subset Y$  des ouverts non vides tels que  $f$  induise un isomorphisme de  $U$  sur  $V$ . Pour  $x \in A_0(X)$ , il résulte du lemme de déplacement de Chow (cf. [7], 2.3) qu'il existe un 0-cycle sur  $X$ , de classe  $x$ , dont le support est inclus dans  $U$ : un tel 0-cycle est manifestement image réciproque d'un 0-cycle sur  $Y$ .  $\blacksquare$

**PROPOSITION 6.4:** *Soit  $X$  une  $k$ -variété géométriquement intègre, projective et lisse, et supposons que l'on soit dans l'une des situations:*

(a) Il existe une  $k$ -application rationnelle de degré fini  $d$

$$f: \mathbb{P}_k^n \dashrightarrow X$$

(b) Il existe une extension finie  $K/k$  de degré  $d$  telle que  $X_K$  soit  $K$ -birationnellement équivalente à  $\mathbb{P}_K^1$ .

Alors, pour  $k$  de caractéristique zéro ou  $k$  parfait et  $n = 2$ ,  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par  $d$ .

DÉMONSTRATION: (a) Il existe (Hironaka, Abhayankar) une  $k$ -variété géométriquement intègre, projective et lisse  $Y$   $k$ -birationnellement équivalente à  $\mathbb{P}_k^n$  et un  $k$ -morphisme propre surjectif  $g: Y \rightarrow X$  de degré  $d$ . En appliquant 6.1, 6.2 et 6.3, on conclut.

(b) Il suffit de considérer le  $k$ -morphisme propre surjectif  $X_K \rightarrow X$  et d'appliquer 6.1, 6.2 et 6.3 (noter que dans 6.2 on ne suppose pas la  $k$ -variété  $X$  de l'énoncé géométriquement intègre). ■

Le lecteur comparera les énoncés 6.3 et 6.4 avec [11], IV.1.3; et 6.3 avec [1], Proposition 10.

COROLLAIRE 6.5: Soit  $k$  un corps parfait infini.

(a) Soit  $X$  une  $k$ -surface cubique lisse.  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par 18, et, si  $X(k)$  est non vide, par 6.

(b) Soit  $X \xrightarrow{\mathfrak{S}} C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques.  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par  $2^n$ , pour  $n$  convenable.

DÉMONSTRATION: (a) Pour  $X(k)$  non vide, il suffit de combiner 6.4 (a) ci-dessus avec [11], IV.7.8 et 8.1. Si  $X(k)$  est vide, il existe une extension cubique  $K/k$  avec  $X(K) \neq \emptyset$ .  $\tilde{A}_0(X_K)$  est annulé par 6, et, via 6.2, on en déduit que  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par 18. En fait, Swinnerton-Dyer montre dans [18], par un argument très simple – du type de celui donné en 6.6 ci-dessous – que, dans tous les cas,  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par 6.

(b) Supposons d'abord  $C(k) \neq \emptyset$ , i.e.  $C \simeq \mathbb{P}_k^1$ . La fibre générique de  $\varphi$  est une conique lisse  $\Gamma$  sur le corps  $k(T)$ . D'après le théorème de Tsen, il existe une extension finie galoisienne  $K/k$  de groupe  $G$  telle que  $\Gamma(K(T)) \neq \emptyset$ . Soit  $[K:k] = 2^a \prod_{p \neq 2} p^{n_p}$ , et soit, pour  $p \neq 2$ ,  $G_p$  un  $p$ -sous-groupe de Sylow de  $G$ , et  $K_p$  le sous-corps de  $K$  fixe par  $G_p$ . Comme l'extension  $K(T)/K_p(T)$  ( $p$  impair) est de degré impair, il résulte d'un théorème bien connu de T.A. Springer (cf. [3], 2.1) que  $\Gamma(K_p(T))$  est non vide, ce qui implique que  $\varphi_{K_p}$  admet une section,

donc que  $X_{K_p}$  est  $K_p$ -rationnel, donc (6.4(b)) que  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par  $[K_p : k] = 2^a \prod_{q \neq 2, p} q^{n_q}$ . Appliquant ceci à chaque  $p$  impair, on conclut. Le cas général s'obtient à partir du cas  $C(k) \neq \emptyset$  par la même méthode qu'en (a): il existe  $L/k$  quadratique telle que  $C(L) \neq \emptyset$ . ■

En fait, on a un résultat plus précis que 6.5(b):

**PROPOSITION 6.6:** *Soit  $X \xrightarrow{\varphi} C$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en courbes ( $k$  parfait infini). Alors  $\tilde{A}_0(X)$  est annulé par 2.*

**DÉMONSTRATION:** Soit  $d$  impair assez grand; alors  $\ell_d = -\omega + (d-3)f$ , qui appartient à  $\text{Pic } X$  (car, sans hypothèse sur  $C$ ,  $2f \in \text{Pic } X$ ), admet des sections (lemme 3.5(c)). Soit  $D'$  un diviseur effectif de classe  $\ell_d$ , et soit  $D$  le diviseur effectif sans composantes verticales obtenu en enlevant à  $D'$  celles qui y figurent. On a  $(\bar{D}.f) = 2$  (lemme 3.5(a)). Soit  $A$  un point fermé de  $X$  de  $k$ -degré  $\nu$ , et soit  $\varphi(A) = B$  point fermé de  $C$  de  $k$ -degré  $\mu$ , divisant  $\nu$ . Notons  $\Phi_B = \varphi^{-1}(B)$ ; comme  $\Phi_B \cdot D$  est de  $k$ -degré  $2\mu$ , il résulte du lemme 3.7 que l'on a:

$$2A \underset{X}{\sim} (\nu/\mu)\Phi_B \cdot D$$

*Premier cas.*  $C(k) \neq \emptyset$ . Soit  $P$  fixé dans  $C(k)$ . Comme, sur  $C$ ,  $B$  est effectivement lié à  $\mu P$ , on déduit du lemme 2.4 que l'on a:

$$\Phi_B \cdot D \underset{X}{\sim} \mu\Phi_P \cdot D$$

et donc

$$2A \underset{X}{\sim} \nu\Phi_P \cdot D = \deg_k(A)\Phi_P \cdot D$$

Comme  $P$  et  $D$  sont fixés, et que ceci vaut pour  $A$  quelconque, on a fini.

*Deuxième cas.*  $C(k) = \emptyset$ . Soit  $P$  un point fermé fixé de degré résiduel 2 de  $C$ . Dans ce cas,  $\mu$  est forcément pair:  $\mu = 2\mu'$ . On a:

$$\Phi_B \cdot D \underset{X}{\sim} \mu'\Phi_P \cdot D$$

De même,  $\nu = 2\nu'$ . On a alors:

$$2A \underset{X}{\sim} \nu' \Phi_P \cdot D = \frac{1}{2} \deg_k(A) \Phi_P \cdot D. \quad \blacksquare$$

## REMARQUES 6.7:

(i) Bien que 6.5(b) soit plus faible que 6.6, nous avons voulu donner les deux démonstrations car elles illustrent des méthodes différentes; de plus les arguments utilisés en 6.5(b) suggèrent certaines questions, proches d'ailleurs de celles qui ont donné au travail d'Enriques [6] son titre: pour  $X/k$  une surface rationnelle fibrée en coniques, existe-t-il une extension  $K/k$  de degré  $2^n$  ( $n$  convenable) telle que  $X_K$  soit  $K$ -rationnelle? Y a-t-il des exemples où l'on ne peut pas prendre  $n = 1$ ?

(ii) Il résulte du théorème C que pour  $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques d'invariant  $r$ , les classes de 0-cycles effectifs de degré  $s = \max(0, [r/2] - 1)$ , pour l'équivalence rationnelle, peuvent être munies d'une structure de groupe, isomorphe à  $\tilde{A}_0(X)$ .

(iii) On sait donner des exemples de  $k$ -surfaces rationnelles fibrées en coniques avec  $\tilde{A}_0(X)$  non nul (entre autres, des surfaces de Châtelet): voir [1], Proposition 12, [2], et l'exposé de Manin au congrès de Nice (1970).

(iv) Les surfaces de Châtelet (cf. [11], VI, 5.16) sont naturellement des surfaces rationnelles fibrées en coniques, dont il est facile ([2]) de donner un modèle lisse  $X$  du même type que ceux donnés dans le §5. Leur invariant est égal à  $r = 4$ . Soit  $O$  un  $k$ -point de  $X$ ; il résulte alors du théorème A, Corollaire 1, que l'application naturelle:

$$\begin{aligned} X(k)/R &\rightarrow \tilde{A}_0(X) \\ P &\mapsto \text{cl}(P - O) \end{aligned}$$

est surjective (on peut en fait montrer – car  $k = 0$  – qu'elle est aussi injective, avec les méthodes de Manin [11], VI.5, ou celles de [2]). On en conclut, en utilisant [11], VI.5.23, que pour  $k$  corps de nombres,  $\tilde{A}_0(X)$  est fini. On peut se demander si ce résultat vaut pour une  $k$ -surface rationnelle fibrée en coniques quelconque, ou même pour une  $k$ -surface rationnelle quelconque<sup>3</sup>.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC: La  $R$ -équivalence sur les tores. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série, t. 10* (1977) 175 à 229.  
 [2] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE et J.-J. SANSUC: *La première descente sur les variétés rationnelles* (en préparation).



- [3] D. CORAY: Algebraic points on cubic hypersurfaces. *Acta Arithmetica*, 30 (1976) 267 à 296.
- [4] D. CORAY: Points algébriques sur les surfaces de del Pezzo. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 284 (1977) série A, 1531 à 1534.
- [5] R. ELKIK: Exposé n°2 in Séminaire ENS (1976) *Astérisque* 36–37.
- [6] F. ENRIQUES: Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica  $f(x, y, z) = 0$  con funzioni razionali di due parametri. *Math. Ann.*, 49 (1897) 1 à 23.
- [7] W. FULTON: Rational equivalence on singular varieties. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 45 (1975) 147 à 167.
- [8] A. GROTHENDIECK: Exposé n°4 in *Anneaux de Chow et applications*. Séminaire C. Chevalley, 2<sup>e</sup> Année (1958) Secrétariat Math. I.H.P.
- [9] V.A. ISKOVSKIĖ: Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles. *Mat. Sbornik*, 74 (116) (1967) 608 à 638, trad. ang. *Math. USSR Sbornik*, 3 (1967) 563 à 587.
- [10] V. A. ISKOVSKIĖ: Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles dont le carré de la classe canonique est positif. *Mat. Sbornik*, 83 (125) (1970) 90 à 119, trad. ang. *Math. USSR Sbornik*, 12 (1970) 91 à 117.
- [11] JU.I. MANIN: *Formes cubiques*. Nauka (Moscou) (1972) trad. ang. North-Holland, Amsterdam (1974) (Les références se font à l'édition russe.)
- [12] JU.I. MANIN: Surfaces rationnelles sur les corps parfaits I. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 30 (1966) 55 à 113, trad. ang. *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) 84 (1969) 137 à 186.
- [13] JU.I. MANIN: Surfaces rationnelles sur les corps parfaits II. *Mat. Sbornik*, 72 (114) (1967) 161 à 192, trad. ang. *Math. USSR Sbornik*, 1 (1967) 141 à 168.
- [14] D. MUMFORD: Rational equivalence of 0-cycles on surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 9 (1969) 195 à 204.
- [15] D. MUMFORD: *Lectures on curves on an algebraic surface*. Annals of Mathematics Studies, Princeton (1966) trad. russe: Mir, Moscou (1968).
- [16] A.A. ROITMAN: Sur la  $\Gamma$ -équivalence des 0-cycles. *Mat. Sbornik*, 86 (1971) 557 à 570, trad. ang. *Math. USSR Sbornik* 15 (1971) 555 à 567.
- [17] J.-P. SERRE: *Algèbre locale et multiplicités*. Lecture Notes in Mathematics, 11 Springer (1965).
- [18] H.P.F. SWINNERTON-DYER: Rational equivalence and Manin equivalence (non publié, 1973).

(Oblatum 15-XI-1977)

Jean-Louis Colliot-Thélène  
Mathématiques, bât. 425  
Université de Paris-Sud  
F-91405 Orsay

Daniel Coray  
Université de Genève  
Section de Mathématiques  
2-4, rue du Lièvre  
CH-1211 Genève 24

#### Notes ajoutées à la correction des épreuves

<sup>1</sup> D'après Iskovskih (*Izv. Akad. Nauk SSSR*, 43 (1979), 19–43), les types (a) et (c) épuisent déjà les classes d'équivalence  $k$ -birationnelle.

<sup>2</sup> Des exemples avec  $k = \mathbb{R}$  montrent que le théorème C est lui aussi le meilleur possible.

<sup>3</sup> Spencer Bloch a récemment démontré ce résultat pour les  $k$ -surfaces rationnelles fibrées en coniques sur  $\mathbb{P}^1_k$ .