

COMPOSITIO MATHEMATICA

MANFRED KRÄMER

Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen

Compositio Mathematica, tome 38, n° 2 (1979), p. 129-153

http://www.numdam.org/item?id=CM_1979__38_2_129_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SPHÄRISCHE UNTERGRUPPEN IN KOMPAKTEN ZUSAMMENHÄNGENDEN LIEGRUPPEN

Manfred Krämer

Einleitung

Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe. In [13] haben wir darauf hingewiesen, daß für abgeschlossene Untergruppen H in G eine bemerkenswerte Alternative gilt. Jedes solche H hat nämlich eine der beiden folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle irreduziblen unitären Darstellungen ρ von G ist die Fixpunktmenge von H bei ρ höchstens eindimensional.

(2) Für jedes $N > 0$ gibt es irreduzible unitäre Darstellungen ρ von G , so daß die Dimension der Fixpunktmenge von H bei ρ größer als N ist.

Die Untergruppen mit der Eigenschaft (1) nennen wir *sphärische* Untergruppen – In [23] heißen solche Untergruppen *massiv* – An einer Klassifikation der sphärischen Untergruppen ist man u.a. aus folgenden Gründen interessiert:

Erstens: Sphärische Untergruppen sind vor den nicht sphärischen im Sinne der obigen Alternative sehr stark ausgezeichnet. Deshalb fordert die mathematische Neugier eine Klassifikation.

Zweitens: Die sphärischen Untergruppen spielen eine Sonderrolle beim Studium der Orbitstruktur der Darstellungen von G . Bei manchen der dabei anfallenden Problemen ist die Kenntnis der sphärischen Untergruppen notwendig.

Drittens: Ist $H \subset G$ ein Riemannsches symmetrisches Paar im Sinne von [9, p. 174], so ist H sphärisch in G . "Sphärische Paare" $H \subset G$ sind also in diesem Sinne eine Verallgemeinerung der Riemannschen symmetrischen Paare. Man möchte dann wissen, wie groß die Klasse der sphärischen Untergruppen im Vergleich zur Klasse der Riemannschen symmetrischen Untergruppen ist.

In der vorliegenden Arbeit geben wir eine Klassifikation der sphärischen Untergruppen in den kompakten zusammenhängenden einfachen Liegruppen (s. Tabelle 1). Der Beweis verläuft folgendermaßen: Zu Anfang diskutieren wir einige Tatsachen rund um den Begriff der sphärischen Untergruppen. Danach, in §2, leiten wir zwei notwendige Bedingungen für Sphärizität her, siehe Lemma 2 und Satz 4 in §2. Beim Beweis von Satz 4 benutzen wir dabei einen “asymptotischen” Ansatz, der sich schon bei früheren Gelegenheiten als nützlich erwiesen hat. Die erwähnten notwendigen Bedingungen führen zu einer verhältnismäßig übersichtlichen Liste von möglichen Kandidaten für sphärische Untergruppen, In §3 sondern wir dann aus diesen Kandidaten durch eine Reihe von Einzeluntersuchungen die tatsächlichen sphärischen Untergruppen aus. An den Hauptsatz schließen wir einige Bemerkungen zu unseren Ergebnissen an. In §4 schließlich gehen wir kurz auf den Fall halbeinfacher (nicht mehr einfacher) Gruppen ein.

Bezeichnungen: Im Folgenden bezeichnet G stets eine kompakte zusammenhängende Liegruppe. Mit Untergruppen sind stets abgeschlossene Untergruppen gemeint. Unter einem G -Modul verstehen wir, wenn nichts anderes gesagt wird, einen endlich dimensionalen unitären G -Modul, d.h. einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum, auf dem G via einer unitären Darstellung operiert. Einfache Moduln entsprechen dabei irreduziblen Darstellungen. Ist V ein G -Modul und $H \subset G$ eine Untergruppe, so bezeichnet $V|_H$ den H -Modul, der durch Einschränkung der Operation definiert ist, und mit $F(H, V)$ ist die Fixpunktmenge von H in V bezeichnet.

1. Einige Tatsachen über sphärische Untergruppen

DEFINITION: Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt *sphärisch*, wenn sie folgende Eigenschaft hat: In jedem einfachen G -Modul ist die Fixpunktmenge von H höchstens eindimensional.

Nach [13, Korollar 6 (3)] haben nicht sphärische Untergruppen H die Eigenschaft (2) aus der Einleitung, d.h. es gibt dann einfache G -Moduln, bei denen die Dimension der Fixpunktmenge von H beliebig groß ist. Erste Beispiele für sphärische Untergruppen ergeben sich aus dem unten folgenden Satz 2.

Das folgende Lemma wird in Beweisen benötigt.

LEMMA 1: *Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe. Es seien V_1 und V_2 einfache G -Moduln und es sei $d = \dim V_1$. Dann gibt es höchstens d Summanden bei einer Zerlegung von $V_1 \otimes V_2$ in die direkte Summe von einfachen G -Moduln.*

BEWEIS: Die Aussage des Lemma ist bekannt. Sie folgt z.B. direkt aus der Formel von Klimyk für das Ausreduzieren von Tensorprodukten, siehe [11]. ■

SATZ 1: (1) *Sei \tilde{G} eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ eine zusammenhängende Untergruppe. Sei $p: \tilde{G} \rightarrow G$ eine Gruppenüberlagerung und sei $H = p(\tilde{H})$. Dann ist $H \subset G$ genau dann sphärisch, wenn $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ sphärisch ist.*

(2) *Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist H genau dann sphärisch in G , wenn die Einskomponente H_0 sphärisch in G ist.*

BEWEIS: (1) Ist $H \subset G$ nicht sphärisch, so ist offenbar auch $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ nicht sphärisch. Sei andererseits $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ nicht sphärisch und V sei ein einfacher \tilde{G} -Modul, so daß die Fixpunktmenge $F(\tilde{H}, V)$ von \tilde{H} in V mindestens zweidimensional ist. Sei λ das höchste Gewicht von V (bezüglich eines maximalen Torus in G und einer üblichen Ordnung auf der Menge der Gewichte). Dann gibt es Potenzen λ^k von λ , so daß die einfachen G -Moduln V^k mit höchstem Gewicht λ^k über $G = \tilde{G}/(\text{Kern } p)$ faktorisieren. Nach [13, Korollar 6 (3)] ist dann die Dimension von $F(H, V^k) = F(\tilde{H}, V^k)$ ebenfalls mindestens zwei.

(2) Ist H_0 sphärisch in G , so offensichtlich auch H . Wir nehmen also an, H_0 sei nicht sphärisch in G . Wir betrachten H/H_0 -Moduln als H -Moduln, bei denen H_0 trivial operiert. Es gibt einfache G -Moduln mit beliebig hoch dimensionaler Fixpunktmenge unter H_0 . Da H/H_0 endlich ist, folgt daraus, daß einfache H/H_0 -Moduln W existieren mit folgender Eigenschaft: Es gibt einfache G -Moduln, bei denen W als H -Komponente mit beliebig hoher Vielfachheit auftritt. Sei W ein H/H_0 -Modul mit dieser Eigenschaft und W^* sei der dazu kontragrediente Modul. Sei V_1 einfacher G -Modul, bei dem W^* als H -Komponente auftritt. Solche V_1 existieren nach [3, VI, §VII, Prop. 4]. Die Dimension von V_1 sei d . Sei V_2 ein einfacher G -Modul, bei dem W mit einer Vielfachheit $m > d$ auftritt. Die Vielfachheit von $W^* \otimes W$ in $V_1 \otimes V_2$ ist dann mindestens m . In $W^* \otimes W$ gibt es (genau) eine triviale H -Komponente. Es folgt, daß die Fixpunktmenge von H in $V_1 \otimes V_2$ mindestens m -dimensional ist. Nach Lemma 1 zerfällt $V_1 \otimes V_2$ in höchstens d einfache G -Untermodule. Da $m > d$

ist, muß dann mindestens einer dieser einfachen G -Untermoduln 2 oder mehr triviale H -Moduln enthalten. Also ist H nicht sphärisch. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Die Behauptung (1) von Satz 1 besagt, daß die Sphärizität von $H \subset G$ nur vom lokalen Isomorphietyp abhängt, und die Behauptung (2) macht deutlich, daß es im wesentlichen darauf ankommt, diejenigen sphärischen Untergruppen zu klassifizieren, die zusammenhängend sind.

Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Nach [9, p. 174] heißt (G, H) ein Riemannsches symmetrisches Paar, wenn es einen involutorischen (analytischen) Automorphismus σ von G gibt, so daß folgendes gilt: Ist H_σ die Untergruppe der Fixpunkte von σ in G und $(H_\sigma)_0$ die Einskomponente von H_σ , so gilt $(H_\sigma)_0 \subset H \subset H_\sigma$.

SATZ 2: *Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und (G, H) sei ein Riemannsches symmetrisches Paar. Dann ist H sphärisch in G .*

BEWEIS: Das Ergebnis ist wohlbekannt. Es folgt direkt aus Lemma 4.7 in [9, X, §4, p. 416]. ■

Ist G einfach und H zusammenhängend, so findet man die Liste der Riemanschen symmetrischen Paare (G, H) bzw. die Quotienten G/H in der Tabelle II in [9, IX, §4, p. 354] in der 2. Spalte (kompakter Typ). Auf diese Weise erhalten wir eine wohlbekannte Klasse von Untergruppen als erste Beispiele für sphärische Untergruppen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch ein klassisches Resultat erwähnen. Sei $C^\dagger(G)$ der komplexe Vektorraum derjenigen stetigen Funktionen von G nach \mathbb{C} , die auf den Doppelnebenklassen HxH , $x \in G$, konstant sind. Für $f, g \in C^\dagger(G)$ betrachten wir die Konvolution $f * g$ definiert durch $(f * g)(x) = \int_G f(y) \cdot g(y^{-1}x) dy$, wobei integriert wird bezüglich des normierten Haarschen Maßes auf G . Es ist $C^\dagger(G)$ stabil unter der Konvolution und $(C^\dagger(G), *)$ ist eine Algebra. Dann gilt folgende notwendige und hinreichende Bedingung für Sphärizität.

SATZ 3: *Es ist $H \subset G$ genau dann sphärisch, wenn die Algebra $C^\dagger(G)$ mit der Konvolution als Produkt kommutativ ist.*

BEWEIS: Der Satz geht auf [6] zurück und folgt als Spezialfall aus

[7, 13, Corollary of Theorem 8], einem der vielen Ergebnisse in dieser grundlegenden Arbeit. ■

Der Satz 3 gibt eine sehr prägnante Charakterisierung der sphärischen Untergruppen. Wir wollen hier jedoch auf diese analytische Behandlung nicht eingehen. Ursprünglich wollten wir zwar die explizite Klassifikation der sphärischen Untergruppen mit Hilfe des Kriteriums in Satz 3 in Angriff nehmen. Wir hatten jedoch Schwierigkeiten dabei und haben es vorgezogen, den im Folgenden beschriebenen Weg zu gehen.

2. Notwendige Bedingungen für Sphärizität

Von jetzt an sei G halbeinfach und einfach zusammenhängend vorausgesetzt. In G wählen wir einen festen maximalen Torus T . Wurzeln und Gewichte sind bezüglich T zu verstehen. Es sei eine Basis des Wurzelsystems von G gewählt und $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r$ seien die zugehörigen fundamentalen Gewichte. Falls G einfach ist, sei die Numerierung der Basiswurzeln bzw. der π_i wie in [22] gewählt. Die Monome in den π_i klassifizieren – als höchste Gewichte – die einfachen G -Moduln bis auf Isomorphie. Seien $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ Monome in den π_i und $\pi = \sum_{j=1}^k m_j \tau_j$ sei eine Linearkombination der τ_j mit ganzzahligen $m_j \geq 0$. Dann heißt ein G -Modul V ein Modul vom Isomorphietyp π , wenn V isomorph ist zur direkten Summe $\prod_j m_j V_j$ von m_1 Exemplaren eines einfachen G -Moduls V_1 mit höchstem Gewicht τ_1 , von m_2 Exemplaren eines einfachen G -Moduls mit höchstem Gewicht τ_2 , usw. . . . , von m_k Exemplaren eines einfachen G -Moduls vom höchsten Gewicht τ_k .

Mit $\text{Ad}(G)$ bezeichnen wir den (komplexen) adjungierten G -Modul. Unter einer reellen Komponente in einem H -Modul verstehen wir einen (komplexen) Untermodul, der eine unter H invariante reelle Form besitzt. Sind G_1 und G_2 lokal isomorph, so schreiben wir $G_1 \simeq G_2$.

LEMMA 2: *Sei G einfach und $G \subset G$ eine zusammenhängende Untergruppe, die sphärisch ist. Der H -Modul $\text{Ad}(G)|_H$ sei die direkte Summe von n reellen Komponenten. Dann ist $n \leq 4$, falls G klassisch und $G \neq \text{SO}(8)$ ist, es ist $n \leq 5$ falls $G \simeq \text{SO}(8)$, und es ist $n \leq 3$ falls G eine Ausnahmegruppe ist.*

BEWEIS: Sei G klassisch und $G \neq \text{SO}(8)$ (bzw. sei G eine Ausnahmegruppe). In den Listen 1–5 in [14] liest man nach, daß es in einer

direkten Zerlegung der 2. symmetrischen Potenz $S^2(\text{Ad}(G))$ von $\text{Ad}(G)$ in irreduzible G -Komponenten genau 4 (bzw. genau 3) solche irreduziblen Summanden gibt. Für $G \simeq \text{SO}(8) \simeq D_4$ ist $S^2(\text{Ad}(G))$ vom Isomorphietyp $\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 + \pi_4^2 + 1$, d.h. $S^2(\text{Ad}(G))$ zerlegt sich in diesem Fall in 5 reelle Komponenten. (In Liste 4 in [14] ist bei diesem Fall ein Fehler unterlaufen. Die dortige Angabe ist inkorrekt.)

Sei nun $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ eine Zerlegung von $\text{Ad}(G)|_H$ in reelle Komponenten. Dann enthält $S^2(\text{Ad}(G))|_H = S^2(\text{Ad}(G)|_H)$ den H -Untermodul $S^2V_1 \oplus \cdots \oplus S^2V_n$. Da die V_i reell sind, gibt es in jedem der S^2V_i , $i = 1, 2, \dots, n$, eine triviale H -Komponente. Insgesamt ist die Vielfachheit des trivialen H -Moduls in $S^2(\text{Ad}(G))|_H$ also mindestens n . Wäre $n > 4$ im Falle G klassisch und $G \neq \text{SO}(8)$ (bzw. $n > 5$ im Falle $G \simeq \text{SO}(8)$ bzw. $n > 3$ im Falle G eine Ausnahmegruppe), so müßte mindestens eine der 4 (bzw. der 5 bzw. der 3) einfachen G -Komponenten in $S^2(\text{Ad}(G))$ zwei oder mehr triviale H -Komponenten enthalten. Dann wäre also H nicht sphärisch. Es folgt das Lemma. ■

Das Lemma stellt eine enge Verbindung zu den Tabellen in [14] her. Für einfache $G \neq \text{SO}(8)$ sagt es z.B. folgendes: Ist die zusammenhängende Untergruppe H sphärisch und halbeinfach, so taucht H in den Tabellen 1–4 in [14] auf.

Man stellt leicht fest, daß die notwendige Bedingung des Lemma 2 noch ziemlich grob ist. Da wir kein praktisches hinreichendes Kriterium für Sphärizität besitzen, müssen wir den Kreis der Kandidaten für sphärische Untergruppen weiter einschränken. Dazu leiten wir eine weitere notwendige Bedingung her, die sich als sehr einschneidend und zum Zwecke der Klassifikation als sehr brauchbar erweist. Beim Beweis benutzen wir eine "asymptotische Methode", wie wir sie schon in [12] und [15] erfolgreich angewandt haben.

Sei $\delta = \prod_i \pi_i$ das minimale dominante Gewicht in der fundamentalen Weylkammer. Wir betrachten eine Reihe V_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, von einfachen G -Moduln mit höchstem Gewicht δ^k . Allein aus dem asymptotischen Verhalten dieser V_k für $k \rightarrow \infty$ läßt sich dann das Kriterium des folgenden Satzes ableiten.

SATZ 4: *Sei G halbeinfach und $H \subset G$ eine zusammenhängende Untergruppe, dann gilt: Ist $H \subset G$ sphärisch, so ist*

$$(*) \quad 2 \cdot \dim H + \text{Rang } G \geq \dim G.$$

BEWEIS: Sei g bzw. h die Anzahl der positiven Wurzeln von G

bzw. von H . Sei ferner r bzw. s der Rang von G bzw. von H . Man verifiziert leicht, daß die Ungleichung (*) äquivalent ist zur Ungleichung

$$(**) \quad 2 \cdot h + s \geq g$$

Wir werden (**) beweisen. Dazu betrachten wir die Reihe der oben eingeführten G -Moduln V_k mit höchstem Gewicht δ^k .

AUSSAGE 1: Für $k = 1, 2, 3, \dots$ ist $\dim V_k = (k + 1)^g$.

BEWEIS: Dies folgt sofort aus der Weylschen Dimensionsformel für einfache G -Moduln. ■

AUSSAGE 2: Es gibt eine Konstante β , so daß für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ gilt: Ist W ein einfacher H -Untermodul in $V_{k|H}$, so ist $\dim W \leq \beta \cdot k^h$.

BEWEIS: Wir können annehmen, daß H halbeinfach ist, weil wir es mit der Frage der Dimension von H -Moduln zu tun haben. In H sei ein maximaler Torus S betrachtet mit $S \subset T$, wo T der gewählte maximale Torus in G ist. Wir betrachten die Wurzeln von H bezüglich S , eine Basis des Wurzelsystems und die entsprechenden fundamentalen Gewichte $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$. Es gibt dann eine Konstante $a > 0$, so daß für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ und alle einfachen H -Untermoduln W in $V_{k|H}$ folgendes gilt: Ist $\tau_1^{p_1} \cdot \tau_2^{p_2} \cdot \dots \cdot \tau_s^{p_s}$ das höchste Gewicht von W , so ist $p_i \leq a \cdot k$ für alle $i = 1, 2, \dots, s$ (vergl. die assertion im Beweis von [15, Proposition 1]). Die Aussage 2 folgt dann offensichtlich mit Hilfe der Weylschen Dimensionsformel. ■

Für $k = 1, 2, 3, \dots$ sei $Y(k)$ eine Menge von paarweise nicht isomorphen einfachen H -Untermoduln von $V_{k|H}$, so daß jeder einfache H -Untermodul von $V_{k|H}$ zu einem Element von $Y(k)$ isomorph ist. Sei $y(k)$ die Anzahl der Elemente in $Y(k)$.

AUSSAGE 3: Es gibt eine Konstante $\gamma > 0$, so daß $y(k) \leq \gamma \cdot k^s$ ist für alle $k = 1, 2, 3, \dots$

BEWEIS: Man betrachte die Menge $\Delta(k)$ der Gewichte von G beim G -Modul V_k . Für $\mu \in \Delta(k)$ sei μ' die Einschränkung von μ auf S . Sei $\Delta'(k) = \{\mu' \mid \mu \in \Delta(k)\}$. Dann kann man ohne allzuviel Mühe die folgende Behauptung beweisen: Es gibt eine Konstante $b > 0$, so daß für alle $k = 1, 2, \dots$ die Anzahl der Elemente in $\Delta'(k)$ kleiner ist als $b \cdot k^s$.

Offensichtlich impliziert diese Behauptung die Aussage 3. ■

Die letzte Aussage, die wir zum Beweis von Satz 4 noch benötigen, ist eine elementare Ungleichung:

AUSSAGE 4: Die reelle Zahl N sei die Summe $N = \sum_{i=1}^m n_i$ von m reellen Zahlen. Dann ist $\sum_{i=1}^m n_i^2 \geq m \cdot (N/m)^2$.

BEWEIS: Induktion über m . ■

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis von Satz 4. Sei t die ganze Zahl, für die $2h + s + t = g$ ist. Wir beweisen die Ungleichung (**), indem wir zeigen, daß $t \leq 0$ ist, falls $H \subset G$ sphärisch ist. Für $k = 1, 2, 3, \dots$ sei $u(k)$ die Anzahl der Summanden bei einer direkten Zerlegung von $V_{k|H}$ in die direkte Summe von einfachen H -Komponenten. Sei $\text{Max}(k)$ das Maximum der Dimensionen einfacher H -Komponenten in $V_{k|H}$. Offensichtlich ist $u(k) \geq \dim V_k / \text{Max}(k)$. Aussage 1 impliziert, daß $\dim V_k \geq k^g$ ist für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ Zusammen mit Aussage 2 erhalten wir also:

$$(1) \quad u(k) \geq \frac{\dim V_k}{\text{Max}(k)} \geq \frac{k^g}{\beta \cdot k^h} = \alpha \cdot k^{g-h} \quad (\alpha = 1/\beta)$$

Für $W \in Y(k)$ sei m_W die Vielfachheit von W in $V_{k|H}$. Dann ist $V_{k|H}$ isomorph zu $\sum_{W \in Y(k)} m_W W$. Wir betrachten auch den zu V_k kontragredienten G -Modul V_k^* (es ist $V_k^* \cong V_k$ in unserer Situation) und wollen im Tensorprodukt $V_k \otimes V_k^*$ die Dimension F_k der Fixpunktmenge unter H untersuchen. Da $W \otimes W^*$ für alle $W \in Y(k)$ eine triviale H -Komponente enthält, gibt es in $(V_k \otimes V_k^*)|_H = (\sum_{W \in Y(k)} m_W W) \otimes (\sum_{W \in Y(k)} m_W W^*)$ mindestens (sogar genau) $\sum_{W \in Y(k)} m_W^2$ triviale Komponenten.

Wir wenden nun die Aussage 4 an. Es ist $u(k) = \sum_{W \in Y(k)} m_W$. Demnach ist $F_k \geq \sum_{W \in Y(k)} m_W^2 \geq y(k) \cdot (u(k)/y(k))^2 = (u(k))^2 / (y(k))$. Die Aussage 3 über $y(k)$ und die obige Ungleichung (1) über $u(k)$ liefern also zusammen $F_k \geq \sum_{W \in Y(k)} m_W^2 \geq k^{2g-2h-s} \alpha^2 / \gamma = c \cdot k^{2g-2h-s} = c \cdot k^{g+t}$ (es war $2h + s = g - t$ nach Definition von t !) mit $c = \alpha^2 / \gamma$. Nach Lemma 1 gibt es für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ höchstens $\dim V_k$ Summanden bei einer direkten Zerlegung von $V_k \otimes V_k^*$ in einfache G -Komponenten. Nach Aussage 1 gibt es eine Konstante d , so daß $\dim V_k \leq d \cdot k^g$ ist für alle k . Zusammengefaßt ergibt dies: Für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ zerlegt sich $V_k \otimes V_k^*$ in die direkte Summe von höchstens $d \cdot k^g$ einfache G -Komponenten. Andererseits gibt es in $V_k \otimes V_k^*$

mindestens $c \cdot k^{g+t}$ triviale H -Komponenten. Wäre $t > 0$, so gäbe es also für genügend große k mehr triviale H -Komponenten als einfache G -Summanden in $V_k \otimes V_k^*$. In mindestens einen einfachen G -Summanden müßten dann 2 oder mehr triviale H -Komponenten fallen, d.h. H wäre nicht sphärisch in G . Für sphärische $H \subset G$ muß also $t \leq 0$ sein. Damit ist Satz 4 bewiesen. ■

Bemerkung 1: Wir wollen die beiden notwendigen Bedingungen des Lemma 2 und des Satzes 4 kurz diskutieren. Beide Bedingungen sind nicht hinreichend. Für $n \geq 6$ erfüllt z.B. die übliche Untergruppe $H = \text{SO}(n-2) \subset \text{SO}(n) = G$ die Ungleichung (*) des Satzes 4. Da aber bereits die elementare n -dimensionale Darstellung von $\text{SO}(n)$ eine 2-dimensionale Fixpunktmenge unter H besitzt, ist H nicht sphärisch in G . Für $k \geq 7$ ist auch die notwendige Bedingung des Lemma 2 erfüllt. Es gibt also Untergruppen $H \subset G$, die beide notwendigen Bedingungen für Sphärizität erfüllen, die jedoch nicht sphärisch sind. Auf der anderen Seite sind beide Bedingungen bestmöglich in folgendem Sinne. Sei z.B. $H = \text{Sp}(n) \subset \text{SU}(2n) \subset \text{SU}(2n+1) = G$ betrachtet. Wir werden im folgenden Abschnitt 3. zeigen, daß $H \subset G$ sphärisch ist. Nun rechnet man nach, daß sich $\text{Ad}(G)|_H$ in vier reelle H -Komponenten zerlegen läßt. Die Abschätzung des Lemma 2 über die Anzahl der reellen Komponenten in $\text{Ad}(G)|_H$ kann also nicht verbessert werden. Außerdem ist in dem betrachteten Fall $2 \cdot \dim H + \text{Rang } G = \dim G$, d.h. auch die Dimensionsabschätzung in Satz 4 ist bestmöglich. Diese letzte Feststellung ist auch aus der Theorie der symmetrischen Räume bekannt. Denn bekannterweise gibt es zu jeder kompakten einfachen Liegruppe G ein sogenanntes normales Riemannsches symmetrisches Paar (G, H) . Solche Paare sind unter den Riemannschen symmetrischen Paaren gerade charakterisiert durch die Gleichung $2 \cdot \dim H + \text{Rang } G = \dim G$. Beispiele sind $\text{SO}(n) \subset \text{SU}(n)$, $C_4 \subset E_6$ usw.

Wir kombinieren nun Lemma 2 und Satz 4 für die einzelnen Typen von einfachen Gruppen G und werden eine Liste von möglichen Kandidaten für sphärische Untergruppen erhalten. Zuerst bestimmen wir die zusammenhängenden Untergruppen, welche die Bedingung des Lemma 2 für Sphärizität erfüllen. Ist $G \neq \text{SO}(8)$, so sind die entsprechenden halbeinfachen H in den Tabellen 1–4 in [14] aufgeführt. Die nicht halbeinfachen H werden nach der Bemerkung 2 auf Seite 706 in [14] bestimmt. Dabei sei jedoch darauf hingewiesen, in der dortigen Zeile 10 von unten anstelle der Gleichung die Ungleichung $n(H \cdot S, G) \leq n(H, G)$ stehen muß (man zählt nicht die komplexen, sondern die reellen Komponenten). Dementsprechend

liefert die Vorschrift der Bemerkung 2 in [14] nur diejenigen nicht halbeinfachen Untergruppen, deren halbeinfachen Anteile ebenfalls in den dortigen Tabellen auftreten. Übrig bleibt die Bestimmung der Untergruppen H in G mit der Eigenschaft, daß zwar H selbst, nicht jedoch der halbeinfache Anteil von H die notwendige Eigenschaft des Lemma 2 erfüllt. Dies macht keine Mühe und man erhält noch folgende Untergruppen:

Erstens: $H = U(1) \times \text{Sp}(n) \subset \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n) \subset \text{Sp}(n+1)$, $n \geq 1$.

Zweitens: Eine allgemeine Reihe, nämlich: $H = \text{SO}(2) \times H_2 \subset \text{SO}(2) \times \text{SO}(n) \subset \text{SO}(n+2)$, wo H_2 einfach ist, wo zudem die Inklusion $H_2 \subset \text{SO}(n)$ die reelle Form einer irreduziblen unitären Darstellung von H_2 ist und wo schließlich $\text{Ad}(\text{SO}(n))|_{H_2}$ in genau zwei reelle Komponenten zerfällt (vergl. die letzte Zeile der Tabelle 2, p. 702, in [14]).

Nun zum Fall $G = \text{SO}(8)$. Man rechnet nach, daß man zu den Beispielen, die in Tabelle 2 in [14] zu finden sind, noch folgende Fälle zu berücksichtigen hat: $H = \text{SO}(4) \times \text{SO}(4) \subset \text{SO}(8) = G$ und $H = \text{SO}(2) \times \text{SO}(5) \subset \text{SO}(2) \times \text{SO}(6) \subset \text{SO}(8) = G$.

Hat man auf diese Weise die Untergruppen klassifiziert, welche die notwendige Bedingung des Lemma 2 erfüllen, so sondert man anschließend diejenigen darunter aus, die noch der Dimensionsbedingung des Satzes 4 genügen. Das Resultat ist eine relative übersichtliche Liste. Wir zählen im Folgenden diejenigen der so erhaltenen Kandidaten auf, die keine Riemannschen symmetrischen Paare liefern, d.h. die nicht in der Tabelle II in [9, IX, §4, p. 354] aufgeführt sind.

Liste der nicht symmetrischen Kandidaten für sphärische Untergruppen in den einfachen kompakten Liegruppen

1. *Liste konkreter Einzelfälle:* $H = \text{SU}(n) \times \text{SU}(m) \subset \text{SU}(m+n) = G$, $n+m \geq 3$, $n, m \geq 1$; $H = \text{Sp}(n) \subset \text{SU}(2n) \subset \text{SU}(2n+1) = G$, $n \geq 1$; der Normalisator dieser Untergruppe, nämlich $H = U(1) \cdot \text{Sp}(n) \subset \text{S}(U(1) \times U(2n)) \subset \text{SU}(2n+1) = G$, $n \geq 1$; $H = \text{SU}(n) \subset U(n) \subset \text{SO}(2n) = G$, $n \geq 3$; $H = U(n) \subset \text{SO}(2n) \subset \text{SO}(2n+1) = G$, $n \geq 1$; $\text{SO}(n-2) \subset \text{SO}(n)$, $n \geq 6$; $\text{Spin}(7) \subset \text{SO}(8)$; $H = \text{Spin}(7) \subset \text{SO}(8) \subset \text{SO}(9) = G$; $G_2 \subset \text{SO}(7)$; $H = G_2 \subset \text{SO}(7) \subset \text{SO}(8) = G$; $\text{SU}(2) \cdot \text{Sp}(2) \subset \text{SO}(8)$; $H = U(1) \times \text{Sp}(n) \subset \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n) \subset \text{Sp}(n+1) = G$, $n \geq 1$; $A_2 \subset G_2$; $D_5 \subset E_6$; $E_6 \subset E_7$.

2. *Zwei allgemeine Reihen:* *Erstens:* $H = \text{SO}(m) \times H_2 \subset \text{SO}(m) \times$

$SO(n) \subset SO(n + m) = G$, $m \geq 2$, $n \geq 5$. Dabei ist H_2 einfach, die Inklusion $H_2 \subset SO(n)$ ist die reelle Form einer irreduziblen unitären Darstellung und $\text{Ad}(SO(n))|_{H_2}$ zerfällt in genau zwei reelle Komponenten. Schließlich muß noch vorausgesetzt werden, daß die Dimensionsbedingung des Satzes 4 erfüllt ist (dies trifft z.B. zu, falls m groß genug gegenüber n ist).

Zweitens: $H = \text{Sp}(m) \times H_2 \subset \text{Sp}(m) \times \text{Sp}(n) \subset \text{Sp}(m + n) = G$, $m \geq 1$, $n \geq 2$. Dabei ist H einfach, $H_2 \subset \text{Sp}(n)$ ist eine irreduzible symplektische Darstellung und $\text{Ad}(\text{Sp}(n))|_{H_2}$ zerfällt in genau zwei reelle Komponenten. Schließlich muß wieder die Bedingung (*) des Satzes 4 erfüllt sein. Die beiden Reihen entsprechen dem letzten Fall in der Tabelle 2 in [14, p. 702], bzw. dem drittletzten Fall in der dortigen Tabelle 3, p. 703.

Im folgenden Abschnitt werden wir nun aus den aufgezählten Kandidaten die tatsächlich sphärischen Untergruppen herauslesen.

3. Die sphärischen Untergruppen in den einfachen kompakten Liegruppen

Als erste Gruppe unter den oben aufgeführten Kandidaten für sphärische Untergruppen betrachten wir folgende Fälle: $SU(n) \times SU(m) \subset S(U(n) \times U(m)) \subset SU(n + m)$, $SU(n) \subset U(n) \subset SO(2n)$, $D_5 \subset U(1) \cdot D_5 \subset E_6$ und $E_6 \subset U(1) \cdot E_6 \subset E_7$. Man steht jedesmal vor folgendem Problem: Die in der Mitte stehenden Untergruppen sind sphärisch in der großen Gruppe nach Satz 2. Sind ihre halbeinfachen Anteile ebenfalls noch sphärisch? Um diese Frage zu beantworten kommen wir auf den Begriff der Trennbarkeit zurück, den wir in [13] vor dem dortigen Lemma 3 eingeführt haben. Seien $F, H \subset G$ Untergruppen mit $F \subset H \neq G$. Dann heißen F und H trennbar, wenn es einfache G -Moduln V gibt mit folgender Eigenschaft: In V gibt es nicht triviale Fixpunkte unter H und außerdem noch nicht triviale Fixpunkte unter F , die nicht fix unter ganz H sind.

LEMMA 3: *Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe, F und H seien Untergruppen. Es sei $F \subset H$ und H sei zusammenhängend. Dann sind äquivalent:*

- (1) F und H sind trennbar.
- (2) Die Dimension eines Hauptorbits der natürlichen Operation von H auf G/H ist größer als die Dimension eines Hauptorbits der Einschränkung dieser Operation auf F .

BEWEIS: Das Lemma ist bei den gemachten Voraussetzungen (H zusammenhängend!) eine modifizierte Version des Lemma 4 in [13]. Für $x \in G$ sei ${}^xH = xHx^{-1}$. Wir betrachten die natürliche Operation von H und F auf G/H . Die Einbettung $FxH \hookrightarrow HxH$ der Orbits durch $xH \in G/H$ ist analytisch isomorph zur Einbettung $j_x: F/(F \cap {}^xH) \rightarrow H/(H \cap {}^xH)$, $y \cdot (F \cap {}^xH) \mapsto y \cdot (H \cap {}^xH)$ für $y \in F$. Man macht sich ohne Mühe klar, daß genau dann ein $x \in G$ existiert, so daß j_x nicht surjektiv ist, wenn die Bedingung (2) in unserem Lemma erfüllt ist. Das Lemma 4 in [13] liefert dann die Behauptung. Das folgende Lemma ermöglicht die Anwendung von Lemma 3.

LEMMA 4: *Sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und (G, H) sei ein Riemannsches symmetrisches Paar. Sei t der Rang von G/H als symmetrischem Raum. Dann ist die Dimension eines Hauptorbits der Operation von H auf G/H gleich $\dim G/H - t$.*

BEWEIS: Das Lemma ist ein Extrakt aus bekannten Tatsachen aus der Theorie der symmetrischen Räume. Es gibt einen maximalen Torus T (im Sinne von [17, VI, §1]) in G/H von der Dimension t und T schneidet jeden Orbit von H in G/H [17, VI, §1, Theorem 1.2]. Daraus folgt, daß $t \geq \dim G/H - \dim(\text{Hauptorbit})$ ist. Andererseits weiß man, daß jeder Orbit von H in G/H den Torus T nur in endlich vielen Punkten schneidet (das folgt z.B. aus [9, VII, §2, Proposition 2.2]). Daraus folgt, daß $\dim G/H \leq t + \dim(\text{Hauptorbit})$. Es folgt die Behauptung des Lemma. ■

Lemma 5 schließlich formuliert ein Kriterium für Sphärizität mit Hilfe des Begriffs der Trennbarkeit.

LEMMA 5: *Seien $F, H, G, F \subset H \subset G$, kompakte zusammenhängende Liegruppen und F sei der halbeinfache Anteil von H . Sei $H \subset G$ sphärisch. Dann ist F in G genau dann sphärisch, wenn F und H in G nicht trennbar sind.*

BEWEIS: Sind F und H trennbar, so folgt unmittelbar aus der Definition der Trennbarkeit, daß F nicht sphärisch ist in G . Sei umgekehrt F nicht sphärisch in G und sei V ein einfacher G -Modul, bei dem die Fixpunktmenge $F(F, V)$ von F mindestens 2-dimensional ist. Sei $H = F \cdot T$, T der torale Anteil von H . Dann operiert T auf $F(F, V)$. Die Vielfachheit eines Charakters von T beim T -Modul $F(F, V)$ ist höchstens gleich eins. Sei nämlich angenommen, χ sei ein Charakter von T mit einer Vielfachheit größer als eins in $F(F, V)$. Sei

dann V' ein einfacher G -Modul, der einen eindimensionalen H -Untermodul enthält, bei dem T via χ^{-1} operiert. Im einfachen G -Modul $V \cdot V'$, dessen höchstes Gewicht das Produkt der höchsten Gewichte von V und V' ist, gibt es dann nach Korollar 6 in [13] eine mindestens 2-dimensionale Fixpunktmenge unter H , was der Sphärität von H widerspricht. Es treten also zwei verschiedene Charaktere χ_1 und χ_2 von T beim T -Modul $F(F, V)$ auf. Sei diesmal V' ein einfacher G -Modul, bei dem ein eindimensionaler H -Untermodul auftritt, bei dem T via χ_1^{-1} operiert. Sei $V \cdot V'$ wie oben. Dann gibt es im einfachen G -Modul $V \cdot V'$ mindestens einen trivialen H -Modul und mindestens einen eindimensionalen H -Untermodul, bei dem T via $\chi_2 \cdot \chi_1^{-1}$ operiert. Also sind F und H trennbar. ■

Wir können nun die zu Beginn von 3. betrachteten Fälle klären:

1. BEHAUPTUNG: (1) Für $n \geq 1$ ist $SU(n) \times SU(n) \subset SU(2n)$ nicht sphärisch. Für $n > m \geq 1$ ist $SU(n) \times SU(m) \subset SU(m+n)$ sphärisch.
- (2) $SU(n) \subset SO(2n)$ ist sphärisch, falls n ungerade, und ist nicht sphärisch, falls n gerade.
- (3) $D_5 \subset E_6$ ist sphärisch.
- (4) $E_6 \subset E_7$ ist nicht sphärisch.

BEWEIS:

Vorbemerkung: Wir gehen nach folgendem Schema vor. Die fraglichen Untergruppen seien F , die Einskomponenten ihrer Normalisatoren seien H genannt. In allen Fällen ist $H = F \cdot S$, S ein eindimensionaler Torus, und H ist sphärisch in G als Untergruppe in einem Riemannschen symmetrischen Paar. Wir untersuchen, ob F und H trennbar sind oder nicht. Im ersten Fall ist F nicht sphärisch, im zweiten Fall hingegen sphärisch (Lemma 5). Die Trennbarkeit untersuchen wir mit Hilfe von Lemma 3. Dabei bestimmen wir die Dimension des Hauptorbites der Operation von H auf G/H mit Hilfe von Lemma 4 und den Angaben über den Rang von G/H in der Tabelle II [9, p. 354]. Den Hauptorbittyp der Operation von F auf G/H finden wir folgendermaßen: Wir betrachten die Operationen von H und von F im Tangentialraum im Punkt H von G/H . Die entsprechenden reellen Darstellungen von H bzw. F nennen wir zur Abkürzung die *relevanten* Darstellungen von H bzw. von F . Die relevante Darstellung von F ist die Einschränkung der relevanten Darstellung von H . Die Hauptisotropiegruppen der relevanten Darstellungen sind dann gleich den Hauptisotropiegruppen der Operationen von H bzw. von F auf G/H .

Wir schreiben $O(H)$ bzw. $O(F)$ für einen Hauptorbit der Operation von H bzw. von F auf G/H und $I(F)$ für eine Hauptisotropiegruppe der Operation von F auf G/H .

(1) Sei $F = SU(n) \times SU(m) \subset S(U(n) \times U(m)) = H \subset SU(n+m) = G$, $n \geq m \geq 1$. Es ist $\text{Rang } G/H = m$, $\dim G/H = 2mn$, also $\dim O(H) = 2mn - m$. Wir betrachten die übliche elementare Operation von $SU(n)$ auf dem \mathbb{C}^n und die zur elementaren Operation kontragrediente Operation von $SU(m)$ auf dem \mathbb{C}^m . Dann ist die relevante Operation von $SU(n) \times SU(m)$ äquivalent zur Reellifizierung des (komplexen) Tensorproduktes dieser beiden Darstellungen. Sei $S(U(1)^m)$ die Untergruppe der (t_1, t_2, \dots, t_m) mit $\prod_{i=1}^m t_i = 1$ in $U(1)^m \subset (\mathbb{C}^*)^m$. Nach Example 3 in [10, I, 1] ist dann $I(F)$ isomorph zu $SU(n-m) \times S(U(1)^m)$. Also ist $\dim I(F) = (n-m)^2 + (m-2)$ für $n > m$ und $\dim I(F) = m-1$ für $n = m$. Es folgt, daß $\dim O(F) = 2nm - m = \dim O(H)$ ist für $n > m \geq 1$ und daß $\dim O(F) = 2nm - m - 1 = \dim O(H) - 1$ ist für $n = m \geq 1$. Gemäß der Vorbemerkung folgt dann die Behauptung.

Wir wollen noch bemerken, daß sich die Tatsache, daß $F = SU(n) \times SU(n) \subset SU(2n) = G$ nicht sphärisch ist, auch elementar beweisen läßt. Sei nämlich $V = \mathbb{C}^{2n}$ ein elementarer G -Modul und $V = V_1 \oplus V_2$ eine direkte Summe von zwei n -dimensionalen Teilräumen, so daß der erste Faktor $SU(n)$ von F auf V_1 elementar und auf V_2 trivial operiert, während der zweite Faktor auf V_1 trivial und auf V_2 elementar operiert. Dann sind die äußeren Potenzen $A^n V_1$ und $A^n V_2$ linear unabhängige Geraden in $A^n V$, die beide fix unter F sind. Also besitzt die n -te Fundamentaldarstellung von G eine zwei-dimensionale Fixpunktmenge unter F und F ist nicht sphärisch in G .

(2) Sei $n \geq 3$ und $F = SU(n) \subset U(n) = H \subset SO(2n) = G$. Der Rang von G/H ist $[n/2]$ (größte ganze Zahl kleiner-gleich $n/2$) und es ist $\dim G/H = n(n-1)$. Also ist $\dim O(H) = n(n-1) - [n/2]$. Die relevante Darstellung von F ist die Reellifizierung der zweiten Fundamentaldarstellung von $F \simeq A_{n-1}$. Eine Hauptisotropiegruppe $I(F)$ dieser Darstellung ist isomorph zum Produkt von $[n/2]$ Exemplaren von $SU(2)$ [s. 10, I, 1]. Also ist $\dim I(F) = 3[n/2] = n + n/2$ für n gerade und $\dim I(F) = n + [n/2] - 1$ für n ungerade. Dann ist $\dim O(F) = \dim O(H)$ für n ungerade und $\dim O(F) = \dim O(H) - 1$ für n gerade. Es folgt die Behauptung. (Sie bleibt richtig auch für $n = 1$ und $n = 2$.)

(3) Sei $F = D_5 \subset U(1)$ $D_5 = H \subset E_6 = G$. Es ist $\text{Rang } G/H = 2$ und $\dim G/H = 32$, also $\dim O(H) = 30$. Die relevante Darstellung von F

ist die Reellifizierung einer Halbspindarstellung von D_5 . Die Hauptisotropiegruppe $I(F)$ ist ein $SU(4)$ [s. 10]. Es ist $\dim O(F) = 45 - 15 = 30 = \dim O(H)$. Also ist $D_5 = \text{Spin}(10) \subset E_6$ sphärisch.

(4) Man könnte den Fall $E_6 \subset E_7$ mit der gleichen Methode wie die vorangehenden behandeln. In Tabelle 4 in [14] (bzw. in der Tabelle 25 in [5]) liest man jedoch nach, daß die elementare 56-dimensionale Darstellung von E_7 bereits eine 2-dimensionale Fixpunktmenge unter E_6 hat. Also ist $E_6 \subset E_7$ nicht sphärisch. ■

Die folgende Behauptung klärt den Rest der Fälle aus der ersten Kandidatenliste am Ende von §2.

2. BEHAUPTUNG: (1) $SO(n-2) \subset SO(n)$ ist nicht sphärisch für $n \geq 3$.

(2) $\text{Sp}(n) \subset SU(2n+1)$ und $U(1) \cdot \text{Sp}(n) \subset SU(2n+1)$ sind sphärisch für $n \geq 1$.

(3) $U(n) \subset SO(2n+1)$ ist sphärisch für $n \geq 1$.

(4) $U(1) \times \text{Sp}(n-1) (\subset \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n-1)) \subset \text{Sp}(n)$ ist sphärisch für $n \geq 1$.

(5) $\text{Spin}(7) \subset SO(8)$, $SU(2) \cdot \text{Sp}(2) \subset SO(8)$ und $\text{Spin}(7) \subset SO(9)$ sind jeweils sphärisch.

(6) $G_2 \subset SO(7)$ und $G_2 \subset SO(8)$ sind beide sphärisch.

(7) $A_2 \subset G_2$ ist sphärisch.

BEWEIS: (1) ist klar, denn die elementare n -dimensionale Darstellung von $SO(n)$ hat eine 2-dimensionale Fixpunktmenge unter $SO(n-2)$. Sei G einfach und (G, H) ein Riemannsches symmetrisches Paar. Es ist bekannt, welche G -Moduln nicht triviale Fixpunkte unter H haben. Eine Beschreibung dieser Moduln findet man etwa in [21] oder in der Bonner Diplomarbeit [19]. Die dazu benötigten Diagramme, meistens Satake-Diagramme genannt, sind z.B. in [17, VII, 3.5] angegeben. Wir benutzen diese Ergebnisse im Folgenden.

(2) Die einfachen $SU(2n)$ -Moduln, welche nicht triviale Fixpunkte unter $\text{Sp}(n)$ haben, sind genau diejenigen, deren höchstes Gewicht Monom in den geraden Fundamentaldarstellungen π_{2i} , $i = 1, 2, \dots, n-1$ [s. 27]. Für den Moment seien solche Moduln *brauchbare* $SU(2n)$ -Moduln genannt. Man weiß außerdem, wie sich einfache Moduln über $SU(2n+1)$ auf $SU(2n)$ ausreduzieren [s. 2, V, §6]. Die Anzahl der trivialen $\text{Sp}(n)$ -Komponenten in einem einfachen $SU(2n+1)$ -Modul ist

1)-Modul V erhält man dann auf folgende Weise: Man betrachtet V als $SU(2n)$ -Modul und zählt die brauchbaren Komponenten bei einer direkten Zerlegung in einfache $SU(2n)$ -Komponenten. Führt man dies aus, so stellt sich heraus, daß in jedem einfachen $SU(2n+1)$ -Modul genau eine brauchbare $SU(2n)$ -Komponente existiert. Da $\mathrm{Sp}(n) \subset SU(2n)$ Riemannsch symmetrisch, also sphärisch ist, ist die Fixpunktmenge von $\mathrm{Sp}(n)$ in jedem einfachen $SU(2n+1)$ -Modul genau eindimensional. Insbesondere ist $\mathrm{Sp}(n)$ in $SU(2n+1)$ sphärisch.

Natürlich ist dann auch der Normalisator $U(1) \cdot \mathrm{Sp}(n)$ sphärisch in $SU(2n+1)$. Wir wollen uns noch überlegen, welche einfachen $SU(2n+1)$ -Moduln nicht triviale Fixpunkte unter $U(1) \cdot \mathrm{Sp}(n)$ besitzen. Man betrachte den elementaren $SU(2n+1)$ -Modul und darin die Operation von $U(1) \cdot \mathrm{Sp}(n)$. Der Faktor $U(1)$ operiere auf dem $2n$ -dimensionalen Unterraum, auf dem $\mathrm{Sp}(n)$ elementar operiert, vermöge dem Charakter λ^{-1} . Dann operiert $U(1)$ auf dem eindimensionalen Fixraum von $\mathrm{Sp}(n)$ vermöge λ^{2n} . Man rechnet nun aus, daß bei der (einzigsten) brauchbaren $SU(2n)$ -Komponente im einfachen $SU(2n+1)$ -Modul V vom Isomorphietyp $\pi_1^{k_1}, \pi_2^{k_2}, \dots, \pi_{2n}^{k_{2n}}$ der zentralisierende Faktor $U(1)$ vermöge λ^z operiert, wo $z = \sum_{i=0}^{n-1} 2(n-i) \cdot k_{2i+1} - \sum_{i=1}^n 2i \cdot k_{2i}$ ist. Nicht triviale Fixpunkte unter $U(1) \cdot \mathrm{Sp}(n)$ gibt es in V also genau dann, wenn $z = 0$ ist.

(3) Ein einfacher D_n -Modul, $n \geq 3$ hat nicht triviale Fixpunkte unter $U(n)$ genau dann, wenn sein höchstes Gewicht Monom in folgenden Gewichten ist: in $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{n-3}, \pi_{n-1} \cdot \pi_n$ falls n ungerade, und in $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{n-2}, \pi_n^2$ falls n gerade ist (im letzten Fall kann π_n^2 auch durch π_{n-1}^2 ersetzt werden, je nach Art der Einbettung $U(n) \subset SO(2n)$, aber das spielt bei den folgenden Überlegungen keine Rolle). Ähnlich wie in (2) rechnet man folgendes aus: Ein B_n -Modul (es ist $SO(2n+1) \simeq B_n$) mit höchstem Gewicht $\pi_1^{k_1} \cdot \pi_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \pi_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \pi_n^{k_n}$ hat genau dann nicht triviale Fixpunkte unter $U(n)$, wenn k_n gerade ist und die Fixpunktmenge von $U(n)$ ist dann eindimensional. Also ist $U(n) \subset SO(2n+1)$ sphärisch. Diese Behauptung bleibt richtig auch für $n = 1$ und 2 .

(4) Es ist bekannt, wie sich $\mathrm{Sp}(n)$ -Moduln über $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n-1)$ ausreduzieren. Siehe z.B. [16] oder [24, §13.4]. Ein $\mathrm{Sp}(n)$ -Modul hat genau dann Fixpunkte unter $\mathrm{Sp}(n-1)$, wenn sein höchstes Gewicht von der Form $\pi_1^{k_1} \cdot \pi_2^{k_2}$ ist. Als Modul über dem ersten Faktor $\mathrm{Sp}(1)$ von $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(n-1)$, d.h. als A_1 -Modul, ist dann die Fixpunktmenge von $\mathrm{Sp}(n-1)$ einfach und vom höchsten Gewicht π^{k_1} . Als Ergebnis

erhalten wir: $U(1) \times \mathrm{Sp}(n-1)$ hat eine höchstens eindimensionale Fixpunktmenge bei einfachen $\mathrm{Sp}(n)$ -Moduln. Die Fixpunktmenge ist genau dann nicht trivial, wenn das höchste Gewicht des $\mathrm{Sp}(n)$ -Moduls gleich $\pi_1^{2k_1} \cdot \pi_2^{k_2}$ ist, wo $k_1, k_2 \geq 0$ natürliche Zahlen sind.

(5) Sei $p: \mathrm{Spin}(8) \rightarrow \mathrm{SO}(8)$ die Überlagerungsabbildung. Es ist bekannt, daß sich in $\mathrm{Spin}(8)$ die zusammenhängenden Untergruppen, die bei p auf $\mathrm{Spin}(7)$ und auf $\mathrm{SO}(7)$ abgebildet werden, nur durch einen (äußeren) Automorphismus von $\mathrm{Spin}(8)$ unterscheiden. Da $\mathrm{SO}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$ sphärisch ist, ist also auch $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$ sphärisch.

Entsprechend gilt: Die Untergruppen, die bei p auf $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(5)$ bzw. auf $\mathrm{SU}(2) \cdot \mathrm{Sp}(2)$ abgebildet werden, unterscheiden sich nur durch einen Automorphismus von $\mathrm{Spin}(8)$. Mit $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(5) \subset \mathrm{SO}(8)$ (Riemannsch symmetrisch!) ist also auch $\mathrm{SU}(2) \cdot \mathrm{Sp}(2)$ sphärisch in $\mathrm{SO}(8)$.

Nun zu $F = \mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8) = H \subset \mathrm{SO}(9) = G$. Genau diejenigen einfachen D_4 -Moduln haben nicht triviale Fixpunkte unter $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$, deren höchstes Gewicht Potenz einer festen Halbspindarstellung, also etwa von der Form π_4^k sind. Welche einfachen B_4 -Moduln enthalten nun solche "brauchbaren" D_4 -Komponenten. Ähnlich wie in (3) rechnet man mit Hilfe des Verzweigungssatzes für $D_4 \subset B_4$ aus, daß dies gerade diejenigen einfachen B_4 -Moduln sind, deren höchstes Gewicht von der Form $\pi_1^{k_1} \cdot \pi_4^{k_4}$ sind. Sie haben nur eine brauchbare Komponente. Also ist $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(9)$ sphärisch.

(6) Man kennt die volle Ausreduzierung von B_3 auf G_2 . Nur die einfachen B_3 -Moduln mit höchstem Gewicht π_3^k haben echte Fixpunkte unter G_2 und die Dimension der Fixpunktmenge ist dabei gleich eins. Siehe dazu [20] oder die Bonner Diplomarbeit [1]. Also ist $G_2 \subset B_3$ sphärisch.

Beim Fall $G_2 \subset \mathrm{SO}(8)$ haben wir nun zu untersuchen, welche einfachen D_4 -Moduln brauchbare B_3 -Komponenten, d.h. einfache B_3 -Untermodule vom Isomorphietyp π_3^k besitzen. Es stellt sich heraus, daß dies gerade die D_4 -Moduln mit höchstem Gewicht $\pi_1^{k_1} \cdot \pi_3^{k_3} \cdot \pi_4^{k_4}$ sind. solche D_4 -Moduln enthalten genau einen brauchbaren B_3 -Untermodule. Also ist $G_2 \subset \mathrm{SO}(8)$ sphärisch.

(7) Man weiß, wie sich einfache G_2 -Modul auf A_2 ausreduzieren, [s. 18] oder die Diplomarbeit [8]. Es sind genau die G_2 -Moduln mit höchstem Gewicht $\pi_1^{k_1}$. Sie haben eindimensionale Fixpunktmenge unter A_2 . ■

Es bleibt noch die Untersuchung der Fälle, die in den beiden Reihen der 2. Kandidatenliste am Ende von 2. aufgeführt sind.

3. BEHAUPTUNG: Sei $F = \mathrm{SO}(m) \times H_2 \subset \mathrm{SO}(m+n) = G$, $m \geq 2$, $n \geq 5$, bzw. sei $F = \mathrm{Sp}(m) \times H_2 \subset \mathrm{Sp}(m+n) = G$ wie in der zweiten Kandidatenliste am Ende von Abschnitt 2. Im Falle $F = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(10) = G$ ist F sphärisch in G . In allen anderen Fällen ist F nicht sphärisch in G .

BEWEIS: Sei $H = \mathrm{SO}(m) \times \mathrm{SO}(n)$ bzw. $H = \mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(n)$, wobei F auf die offensichtliche Weise in H eingebettet ist.

(1) Zuerst sei angenommen, daß $H_2 \subset \mathrm{SO}(n)$ bzw. $H_2 \subset \mathrm{Sp}(n)$ nicht sphärisch sei. Dann gibt es einfache H -Moduln W , bei denen der erste Faktor $\mathrm{SO}(m)$ bzw. $\mathrm{Sp}(m)$ trivial operiert und bei dem die Fixpunktmenge $F(F, W)$ eine Dimension größer-gleich 2 hat. Nach [3, VI, §VII, Prop. 4] gibt es einfache G -Moduln V , so daß zu einem H -Untermodul von $V|_H$ isomorph ist. Dann ist auch $\dim F(F, V) \geq 2$ und F ist nicht sphärisch in G .

(2) Nach (1) brauchen wir nur noch diejenigen $F \subset G$ zu untersuchen, bei denen $H_2 \subset \mathrm{SO}(n)$ bzw. $H_2 \subset \mathrm{Sp}(n)$ sphärisch ist. Berücksichtigt man die zusätzlichen Bedingungen an $H_2 \subset \mathrm{SO}(n)$ bzw. $H_2 \subset \mathrm{Sp}(n)$ – s. den 2. Teil der Liste am Ende von §2 –, so zeigen unsere bisherigen Ergebnisse, daß der symplektische Fall überhaupt ausscheidet und daß auch im reellen Fall nur die beiden folgenden Möglichkeiten für $H_2 \subset \mathrm{SO}(n)$ übrigbleiben: $H_2 = G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ und $H_2 = \mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$.

(a) Sei der Fall $F = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(8) \subset \mathrm{SO}(10) = G$ betrachtet. Ein einfacher D_4 -Modul ($\mathrm{SO}(8) \simeq D_4$) hat genau dann nicht triviale Fixpunkte unter $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$, wenn sein höchstes Gewicht eine Potenz π_4^k des Halbspingewichts π_4 ist (je nach Einbettung von $\mathrm{Spin}(7)$ in $\mathrm{SO}(8)$ kann auch π_3 die Rolle von π_4 übernehmen). Solche D_4 -Moduln sollen wiederum brauchbar heißen. Die Dimension der Fixpunktmenge von F bei einem einfachen G -Modul V stellt man dann folgendermaßen fest: Man zerlegt V in die direkte Summe von einfachen $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(8)$ -Komponenten und zählt dabei diejenigen Summanden, bei denen der Faktor $\mathrm{SO}(2)$ trivial und der Faktor $\mathrm{SO}(8)$ brauchbar operiert. Diese Anzahl ist dann gleich der gesuchten Dimension der Fixpunktmenge. Die klassische Zerlegung von D_5 -Moduln in D_4 -Moduln liefert folgendes: Ein einfacher D_5 -Modul hat genau dann brauchbare D_4 -Komponenten, wenn er vom Isomorphietyp $\pi_1^{k_1} \cdot \pi_2^{k_2} \cdot \pi_4^{k_4} \cdot \pi_5^{k_5}$ ist. Man rechnet aus, daß unter diesen

brauchbaren Komponenten höchstens eine ist, bei welcher der Faktor $SO(2)$ trivial operiert, und zwar gibt es eine solche Komponente genau dann, wenn $2 \cdot k_1 \geq |k_4 - k_5|$ und $2 \cdot k_1 - (k_4 - k_5) \equiv 0 \pmod{4}$ ist. Insbesondere ist $F \subset G$ sphärisch.

(b) Wir betrachten nun die Fälle $F = SO(m) \times G_2 \subset SO(m+n)$ und $n = 7$ bzw. $F = SO(m) \times Spin(7) \subset SO(m+n)$ und $n = 8$, aber $F \neq SO(2) \times Spin(7)$. Wegen der notwendigen Bedingung des Satzes 4 können wir dann $m > n$ annehmen. Wir argumentieren wie im Beweis der 1. Behauptung und gebrauchen auch die dortigen Bezeichnungen. Sind β_m und β_n die elementaren reellen Darstellungen von $SO(m)$ bzw. von $SO(n)$ und ist ρ die Einbettung $H_2 \hookrightarrow SO(n)$, so ist die relevante Darstellung von $SO(m) \times SO(n)$ gleich dem (Tensor-)Produkt $\beta_m \cdot \beta_n$ von β_m und β_n und die relevante Darstellung von F ist das Produkt $\beta_m \cdot \rho$. Somit ergibt sich [s. etwa 10, I.1], daß die Einskomponenten der Hauptisotropiegruppen beider relevanten Darstellungen isomorph zu $SO(m-n)$ sind. Dann haben aber die Hauptorbits $O(F)$ und $O(SO(m) \times SO(n))$ verschiedene Dimension. Nach Lemma 3 sind F und $SO(m) \times SO(n)$ trennbar in G und F ist nicht sphärisch. ■

Wir sind nun in der Lage, eine vollständige Liste (bis auf lokale Isomorphie) der zusammenhängenden sphärischen Untergruppen H in den einfachen kompakten Liegruppen G zu geben.

Zur Leseweise der Tabelle zum folgenden Hauptsatz: In der *ersten Spalte* der Tabelle zum folgenden Hauptsatz steht die Untergruppe H , in der *zweiten Spalte* die Gruppe G . In der *dritten Spalte* stehen Angaben zu den ganzzahligen Parametern, die bei klassischen Gruppen H und G auftreten. Dabei haben wir aus Kohärenzgründen auch Werte zugelassen, die für G keine einfachen Gruppen liefern – sondern z.B. $SO(2)$, $SO(4)$ – wenn die Aussage auch dann richtig ist. In der *vierten Spalte* beschreiben wir die Einbettung von H , indem wir die Einschränkung ρ der elementaren Darstellung von G auf H angeben. Dabei bedeuten α_n , β_n und γ_n die elementaren (komplexen) Darstellungen von $U(n)$, $SO(n)$ und $Sp(n)$, $n \geq 1$. Außerdem bedeutet π_n die Spindarstellung für $H = Spin(2n+1) \simeq B_n$ und eine Halbspindarstellung für $H = Spin(2n) \simeq D_n$. Für die Ausnahmegruppen gebrauchen wir die Bezeichnungen des Beginns von §2 und geben den Isomorphietyp der Einbettung. Bei $H = U(1) \cdot Spin(10) \subset E_6$ und $H = U(1) \cdot E_6 \subset E_7$ geben wir der Einfachheit halber nur die Einbettung von $Spin(10)$ bzw. von E_6 an. Bei Produkten (direkten oder fast-direkten) versehen wir Darstellungen und Gewichte des zweiten Fak-

tors mit einem Akzent. Zur Bedeutung der *fünften Spalte* siehe die Anmerkung nach dem Hauptsatz.

HAUPTSATZ: *Eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe H in einer einfachen kompakten zusammenhängenden Liegruppe G ist genau dann sphärisch, wenn $H \subset G$ (bis. auf lokale Isomorphie) in der Tabelle auf den folgenden drei Seiten aufgeführt ist.*

ANMERKUNG: Einfache G -Moduln, welche nicht triviale Fixpunkte unter H besitzen, seien sphärische G -Moduln (Bezüglich $H \subset G$) genannt. Die fünfte Spalte der Tabelle gibt die sphärischen G -Moduln an: Im allgemeinen steht in der fünften Spalte eine Reihe von konkreten dominanten Gewichten. Dann sind die sphärischen G -Moduln genau diejenigen, deren Höchstgewicht ein Monom in den Gewichten der fünften Spalte ist. Bei zwei Fällen, $SO(2) \times Spin(7) \subset SO(10)$ und $U(1) \cdot Sp(n) \subset SU(2n+1)$, steht in der fünften Spalte direkt der allgemeine Typ des Höchstgewichts eines sphärischen G -Moduls.

Zu der Tabelle lese man auch die Bemerkung 1 in [14] nach, die auch hier gültig ist. Der Hauptsatz ist bereits bewiesen.

BEWEIS DER ANMERKUNG: (1) Für die (G, H) , die Riemannsche symmetrische Paare sind, ist die Aussage der Anmerkung eine Reformulierung der Ergebnisse in [21]. Für diejenigen $H \subset G$, welche in der 2. Behauptung behandelt worden sind und für den Fall $SO(2) \times Spin(7) \subset SO(10)$ ist unsere Aussage beim Beweis der Sphärizität mitbewiesen worden.

(2) Es bleiben noch die Fälle aus der ersten Behauptung übrig:

(a) Zuerst zeigen wir, daß einfache G -Moduln, deren höchste Gewichte Monome in den Gewichten der fünften Spalte der Tabelle sind, tatsächlich nichttriviale Fixpunkte unter H besitzen. Für $H = SU(n) \times SU(m) \subset SU(n+m) = G$, $n > m \geq 1$, muß man dazu zeigen, daß die Darstellungen mit höchstem Gewicht π_n und höchstem Gewicht π_m solche Fixpunkte haben. Das sieht man jedoch sofort ein, wenn man die entsprechenden Darstellungen als n -te bzw. m -te äußere Potenz der elementaren Darstellung von $SU(n+m)$ interpretiert.

Für $H = SU(n) \subset SO(2n)$, n ungerade, hat man zu zeigen, daß beide Halbspindarstellungen von D_n echte Fixpunkte unter H besitzen. Das ist tatsächlich der Fall. Denn man weiß, daß die sogenannten reinen

TABELLE 1: Die zusammenhängenden sphärischen Untergruppen in den einfachen kompakten Liegruppen.

H	G	für	ρ
SO(n)	SU(n)	$n \geq 2$	β_n $\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_{n-1}^2$
SU(n) \times U(m)	SU($n+m$)	$n > m \geq 1$	$(\alpha_n + \alpha'_m) _H$ $\pi_1 \cdot \pi_{n+m-1}, \pi_2 \cdot \pi_{n+m-2}, \dots, \pi_m \cdot \pi_n$
S(U(n) \times U(n))	SU($2n$)	$n \geq 1$	$(\alpha_n + \alpha'_n) _H$ $\pi_1 \cdot \pi_{2n-1}, \pi_2 \cdot \pi_{2n-2}, \dots, \pi_{n-1} \cdot \pi_{n+1}, \pi_n^2$
SU(n) \times SU(m)	SU($n+m$)	$n > m \geq 1$	$(\alpha_n + \alpha'_m) _H$ $\pi_1 \cdot \pi_{n+m-1}, \pi_2 \cdot \pi_{n+m-2}, \dots, \pi_{m-1} \cdot \pi_{n+1}, \pi_m, \pi_n$
Sp(n)	SU($2n$)	$n \geq 2$	γ_n $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{2k}, \dots, \pi_{2n-2}$
Sp(n)	SU($2n+1$)	$n \geq 1$	$\gamma_n + 1$ $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2n}$
U(1) \cdot Sp(n)	SU($2n+1$)	$n \geq 1$	$\lambda \cdot \gamma'_n + \lambda^{-2n}$ $\pi_1^{k_1} \cdot \pi_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \pi_n^{k_n}$ mit $\sum_{i=0}^{n+1} 2 \cdot (n-i) \cdot k_{2i+1} - \sum_{i=1}^n 2i \cdot k_{2i} = 0$
U(n)	SO($2n$)	$n \geq 2$	$\alpha_n + \bar{\alpha}_n$ $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{n-2}, \pi_n^2$ für n gerade $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{n-3}, \pi_{n-1} \cdot \pi_n$ für n ungerade
SU(n)	SO($2n$)	$n \geq 3$ n ungerade	$(\alpha_n + \bar{\alpha}_n) _H$ $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{n-3}, \pi_{n-1}, \pi_n$
U(n)	SO($2n+1$)	$n \geq 2$	$\alpha_n + \bar{\alpha}_n + 1$ $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n^2$
SO(n) \times SO(m)	SO($n+m$)	$n \geq m \geq 1$	$\beta_n + \beta'_m$ $\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_{m-1}^2, \pi_m$ falls $n+m$ ungerade oder $m < \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor - 1$ $\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_{r-2}^2, \pi_{r-1} \pi_r$ falls $m+n = 2r$ und $m = r-1$
SO(r) \times SO(r)	SO($2r$)	$r \geq 2$	$\beta_r + \beta'_r$ $\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_{r-2}^2, \pi_{r-1}^2, \pi_r^2$
Spin 7	SO(8)		π_3 π_4
Spin 7	SO(9)		$\pi_3 + 1$ π_1, π_4
G_2	SO(7)		π_1 π_3
G_2	SO(8)		$\pi_1 + 1$ π_1, π_3, π_4
SU(2) \cdot Sp(2)	SO(8)		$\alpha_2 \cdot \gamma_2'$ $\pi_4^2, \pi_3^2, \pi_1 \pi_3$
SO(2) \times Spin(7)	SO(10)		$\beta_2 + \pi_3'$ $\pi_1^{k_1} \cdot \pi_2^{k_2} \cdot \pi_3^{k_3} \cdot \pi_4^{k_4} \cdot \pi_5^{k_5}$ mit $2k_1 \geq k_4 - k_5 $ und $2k_1 - (k_4 - k_5) \equiv 0 \pmod 4$
U(n)	Sp(n)	$n \geq 1$	$\alpha_n + \bar{\alpha}_n$ $\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_n^2$
Sp(n) \times Sp(m)	Sp($n+m$)	$n \geq m \geq 1$	$\gamma_n + \gamma'_m$ $\pi_2, \pi_4, \dots, \pi_{2m}$
U(1) \times Sp($n-1$)	Sp(n)	$n \geq 1$	$\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 + \gamma'_{n-1}$ π_1^2, π_2
A_2	G_2		$\pi_1 + \pi_2 + 1$ π_1
$A_1 \times A_1$	G_2		$\pi^2 + \pi \cdot \pi'$ π_1^2, π_2^2
B_4	F_4		$1 + \pi_1 + \pi_4$ π_1
$C_3 \times A_1$	F_4		$\pi_2 + \pi_1 \cdot \pi'$ $\pi_1^2, \pi_2^2, \pi_3^2, \pi_4^2$
C_4	E_6		π_2 $\pi_i^2, i = 1, 2, \dots, 6$
F_4	E_6		$1 + \pi_1$ π_1, π_5
D_5	E_6		$1 + \pi_1 + \pi_5$ π_1, π_5, π_6
U(1) $\cdot D_5$	E_6		regulär $\pi_1 \pi_5, \pi_6$
$A_5 \times A_1$	E_6		$\pi_4 + \pi_1 \cdot \pi'$ $\pi_1 \pi_5, \pi_4, \pi_3^2, \pi_6^2$
U(1) $\cdot E_6$	E_7		E_6 durch π_1^2, π_2, π_6 $1 + 1 + \pi_1 + \pi_5$
A_7	E_7		$\pi_2 + \pi_6$ $\pi_i^2, i = 1, 2, \dots, 7$
$D_6 \times A_1$	E_7		$\pi_6 + \pi_1 \cdot \pi'$ $\pi_2, \pi_4, \pi_3^2, \pi_6^2$
D_8	E_8		$\pi_2 + \pi_8$ $\pi_i^2, i = 1, 2, \dots, 8$
$A_1 \times E_7$	E_8		$\pi \cdot \pi_1' + \pi^2$ $\pi_1^2, \pi_2^2, \pi_3, \pi_7$ $+ \pi_6^2$

Spinoren [s. 4, III] gerade die Untergruppen vom Typ $SU(n)$ als Isotropiegruppen haben.

Für $H = D_5 \subset E_6 = G$ ist bekannt, daß die Darstellung von E_6 mit dem höchsten Gewicht π_1 und damit auch die Darstellung mit dem höchsten Gewicht π_5 nicht triviale Fixpunkte unter H besitzt.

(b) Es bleibt zu zeigen, daß außer den einfachen G -Moduln, deren höchste Gewichte Monome in den Gewichten der fünften Spalte sind, keine anderen einfachen G -Moduln echte Fixpunkte unter H besitzen. Sei $H = SU(n) \subset H' = U(n) \subset SO(2n) = G$ und n ungerade bzw. sei $H = Spin(10) \subset H' = U(1) \cdot Spin(10) \subset E_6 = G$. Sei V ein einfacher G -Modul mit höchstem Gewicht λ , der echte Fixpunkte unter H besitzt. Auf der Fixpunktmenge $F(H, V)$ von H in V operiert der zentrale Torus T in $H' = H \cdot T$ vermöge eines Charakters χ . Auf der Fixpunktmenge $F(H, V^*)$ von H bei dem zu V kontragredienten Modul V^* operiert T vermöge χ^{-1} . Sei λ^* das höchste Gewicht von V^* und $V \cdot V^*$ sei ein einfacher G -Modul mit höchstem Gewicht $\lambda \cdot \lambda^*$. Dann hat $V \cdot V^*$ echte Fixpunkte unter H' . Also muß $\lambda \cdot \lambda^*$ Monom in den Gewichten der fünften Spalte für $H' \subset G$ sein. Man sieht aber sofort, daß dies nur möglich ist, wenn λ Monom in den Gewichten der fünften Spalte von H ist.

Sei schließlich $H = SU(n) \times SU(m) \subset H' = S(U(n) \times U(m)) \subset SU(n+m) = G$, $n > m \geq 1$. Sei V ein einfacher G -Modul mit höchstem Gewicht λ und V habe nicht triviale Fixpunkte unter H . Auf $F(H, V)$ operiert der zentrale Torus T von H' vermöge eines Charakters χ . Dann gibt es eine Potenz λ^k von λ und eine Potenz μ von π_n oder von π_m , so daß beim einfachen G -Modul V' mit höchstem Gewicht μ der Torus T via χ^{-k} auf der Fixpunktmenge von H operiert. Dann hat aber der einfache G -Modul $V^k \cdot V'$ mit höchstem Gewicht $\lambda^k \cdot \mu$ echte Fixpunkte unter H' , d.h. $\lambda^k \cdot \mu$ ist Monom in den Gewichten der fünften Spalte für den Fall $H' \subset G$. Da μ Potenz von π_n oder π_m ist, ist das nur möglich, falls λ^k und damit λ bereits Monom in den Gewichten der fünften Spalte von $H \subset G$ ist. Das war zu zeigen.

Bemerkung 2: (1) Wir wollen auf folgende bemerkenswerte Eigenschaft der Untergruppe $H = Sp(n)$ in $G = SU(2n+1)$ hinweisen. Jeder einfache G -Modul hat eine genau eindimensionale Fixpunktmenge unter H ! Entsprechend gilt: Jeder einfache $SO(2n+1)$ -Modul hat eine genau eindimensionale Fixpunktmenge unter $U(n)$. Dabei ist mit $SO(2n+1)$ -Modul ein wirklicher $SO(2n+1)$ -Modul gemeint und kein treuer $Spin(2n+1)$ -Modul. Letztere haben keine nicht trivialen Fixpunkte unter dem gelifteten $U(n)$.

Die Untergruppen $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n+1)$ und $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{SO}(2n+1)$ sind die einzigen Untergruppen in einfachen kompakten Liegruppen mit der beschriebenen Eigenschaft.

(2) Viele sphärische Paare, die nicht Riemannsch symmetrisch sind, liefern denselben homogenen Raum wie ein Riemannsches symmetrisches Paar. So ist z.B. $G_2/A_2 \cong \mathrm{SO}(7)/\mathrm{SO}(6)$, $\mathrm{Spin}(7)/G_2 \cong \mathrm{SO}(8)/\mathrm{SO}(7)$ usw. Die Sphärizität ist jedoch keine Eigenschaft des homogenen Raumes, sondern eine Eigenschaft des Paares $H \subset G$, wie folgendes Beispiel zeigt: Die $(4k-1)$ -dimensionale Sphäre, $k \geq 1$, ist z.B. als homogener Raum isomorph zu $\mathrm{SO}(4k)/\mathrm{SO}(4k-1)$ bzw. zu $\mathrm{SU}(2k)/\mathrm{SU}(2k-1)$ und isomorph zu $\mathrm{Sp}(k)/\mathrm{Sp}(k-1)$. Während jedoch $\mathrm{SO}(4k-1) \subset \mathrm{SO}(4k)$ für $k \geq 1$ und $\mathrm{SU}(2k-1) \subset \mathrm{SU}(2k)$ für $k \geq 2$ sphärisch sind, ist $\mathrm{Sp}(k-1)$ nicht sphärisch in $\mathrm{Sp}(k)$ für $k \geq 1$.

Anrdererseits gibt es sphärische Paare (G, H) , so z.B. $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n+1)$, so daß der homogene Raum nicht zum homogenen Raum eines Riemannschen symmetrischen Paares isomorph ist. Dies regt zur Frage an, ob sich eventuell die Sphärizität von $H \subset G$ durch eine zusätzliche geometrische Eigenschaft des homogenen Raumes G/H charakterisieren läßt (über die Eigenschaft aus dem Satz 3 hinaus).

(3) Für Riemannsche symmetrische Paare $H \subset G$ gibt es eine reiche und bedeutende Theorie der Funktionen auf G/H . Als Stichworte seien genannt: harmonische Funktionen, sphärische Funktionen usw. Siehe z.B. das letzte Kapitel in [9]. Es wäre unserer Meinung nach sehr interessant zu untersuchen, inwieweit sich diese Theorien auf sphärische Paare verallgemeinern lassen.

4. Zum Fall nicht einfacher Gruppen G

Wir wollen noch kurz ein paar Worte zum Fall nicht einfacher Gruppen G sagen. Sei $G = S \times T$ das direkte Produkt einer halbeinfachen Gruppe S mit einem Torus T . Es ist leicht einzusehen, daß dann $H \subset G$ genau dann sphärisch ist, wenn die Projektion von H auf S sphärisch ist. Wir können also annehmen, G sei halbeinfach und, im Hinblick auf Satz 1 (1), G sei das direkte Produkt $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ von einfachen Gruppen. Eine wichtige notwendige Bedingung für Sphärizität ist offenbar folgende: Für $\{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ sei $\mathrm{pr}_{i_1 i_2 \dots i_s}$ die natürliche Projektion von G auf $G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_s}$. Ist dann $H \subset G$ sphärisch, so auch $\mathrm{pr}_{i_1 i_2 \dots i_s}(H)$ in $G_{i_1} \times G_{i_2} \times \cdots \times G_{i_s}$. Insbesondere sind dann alle $\mathrm{pr}_i(H)$ sphärisch in G_i für $i = 1, 2, \dots, k$, d.h. die Klassifikation der sphärischen Untergruppen in den einfachen Gruppen ist auch hier von ausschlaggebender Bedeutung. Man muß

nun noch untersuchen, "wie sehr diagonal" eine Untergruppe sein darf, um noch sphärisch zu sein. Dabei ist von Nutzen, daß die Dimensionsabschätzung des Satzes 4 auch für halbeinfache G gültig ist.

Sei $D^n G \subset G \times G \times \cdots \times G$ (n Faktoren) die Diagonale $\{(x, x, \dots, x) \mid x \in G\}$. Man hat dann folgendes Ergebnis:

Sei G einfach. Ist $G \simeq A_1$, so sind $D^2 G \subset G \times G$ und $D^3 G \subset G \times G \times G$ sphärisch und $D^n G$ ist nicht sphärisch in $\Pi_1^n G$ für $n \geq 4$. Ist $G \neq A_1$, so ist $D^2 G \subset G \times G$ sphärisch und $D^n G$ nicht sphärisch in $\Pi_1^n G$ für $n \geq 3$.

Die Nicht-Sphärizität folgt jeweils aus der Dimensionsabschätzung. Die Sphärizität läßt sich in den jeweiligen Fällen leicht nachweisen.

Soweit einige Resultate für halbeinfache G . Es ist uns jedoch bisher nicht gelungen, die Klassifikation in diesem Falle vollständig zu lösen. Wir wollen unsere Schwierigkeiten an folgenden Beispielen demonstrieren: Seien G_1 und G_2 Gruppen. Sei $DG_1 = D^2 G_1 \subset G_1 \times G_1$ die Diagonale. Sei ferner G_3 eine weitere Gruppe und $G_1 \times G_2$ sei Untergruppe von G_3 . Dann sei $H = DG_1 \times G_2$ die Untergruppe in $G_1 \times G_3$, gegeben durch $DG_1 \times G_2 \subset (G_1 \times G_1) \times G_2 = G_1 \times (G_1 \times G_2) \subset G_1 \times G_3$.

Wir betrachten folgende Fälle:

(1) Sei $G_3 = E_6$, $G_1 \simeq A_1$ und $G_2 \simeq A_5$. Dann ist $A_1 \times A_5 \subset E_6$ und wir betrachten $H = DA_1 \times A_5 \subset A_1 \times E_6 = G$.

(2) Sei $G_3 \simeq E_7$, $G_1 \simeq A_1$ und $G_2 \simeq D_6$. Es ist $A_1 \times D_6 \subset E_7$. Sei dann $H = DA_1 \times D_6 \subset A_1 \times E_7 = G$.

(3) Sei $G_3 \simeq E_8$, $G_1 \simeq A_1$ und $G_2 \simeq E_7$. Betrachte $H = DA_1 \times E_7 \subset A_1 \times E_8 = G$.

(4) Sei $G_3 = \text{Sp}(n+1)$, $n \geq 1$, $G_1 = \text{Sp}(1)$ und $G_2 = \text{Sp}(n)$. Betrachte $H = D(\text{Sp}(1)) \times \text{Sp}(n) \subset \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n+1) = G$.

Problem: Ist in den Fällen (1), (2) und (3) die Untergruppe H sphärisch in G ? Wir kennen im Augenblick keinen Weg, um dieses Problem zu lösen. Vieles läßt vermuten, daß in den 3 Fällen H nicht sphärisch ist in G . Daß bei dieser Vermutung jedoch Vorsicht geboten ist, zeigt das Beispiel (4). Es läßt sich nämlich beweisen, daß in diesem Falle H sphärisch ist in G .

LITERATUR

- [1] G. BEISEL: Diplomarbeit. Bonn (1975).
 [2] H. BOERNER: *Darstellungen von Gruppen*. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955)

- [3] C. CHEVALLEY: *Theory of Lie groups*. Princeton University Press, Princeton (1946).
- [4] C. CHEVALLEY: *The algebraic theory of spinors*. Columbia University Press, New York (1954).
- [5] E.B. DYNKIN: Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Am. Math. Soc. Translations*, series 2, 6 (1957) 111–244.
- [6] I. GELFAND: Spherical functions on symmetric Riemann spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 70 (1950) 5–8.
- [7] R. GODEMENT: A theory of spherical functions, *Transactions Am. Math. Soc.*, 73 (1952) 496–556.
- [8] V. HAUSCHILD: “Einige Folgerungen aus Kostants Multiplizitätenformel”. Diplomarbeit. Bonn (1970).
- [9] S. HELGASON: *Differential geometry and symmetric spaces*. Academic Press, New York–London (1962).
- [10] W.-C. HSIANG and W.-Y. HSIANG: Differentiable actions of compact connected classical groups II, *Ann. of Math.*, 92 (1970) 189–223.
- [11] A.U. KLIMYK: Decomposition of a direct product of irreducible representations . . . , *Am. Journ. Math. Transl.*, series 2, 76 (1968) 63–73.
- [12] M. KRÄMER: Über das Verhalten endlicher Untergruppen bei Darstellungen kompakter Liegruppen, *Inventiones Math.*, 16 (1972) 15–39.
- [13] M. KRÄMER: Über Untergruppen kompakter Liegruppen als Isotropiegruppen bei linearen Aktionen, *Math. Z.*, 147 (1976) 207–224.
- [14] M. KRÄMER: Eine Klassifikation bestimmter Untergruppen kompakter zusammenhängender Liegruppen, *Communic. in Algebra*, 3 (1975) 691–737.
- [15] M. KRÄMER: Multiplicity free subgroups of compact connected Lie groups, *Archiv der Mathematik*, 27 (1976) 28–36.
- [16] J. LEPOWSKY: Multiplicity formulas for certain semi-simple Lie groups, *Bull. Am. Math. Soc.*, 77 (1971) 601–604.
- [17] O. LOOS: *Symmetric spaces*, two volumes. Benjamin, New York–Amsterdam (1969).
- [18] V.B. MANDELTSVEIG: Structure of G_2 -multiplets, *Sov. J. Nucl. Phys.* (1965).
- [19] F. MAYER-LINDENBERG: “Das Spektrum des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen symmetrischen Räumen”. Diplomarbeit. Bonn (1972).
- [20] A.P. STONE: Semi-simple subgroups of semi-simple groups, *Journ. Math. Phys.*, 11 (1970) 29–38.
- [21] M. SUGIURA: Representations of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces, *Proc. Japan. Acad.*, 38 (1962) 111–113.
- [22] J. TITS: Tabellen zu den einfachen Liegruppen und ihren Darstellungen. *Lecture notes in Mathematics*, 40, Springer, Berlin–Heidelberg–New York (1967).
- [23] N.J. VILENKIN: *Special functions and the theory of group representations*, Translations of Mathematical Monographs 22. AMS, Providence, R.I. (1968).
- [24] D.P. ZHELOBENKO: The classical groups, spectral analysis of their finite dimensional representations, *Russian Math. Surveys*, 17 (1962) 1–94.

(Oblatum 2-IX-1966)

1976

Fachbereich Mathematik un Physik
Postfach 3008
8580 Bayreuth
B.R.D.