F. LAUDENBACH

Une remarque sur certains noeuds de $S^1 \times S^2$

Compositio Mathematica, tome 38, n° 1 (1979), p. 77-82

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1979__38_1_77_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 38, Fasc. 1, 1979, pag. 77–82
Sijthoff & Noordhoff International Publishers – Alphen aan den Rijn
Printed in the Netherlands

UNE REMARQUE SUR CERTAINS NOEUDS DE $S^1 \times S^2$

F. Laudenbach

L'étude des sphères de dimension 4 (éventuellement exotiques?) qui admettent une fonction de Morse à quatre points critiques conduit naturellement au problème suivant:

PROBLEME I: Soik k un noeud orienté dans $S^1 \times S^2$, c'est-à-dire une courbe simple homotope au générateur standard orienté $S^1 \times \{pt.\}$; supposons qu'il existe une chirurgie χ de $S^1 \times S^2$ le long de k dont le résultat soit S^3. Dans ces conditions, k est-il isotope au générateur standard?

Selon une suggestion de V. Poenaru, on peut transporter par χ une sphère $S = \{pt\} \times S^2$ coupant k en $n = 2p + 1$ points transversaux, dont $p + 1$ sont positifs et p négatifs. On obtient dans S^3 un *objet singulier* Σ à n branches le long d'un noeud orienté C de S^3.

Dans une variété V, fermée, 1-connexe de dimension 3, (Σ, C) est un objet singulier à n branches, dont le lieu singulier est une courbe simple C de V, si on a les propriétés suivantes:

1° $N(C)$ étant un petit voisinage tubulaire de C dans V, $\Sigma' = \overline{(\Sigma - N(C))}$ est une sphère à n trous plongée dans V et orientée;

2° Les n composantes orientées du bord de Σ', $C_1, \ldots, C_n$ sont des courbes simples de $\partial N(C)$, parallèles à C, c'est-à-dire non enlacées homologiquement avec C dans V;

3° La projection du tube π: $N(C) \to C$ est positive sur $p + 1$ des courbes $C_1, \ldots, C_n$ et négative sur les p autres.

La paire $(N(C), N(C) \cap \Sigma)$ est fibrée (trivialement) sur C; la fibre "positive" est un 2-disque équipé de n rayons, dont $p + 1$ sont transversalement orientés dans le sens direct et dont p le sont dans le sens rétrograde (voir la figure 2, pour $n = 3$).

Selon une observation de N.A'Campo, le polynôme d'Alexander de C est automatiquement trivial; on peut le calculer à partir de la matrice de Seifert d'une surface orientable de genre p, bordée par C, construite par lissage de certains "secteurs" de Σ (1.1).

PROBLEME II (Poenaru): Le lieu singulier C est-il obligatoirement non noué?

Les deux problèmes sont équivalents et une réponse affirmative implique que seule le vraie sphère peut avoir une fonction de Morse à quatre points critiques.

Dans cette note, je n'apporte qu'une réponse très partielle au problème; la publication ne se justifie que parce que R. Kirby a cité ce résultat dans sa liste de problèmes [1] (problème 1.17) et que la démonstration est très simple.

PROPOSITION: *Soit* (Σ, C) *un objet singulier à* 3 *branches dans une variété* 1*-connexe* V^3; *alors* C *est non noué.*

Le remarque annoncée dans le titre est donc la suivante: si k est un noeud non trivial de $S^1 \times S^2$ coupant un certain facteur $\{pt\} \times S^2$ en moins de trois points, alors aucune chirurgie de $S^1 \times S^2$ le long de k ne fournit S^3, ni même une variété 1-connexe.

EXEMPLE: Pour construire une 4-variété contractile distincte de D^4, B. Mazur [2] utilise le noeud k de la figure 1. Le relèvement $\tilde{k}$ de k dans $S^2 \times \mathbb{R}$ est tel que $\pi_1(S^2 \times \mathbb{R} - \tilde{k})$ est de type infini par Van Kampen; alors k est non trivial et la proposition redonne le résultat de B. Mazur.

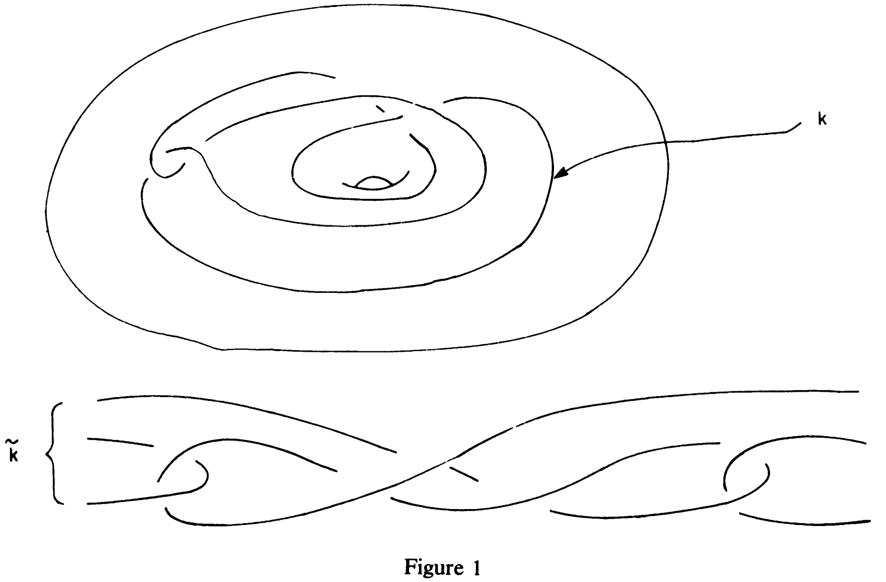
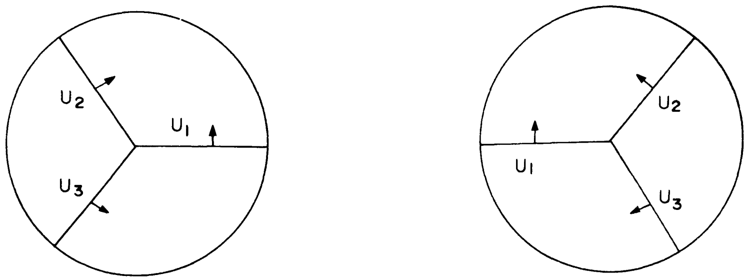


Figure 1

§1. Lissage de l'objet singulier et modification par disque de Dehn

1.1. Dans le cadre de la proposition, le modèle transversal au lieu singulier est celui de la figure 2 (fibre positive), au renversement près de l'orientation (fibre négative).



Fibre positive Fibre négative

Figure 2

On peut fabriquer une surface lisse orientable $\hat{\Sigma}$ (figure 3) en lissant le secteur (U_2, U_3) ou le secteur (U_1, U_2); dans les deux cas, on obtient un tore troué bordé par C.

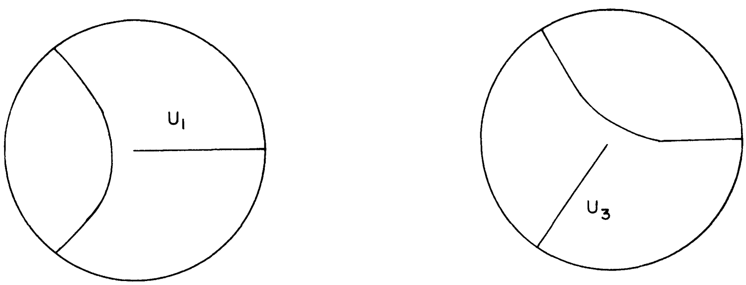


Figure 3

1.2. Une courbe ω (singulière) tracée sur Σ sera dite *pure* si ω ne rencontre pas int U_3 (resp. int U_1); alors ω subit naturellement le lissage du secteur (U_1, U_2) pour donner une courbe $\hat{\omega}$ de $\hat{\Sigma}$.

Si ω est pure, ω peut être poussée le long des normales dans $V - \Sigma$. D'autre part, ω est homotope à zéro sur Σ si et seulement si $\hat{\omega}$ est homotope à zéro sur $\hat{\Sigma}$.

1.3. *Un disque de Dehn* singulier pour Σ est un disque singulier $D \subset V$ tel que $\operatorname{int} D \cap \Sigma = \emptyset$, et que D rencontre Σ régulièrement le long de son bord, ∂D étant une courbe pure de Σ, non homotope à zéro. D'après "Loop theorem + Dehn's lemma" [3] [4], l'existence d'un tel disque assure qu'il existe un disque de Dehn non singulier Δ pour $\hat{\Sigma}$ (lissage compatible avec ∂D). En particulier, $\partial\Delta$ est une courbe simple isotope à C sur $\hat{\Sigma}$ ou bien $\hat{\Sigma} - \partial\Delta$ est connexe; dans les deux cas, la modification de $\hat{\Sigma}$ par Δ fournit une surface dont une des composantes est un disque bordé par C. Pour prouver la proposition, il suffit donc de trouver un disque de Dehn singulier pour Σ.

§2. Recherche d'un disque de Dehn

Soit $C' \subset \partial N(C)$ une courbe parallèle à C dans $V - \Sigma$; choisissons $\varphi : D^2 \to V$, un disque singulier bordé par C' transversal à Σ (V est 1-connexe). Posons $K = \varphi^{-1}(\Sigma)$; c'est un 1-complexe dans D^2 dont chaque sommet a un voisinage qui est une copie de la fibre positive ou négative (figure 2) et qui est transversalement orientable, au sens où le long d'une arête les orientations des extrémités se recollent. Posons $\mu(\varphi) = (m, n)$ où m est le nombre de sommets de K et n le nombre de composantes lisses (= sans sommets) de K, la paire étant ordonnée lexicographiquement. On choisit au départ φ de sorte que $\mu(\varphi)$ soit minimal. Si K est vide, $\varphi(D^2)$ est un disque de Dehn pour $\partial N(C)$, ce qui implique que C est non noué. Si K n'est pas vide, pensons $K \subset \mathbb{R}^2$.

LEMME: 1° *Il existe une composante bornée σ de $\mathbb{R}^2 - K$, homéomorphe à* int D^2, *telle que $\omega = \varphi(\partial\bar{\sigma})$ soit une courbe pure de Σ.* ($\partial\bar{\sigma}$ est la collection des arêtes de K adhérentes à σ, parcourues de façon à faire une courbe fermée faisant le tour de σ).

2° *De plus ω n'est pas homotope à zéro sur Σ; autrement dit $\varphi(\bar{\sigma})$ est un disque de Dehn pour Σ.*

PREUVE: Parmi les composantes connexes de K, il y en a au moins une K_0 qui est minimale au sens où aucune composante bornée de $\mathbb{R}^2 - K_0$ ne rencontre K; alors une composante bornée de $\mathbb{R}^2 - K_0$ est un disque ouvert.

(a) Si K_0 est une courbe lisse sans sommet, $\varphi(K_0)$ est une courbe singulière de $\Sigma - C$; elle est homotope à 0 dans $V - \Sigma$, car $K_0 = \partial\sigma$ et $\varphi(\sigma)$ est un 2-disque singulier de $V - \Sigma$. Enfin $\varphi(K_0)$ n'est pas homotope à zéro dans $\Sigma - C$ sinon on pourrait remplacer φ par φ' de sorte que $\varphi'^{-1}(\Sigma) = K - K_0$ et on aurait $\mu(\varphi') < \mu(\varphi)$.

(b) K_0 possède des sommets. Considérons K_0 tracé sur $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Construisons un champ de vecteurs X sur S^2, induisant sur chaque arête l'orientation transversale. Chaque sommet est une singularité d'indice 0. L'indice total des singularités intérieures à une cellule σ est $+1$ si et seulement si X est rentrant (ou sortant) en tous les points du bord; dans ce cas, $\varphi(\partial\bar{\sigma})$ est une courbe pure de Σ. Dans les autres cas l'indice est négatif ou nul. D'après la formule d'Euler, $S^2 - K_0$ contient au moins deux cellules d'indice $+1$; l'une d'entre elles σ_0 se trouve dans le domaine de φ. Pour que $\varphi(\bar{\sigma}_0)$ soit un disque de Dehn, il reste à voir que $\varphi(\partial\bar{\sigma}_0)$ n'est pas homotope à zéro dans Σ. dans le cas contraire, on pourrait remplacer φ par φ' où $\varphi'^{-1}(\Sigma)$ possède moins de sommets que K (voir par exemple la Figure 4).

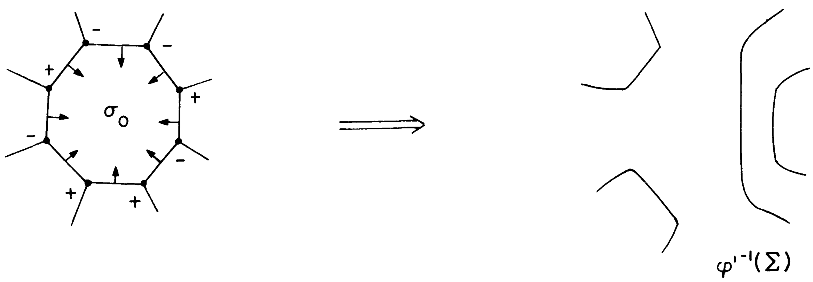


Figure 4

Bien entendu, la construction explicite de φ' dépend du choix d'une homotopie à zéro de $\varphi(\partial\bar{\sigma}_0)$ dans Σ; c'est-à-dire d'une application $h : \bar{\sigma}_0 \to \Sigma$ telle que $h \mid \partial\bar{\sigma}_0 = \varphi \mid \partial\bar{\sigma}_0$; génériquement $h^{-1}(C)$ est un système de courbes dans $\bar{\sigma}_0$, dont certaines sont des arcs joignant un sommet positif de $\partial\bar{\sigma}_0$ à un sommet négatif, les autres étant des courbes fermées. De nouveau, on aurait $\mu(\varphi') < \mu(\varphi)$.

GÉNÉRALISATION: Avec très peu de complications, la proposition se généralise à un nombre de branches quelconque pourvu que la disposition des orientations soit celle de la Figure 5.

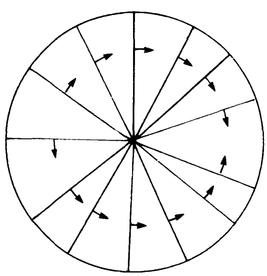


Figure 5

REFERENCES

[1] R. KIRBY: Problems in low dimensional manifold theory (preprint).
[2] B. MAZUR: A note on some contractible 4-manifolds. *Ann. of Math.* *73* (1961) 221–228.
[3] C. PAPAKYRIAKOPOULOS: On Dehn's lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.* *66* (1957) 1–26.
[4] J. STALLINGS: On the loop theorem. *Ann. of Math.* *72* (1960) 12–19.

(Oblatum 8–VIII–1977)

Université Paris-Sud, Centre d'Orsay
Bâtiment Mathématique
91405 ORSAY Cedex – France