COMPOSITIO MATHEMATICA

NICOLE CONZE-BERLINE
MICHEL DUFLO

Sur les représentations induites des groupes semi-simples complexes

Compositio Mathematica, tome 34, nº 3 (1977), p. 307-336
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1977__34_3_307_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 34, Fasc. 3, 1977, pag. 307–336
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

SUR LES REPRÉSENTATIONS INDUITES DES GROUPES SEMI-SIMPLES COMPLEXES

Nicole Conze-Berline et Michel Duflo

Table des Matières

Summary

Let G be a complex semi-simple Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, and P a parabolic subgroup with Lie algebra $\mathfrak{p}$. A finite dimensional irreducible representation of $\mathfrak{p}$ induces a representation of $\mathfrak{g}$ ("generalized Verma module"). Consider G as a real group. A finite dimensional irreducible representation of P induces a representation of G ("degenerate principal series") and thus a representation of $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. There are two types of relationship between these representations.

The first one (well known) describes the principal series as a part of the dual of the tensor product of two Verma modules. The second describes (in the generic case only) the principal series as a part of the module of linear applications from one Verma module to another one. After defining these relationships, we give some examples to show it is sometimes not good. However, we use it to transfer results from principal series to Verma modules and vice-versa. We thus obtain sufficient conditions of irreducibility for these representations (examples show they are not necessary). We give an example of a principal series with an infinite number of submodules (which implies multiplicity in the Jordan-Holder sequence). We give for $\mathfrak{g} \neq sl(n, \mathbb{C})$ examples of irreducible spherical Harish-Chandra modules for G, non induced from a parabolic.

We also give some applications to the study of primitive ideals in the enveloping algebra of $\mathfrak{g}$. In particular we compute the Goldie rank of induced primitive ideals.

Résumé

Soient G un groupe de Lie semi-simple complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et P un sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$. Une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{p}$ induit une représentation de $\mathfrak{g}$ ("module de Verma généralisé"). Considérons G comme réel. Une représentation irréductible de dimension finie de P induit une représentation de G ("série principale dégénérée") et donc de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Il y a deux espèces de relations entre ces représentations.

La première (bien connue) décrit une représentation de la série principale comme un sous-module du dual du produit tensoriel de deux modules de Verma. La seconde réalise (dans le cas générique seulement) une représentation de la série principale comme un sous-module du module des applications linéaires d'un module de Verma dans un autre. Après avoir défini ces relations, nous montrons sur des exemples qu'elles ne sont pas toujours excellentes. Elles permettent toutefois de transférer certains résultats des séries principales aux modules de Verma, et vice-versa. Nous obtenons ainsi des conditions suffisantes d'irréductibilité de ces représentations (des exemples montrent qu'elles ne sont pas nécessaires). Nous donnons l'exemple d'une représentation de la série principale qui a une infinité de sous-représentations (ce qui entraine des répétitions dans sa suite de Jordan-Holder). Pour $\mathfrak{g} \neq sl(n, \mathbb{C})$ nous donnons des exemples de modules d'Harish-Chandra sphériques irréductibles pour G non induits à partir d'un parabolique.

Nous donnons aussi quelques applications à l'étude des idéaux primitifs de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. En particulier, nous calculons le rang de Goldie des idéaux primitifs induits.

1. Notations

Pour tout espace vectoriel V, on note V^* l'espace dual de V.

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, on note $U(\mathfrak{a})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$, et $u \mapsto \tilde{u}$ l'antiautomorphisme principal $U(\mathfrak{a})$.

On désigne par G un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{g}$, on note Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{g}$, W le groupe de Weyl, $\mathcal{P}$ le réseau des poids. On fixe un système Δ^+ de racines positives, on note Σ l'ensemble des racines simples de Δ^+, on pose $\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$. On fixe une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$, on note X_α l'élément de cette base de poids $\alpha \in \Delta$, on pose $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ pour $\alpha \in \Delta^+$. On note $u \mapsto {}^t u$ l'antiautomorphisme d'ordre 2 de $U(\mathfrak{g})$ défini par ${}^t X_\alpha = X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$ et ${}^t H = H$ pour $H \in \mathfrak{h}_0$.

Pour tout espace vectoriel complexe V, on note $V_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel obtenu par restriction des scalaires. Pour tout espace vectoriel réel V', on note $V'_{\mathbf{C}}$ le compexifié de V'. Ainsi, $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}$ est l'algèbre de Lie complexifiée du groupe G considéré comme groupe de Lie réel. On identifie $(\mathfrak{g}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}$ au produit direct $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ par l'isomorphisme défini par $X \mapsto (X, \bar{X})$ pour $X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, où $\bar{X}$ est l'imaginaire conjugué de X par rapport à la forme réelle normale de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{k}$ la forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$ formée des $X \in \mathfrak{g}$ tels que ${}^t X = -\bar{X}$. On note j l'isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $(\mathfrak{k}_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}} \subset \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ défini par $j(X) = (X, -{}^t X)$ pour $X \in \mathfrak{g}$.

On pose $\mathfrak{n}_0^+ = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathbb{C}X_\alpha$, $\mathfrak{n}_0^- = {}^t\mathfrak{n}_0^+$. On note $\mathfrak{p}_0$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{n}_0^+$.

On notera $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{p}_0$. On a $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, où $\mathfrak{n}^+$ est le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$, et où $\mathfrak{s}+\mathfrak{h}$ est la partie réductive, de centre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{p}$. On pose $\mathfrak{n}^- = {}^t\mathfrak{n}^+$. On pose

$$\Delta_{\mathfrak{s}}^+ = \{\alpha \in \Delta^+, X_\alpha \in \mathfrak{s}\},\ \Sigma_{\mathfrak{s}} = \Delta_{\mathfrak{s}}^+ \cap \Sigma,\ \sigma_{\mathfrak{s}} = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{s}}^+}\alpha,\ \mathcal{P}_{\mathfrak{s}}^+ = \{p \in \mathfrak{h}_0^*, p(H_\alpha) \in \mathbb{N} \text{ pour } \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}\}.$$

On note $w_{\mathfrak{s}}$ l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de $(\mathfrak{s}, \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s})$. On note K, H_0, P_0, etc ... les sous-groupes analytiques de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{p}_0$, etc ... On identifie, comme plus haut, l'algèbre de Lie complexifiée de H_0 à $\mathfrak{h}_0\times\mathfrak{h}_0$ et son dual à $\mathfrak{h}_0^*\times\mathfrak{h}_0^*$. On pose $\rho = (\sigma, \sigma)$ et $\rho_{\mathfrak{s}} = (\sigma_{\mathfrak{s}}, \sigma_{\mathfrak{s}})$. Pour $(p, q) \in \mathfrak{h}_0^*\times\mathfrak{h}_0^*$ et $h \in H_0$ on note $h^{(p,q)}$ la valeur en h du caractère de H_0 de différentielle (p, q).

Si τ est une représentation d'une algèbre de Lie, on note E_τ le module correspondant et τ^* la représentation contragrédiente de τ.

2. Représentations de G induites à partir de P

On rappelle la définition d'une représentation de G induite à partir d'une représentation irréductible de dimension finie d'un sous-groupe parabolique P. L'ensemble de ces représentations forme ce que nous appelerons la série principale de représentations de G associée à P. Le groupe G est considéré comme réel. son algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. *L'espace des vecteurs K-finis d'une représentation de G de la série principale associée à P est naturellement un* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$*-module. Comme* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$, *c'est aussi en* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$*-module. L'ensemble des représentations de* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ *ainsi obtenu sera appelé la série principale de représentations de* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ *associée à* $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$.

Toute représentation de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ *de la série principale associée à* $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ *est isomorphe à une sous-représentation de la série principale associée au parabolique minimal* $\mathfrak{p}_0\times\mathfrak{p}_0$ (2.6). *Cela permet de donner des conditions suffisantes pour qu'une telle représentation soit irréductible, cyclique, ou cocyclique* (2.8, 2.12, 2.13).

2.1. Une représentation irréductible de dimension finie π de $\mathfrak{p}$ est triviale sur $\mathfrak{n}^+$ et scalaire sur $\mathfrak{h}$. Soit e un vecteur non nul de l'espace de π tel que $\pi(X_\alpha)e=0$ pour $\alpha\in\Sigma_s$. On appellera plus haut poids de π le poids p de e par rapport à $\mathfrak{h}_0$. Ce poids détermine π. Un élément p de $\mathfrak{h}_0^*$ est le plus haut poids d'une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{p}$ si et seulement si $p\in\mathscr{P}_s^+$. Le plus haut poids de la contragédiente π^* de π est $-w_sp$.

On identifie $(\mathfrak{p}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$. Une représentation irréductible ξ de dimension finie de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ est de la forme $\pi_1\times\pi_2$ où π_1 et π_2 sont des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{p}$. Soit p_1 (resp. p_2) le plus haut poids de π_1 (resp. π_2); on dira que (p_1,p_2) est le plus haut poids de ξ. Comme S est simplement connexe, une représentation irréductible de dimension finie de plus haut poids (p_1,p_2) de $(\mathfrak{p}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ est la différentielle d'une représentation de P si et seulement si $p_1-p_2\in\mathscr{P}$.

2.2. Soient $\xi=\pi_1\times\pi_2$ une représentation irréductible de dimension finie de P, de plus haut poids (p_1,p_2), et E_ξ l'espace de ξ. Le groupe G opère par translations à gauche dans l'espace $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}^\infty(\xi)$ des fonctions φ indéfiniment différentiables sur G à valeurs dans E_ξ qui vérifient

$$\varphi(gshn)=\xi(sh)^{-1}h^{-\rho}\varphi(g)\,\text{pour } g\in G, s\in S, h\in H, n\in N.$$

Le sous-espace (dense) de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}^\infty(\xi)$ formé des éléments K-finis est stable par convolution à gauche avec les éléments de U, ce qui en fait un U-module. On le notera $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$, ou $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi_1, \pi_2)$, ou $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(p_1, p_2)$. On posera $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}_0}(p_1, p_2) = \mathscr{L}_0(p_1, p_2)$.

2.3. L'espace $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ est un K-module localement fini et la restriction à K est un isomorphisme de K-modules de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ sur un espace de fonctions ψ indéfiniment différentiables sur K à valeurs dans E_ξ qui vérifient

$$\psi(kl) = \xi(l)^{-1}\psi(k) \text{ pour } k \in K, l \in K \cap P.$$

2.4. Soient E un K-module simple, $e \in E$ et $\gamma \in \mathrm{Hom}_{K\cap P}(E, E_\xi)$. Posons $\psi_{e,\gamma}(k) = \gamma(k^{-1}e)$ pour $k \in K$. La réciprocité de Frobenius donne le résultat suivant:

LEMME: (i) *La fonction $\psi_{e,\gamma}$ est la restriction à K d'un elémént de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$, qu'on notera aussi $\psi_{e,\gamma}$*

(ii) *L'application $\gamma \mapsto (e \mapsto \psi_{e,\gamma})$ est une bijection linéaire de* $\mathrm{Hom}_{K\cap P}(E, E_\xi)$ *sur* $\mathrm{Hom}_K(E, \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi))$.

2.5. Reprenons les notations 2.2. Identifions $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{g}$ et donc $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap (\mathfrak{p}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{s}+\mathfrak{h}$ à l'aide de l'homomorphisme j. Pour la structure de $(\mathfrak{s}+\mathfrak{h})$-module ainsi définie, E_ξ est isomorphe à $E_{\pi_1} \otimes E_{\pi_2^*}$ et donc $\mathrm{Hom}_{K\cap P}(E, E_\xi)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{s}+\mathfrak{h}}(E, E_{\pi_1} \otimes E_{\pi_2^*})$. Lorsque π_1 et π_2 sont de dimension 1, l'espace $\mathrm{Hom}_K(E, \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(p_1, p_2))$ est donc en bijection avec l'espace des éléments de E^* de poids $p_2 - p_1$ qui sont annulés par les X_α pour $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$.

2.6. Fixons un élément $a \in E_\xi^*$ non nul et de poids $(-w_{\mathfrak{s}}p_1, -w_{\mathfrak{s}}p_2)$.

PROPOSITION: *L'application qui à $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(p_1, p_2)$ associe la fonction $\overset{0}{\varphi}$ de G dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\overset{0}{\varphi}(g) = \langle \varphi(g), a\rangle \text{ pour } g \in G \tag{1}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(p_1, p_2)$ sur un sous-module de $\mathscr{L}_0(w_{\mathfrak{s}}p_1 - \sigma_{\mathfrak{s}}, w_{\mathfrak{s}}p_2 - \sigma_{\mathfrak{s}})$.

DÉMONSTRATION: Il est clair que l'application $\varphi \mapsto \overset{0}{\varphi}$ définie par la formule (1) transforme les fonctions C^∞ en fonctions C^∞ et commute aux translations à gauche par G. Il suffit donc de vérifier qu'elle applique injectivement $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}^\infty(p_1, p_2)$ dans $\mathscr{L}_0^\infty(w_{\mathfrak{s}}p_1 - \sigma_{\mathfrak{s}};\ w_{\mathfrak{s}}p_2 - \sigma_{\mathfrak{s}})$. Pour

$g \in G$ et $s \in S$ on a

$$\overset{0}{\varphi}(gs) = \langle \varphi(gs), a \rangle = \langle \varphi(g), \xi^*(s)a \rangle$$

ce qui prouve l'injectivité puisque $\xi^*(S)$ a engendre E^*_ξ.

Soient $h_0 \in H_0$ et $n_0 \in N_0^+$. On a $h_0 = h'h$ avec $h' \in H_0 \cap S$, $h \in H$, et $n_0 = n'n$ avec $n' \in N_0^+ \cap S$ et $n \in N^+$. Comme H commute à S on a

$$\overset{0}{\varphi}(gh_0n_0) = \langle \varphi(gh'n'hn), a \rangle = h^{-\rho-(p_1,p_2)}\langle \varphi(g), \xi^*(h'n')a \rangle$$

puis, comme a est invariant par $\xi^*(N_0^+ \cap S)$:

$$\overset{0}{\varphi}(gh_0n_0) = h^{-\rho-(p_1,p_2)}h'^{-(w_sp_1,w_sp_2)}\overset{0}{\varphi}(g)$$

Comme $\alpha(H) = 0$ pour $H \in \mathfrak{h}$ et $\alpha \in \Sigma_s$ et comme $(\sigma - \sigma_s)(H') = 0$ pour $H' \in \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$ on a

$$h^{-\rho-(p_1,p_2)} = h^{-\rho+\rho_s-(w_sp_1,w_sp_2)}$$
$$h'^{-(w_sp_1,w_sp_2)} = h'^{-\rho+\rho_s-(w_sp_1,w_sp_2)}$$

ce qui prouve que $\overset{0}{\varphi}$ se transforme comme il faut par P_0 à droite.

2.7. Identifiant $\mathfrak{k}_c$ à $\mathfrak{g}$, grâce à l'isomorphisme j, on appelle plus haut poids d'une représentation irréductible de K le plus haut poids de sa différentielle. Pour $\delta \in \mathscr{P}$, on note $\mathscr{L}_\mathfrak{p}^\delta(\xi)$ la K-composante isotypique de plus haut poids δ de $\mathscr{L}_\mathfrak{p}(\xi)$. Soit $(p, q) \in \mathfrak{h}_0^* \times \mathfrak{h}_0^*$ tel que $p - q \in \mathscr{P}$; on note $\mathscr{L}_0^0(p, q)$ la K-composante isotypique de $\mathscr{L}_0(p, q)$ dont le plus haut poids est l'élément de la chambre de Weyl positive conjugué de $p - q$ sous l'action du groupe de Weyl. Le K-module $\mathscr{L}_0^0(p, q)$ est irréductible. Pour $p \in \mathfrak{h}_0^*$, on pose $w_sp - \sigma_s = p'$.

PROPOSITION: *L'image de $\mathscr{L}_\mathfrak{p}(p_1, p_2)$ par l'isomorphisme de la proposition* 2.6. *contient $\mathscr{L}_0^0(p'_1, p'_2)$.*

DÉMONSTRATION: D'après 2.4. et 2.5. la structure de K-module de $\mathscr{L}_\mathfrak{p}(p_1, p_2)$ ne dépend que de la restriction de p_1 et p_2 à $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$ et de la restriction de $p_1 - p_2$ à $\mathfrak{h}$. On peut donc supposer que $p'_i = w_sp_i - \sigma_s$ appartient à la chambre de Weyl négative pour $i = 1, 2$. Dans ce cas, tout sous-module non nul de $\mathscr{L}_0(p'_1, p'_2)$ contient $\mathscr{L}_0^0(p'_1, p'_2)$, ([7] théorème I.4.3.).

REMARQUE: Le sous-module de $\mathscr{L}_0(p'_1, p'_2)$ image de $\mathscr{L}_\mathfrak{p}(p_1, p_2)$ sera précisé en 4.9.

On notera $\mathscr{L}^0_p(p_1, p_2)$ le sous-K-module de $\mathscr{L}_p(p_1, p_2)$ image réciproque de $\mathscr{L}^0_0(p'_1, p'_2)$, autrement dit la K-composante isotypique de $\mathscr{L}^0_p(p_1, p_2)$ dont le plus haut poids est l'élément de la chambre de Weyl positive conjugué de $p_1 - p_2$. On dira que $\mathscr{L}_p(p_1, p_2)$ est cyclique s'il est engendré par $\mathscr{L}^0_p(p_1, p_2)$, co-cyclique si tous ses sous-modules non nuls contiennent $\mathscr{L}^0_p(p_1, p_2)$.

2.8. COROLLAIRE: *Supposons que quelle que soit la racine $\alpha \in \Delta^+ \backslash \Delta^+_s$, l'un au moins des deux nombres $p'_i(H_\alpha)$, pour $i = 1, 2$, ne soit pas un entier strictement positif. Alors $\mathscr{L}_p(p_1, p_2)$ est co-cyclique.*

DÉMONSTRATION: Si $\alpha \in \Delta^+_s$, $p'_i(H_\alpha)$ est un entier < 0. Par suite tout sous-module non nul de $\mathscr{L}_0(p'_1, p'_2)$ contient $\mathscr{L}^0_0(p'_1, p'_2)$, ([7], théorème I.4.3.).

2.9. REMARQUE: On a $w_s p_i - \sigma_s = w_s(p_i + \sigma_s)$ et w_s permute les éléments de $\Delta^+ \backslash \Delta^+_s$. L'hypothèse du corollaire 2.8. est donc équivalente à la suivante: quelle que soit la racine $\alpha \in \Delta^+ \backslash \Delta^+_s$, l'un au moins des deux nombres $(p_i + \sigma_s)(H_\alpha)$ n'est pas un entier >0.

2.10. La dualité entre $\mathscr{L}_p(\xi)$ et $\mathscr{L}_p(\xi^*)$.

Il existe une forme linéaire positive non nulle, G-invariante, unique à un scalaire près, sur l'espace des fonctions χ continues sur G qui vérifient

(2) $$\chi(gshn) = h^{-2\rho}\chi(g) \text{ pour } g \in G, s \in S, h \in H, n \in N.$$

Une telle forme est donnée par $\chi \to \int_K \chi(k)\, dk$. Soient $\varphi \in \mathscr{L}_p(\xi)$ et $\psi \in \mathscr{L}_p(\xi^*)$. La fonction $\chi(g) = \langle \varphi(g), \psi(g) \rangle$ vérifie (1). On définit donc une forme bilinéaire U-invariante sur $\mathscr{L}_p(\xi) \times \mathscr{L}_p(\xi^*)$ en posant

$$(\varphi, \psi) = \int_K \langle \varphi(k), \psi(k) \rangle\, dk \text{ pour } \varphi \in \mathscr{L}_p(\xi) \text{ et } \psi \in \mathscr{L}_p(\xi^*).$$

Il résulte de 2.3. que cette forme est non dégénérée. Comme elle est K-invariante, les sous-espaces $\mathscr{L}^\delta_p(\xi)$ et $\mathscr{L}^\gamma_p(\xi^*)$ sont orthogonaux pour γ, $\gamma \in \mathscr{P}$ $\gamma \neq \delta^*$ et la forme induite sur $\mathscr{L}^\delta_p(\xi) \times \mathscr{L}^{\delta^*}_p(\xi^*)$ est non dégénérée.

2.11. PROPOSITION: *Soit (p_1, p_2) le plus haut poids de $\xi \cdot \mathscr{L}_p(\xi)$ est isomorphe au quotient de $\mathscr{L}_0(p_1 + \sigma_s, p_2 + \sigma_s)$ par l'orthogonal de l'image de $\mathscr{L}_p(\xi^*)$ dans $\mathscr{L}_0(-p_1 - \sigma_s, -p_2 - \sigma_s)$.*

DÉMONSTRATION: Cela résulte immédiatement de 2.6. et de la dualité entre $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ et $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi^*)$ d'une part, entre $\mathscr{L}_0(p_1+\sigma_s,\ p_2+\sigma_s)$ et $\mathscr{L}_0(-p_1-\sigma_s,\ -p_2-\sigma_s)$ d'autre part.

2.12. COROLLAIRE: *Supposons que quelle que soit la racine* $\alpha \in \Delta^+\backslash\Delta_s^+$ *l'un au moins des deux nombres* $(p_i+\sigma_s)$, *pour* $i=1, 2$, *ne soit pas un entier strictement négatif. Alors* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(p_1, p_2)$ *est cyclique.*

DÉMONSTRATION: Dans ce cas, $\mathscr{L}_0(p_1+\sigma_s,\ p_2+\sigma_s)$ est cyclique ([7], théorème I.4.3.).

2.13. COROLLAIRE: *Supposons que, quelle que soit la racine* $\alpha \in \Delta^+\backslash\Delta_s^+$, *les nombres* $(p_i+\sigma_s)(H_\alpha)$, *pour* $i=1, 2$, *ne soient pas des entiers non nuls de même signe. Alors* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(p_1, p_2)$ *est irréductible.*

2.14. REMARQUE: Les conditions suffisantes de 2.8, 2.12 et 2.13. ne sont pas nécessaires. On en trouvera des exemples pour $SL(3, \mathbb{C})$, $SO(5, \mathbb{C})$ et le groupe simple complexe de type G_2 dans [8].

3. Représentations de $\mathfrak{g}$ induites à partir de $\mathfrak{p}$

On rappelle la définition d'une représentation de $\mathfrak{g}$ *induite par une représentation irréductible de dimension finie d'une sous-algèbre parabolique* $\mathfrak{p}$. *Nous appelerons Module de Verma le module défini par une telle représentation. Un module de Verma associé à* $\mathfrak{p}$ *est isomorphe à un quotient d'un module de Verma associé à la sous-algèbre parabolique minimale.*

3.1. Soit π une représentation irréductible de plus haut poids p de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ du §1. On appelle module de Verma et on note $M(\pi)$ ou $M_{\mathfrak{p}}(p)$ le $U(\mathfrak{g})$-module induit par π. Rappelons-en la définition: soit E_π l'espace de π; soit E_π le $\mathfrak{p}$-module d'espace vectoriel sous-jacent E_π, associé à la représentation $\pi^\natural$ de $\mathfrak{p}$ suivante:

$$\tau^\natural = \pi \otimes \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$$

Alors $M(\pi)$ est l'espace $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} E_{n^\natural}$, dans lequel $U(\mathfrak{g})$ opère par multiplication à gauche. On identifie $E_{\pi^\natural}$ au sous $\mathfrak{p}$-module $1 \otimes E_{\pi^\natural}$ de $M(\pi)$. Pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0$ et $p \in \mathfrak{h}_0^*$, on posera $M_0(p)=M_{\mathfrak{p}_0}(p)$.

3.2. Considérons $U(\mathfrak{n}^-)$ comme un $(\mathfrak{s}+\mathfrak{h})$-module pour la représentation adjointe. L'application linéaire de $U(\mathfrak{n}^-)\otimes E_{\pi\natural}$ dans $M(\pi)$ définie par

$$u \otimes e \mapsto ue \text{ pour } U \in U(\mathfrak{n}^-), e \in E_{\pi\natural}$$

est un isomorphisme de $(\mathfrak{s}+\mathfrak{h})$-modules de $U(\mathfrak{n}^-)\otimes E_{\pi\natural}$ sur $M(\pi)$.

3.3. $M(\pi)$ est un $(\mathfrak{s}+\mathfrak{h})$-module localement fini complètement réductible.

3.4. Soit e un vecteur non nul de poids ρ de E_π. Posons $m_\pi = l \otimes e \in M(\pi)$ et notons $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}(\pi)$ l'annulateur de m_π dans $U(\mathfrak{g})$.

LEMME: (i) *m_π engendre $M(\pi)$.*

(ii) *$\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}(\pi)$ est l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{n}_0^+$, les éléments de la forme $H-(p-\sigma+\sigma_{\mathfrak{s}})(H)$ pour $H \in \mathfrak{h}_0$ et les éléments de la forme $X_{-\alpha}^{p(H_\alpha)+1}$ pour $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$.*

DÉMONSTRATION: On a $E_{\pi\natural} = U(\mathfrak{p})m_\pi$ et l'annulateur de m_π dans $U(\mathfrak{p})$ est l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{p})$ engendré par les éléments cités. Les assertions (i) et (ii) résultent donc de 3.2.

Le lemme 3.4. permet d'identifier $M(\pi)$ au quotient $U(\mathfrak{g})/\mathcal{K}(\pi)$. On appellera générateur canonique de $M(\pi)$ l'image m_π de $1 \in U(\mathfrak{g})$. Lorsque $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ on notera $\mathcal{K}_0(p)$ l'annulateur du générateur canonique de $M_0(p)$.

3.5. Soit $p \in \mathcal{P}_{\mathfrak{s}}^+$; on déduit de 3.4. que le module $M_{\mathfrak{p}}(p)$ est isomorphe au quotient de $M_0(p+\sigma_{\mathfrak{s}})$ par le sous-module engendré par les éléments $X_{-\alpha}^{p(H_\alpha)+1}m_0$ pour $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$.

3.6. Comme dans le cas des modules M_0 ([5], 7.1.11 et 7.6.3) on déduit de 3.2. et 3.3. le résultat suivant:

LEMME: (i) *La somme $\bar{M}(\pi)$ des sous modules de $M(\pi)$ différents de $M(\pi)$ est un sous module différent de $M(\pi)$.*

(ii) *Pour tout sous module propre M de $M(\pi)$ il existe une représentation irréductible de dimension finie π' de $\mathfrak{p}$, différente de π et un homomorphisme non trivial de $M(\pi')$ dans M.*

3.7. Supposons qu'il existe un homomorphisme de $M(\pi')$ dans

$M(\pi)$. Il existe un élément $u \in U(\mathfrak{n}_0)$ tel que l'image de $m_{\pi'}$ soit u m_π et u vérifie $\mathcal{K}(\pi')\ u \subset \mathcal{K}(\pi)$. Inversement tout élément $u \in U(\mathfrak{g})$ tel que $\mathcal{K}(\pi')\ u \subset \mathcal{K}(\pi)$ induit un homomorphisme de $M(\pi')$ dans $M(\pi)$.

4. Série principale et module dual d'un module de Verma sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$

Une représentation de la série principale de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est isomorphe à la représentation de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans l'espace des vecteurs k-finis dans le dual d'un module de Verma pour $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ induit par une représentation convenable de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. Cela permet d'une part de donner une condition suffisante pour qu'un module de verma pour $\mathfrak{g}$ induit par une représentation de $\mathfrak{p}$ soit irréductible (4.7 *et* 4.8), *et d'autre part d'obtenir des renseignements sur la structure de certains sous-modules des séries principales* (4.9 *et* 4.13).

4.1. On peut appliquer la construction du paragraphe 3 à l'algèbre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et à sa sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. Soit $\xi = \pi_1 \times \pi_2$ une représentation irréductible de dimension finie, de plus haut poids (p_1, p_2), de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. On notera $W_\mathfrak{p}(\xi)$ ou $W_\mathfrak{p}(p_1, p_2)$ le $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ module de Verma induit par ξ. On posera $W_0(p_1, p_2) = W_{\mathfrak{p}_0}(p_1, p_2)$. Remarquons que $W_\mathfrak{p}(p_1, p_2)$ est canoniquement isomorphe à $M_\mathfrak{p}(p_1) \otimes M_\mathfrak{p}(p_2)$.

4.2. Rappelons la définition des modules coïnduits: Soient $\mathfrak{b}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$ une sous algèbre de $\mathfrak{b}$, τ une représentation de $\mathfrak{a}$ dans un espace E_τ. Soit τ^b la représentation $\tau \otimes (-\frac{1}{2}\operatorname{trad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}})$ de $\mathfrak{a}$ dans E_τ. Le $\mathfrak{b}$-module Coïnd (τ) coïnduit par τ a pour espace sous-jacent l'espace des applications linéaires ψ de $U(\mathfrak{b})$ dans E_τ qui vérifient

$$\psi(ba) = \tau^b(\tilde{a})\psi(b) \text{ pour } a \in (\mathfrak{a}) \text{ et } b \in U(\mathfrak{b}).$$

La représentation de $U(\mathfrak{b})$ dans Coïnd(τ) est définie par

$$(b.\psi)(b') = \psi(\tilde{b}b') \text{ pour } b, b' \in U(\mathfrak{b}) \text{ et } \psi \in \text{Coïnd}(\tau).$$

4.3. On reprend les notations 4.1. et on suppose que ξ est la différentielle d'une représentation ξ de P. On note o l'élément neutre de G.

LEMME: *Soit $\varphi \in \mathcal{L}_\mathfrak{p}^\infty(\xi)$. Soit l_φ l'application linéaire de U dans E_ξ*

définie par

$$l_\varphi(a) = (\tilde{a} * \varphi)(o) \text{ pour } a \in U.$$

(i) *On a* $l_\varphi \in \text{Coïnd}(\xi)$.

(ii) *L'application* $\varphi \to l_\varphi$ *est un homomorphisme de* U*-modules de* $\mathscr{L}^\infty_{\mathfrak{p}}(\xi)$ *dans coïnd*(ξ).

(iii) *La restriction de cet homomorphisme à* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ *sur l'espace des éléments* $\mathfrak{k}$*-finis de Coïnd*(ξ).

Démonstration: (i) et (ii) sont immédiats. On déduit (iii) du fait que les éléments de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ sont des fonctions analytiques et de l'égalité, pour tout K-module simple E, des multiplicités de E dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ et Coïnd(ξ) égalité qui résulte de 2.4. et ([5], 5.5.8).

4.4. On identifie canoniquement le U-module Coïnd(ξ) au U-module $W^*(\xi^*)$ dual de $W(\xi^*)$, (cf. [5], 5.5.4), et on note $W^\vee(\xi^*)$ l'espace des éléments k-finis de $W^*(\xi^*)$.

Corollaire: *L'application* $\varphi \to l_\rho$ *définit un isomorphisme de* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ *sur* $W^\vee(\xi^*)$.

4.5. Proposition: *La dualité entre* $W(\xi^*)$ *et* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ *est séparante.*

Démonstration: Il faut montrer que si un élément a de U est tel que $(\tilde{a} * \varphi)(o) = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\xi)$ il appartient à l'annulateur du générateur canonique de $W(\xi^*)$. La démonstration est analogue à celle de ([7], Lemme II.3.6).

4.6. Soient π, π_1, π_2 des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{p}$. Supposons qu'il existe un homomorphisme de M_π sur un sous-module M de M_{π_1}. Soit u un élément de $U(\mathfrak{g})$ tel que l'image de m_π soit um_{π_1}.

Lemme: *L'application* $\varphi \to \varphi_*(\check{u} \otimes 1)$ *est un homomorphisme de* U*-modules de* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi_1^*, \pi_2^*)$ *dans* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi_2^*)$; *son noyau est l'orthogonal du sous-module* $M \otimes M_{\pi_2}$ *de* $W_{\mathfrak{p}}(\pi_1, \pi_2)$.

L'application $\psi \in \psi^*(1 \otimes \check{u})$ *est un homomorphisme de* U*-modules de* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi_2^*, \pi_1^*)$ *dans* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi_2^*, \pi^*)$; *son noyau est l'orthogonal du sous-module* $M_{\pi_2} \otimes M$ *de* $W_{\mathfrak{p}}(\pi_2, \pi_1)$.

Démonstration: c'est immédiat.

4.7. Corollaire: *Soit π une représentation irréductible de dimension finie de* $\mathfrak{p}$. *Si $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$ est cyclique, alors $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ est irréductible.*

Démonstration: Si $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ n'est pas irréductible, il existe une représentation irréductible de dimension finie π_1 de p, différente de π et un homomorphisme de $M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)$ sur un sous module propre M de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$, d'après 3.6. (ii). Soit V le noyau de l'homomorphisme de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$ dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi_1^*, \pi^*)$ qui s'en déduit. Comme $M \neq M_{\mathfrak{p}}(\pi)$, V est différent de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$. Comme $\pi_1 \neq \pi$, l'espace $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi_1^*, \pi^*)$ ne contient pas d'élément K-invariant, d'où $\mathscr{L}^0_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*) \subset V$.

4.8. Corollaire: *Soit $p \in \mathfrak{h}_0^*$ tel que $p(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ pour $\alpha \in \Sigma_s$. Supposons que quelle que soit la racine $\beta \in \Delta^+ \backslash \Delta_s^+$, $(p + \sigma_s)(H_\beta)$ ne soit pas un entier >0. Alors $M_{\mathfrak{p}}(p)$ est irréductible.*

Démonstration: $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(-w_s p, -w_s p)$ est cyclique d'après 2.12.

Remarque: Le corollaire 4.8. peut aussi se déduire du théorème de BERNSTEIN-GELFAND-GELFAND ([5], 7.6.23) qui détermine les sous quotients simples de $M_0(p + \sigma_s)$. Cette méthode est utilisée dans [1] et [13].

4.9. Soient $p_1, p_2 \in \mathscr{P}_s^+$ tels que $p_1 - p_2 \in \mathscr{P}$. Posons $p_i' = w_s p_i - \sigma_s$ pour $i = 1, 2$. Pour tout $\gamma \in \Sigma_s$, nous posons $n_\gamma = -w_s p_1(H_\gamma)$, $m_\gamma = -w_s p_2(H_\gamma)$ et nous notons s_γ la symétrie relative à γ.

Lemme: 1. *Soit $\gamma \in \Sigma_s$ les homomorphismes suivants définis dans $\mathscr{L}_0(p_1' p_2')$:*

$$\varphi \to \varphi^*(X_{-\gamma}^{n_\gamma+1} \otimes 1), \text{ à valeurs dans } \mathscr{L}_0(s_\gamma p_1', p_2')$$
$$\varphi \to \varphi^*(1 \otimes X_{-\gamma}^{m_\gamma+1}), \text{ à valeurs dans } \mathscr{L}_0(p_1', s_\gamma p_2')$$
$$\varphi \to \varphi^*(X_{-\gamma}^{n_\gamma+1} \otimes X_{-\gamma}^{m_\gamma+1}), \text{ à valeurs dans } \mathscr{L}_0(s_\gamma p_1', s_\gamma p_2')$$

ont même noyau. Notons le N_γ.

2. *L'image de $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(p_1, p_2)$ dans $\mathscr{L}_0(p_1', p_2')$ par l'homomorphisme* 2.6. *est égale à l'intersection des N_γ, où γ parcourt Σ_s.*

Démonstration: 1. Cette assertion due à D.P. Zelobenko est établie par exemple en ([7], V.1.10 ou [15]).

2. résulte de 3.5. et 4.6.

4.10. Soient p_1, p_2 comme en 4.9. Posons $p'_i = p_i + \sigma_s$ pour $i = 1, 2$. Pour tout $\gamma \in \Sigma_s$, nous posons $n'_\gamma = p_1(H_\gamma)$, $m'_\gamma = p_2(H_\gamma)$.

Par dualité à partir de 4.9. on obtient le lemme suivant.

LEMME: 1. *Soit* $\gamma \in \Sigma_s$. *Les homomorphismes suivants à valeurs dans* $\mathscr{L}_0(p''_1, p''_2)$,

$$\varphi \mapsto \varphi^*(X_{-\gamma}^{n'_\gamma+1} \otimes 1), \textit{ défini dans } \mathscr{L}_0(s_\gamma p''_1, p''_2),$$
$$\varphi \to \varphi^*(1 \otimes X_{-\gamma}^{m'_\gamma+1}), \textit{ défini dans } \mathscr{L}_0(p''_1, s_\gamma p''_2)$$
$$\varphi \to \varphi^*(X_{-\gamma}^{n_\gamma+1} \otimes X_{-\gamma}^{m'_\gamma+1}), \textit{ défini dans } \mathscr{L}_0(s_\gamma p''_1, p''_2)$$

ont même image. Notons la N'_γ.

2. *Le noyau de l'homomorphisme de* $\mathscr{L}_0(p''_1, p''_2)$ *sur* $\mathscr{L}_p(p_1, p_2)$ *défini en* 2.11. *est la somme des* N'_γ *où parcourt* Σ_s.

4.11. Soient $p_1, p_2 \in \mathfrak{h}_0^*$ tels que $p_1 - p_2 \in \mathscr{P}$. Soit $w \in W$ un élément tel que, pour tout $\alpha \in \Delta^+$ tel que $-w(\alpha) \in \Delta^+$, $p_1(H_\alpha)$ et $p_2(H_\alpha)$ ne soient pas tous deux des entiers strictement négatifs. Il existe un, et à un facteur constant près un seul, opérateur d'entrelacement $B(w, p_1, p_2)$ de $\mathscr{L}_0(p_1, p_2)$ dans $\mathscr{L}_0(wp_1, wp_2)$, non nul sur $\mathscr{L}_0^0(p_1, p_2)$ (cf. par exemple ([7], III4)).

4.12. On emploie les notations de 4.9. et 4.10.

PROPOSITION: *L'opérateur* $B(w_s, p''_1, p''_2)$ *a pour noyau* $\Sigma N'_\gamma$ *et pour image* $\cap N_\gamma$, *où* γ *parcourt* Σ_s.

DÉMONSTRATION: 1. Soit $\gamma \in \Sigma_s$. Posons $w' = w_s s_\gamma$. Les opérateurs $B(w', s\gamma p''_1, s_\gamma p''_2)$ et $B(s_\gamma, p''_1, p''_2)$ sont définis et leur produit est proportionnel à $B(w_s, p''_1, p''_2)$.

Le noyau de $B(s_\gamma, p''_1, p''_2)$ est donc contenu dans celui de $B(w_s, p''_1, p''_2)$. Il est d'autre part égal à N'_γ d'après ([7], V.1.11.). On a donc démontré l'inclusion

$$\ker B(w_s, p''_1, p''_2) \supset \Sigma N'_\gamma.$$

2. Réalisons $\mathscr{L}_0(p''_1, p''_2)$ dans l'espace des fonctions sur K défini en 2.3. Les espaces N'_γ pour $\gamma \in \Sigma_s$, et $B(w_s, p''_1, p''_2)$ ne dépendent que de $p_1 - p_2$ et des nombres $p_1(H_\gamma)$ pour $\gamma \in \Sigma_s$. On peut donc supposer, pour démontrer l'inclusion opposée, que $p_1(H_\alpha)$ n'est pas entier pour

$\alpha \in \Delta \backslash \Delta_s$. Il résulte de 2.13. et 4.10. que $\Sigma N'_\gamma$ est un sous-module maximal de $\mathscr{L}_0(p''_1, p''_2)$. Ceci démontre l'inclusion opposée.

3. La démonstration de l'égalité $\operatorname{Im} B(w_s, p''_1, p''_2) = \cap N_\gamma$ est analogue.

4.13. Au cours de la démonstration 4.12., en remplaçant p''_i par p_i, nous avons obtenu le résultat suivant:

PROPOSITION: *Soient p_1, $p_2 \in \mathfrak{h}_0^*$ tels que $p_1 - p_2 \in \mathscr{P}$. On suppose que pour tout $\gamma \in \Sigma_s$, $p_1(H_\gamma)$ et $p_2(H_\gamma)$ sont des entiers strictement positifs. On a*:

$$\ker B(w_s, p_1, p_2) = \sum_{\gamma \in \Sigma_s} \ker B(s_\gamma, p_1, p_2).$$

REMARQUE: La proposition 4.13. ne se généralise pas au cas où l'on suppose seulement que $p_1(H_\gamma)$ et $p_2(H_\gamma)$ sont dans $\mathbb{N}$. Nous en verrons un exemple au paragraphe 7.

4.14. REMARQUES:

1. La condition suffisante donnée en 4.8 pour que $M_\mathfrak{p}(p)$ soit irréductible n'est pas nécessaire. On trouvera des conditions nécessaires et suffisantes dans [10].
2. Même la condition suffisante donnée en 4.7 n'est pas nécessaire. Des exemples sont donnés ci-dessous (6.5).
3. La paragraphe 4.6 montre qu'il y a une certaine relation entre les sous-modules de $\mathscr{L}_0(-p, -p)$ et ceux de $M_0(p)$ (où $p \in \mathfrak{h}_0^*$) par exemple. Ce fait sera utilisé au paragraphe 7. Il faut toutefois remarquer que si $-p$ est un poids dominant régulier, $M_0(p)$ est irréductible et $\mathscr{L}_0(-p, -p)$ réductible. Dans le sens contraire, si $\mathscr{L}_0(-p, -p)$ est irréductible, il en est de même de $M_0(p)$ (cf. 4.7). Cependant il peut arriver que la longueur de $\mathscr{L}_0(-p, -p)$ soit strictement inférieure à la longueur de $M_0(p)$. Par exemple, si $G = SL(3, \mathbb{C})$ et si p est un poids fondamental, la longueur de $M_0(p)$ est 3 et celle de $\mathscr{L}_0(-p, -p)$ est 2.

5. Série principale et espace des applications linéaires d'un $\mathfrak{g}$-module de Verma dans un autre

On étudie la structure de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$-module de l'espace des applications linéaires d'un module de Verma dans un autre, induits par des *représentations de la même sous-algèbre parabolique* $\mathfrak{p}$. *Lorsque le module d'arrivée est irréductible, l'espace des applications linéaires* $\mathfrak{k}$*-finies est isomorphe à une représentation de la série principale* (5.5). *Dans le cas général, on peut minorer pour chaque représentation irréductible E de* $\mathfrak{k}$ *la multiplicité de E dans cet espace d'applications linéaires* (5.8).

5.1. Soit π une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{p}$. D'après 3.2 on a la décomposition $M_{\mathfrak{p}}(\pi) = E_{\pi\mathfrak{h}} \otimes \mathfrak{n}^- M_{\mathfrak{p}}(\pi)$. On note P_π la projection de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ sur $E_{\pi\mathfrak{h}}$ relative à cette decomposition. P_π est un monomorphisme de $(\mathfrak{s}+\mathfrak{h})$-modules de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ sur E_π . Rappelons que $\bar{M}_{\mathfrak{p}}(\pi)$ est la somme des sous-modules de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ différents de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$. On a

$$\bar{M}_{\mathfrak{p}}(\pi) = \{m \in M_{\mathfrak{p}}(\pi), P_\pi(U(\mathfrak{g}))m = 0\}.$$

5.2. Soient π_1 et π_2 des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{p}$. On munit l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_1), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$ de la structure de U-module définie par

$$((a \otimes b).T)m = {}^t\tilde{a}T\tilde{b}m \quad \text{pour } a, b \in U(\mathfrak{g}), m \in M_{\mathfrak{p}}(\pi_2)$$
$$\text{et } T \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)).$$

On note $\mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$ l'espace des éléments $\mathfrak{k}$-finis de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)$. C'est un sous-$U$-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$.

5.3. On identifie E_{π_1} (resp. E_{π_2}) à un sous-espace de $M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)$ (resp. $M_{\mathfrak{p}}(\pi_2)$), comme en 3.1.

A $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$ on associe l'application linéaire ϕ_T de U dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_{\pi_2}, E_{\pi_1})$ définie par

$$\phi_T(a \otimes b)e = P_{\pi_1}({}^t aTbe) \text{ pour } a, b \in U(\mathfrak{g}) \text{ et } e \in E_{\pi_2}.$$

Soit ξ^* la représentation de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_{\pi_2}, E_{\pi_1})$ qui est triviale sur $\mathfrak{n}^+\times\mathfrak{n}^+$ et définie sur $\mathfrak{s}+\mathfrak{h}$ par

$$\xi^*(c \otimes d)L = \pi_1({}^t\tilde{c}) \circ L \circ \pi_2(\tilde{d}) \text{ pour } c, d \in U(\mathfrak{s}+\mathfrak{h}) \text{ et } L \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(E_{\pi_2}, E_{\pi_1})$$

Les propriétés suivantes sont élémentaires:

(i) La représentation ξ^* est équivalente à la représentation $\pi_1^* \times \pi_2^*$ de $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$.

(ii) On a $\phi_T \in \text{Coïnd}\ (\xi^*)$ et l'application $\Phi: T \mapsto \phi_T$ est un homomorphisme de U-modules de $\text{Hom}_{\mathrm{C}}(M_{\mathrm{p}}(\pi_2), M_{\mathrm{p}}(\pi_1))$ dans Coïnd(ξ^*). Par suite ϕ induit un homomorphisme de $\mathcal{L}(M_{\mathrm{p}}(\pi_2), M_{\mathrm{p}}(\pi_1))$ dans $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}(\pi_1^*, \pi_2^*)$.

(iii) Le noyau de ϕ est l'espace des $T \in \text{Hom}_{\mathrm{C}}(M_{\mathrm{p}}(\pi_2), M_{\mathrm{p}}(\pi_1))$ tels que $T\ M_{\mathrm{p}}(\pi_2) \subset \bar{M}_{\mathrm{p}}(\pi_1)$.

5.4. Soit π comme en 5.1. et soit p son plus haut poids. Nous notons 1_π une forme linéaire k-invariante sur $M_{\mathrm{p}}(\pi) \otimes M_{\mathrm{p}}(\pi)$, non nulle. Une telle forme existe et est unique à un facteur constant près. Si $e \in E_\pi$ est dominant on a $1_\pi(ae \otimes be) = {}^t ab(p + \sigma_{\mathrm{s}} - \sigma)$ pour tout $a, b \in U(\mathrm{g})$. (Si $a \in U(\mathrm{g})$, $\lambda \in h_0^*, a(\lambda)$ désigne la valeur en λ de l'élément de $U(\mathrm{h}) = S(\mathrm{h})$ obtenu en projetant a modulo $\mathrm{h}^- U(\mathrm{g}) + U(\mathrm{g})\mathrm{n}^+$).

Cette forme bilinéaire a été étudie par J. C. Jantzen (cf [10] en particulier) et N. N. Chapovolov [2]. Le sous-module $\bar{M}_{\mathrm{p}}(\pi)$ est l'ensemble des $v \in M_{\mathrm{p}}(\pi)$ tels que

$$1_\pi(w \otimes v) = 0 \text{ pour tout } w \in M_{\mathrm{p}}(\pi).$$

Si $\lambda \in \mathrm{h}_0^*$, on note $M_{\mathrm{p}}(\pi)^\lambda$ l'ensemble des éléments de poids λ de $M_{\mathrm{p}}(\pi)$. Si λ et λ' sont des éléments distincts de h_0^*, 1_π s'annule sur $M_{\mathrm{p}}(\pi)^\lambda \otimes M_{\mathrm{p}}(\pi)^\lambda$. On en déduit:

Lemme: *$M_{\mathrm{p}}(\pi)$ est irréductible si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathrm{h}_0^*$, 1_π induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $M_{\mathrm{p}}(\pi)^\lambda \times M_{\mathrm{p}}(\pi)^\lambda$.*

5.5. Les notations sont celles de 5.2.

Proposition: *On suppose $M_{\mathrm{p}}(\pi_1)$ irréductible. L'application Φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(M_{\mathrm{p}}(\pi_2), M_{\mathrm{p}}(\pi_1))$ sur $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}(\pi_1^*, \pi_2^*)$.*

Démonstration: On a vu en 5.3. que Φ est injective. Inversement soit φ un élément de $\mathcal{L}_{\mathrm{p}}(\pi_1^*, \pi_2^*)$. Comme il est k-fini, il est somme d'éléments qui sont vecteurs propres des éléments $(-{}^tH, H)$, où $H \in \mathrm{h}_0$. Pour démontrer que φ est dans l'image de Φ, il suffit de le montrer lorsque φ est de poids μ. On considère φ comme une forme bilinéaire sur $M_{\mathrm{p}}(\pi_1) \times M_{\mathrm{p}}(\pi_2)$. Soit $\lambda \in \mathrm{h}_0^*$. Si $\lambda' \in h_0^*$ est différent de $\lambda + \mu$, φ s'annule sur $M_{\mathrm{p}}(\pi_1)^\lambda \times M_{\mathrm{p}}(\pi_2)^{\lambda'}$. Soit $v \in M_{\mathrm{p}}(\pi_2)^{\lambda+\mu}$. Il existe, à cause du lemme 5.4., un et un seul élément $T(v) \in M_{\mathrm{p}}(\pi_1)^\lambda$ tel que l'on ait $\varphi(u, v) = 1_\pi(u \otimes T(v))$, pour tout $u \in M_{\mathrm{p}}(\pi_1)^\lambda$, et donc, d'après ce que nous venons de voir, pour tout $u \in M_{\mathrm{p}}(\pi_1)$. En procédant ainsi pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$, nous avons montré l'existence de $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$ tel que l'on ait $\varphi(u, v) = 1_\pi(u \otimes T(v))$ pour tout élément $u \otimes v \in M_{\mathfrak{p}}(\pi_1) \otimes M_{\mathfrak{p}}(\pi_2)$. Il est facile de voir que l'on a $\phi(T) = \varphi$. D'après 5.3. (iii), T est $\mathfrak{k}$-fini.

5.6. Pour étudier la structure de $\mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$ dans le cas général, nous allons reprendre des arguments employés dans [3] et [9]. Si $\rho \in (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_0)^*$ est un poids dominant, nous noterons $M_{\mathfrak{p}}(\rho)$ le quotient de $U(\mathfrak{n}_0^-)$ par l'idéal à gauche engendré par les éléments $X_{-\alpha}^{\rho(H_\alpha)+1}$ pour $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$, nous noterons $M_{\mathfrak{p}}(\rho)^\lambda$ l'image dans $M_{\mathfrak{p}}(\rho)$ de l'ensemble des éléments de $U(\mathfrak{n}_0^-)$ de poids λ.

Si $p \in \mathfrak{h}_0^*$ a ρ pour restriction à $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_0$, l'application $u \mapsto um$ induit un isomorphisme de $U(\mathfrak{n}_0^-)$-modules de $M_{\mathfrak{p}}(\rho)$ sur $M_{\mathfrak{p}}(p)$ (cf. 3.4.), noté a_p. L'image de $M_{\mathfrak{p}}(\rho)^\lambda$ est $M_{\mathfrak{p}}(p)^{\lambda+p}$.

Soit I_ρ l'annulateur dans $U(\mathfrak{s})$ du vecteur dominant du $\mathfrak{s}$-module simple de poids dominant ρ. L'injection $U(\mathfrak{n}_0^-) \rightarrowtail U(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})$ induit un isomorphisme de $M_{\mathfrak{p}}(\rho)$ sur $U(\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s})/U(\mathfrak{n}^-)I_\rho$, de sorte que $M_{\mathfrak{p}}(\rho)$ est muni d'une structure de $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$-module. De plus, a_p est un isomorphisme de $\mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{s}$-modules. Remarquons que $M_{\mathfrak{p}}(\rho)$ se décompose sous-l'action de $\mathfrak{s}$ en somme directe de sous-modules simples de dimension finie. On fixe ρ_1 et ρ_2 des poids dominants de $(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_0)$, et $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$. Soit V le sous-espace vectoriel de $M_{\mathfrak{p}}(\rho_1)^\lambda$ formé des éléments annulés par $X_{-\alpha}^{\rho_2(H_\alpha)+1}$ pour $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$. Si $v \in V$, la multiplication à droite par un représentant de v induit un homomorphisme de $\mathfrak{n}_0^-$-modules de $M_{\mathfrak{p}}(\rho_2)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(\rho_1)$. On le note φ_v.

Soient $p_1, p_2 \in \mathfrak{h}_0^*$ des éléments dont les restrictions à $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$ sont ρ_1, ρ_2, et tels que $p_1 - p_2 \in \mathscr{P}$. Considéré comme élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$, φ_v est $j(\mathfrak{n}_0^+)$-invariant, de poids $-(\lambda + p_1 - p_2)$. L'application $v \mapsto \varphi_v$ est une bijection linéaire de V sur l'espace de ces homomorphismes.

5.7. On garde les notations de 5.6.

Lemme: *Soit $v \in V$ un élément non nul. Alors φ_v est $\mathfrak{k}$-fini si et seulement si l'élément $\delta = -\lambda + p_2 - p_1$ est un poids dominant et si l'image $a_{p_1}(v)$ de v dans $M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)$ vérifie $X_\alpha^{\delta(H_\alpha)+1} a_{p_1}(v) = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Dans ce cas, φ_v est l'élément de plus haut poids d'un $\mathfrak{k}$-module simple de plus haut poids δ.*

Démonstration: Supposons φ_v $\mathfrak{k}$-fini. C'est alors un vecteur de plus haut poids $+\delta$, ce qui entraine que δ est dominant est que φ_v est annulé par les $j(X_\alpha^{\delta(H_\alpha)+1})$. L'image $a_{p_1}(v)$ de v dans $M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)$ est l'image par φ_v du générateur canonique de $M_{\mathfrak{p}}(\pi_2)$. Comme celui-ci est annulé par les X_α, on en déduit que v est annulé par les $X_\alpha^{\delta(H_\alpha)+1}$, pour $\alpha \in \Sigma$.

Réciproquement supposons que δ soit un poids dominant et soit v un élément de V tel que $a_{p_1}(v)$ soit annulé par $X_\alpha^{\delta(H_\alpha)+1}$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Soit F le $\mathfrak{g}$-module irréductible de dimension finie de plus bas poids $-\delta$, et soit f un élément non nul de F, de poids $-\delta$. Soit e le générateur canonique du module $M_0(p_2+\sigma_s)$. D'après le lemme 6.3. [3], le vecteur $e \otimes f$ engendre le $\mathfrak{g}$-module $M_0(p_2+\delta_s) \otimes F$, et l'annulateur de $e \otimes f$ est l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $X_\alpha^{\delta(H_\alpha)+1}$ pour $\alpha \in \Sigma$, et les éléments $H-(p_2+\sigma_s-\sigma-\delta)(H)$ pour $H \in \mathfrak{h}_0$. Il existe donc un unique homomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules θ de $M_0(p_2+\sigma_s) \otimes F$ dans $M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)$ tel que $\theta(e \otimes f) = a_{p_1}(v)$. Posons $\theta'(x) = \theta(x \otimes f)$ pour tout $x \in M_0(p_2+\sigma_s)$. Alors θ' est une application linéaire de $M_0(p_2+\sigma_s)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(\pi_1)$, $\mathfrak{k}$-finie, commutant à l'action de $\mathfrak{n}_0^-$. Comme on a $\theta'(e) = a_{p_1}(v)$, φ_v s'obtient à partir de θ' par passage au quotient, ce qui prouve que φ_v est $\mathfrak{k}$-finie. La dernière assertion vient de ce que φ_v est dominant de poids δ.

5.8. Corollaire: *Soient π_1 et π_2 des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{p}$, de plus haut poids p_1 et p_2, telles que $p_1 - p_2 \in \mathscr{P}$. Soit E un $\mathfrak{k}$-module simple. Alors la multiplicité de E dans $\mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$ est au moins égale à la multiplicité de E dans $\mathscr{L}(\pi_1^*, \pi_2^*)$. En particulier, $\mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(\pi_2), M_{\mathfrak{p}}(\pi_1))$ est non nul.*

Démonstration: Soient d la multiplicité de E dans $\mathscr{L}(\pi_1^*, \pi_2^*)$ et X l'espace des $\mu \in \mathfrak{h}_0^*$ dont la restriction à $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_0$ est nulle. Pour un ensemble Zariski-dense de $\mu \in X$, $M_{\mathfrak{p}}(p_1+\mu)$ est irréductible. La multiplicité de E dans $\mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(p_2+\mu), M_{\mathfrak{p}}(p_1+\mu))$ est d d'après 5.5. Notons $-\delta$ le plus bas poids de E. Notons V_μ le sous-espace de V (cf. 5.6) formé des éléments v tels que $a_{p_1+\mu}(v)$ soit annulé par $X_\alpha^{\delta(H_\alpha)+1}$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Pour un ensemble Zariski-dense de $\mu \in X$ la dimension de cet espace est d. Utilisant le fait que V_μ dépend algébriquement de μ, et la compacité des grasmanniennes (cf. [3] p. 398) on voit que V_μ est de dimension au moins égale à d pour tout $\mu \in X$, et en particulier pour $\mu = 0$. Ceci entraine le corollaire.

5.9. Les lemmes qui suivent seront utilisés au chapitre 8.
Les notations sont celles de 5.6.

Lemme: *Soit $v \in V$. Il existe $\mu \in \mathscr{P}$ tel que $\mu(H_\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_s$, et tel que φ_v, considéré comme élément de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M_{\mathfrak{p}}(p_2), M_{\mathfrak{p}}(p_1-\mu))$, *soit $\mathfrak{k}$-fini.*

DÉMONSTRATION: Soit $v \in V$ un élément non nul, et soit φ_v l'homomorphisme de $\mathfrak{n}_0^-$-modules de $M_{\mathfrak{p}}(\rho_2)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(\rho_1)$. Notons ϵ la restriction de $\delta = -\lambda + p_2 - p_1$ à $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$. L'élément φ_v est annulé par $j(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{n}_0^+)$, et il est de poids ϵ sous l'action de $j(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_0)$. Soient N, N' des sous-espaces $\mathfrak{s}$-stables de dimensions finies de $M_{\mathfrak{p}}(\rho_1)$ et $M_{\mathfrak{p}}(\rho_2)$ tels que $\varphi_v(N')$ soit contenu dans N. Considéré comme application de N' dans N, φ_v est $j(\mathfrak{s})$-fini, et on peut choisir N et N' de manière à ce que N' contienne le générateur canonique e de $M_{\mathfrak{p}}(\rho_2)$.

Il en résulte que ϵ est un poids dominant pour $\mathfrak{s}$, que l'on a $X_\alpha^{\epsilon(H_\alpha)+1} v = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$, et que φ_v est l'élément de plus haut poids, d'un $j(\mathfrak{s})$-module simple, de plus haut poids ϵ.

Pour tout $X \in \mathfrak{n}$, il existe un entier positif d tel que $X^d a_{p_1-\mu}(v) = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}$, s'annulant sur $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_0$. On peut donc choisir μ tel que l'on ait $X_\alpha^{(\mu+\delta)(H_\alpha)+1} a_{p_1-\mu}(v) = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma \backslash \Sigma_{\mathfrak{s}}$. Nous venons de démontrer que cette relation est vraie aussi pour $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$. Le lemme 5.7. entraine donc le lemme 5.9.

5.10. Les notations sont celles de 5.6.

LEMME: *Soit ψ une application linéaire de $M_{\mathfrak{p}}(p_2)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(p_1)$, commutant avec $\mathfrak{n}^-$, et $j(\mathfrak{s})$-finie. Il existe $\mu \in \mathcal{P}^+$, s'annulant sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$, tel que ψ soit $\mathfrak{k}$-finie, considérée comme application linéaire de $M_{\mathfrak{p}}(p_2)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(p_2 - \mu)$.*

DÉMONSTRATION: L'hypothèse entraine que ψ est somme finie d'éléments de la forme $j(u_i)\, \varphi_{v_i}$ où u_i appartient à $U(\mathfrak{s})$, et v_i à V_i, où étant donné $\lambda_i \in \mathfrak{h}_0^*$, V_i et φ_{v_i} sont définis comme en 5.6. D'après 5.9. pour chaque i, il existe $\mu_i \in \mathcal{P}$, s'annulant sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$, tel que φ_{v_i}, considéré omme application de $M_{\mathfrak{p}}(p_2)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(p_1 - \mu_i)$, soit $\mathfrak{k}$-fini. Soit $\mu \in \mathcal{P}^+$ un élement s'annulant sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$ et tel que l'on ait $\mu(H_\alpha) \geq \mu_i(H_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ et pour tout i. Il résulte de 5.7 que pour tout i, φ_{v_i} est $\mathfrak{k}$-fini lorsqu'on le considère comme une application linéaire de $M_{\mathfrak{p}}(p_2)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(p_1 - \mu)$. Il en est de même de $j(u_i)\varphi_{v_i}$ et donc de ψ.

6. Série principale sphérique et idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g})$

La représentation de $U(\mathfrak{g})$ dans un module de Verma définit un homomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ dans l'espace des endomorphismes $\mathfrak{k}$-finis de ce module. On en déduit un homomorphisme de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$-module de $U(\mathfrak{g})$ dans une représentation de la série principale, dont on détermine *le noyau et l'image* (6.2). *Cet homomorphisme est utilisé pour construire deux contre-exemples. En* 6.5 *nous montrons qu'il existe un module de Verma irréductible pour* $\mathfrak{g}$ *admettant des endomorphismes* $\mathfrak{k}$*-finis qui ne sont pas dans l'image de* $U(\mathfrak{g})$. *Ceci répond (negativement) à une question posée par B. Kostant. En* 6.6 *nous montrons qu'il existe des modules d'Harish-Chandra irréductibles, possédant un vecteur* $\mathfrak{k}$*-invariant non nul, qui ne peuvent être induits à partir d'un parabolique, si* $\mathfrak{g}$ *n'est pas isomorphe à* $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$.

6.1. Munissons $U(\mathfrak{g})$ de la structure de U-module définie par

$$(a \otimes b) \cdot u = {}^t\tilde{a}u\tilde{b} \text{ pour } a, b, u \in U(\mathfrak{g}).$$

Les sous-U-modules de $U(\mathfrak{g})$ sont les idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g})$. Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in U(\mathfrak{g})$ on a

$$j(X) \cdot u = [-{}^tX, u].$$

Si on identifie $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ à $\mathfrak{g}$ au moyen de j, la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$ ainsi définie est donc équivalente à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$. En particulier, les éléments de $U(\mathfrak{g})$ sont $\mathfrak{k}$-finis.

6.2. On notera I_π l'annulateur de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ dans $U(\mathfrak{g})$ et J_π l'annulateur de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)/\bar{M}_{\mathfrak{p}}(\pi)$. La représentation de $U(\mathfrak{g})$ dans $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ induit un homomorphisme injectif de U-modules de $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ dans $\mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(\pi), M_{\mathfrak{p}}(\pi))$. On identifiera $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ à son image.

LEMME: *La restriction de* Φ *à* $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ *a pour noyau* J_π/I_π *et induit un isomorphisme de* U*-modules de* $U(\mathfrak{g})/J_\pi$ sur $U\mathscr{L}^0_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$.

DÉMONSTRATION: La première assertion résulte de 5.3. (iii). La deuxième provient du fait que $U(\mathfrak{g})/J_\pi$ est engendré comme U-module par un élément $\mathfrak{k}$-invariant, à savoir l'image de $1 \in U(\mathfrak{g})$.

6.3. COROLLAIRE: *Si* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$ *est cyclique, l'application* Φ *induit un isomorphisme de* $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ *sur* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$.

6.4. Soit $p \in \mathfrak{h}_0^*$. Si $p(H_\alpha)$ n'est un entier non nul pour aucune racine l'idéal $I_0(p)$ est maximal. Le corollaire 6.3. permet d'utiliser un résultat de [7] pour décrire la situation dans le cas où p est "sous-régulier":

COROLLAIRE: *Soit $p \in \mathfrak{h}_0^*$. Supposons qu'il existe seulement deux racines opposées $\pm\alpha$ telles que $p(H_\alpha)$ soit un entier non nul. Alors il y a un seul idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ qui contienne $I_0(p)$ et soit distinct de $I_0(p)$; cet idéal est le noyau d'une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ induite par une représentation de dimension finie d'une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$.*

DÉMONSTRATION: On peut supposer $p(H_\alpha) < 0$. Alors $U(\mathfrak{g})/I_0(p)$ est isomorphe à $\mathscr{L}_0(-p, -p)$, d'après 2.12. et 6.4. Or, d'après ([7], V.1.12.), $\mathscr{L}_0(-p, -p)$ possède un seul sous-module propre. La dernière assertion résulte de ([4], Proposition 2 (ii)).

REMARQUE: Ce corollaire entraine le résultat suivant de W. BORHO: sous la même hypothèse, il y a un seul idéal bilatère premier de $U(\mathfrak{g})$ qui contienne $I_0(p)$ et soit différent de $I_0(p)$ ([1]).

6.5. Lorsque $\mathfrak{p}$ n'est pas minimale, il peut arriver que $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ soit irréductible sans que $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$ soit cyclique, comme le montrera la proposition suivante. Dans ce cas, d'après 5.5. et 6.2., on a $U(\mathfrak{g})/I_\pi \neq \mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(\pi), M_{\mathfrak{p}}(\pi))$, d'où une réponse négative à une question posée par B. KOSTANT: tout $\mathbb{C}$-endomorphisme $\mathfrak{k}$-fini d'un $\mathfrak{g}$-module simple provient-il de l'algèbre enveloppante? Compte-tenu du paragraphe 8 ci-dessous, ceci est à rapprocher du fait suivant, remarqué par W. Borho et A. Joseph: il peut arriver, avec les notations de 6.2., que $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ soit irréductible, que π soit de dimension >1, et que I_π soit completement premier.

Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathfrak{g}$ est simple et admet des racines de longueurs différentes. Soient α_1 et α_2 des racines simples non orthogonales telles que $\|\alpha_1\| > \|\alpha_2\|$. Pour $i = 1, 2$, on note s_i la symétrie relative à α_i, $\bar{\omega}_i$ le poids fondamental associé à α_i, $\mathfrak{s}_i$ la sous-algèbre engendrée par X_{α_i} et $X_{-\alpha_i}$, $\mathfrak{p}_i$ la sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{p}_0$ de partie semi-simple $\mathfrak{s}_i$; pour $p \in \mathscr{P}^+_{\mathfrak{s}_i}$, on pose $\mathscr{L}_i(p) = \mathscr{L}_{\mathfrak{p}_i}(p, p)$, et $\mathscr{L}_i^0(p) = \mathscr{L}^0_{\mathfrak{p}_i}(p, p)$.

LEMME: *Soit δ une racine courte qui soit aussi un poids dominant. Soient E_δ le $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids δ, $E_\delta(0)$ l'espace des éléments de poids 0 de E_δ et $E_\delta(0)^{\mathfrak{s}_i}$ l'espace des éléments de $E_\delta(0)$ qui sont annulés par $\mathfrak{s}_i$. On a*

$$E_\delta(0) = E_\delta(0)^{\mathfrak{s}_1} \underset{\neq}{\supset} E_\delta(0)^{\mathfrak{s}_2}$$

DÉMONSTRATION: Si α est une racine longue, on a $X_\alpha f = 0$ pour tout $f \in E_\delta(0)$ car les poids de E_δ sont de longueur inférieure à $\|\delta\| = \|\alpha_2\|$. Par contre, pour tout $f \in E(0)$, $f \neq 0$. il existe une racine α, courte d'après ce qui précède, telle que $X_\alpha f \neq 0$. Comme les racines courtes sont toutes conjuguées, il existe $f \in E_\delta(0)$, $f \neq 0$, tel que $X_{\alpha_2} f \neq 0$.

PROPOSITION: *Il existe $p \in \mathfrak{h}_0^*$ tel que $p(H_{\alpha_1}) = 0$, tel que $M_1(-p)$ soit irréductible mais $\mathscr{L}_1(p)$ ne soit pas cyclique.*

DÉMONSTRATION: 1/On suppose $\mathfrak{g}$ de type G_2.

Soit $p = \frac{1}{2}\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2$. Posons $r = -p + \frac{1}{2}\alpha_1 = \bar{\omega}_1 - 2\bar{\omega}_2$. Alors $M_1(-p)$ est isomorphe au quotient de $M_0(r)$ par $M_0(s_1 r)$. Les seuls sous-modules de Verma de $M_0(r)$ sont $M_0(s_1 r)$ et $M_0(s_2 s_1 r)$; d'après ([4], lemme 1), cela entraine l'irréductibilité de $M_1(-p)$. $\mathscr{L}_1(p)$ est isomorphe à un quotient de $\mathscr{L}_0(p + \frac{1}{2}\alpha_1)$. Soit $q = p + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$. $\mathscr{L}_2(q)$ est isomorphe à un sous-module de $\mathscr{L}_0(p + \frac{1}{2}\alpha_1)$. Dans ces homomorphismes des éléments $\mathfrak{k}$-invariants se correspondent; par suite $U\mathscr{L}_1^0(p)$ est isomorphe à un sous-quotient de $\mathscr{L}_2(q)$. Soit δ comme dans le lemme. Considérons E_δ comme un K-module et notons $[\delta^* : ?]$ la multiplicité de E_δ^* dans ?. On a

$$[\delta^* \colon U\mathscr{L}_1^0(p)] \leq [\delta^* \colon \mathscr{L}_2(q)] = \dim E_\delta(0)^{s_2} < \dim E_\delta(0)^{s_1} = [\delta^* \colon \mathscr{L}_1(p)]$$

ce qui prouve la proposition pour $\mathfrak{g}$ de type G_2.

2/On suppose que $\mathfrak{g}$ n'est pas de type G_2.

Soit p un élément de $\mathfrak{h}_0^*$ orthogonal à α_1 et α_2. Posons $q = p + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$. En considérant $\mathscr{L}_2(q)$ on montrer comme dans le cas 1 que $\mathscr{L}_1(p)$ n'est cyclique. Montrons qu'on peut choisir p de façon que, en outre, $M_1(p)$ soit irréductible: on pose encore $r = -p + \frac{1}{2}\alpha_1$, de telle sorte que $M_1(-p)$ est isomorphe au quotient de $M_0(r)$ par $M_0(s_1 r)$; si choisit p tel que $p(H_\alpha)$ soit positif et très grand pour toute racine α simple différente de α_1 et α_2, les seuls sous modules de Verma de $M_0(r)$ sont $M_0(s_1 r)$ et $M_0(s_2 s_1 r)$, et on conclut comme dans le cas 1.

6.6. Il existe des modules d'Harish-Chandra irréductibles, sphériques, non induits.

Soit I un idéal bilatère maximal de $U(\mathfrak{g})$. Pour la structure de U-module induite par celle de $U(\mathfrak{g})$ (6.1.), le module $\mathscr{L} = U(\mathfrak{g})/I$ est irréductible, localement $\mathfrak{k}$-fini et sphérique.

PROPOSITION: *Supposons qu'il existe une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{p}_0$, et une représentation irréductible de dimension* *finie π de telles que $\mathscr{L}$ soit isomorphe à $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$. Alors $I = I_{\mathfrak{p}}(\pi)$.*

DÉMONSTRATION: Si $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$ est irréductible, donc cyclique, le U-module $U(\mathfrak{g})/I_{\mathfrak{p}}(\pi)$ est isomorphe à $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$, (Corollaire 6.3), donc au U-module $U(\mathfrak{g})/I$. Cela entraine $I_{\mathfrak{p}}(\pi) = I$.

COROLLAIRE: *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, différente de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Il existe un module d'Harish-Chandra irréductible, sphérique, qui n'est isomorphe à aucun module d'une série principale.*

DÉMONSTRATION: D'après [11], l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ contient un idéal bilatère maximal qui n'est l'annulateur d'aucun module de Verma.

REMARQUE: Ce corollaire fournit des contrexemples au théorème 1 de [14]. D. P. ZELOBENKO nous a informé par lettre qu'il a obtenu ce contrexemple pour $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$.

EXEMPLE: Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, l'idéal non induit de JOSEPH peut être décrit de la manière suivante: dans l'algèbre t_n des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux en n variables $x_1, \ldots, x_n$, le sous-espace engendré par les éléments $x_i x_j$, $\partial/\partial x_i\, \partial/\partial x_j$, $x_i\, \partial/\partial x_j + x_j\, \partial/\partial x_i$, pour $1 \leq i, j \leq h$, est une sous-algèbre de Lie isomorphe à $\mathrm{sp}(n, \mathbb{C})$. La représentation naturelle de $\mathscr{A}_n$ dans l'espace $C[x_1, \ldots, x_n]$ donne par restriction une représentation de $U(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}))$. L'idéal de Joseph est le noyau de cette représentation, [11].

7. Un module de la série principale peut contenir une infinité de sous-modules

Dans ce paragraphe on suppose que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ et on omet l'indice 0 dans $M_0(\ )$, $\mathscr{L}_0(,)$ etc.... Pour $p \in \mathfrak{h}_0^*$, on note m_p le générateur canonique de $M(p)$. Pour $p, q \in \mathfrak{h}_0^*$ on note $V(p, q)$ le quotient simple de $U\mathscr{L}^0(p, q)$.

Nous commençons par un résultat (proposition 7.2.) qui précise 4.6.

7.1. LEMME: *Soit $u \in U(\mathfrak{n}_0)$. L'élément $u \otimes 1 - j(u)$ appartient à l'idéal à gauche de U engendré par $\mathfrak{n}_0^+ \times \mathfrak{n}_0^+$.*

DÉMONSTRATION: Soient $Y \in \mathfrak{n}_0$ et $v \in U(\mathfrak{n}_0)$. On a

$$\begin{aligned} Yv \otimes 1 - j(Yv) &= (j(Y) + 1 \otimes {}^tY)(v \otimes 1) - j(Yv) \\ &= j(Y)(v \otimes 1 - j(v)) + (v \otimes 1)(1 \otimes {}^tY). \end{aligned}$$

Le lemme s'en déduit par récurrence sur le degré de u.

7.2. Soient $p, p', q \in \mathfrak{h}_0^*$. Soient $M'' \subset M'$ des sous-modules de $M(p)$ tels que M'/M'' soit isomorphe à un quotient de $M(p')$. Soit u un élément de $U(\mathfrak{n}_0)$ tel que l'image de um_p dans M'/M'' soit un vecteur de plus haut poids. Posons $W' = M' \otimes M(q)$ et $W'' = M'' \otimes M(q)$. La multiplication à droite par $u \otimes 1$ dans U induit un homomorphisme de $W(p', q)$ sur W'/W''. Soit $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}''$) l'orthogonal de W' (resp. W'') dans $\mathscr{L}(-p, -q)$). On pose $\Gamma_E = \mathrm{Hom}_K(E, \mathscr{L}')$ et $\Gamma''_E = \mathrm{Hom}_K(E, \mathscr{L}'')$.

PROPOSITION: (i) *La convolution à droite par $\tilde{u} \otimes 1$ induit un homomorphisme de U-modules, noté θ, de $\mathscr{L}''$ sur $\mathscr{L}(-p', -q)$, dont le noyau est $\mathscr{L}'$.*

(ii) *Soit θ_E l'application linéaire de Γ''_E dans* Hom_K $(E, \mathscr{L}(-p', -q)) \simeq E^*(p'-q)$ *déduite de θ. Pour $f \in \Gamma''_E$, on a $\theta_E f =$* u.f. *En particulier $\Gamma'_E = \{f \in \Gamma''_E,$ u.f. $= 0\}$.*

DÉMONSTRATION: Soit $\mathscr{K}(p, q)$ (resp. $\mathscr{K}(p', q)$) l'annulateur du générateur canonique de $W(p, q)$ (resp. $W(p', q)$). Soit U' (resp. U'') l'image réciproque de W' (resp. W'') dans U. On considère les éléments de $\mathscr{L}(-p, -q)$ (resp. $\mathscr{L}(-p', -q)$) comme des formes linéaires sur U nulles sur $\mathscr{K}(p, q)$ (resp. $\mathscr{K}(p', q)$). On a $\mathscr{K}(p', q)$ $(u \otimes 1) \subset U''$ et $U(u \otimes 1) + U'' = U'$ d'où (i).

Soient $e \in E$, $f \in \Gamma''_E$ et $\psi_{e,f}$ le coefficient associé à e et f, (2.4). Pour $a \in U(\mathfrak{g})$ on a

$$\begin{aligned}\langle j(a), \psi_{e,f} * (\tilde{u} \otimes 1)\rangle &= \langle j(a) j(u), \psi_{e,f}\rangle \text{ d'après le lemme 7.1.}\\ &= \langle e, au.f\rangle\\ &= \langle j(a), \psi_{e,u.f}\rangle \text{ d'où (ii).}\end{aligned}$$

7.3. COROLLAIRE: (*on garde les notations de* 7.2.). *On suppose que le plus haut poids de E est l'élément de la chambre de Weyl positive conjugué de $p' - q$. Alors Γ'_E est différent de Γ''_E si et seulement si $\mathscr{L}''/\mathscr{L}'$ admet un sous-quotient isomorphe à $V(-p', -q)$.*

DÉMONSTRATION: On a $\Gamma''_E/\Gamma'_E \simeq \mathrm{Hom}_K(E, \mathscr{L}''/\mathscr{L}')$. On a dim $\mathrm{Hom}_K(E, V(-p', -q)) = 1$ donc la condition est suffisante. En sens inverse, si $\Gamma''_E \neq \Gamma'_E$, l'image de $\mathscr{L}''$ par l'homomorphisme θ contient $\mathscr{L}^0(-p', -q)$, donc la condition est nécessaire.

7.3. Ce qui précède va nous permettre d'utiliser l'exemple 2 de [4] pour exhiber un module de la série principale qui contient une infinité de sous modules: on prend $\mathfrak{g}$ de type D_4. Les racines positives sont, d'une part les racines simples α_1, α_2, α_3, α_4, d'autre part, $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_3+\alpha_2$, $\alpha_4+\alpha_2$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4$, $\alpha_3+\alpha_2+\alpha_4$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$, $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$. On note s_i la symétrie relative à α_i, et on pose $Y_i = X_{-\alpha_i}$ pour $i=1,\ldots,4$. Soit $\bar{\omega}$ le poids fondamental associé à α_2. Notons m le générateur canonique de $M(\bar{\omega})$. Pour tout triplet (A, B, C) de nombres complexes tel que $A+B+C=0$ on pose

$$u_{A,B,C} = A\,Y_3\,Y_4\,Y_2\,Y_1 + B\,Y_1\,Y_4\,Y_2\,Y_3 + C\,Y_1\,Y_3\,Y_2\,Y_4$$
$$m_{A,B,C} = u_{A,B,C}\,m.$$

On a $\mathfrak{n}_0^+\, m_{A,B,C} \subset M(s_2\bar{\omega}) = U(\mathfrak{g})Y_2 m$. Par suite le sous-module $M_{A,B,C}$ de $M(\bar{\omega})$ engendré par $m_{A,B,C}$ et $M(s_2\bar{\omega})$ est un sous-module propre de $M(\bar{\omega})$ et $M_{A,B,C}/M(s_2\bar{\omega})$ est isomorphe à un quotient de $M(\bar{\omega}-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)$. Soit E le $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids $2\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}$ munie de la représentation adjointe. On identifie E à E^* par la forme de Killing. Posons $W_{A,B,C} = M_{A,B,C} \otimes M(\bar{\omega})$. Soit $\mathscr{L}_{A,B,C}$ l'orthogonal de $W_{A,B,C}$ dans $\mathscr{L}(-\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ et posons

$$\Gamma_{A,B,C} = \mathrm{Hom}_K(E, \mathscr{L}_{A,B,C}) \subset E^*(0) = \mathfrak{h}_0.$$

Notons $\mathscr{L}$ l'orthogonal dans $\mathscr{L}(-\bar{\omega},-\bar{\omega})$ de $W(s_2\bar{\omega},\bar{\omega}) \subset W(\bar{\omega},\bar{\omega})$ et posons $\Gamma = \mathrm{Hom}_K(E,\mathscr{L})$. D'après la proposition 7.2. (ii) on a

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{h}_0, \mathrm{ad}\, Y_2(H) = 0 = \mathrm{Ker}\,\alpha_2\}$$
$$\Gamma_{A,B,C} = \{H \in \mathrm{Ker}\,\alpha_2, \mathrm{ad}\, u_{A,B,C}(H) = 0\}$$

Par raison de symétrie, l'élément non nul $Y = [Y_{\alpha_{\sigma(1)}}, [Y_{\alpha_{\sigma(3)}}, [Y_2, Y_{\alpha_{\sigma(4)}}]]]$ ne dépend pas de la permutation σ de $\{1, 3, 4\}$; on a donc

$$u_{A,B,C}(H) = \{A\alpha_1 + B\alpha_3 + C\alpha_4)(H)Y$$

d'où

$$\Gamma_{A,B,C} = \mathrm{Ker}\,\alpha_2 \cap \mathrm{Ker}\,(A\alpha_1 + B\alpha_3 + C\alpha_4).$$

Par suite, si (A, B, C) et (A', B', C') ne sont pas proportionnels, on a $\Gamma_{A,B,C} \neq \Gamma_{A',B',C'}$ d'où $\mathscr{L}_{A,B,C} \neq \mathscr{L}_{A',B',C'}$. *On a donc une famille à un paramètre de sous modules de* $\mathscr{L}(-\bar{\omega},-\bar{\omega})$, *deux à deux distincts.*

7.4. Première conséquence: La suite de Jordan-Holder de

$\mathscr{L}(-\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ comporte au moins deux sous-quotients simples distincts isomorphes; en effet si, dans la suite de Jordan-Holder d'un module de longueur finie V, les sous-quotients simples sont deux à deux non isomorphes, deux sous modules de V qui ont des suites de Jordan-Holder équivalentes coincident, et par suite V ne contient qu'un nombre fini de sous modules. En fait, on verra plus loin que $V(-s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ intervient exactement trois fois dans la suite de Jordan-Holder de $\mathscr{L}(-\bar{\omega}, -\bar{\omega})$.

7.5. Deuxième conséquence: Il y a une infinité d'idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g})$ qui contiennent l'idéal (primitif minimal) $I(\bar{\omega})$. (On sait que les idéaux premiers contenant un idéal primitif minimal donné sont, eux, en nombre fini, ([6], Corollaire 3)). En effet, à cause de la dualité entre $\mathscr{L}(-\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ et $\mathscr{L}(\bar{\omega}, \bar{\omega})$, ce dernier contient lui aussi une infinité de sous-modules. Comme $\bar{\omega}(H_\alpha) \geq 0$ pour toute racine α positive, $\mathscr{L}(\bar{\omega}, \bar{\omega})$ est cyclique, et par suite isomorphe à $U(\mathfrak{g})/I(\bar{\omega})$.

7.6. On peut préciser un peu la suite de Jordan-Holder de $\mathscr{L}(-\bar{\omega}, -\bar{\omega})$. Fixons (A, B, C) tel que $A + B + C = 0$. Considérons la suite de composition suivante de $M(\bar{\omega})$:

$$M_0 = M(\bar{\omega}) \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4 \supset M_5 = \{0\}$$

où

$$M_1 = \sum_{A'+B'+C'=0} M_{A',B',C'}, \; M_2 = M_{A,B,C}$$

$$M_3 = M(s_2\bar{\omega}), \; M_4 = M(s_1s_3s_4s_2\bar{\omega}).$$

Notons $\mathscr{L}_i$ l'orthogonal de $M_i \otimes M(\bar{\omega})$ dans $\mathscr{L}(-\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ et posons $\Gamma_i = \mathrm{Hom}_K(E, \mathscr{L}_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots, 5$). De 7.2. et 7.3. on déduit:

$$\Gamma_4 = \Gamma_3 = \mathrm{Ker}\ \alpha_2$$

$$\Gamma_2 = \mathrm{Ker}\ \alpha_2 \cap \mathrm{Ker}(A\alpha_1 + B\alpha_3 + C\alpha_4) \neq \Gamma_3$$

$$\Gamma_1 = \mathrm{Ker}\ \alpha_2 \cap \mathrm{Ker}(\alpha_1 - \alpha_2) \cap \mathrm{Ker}(\alpha_3 - \alpha_4) \neq \Gamma_2, \{0\}.$$

Les quotients successifs M_i/M_{i+1} sont isomorphes à des quotients des modules de Verma de plus haut poids $\bar{\omega} - \sigma$, $p_1 - \sigma, \ldots, p_4 - \sigma$, où

$$p_1 = p_2 = p_4 = s_1s_3s_4s_2\bar{\omega} = \bar{\omega} - (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4), \; p_3 = s_2\bar{\omega} = \bar{\omega} - \alpha_2$$

Comme $s_1s_3s_4\bar{\omega} = \bar{\omega}$, les modules $V(-s_1s_3s_4s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ et $V(-s_2\bar{\omega}, \bar{\omega})$ sont isomorphes, ([7]), théorème I.4.1.). On déduit donc de 7.3. que chacun des quotients $\mathscr{L}_5/\mathscr{L}_4$, $\mathscr{L}_3/\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_2/\mathscr{L}_1$ admet un sous quotient isomorphe à $V(-s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$.

Remarquons que $\mathscr{L}_3 = \mathscr{L}_4$. En effet, d'après, d'après 7.2. (i), le module $\mathscr{L}_4/\mathscr{L}_3$ est isomorphe à un sous-module de $\mathscr{L}(-s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$. Comme tout sous module non nul de $\mathscr{L}(-s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ contient $\mathscr{L}^0(-s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$, le module $\mathscr{L}_4/\mathscr{L}_3$ admettrait, s'il était non nul, un sous-quotient isomorphe à $V(-s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$. C'est impossible d'après 7.2. (ii), puisque $\Gamma_3 = \Gamma_4$.

7.7. Notons V_i l'orthogonal de $\mathscr{L}_i$ dans $\mathscr{L}(\bar{\omega}, \bar{\omega})$. Comme dans la démonstration de 4.12., on voit que $V_3 = \ker B(s_2, \bar{\omega}, \bar{\omega})$. Comme $s_i\bar{\omega} = \bar{\omega}$ si $i = 1, 3, 4$, on a donc $V_3 = \Sigma_1^4 \ker B(s_i, \bar{\omega}, \bar{\omega})$. V_3 n'est pas maximal d'après 7.6. Donc V_3 n'est pas égal à $\ker B(w_{\mathfrak{g}}, \bar{\omega}, \bar{\omega})$ (lequel est, d'après ([7], IV3.11) le seul sous module maximal de $\mathscr{L}(\bar{\omega}, \bar{\omega})$).

7.8. On obtient un exemple analogue à 7.4, 7.7, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$. Dans ce cas le diagramme de Dynkin est

$$\overset{\alpha_1}{\times} \text{———} \overset{\alpha_2}{\times} \text{———} \overset{\alpha_3}{\times}$$

On note $\bar{\omega}$ le poids fondamental associé à α_2. Le module $V(-s_2\bar{\omega}, -\bar{\omega})$ intervient deux fois dans la suite de Jordan-Hölder de $\mathscr{L}(-\bar{\omega}, -\bar{\omega})$. Ceci se déduit comme plus haut de l'existence dans $M(\bar{\omega})$ d'un sous-module, construit par Bernstein, Gelfand et Gelfand, qui n'est pas somme de ses sous-modules de Verma. M. Hirai nous a écrit qu'il a obtenu cet exemple, par une tout autre méthode.

8. Rang de Goldie d'idéaux induits

8.1. Dans ce paragraphe, on fixe une représentation irréductible π de dimension finie de $\mathfrak{p}$ de plus haut poids p, telle que $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ soit irréductible. L'annulateur I_π de $M_{\mathfrak{p}}(\pi)$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$. L'algèbre $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ admet, d'après le théorème de Goldie-Croisot-Lesieur, un anneau de fractions à gauche et à droite qui est une algèbre de matrices carrées à s lignes sur un corps.

L'entier s s'appelle le rang de Goldie de I_π (cf. par exemple [5] 3.6.12 (iii)).

8.2. Rappelons que d'après [3], corollaire du théorème 3.1, le rang de Goldie de I_π est inférieur ou égal à la dimension de π. Il peut être strictement inférieur (cf. 6.5). Le but de ce chapitre est de donner des conditions suffisantes pour qu'il y ait égalité.

En fait, il est vraisemblable que sous les conditions du théorème 8.6 ci-dessous l'anneau des quotients de $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées ayant $\dim(\pi)$ lignes sur le corps D_r, où r est la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, et où D_r est le corps des quotients de l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur $\mathbb{C}^r$. S'il en est ainsi, l'entier r est la moitié de la dimension de Gelfand-Kirillov de $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ et en effet, d'après [1], la dimension de Gelfand-Kirillov de $U(\mathfrak{g})/I$ est $2r$ (sous les hypothèses de 8.1).

Ainsi, bien qu'il soit intéressant de connaitre la structure de l'anneau des quotients de $U(\mathfrak{g})/I_\pi$, il semble que le seul invariant nouveau que l'on puisse en déduire soit le rang de Goldie de I_π. Comme celui-ci n'est pas long à obtenir, nous nous en tiendrons là.

8.3. Dans la suite, nous supposerons que $\mathscr{L}_\mathfrak{p}(\pi^*, \pi^*)$ est cyclique. Nous poserons $A = \mathscr{L}_\mathfrak{p}(\pi^*, \pi^*)$. D'après 6.3, on peut identifier A et $U(\mathfrak{g})/I_\pi$. Nous noterons B l'anneau des quotients de A.

8.4. Soit $\mu \in \mathscr{P}^+$ un élément qui s'annule sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$. L'application identique de $U(\mathfrak{n}_0^-)$ induit par passage au quotient un isomorphisme linéaire de $M_\mathfrak{p}(p)$ dans $M_\mathfrak{p}(p-\mu)$ que nous noterons θ_μ.

LEMME: *θ_μ est $\mathfrak{k}$-fini. C'est l'élément de plus haut poids d'un sous k-module simple de $\mathscr{L}(M_\mathfrak{p}(p), M_\mathfrak{p}(p-\mu))$ de plus bas poids μ.*

DÉMONSTRATION: C'est un cas particulier du lemme 5.7 avec $\lambda = 0$, $v = 1$, en utilisant les notations de ce lemme.

8.5. Les notations sont celles de 8.4. Soit C l'ensemble des applications linéaires de $M_\mathfrak{p}(p)$ dans lui-même qui sont de la forme $\varphi\theta\mu$, avec $\varphi \in \mathscr{L}(M_\mathfrak{p}(p-\mu), M_\mathfrak{p}(p))$. Il resulte de 8.4 que C est un idéal à gauche de A.

LEMME: *On suppose $M_\mathfrak{p}(p-\mu)$ irréductible. Alors C contient un élément inversible dans B.*

DÉMONSTRATION: Soit D l'idéal à droite de A formé des éléments $d \in A$ tels que $cd = 0$ pour tout $c \in C$. Montrons que D est nul. Soit $d \in D$. Supposons $d \neq 0$. Alors $\theta_\mu d$ est non nul. Soit $v \in M_\mathfrak{p}(p-\mu)$ un élément non nul de l'image de $\theta_\mu d$. Soit φ un élément non nul de $\mathscr{L}(M_\mathfrak{p}(p-\mu), M_\mathfrak{p}(p))$ (il en existe d'après 5.5). Comme $M_\mathfrak{p}(p-\mu)$ est irréductible, il existe $f \in \mathscr{L}(M_\mathfrak{p}(p-\mu), M_\mathfrak{p}(p-\mu))$ tel que $\varphi f(v)$ soit non nul, et donc $(\varphi f)d$ est non nul, contrairement à la définition de D.

Comme B est anneau de quotients à droite pour A, il en résulte que l'annulateur à droite de C dans B est nul. Notons C' l'idéal à gauche de B engendré par C. C'est l'ensemble des $s^{-1}c$, où $c \in C$, et où s est un élément de A inversible dans B. L'annulateur à droite de C' dans B est nul.

Identifions B à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un certain corps. Pour tout $v \in V$, $v \neq 0$ on a $C'v \neq 0$. (En effet, dans le cas contraire, un élément d de B dont l'image serait l'espace vectoriel engendré par v annulerait C' à droite). Il en résulte facilement que l'on a $C' = B$, ce qui prouve le lemme.

8.6. Les notations sont celles de 8.1.

THÉORÈME: *On suppose que* $\mathscr{L}_{\mathfrak{p}}(\pi^*, \pi^*)$ *est cyclique* (*cf.* 2.7 *et* 2.12). *Le rang de Goldie de* I_π *est égal à la dimension de* π.

DÉMONSTRATION: Notons d la dimension de π. Compte tenu de 8.2, il reste à prouver que le rang de Goldie est $\geq d$. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe dans B un élément b tel que l'on ait $b^{d-1} \neq 0$ et $b^d = 0$. Notons E l'espace de π. On identifie $M_{\mathfrak{p}}(p)$ et $U(\mathfrak{n}^-) \otimes E$ comme en 3.2. Notons t un endomorphisme linéaire de E tel que $t^{d-1} \neq 0$ et $t^d = 0$. Posons $\psi(u \otimes e) = u \otimes t(e)$ pour tout $u \in U(\mathfrak{n}^-)$ et tout $e \in E$. L'application linéaire ψ de $M_{\mathfrak{p}}(p)$ dans $M_{\mathfrak{p}}(p)$ commute à l'action de $\mathfrak{n}^-$, vérifie $\psi^{d-1} \neq 0$ et $\psi^d = 0$. Comme $U(\mathfrak{n}^-)$ est stable sous l'action de $\mathfrak{s}$, ψ est $j(\mathfrak{s})$-finie. D'après 5.10, il existe $\mu \in \mathscr{P}^+$ s'annulant sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$ tel que $\theta_\mu \psi$ soit $\mathfrak{k}$-finie. Soit $\nu \in \mathscr{P}^+$ un élément nul sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$, et tel que $M_{\mathfrak{p}}(p - \mu - \nu)$ soit irréductible (il en existe d'après 4.8). Remplaçant $\mu + \nu$ par μ, on a donc montré qu'il existe $\mu \in \mathscr{P}^+$, s'annulant sur $\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{s}$, tel que $\theta_\mu \psi$ soit k-finie et tel que $M_{\mathfrak{p}}(p - \mu)$ soit irréductible. D'après 8.5, il existe $\varphi \in \mathscr{L}(M_{\mathfrak{p}}(p - \mu), M_{\mathfrak{p}}(p))$ tel que $\varphi\theta_\mu$ soit inversible dans B. Posons $s = \varphi\theta_\mu$ et $a = \varphi\theta_{\mu\psi}$. Dans l'anneau des endomorphismes de $M_{\mathfrak{p}}(p)$ on a $s\psi = a$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'élément $b = s^{-1}a$ de B vérifie $b^{d-1} \neq 0$ et $b^d = 0$.

8.7. Depuis la rédaction de cet article, A. Joseph a montré, en utilisant 8.6, que sous les hypothèses de 8.6 l'anneau des quotients de $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées à $\dim(\pi)$ lignes sur D_r [12].

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BORHO: *Berechnung der Gelfand-Kirillov Dimension bei induzierten Darstellungen.* Reprint, Mathematishes Institut, Bonn, 1975.

[2] N. N. CHAPOVOLOV: Une forme bilinéaire sur l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie semi-simple complexe (en Russe). *Funktsional'nyi Analiz i evo Pril. 6* (1972) 65–70.

[3] N. CONZE: Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes. *Bull. Soc. Math. France, 102* (1974) 379–415.

[4] N. CONZE et J. DIXMIER: Idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple. *Bull. Sci. Math., 96* (1972) 339–351.

[5] J. DIXMIER: *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villars, Paris (1974).

[6] J. DIXMIER: Idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple complexe, II. *C. R. Acd. Sci. Paris 272* (1971) 1628–1630.

[7] M. DUFLO: Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes. *Lecture notes 497* (1975) 26–88.

[8] M. DUFLO: *Représentations unitaires des groupes simples complexes de rang deux.* Preprint 1976.

[9] I. M. GELFAND et A. A. KIRILLOV: Structure du corps enveloppant d'une algèbre de Lie semi-simple (en russe). *Funktsional'nyi Analiz i evo Pril. 3* (1969) 7–26.

[10] J. C. JANTZEN: *Kontravariante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie. Algebren.* Preprint 1976.

[11] A. JOSEPH: The minimal orbit in a semi-simple Lie algebra and its associated maximal ideal. *Ann. Ec. Norm. Sup. 9* (1976) 1–30.

[12] A. JOSEPH: *Sur la conjecture de Gelfand-Kirillov pour les idéaux induits dans le cas semi-simple.* Preprint 1976.

[13] N. WALLACH: On the Enright-Varadarajan modules. *Ann. Ec. Norm. Sup. 9* (1976) 81–102.

[14] D. P. ZELOBENKO: Sur les représentations irréductibles d'un groupe de Lie semi-simple complexe. *Funktsional'nyi Analiz i evo Pril. 4* (1970) 85–86.

[15] D. P. ZELOBENKO: *Analyse harmonique sur les groupes semi-simples complexes.* Ed. Nauka, Moscou 1974 (En russe).

(Oblatum 10-XII-1975 & 13-X-1976)

Université Paris VII
U.E.R. De Mathématiques
Tour 45-55-5^{me} Etage
2, Place Jussieu
75221 Paris Cedex 05