

COMPOSITIO MATHEMATICA

MARCO FONTANA

Sur le plongement projectif des surfaces définies sur un corps de base fini

Compositio Mathematica, tome 31, n° 1 (1975), p. 1-22

http://www.numdam.org/item?id=CM_1975__31_1_1_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE PLONGEMENT PROJECTIF DES SURFACES DEFINIES SUR UN CORPS DE BASE FINI

Marco Fontana*

Abstract

The main theorem stated in this paper is the following: let F be a two-dimensional irreducible scheme, proper over an algebraic extension of a finite field. If F_{red} is non-singular in codimension 1, then F is projective.

Preliminarily, pursuing M. Artin's works [2] [3], we have completed some of his results, proving that any proper and normal surface, which is defined over a finite field or which admits only isolated rational singularities is projective.

0. Introduction

Les premiers exemples de variétés non quasi-projectives et de variétés complètes non projectives ont été construits par M. Nagata^{1,2}, lequel a relancé de cette façon, le problème de l'existence du plongement d'une variété dans une variété projective.

Les premiers résultats relatifs à un tel problème sont déjà anciens et concernent les variétés en groupe. A. Weil³, en utilisant un résultat de S. Lefschetz⁴ sur les variétés abéliennes définies sur le corps complexe, démontra que toute variété abélienne est projective. W. L. Chow⁵

* financé par 'Il Consiglio Nazionale delle Ricerche'

¹ On the imbeddings of abstract surfaces in projective varieties. Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto 30 (1957) 231–235.

² Existence theorems for non-projective complete algebraic varieties. Ill. J. Math. 2 (1958) 490–498.

³ On projective embedding of abelian varieties. Algebraic geometry and topology. A Symposium in honor of S. Lefschetz. Princeton Univ. Press. (1957) 177–181; Cf. Th. p. 179.

⁴ On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to abelian varieties. Trans. A. M. S. 22 (1921) 327–482; Cf. Part II Ch. I §1 p. 368.

⁵ On projective embedding of homogeneous varieties. (même référence que³) 122–128.

étendit les résultats de Weil, en prouvant que toute variété homogène (i.e. toute variété qui admet une variété en groupes qui agit transitivement sur elle) est projective. Des contributions ultérieures sur la projectivité des variétés qui admettent une loi de composition ont été apportées aussi par C. Chevalley⁶ et par B. G. Moisezon⁷.

Pour ce qui concerne les variétés non singulières, Chevalley conjectura⁸ que toute variété complète, non singulière et telle que tout ensemble fini de points est contenu dans un ouvert affine, est projective. M. Borelli⁹, plus tard, en introduisant les variétés divisorielles comme une généralisation naturelle, tant des variétés quasi-projectives que des variétés non singulières, étendit la conjecture de Chevalley à de telles variétés. Une démonstration partielle de la conjecture de Chevalley, relative aux variétés 3-dimensionnelles complexes avec un nombre fini de courbes algébriques essentiellement irréductibles, a été donnée par Moisezon¹⁰. Mais, décisive pour la résolution de la conjecture de Chevalley a été la contribution de la théorie numérique de l'amplitude, qui a permis de caractériser les diviseurs amples à travers leurs propriétés d'intersection. Il est bien connu que tout diviseur ample est numériquement positif (i.e. son nombre d'intersection, avec chaque courbe, est positif), la réciproque étant fautive comme il a été montré par D. Mumford¹¹ et par C. P. Ramanujan¹² même si le diviseur est effectif. D'abord par Y. Nakai¹³, pour les surfaces non singulières, et après par Moisezon¹⁴, pour les variétés complètes, et, indépendamment, par le même Nakai¹⁵, pour les schémas projectifs, il a été montré qu'un diviseur est ample si et seulement si il est arithmétiquement positif¹⁶. Finalement, S. Kleiman [12], en développant et en appliquant la théorie numérique de l'amplitude, a réussi à démontrer la conjecture de Chevalley sous

⁶ Plongement projectif d'une variété de groupe. Proc. Int. Symp. Alg. Numb. Th. Tokyo-Nikko (1955) 131–138.

⁷ A criterion for projectivity of complete algebraic abstract varieties. Am. Math. So. Translations. Se. 2 63 (1967) 1–50; Cf. Th. 3 p. 43.

⁸ L'énoncé de la conjecture de Chevalley reportée ici est celle de S. Kleiman [12] et de R. Hartshorne [11]. Nagata, dans ⁽²⁾ attribut à Chevalley la question suivante: Soit V une variété normale telle que, pour tout nombre fini de points de V , il existe une variété affine qui les contient. V peut-il se plonger dans une variété projective?

⁹ Divisorial varieties. Pacific J. Math. 13 (1963) 375–388.

¹⁰ v. (7) Th. 4 p. 44.

¹¹ Cf. Kleiman [12] p. 326.

¹² Cf. Hartshorne [11] p. 57.

¹³ Non-degenerate divisors of an algebraic surface J. Sc. Hiroshima Univ. 24 (1960) 1–6 Th. 9.

¹⁴ v. (7) Th. 2 p. 26.

¹⁵ A criterion of an ample sheaf on a projective scheme. Am. J. Math. 85 (1963) 14–26.

¹⁶ Cf. aussi S. Kleiman: A note on the Nakai-Moisezon test for ampleness of a divisor. Am. J. Math. 87 (1965) 221–226.

une forme très générale, relative aux variétés quasi-divisoriales (variétés qui généralisent celles de Borelli) (Cf. aussi paragraphe 6).

Revenant au cas général, nous savons, d'une part que toute variété projective est nécessairement complète, et, d'autre part que toute variété peut être plongée dans une variété complète (Cf. M. Nagata^{17, 18}).

M. Nagata¹⁹, d'abord, et H. Hironaka²⁰, ensuite, ont construit des exemples de variétés de dimension plus grande ou égale à 3, qui sont complètes et non singulières, mais qui ne sont pas projectives. La non projectivité de ces exemples se fonde sur le fait que de telles variétés ont un ensemble fini de points qui n'est pas contenu dans un ouvert affine.

En dimension 2, O. Zariski²¹ a démontré que si une surface complète et normale est telle que tous ses points singuliers sont contenus dans un ouvert affine, alors elle est projective.

J. E. Goodman [8], par la suite, a étendu ce théorème en appliquant sa théorie des ouverts affines qui sont le complément de diviseurs amples, et en démontrant que si le complément du lieu factoriel d'une surface complète est affine, alors la surface est projective.

D'autre part, un exemple de M. Nagata²² montre qu'il existe des surfaces complètes et normales, qui ne sont pas projectives.

Une surface de ce type, de toute façon, doit être définie sur un corps de base 'plutôt grand', car M. Artin [2] a établi que toute surface normale et complète sur la clôture algébrique d'un corps premier de caractéristique $p \neq 0$ est projective.

Dans le présent travail, tout d'abord, nous avons complété quelques résultats de M. Artin [2], [3] relatifs aux surfaces, en démontrant que toute surface propre et normale, qui est définie sur un corps fini ou qui admet seulement des singularités rationnelles isolées est projective.

Ensuite, en affaiblissant l'hypothèse de normalité, nous avons généralisé ces résultats. Notre théorème principal s'énonce de la façon suivante:

Tout schéma F 2-dimensionnel irréductible, propre sur un corps fini ou extension algébrique d'un corps fini, tel que F_{red} soit non-singulier en codimension 1, est projectif.

¹⁷ Imbedding of an abstract variety in a complete variety. J. Math. Kyoto Univ. 2 (1962) 1–10.

¹⁸ A generalisation of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety. J. Math. Kyoto Univ. 3 (1963) 89–102.

¹⁹ v. (2).

²⁰ An example of a non-kahlerian complex analytic deformation of kahlerian complex structures. Ann. of Math. 75 (1962) 190–208.

²¹ Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces Publ. Math. Soc. Japan N. 4 (1958); Cor. II. 2.6. p. 53 et remarque (9) p. 54.

²² v. (2) § 4 p. 492.

De plus, nous avons donné la construction explicite d'un exemple d'une surface singulière en codimension 1, de Cohen-Macaulay, propre sur un corps fini, qui n'est pas projective.

A l'aide d'une propriété démontrée par M. Raynaud [17], nous avons aussi montré que tout schéma 2-dimensionnel séparé et de type fini satisfait à la propriété que tout ensemble fini de points est contenu dans un ouvert affine. A posteriori, ce résultat nous assure de la projectivité des schémas propres et normaux définis sur un corps fini, à l'aide du théorème de Zariski-Goodman.

Pour terminer, je désire exprimer ma sincère gratitude à M. Raynaud pour m'avoir dirigé vers l'étude de ces problèmes et pour les nombreux conseils et suggestions (je lui dois l'exemple du paragraphe 5) tout au long de mon séjour à Orsay. Je tiens, aussi, à remercier G. Mazzola pour les discussions continues et stimulantes, qui m'ont fourni une aide précieuse dans l'élaboration de ce travail.

Dans ce papier, nous suivrons essentiellement le langage et les notations des EGA de Grothendieck. En outre, suivant l'usage commun nous poserons:

variété = schéma algébrique intègre et séparé

surface = variété 2-dimensionnelle

courbe = variété 1-dimensionnelle (quelquefois, nous dirons emphatiquement 'courbe irréductible' à la place de 'courbe').

'Variété propre' est synonyme de 'variété complète'.

1. Préliminaires

Nous précisons, d'abord, quelques notations et conventions.

Soit F une surface propre et normale définie sur un corps fini k .

Quitte à utiliser un procédé de récurrence sur le nombre fini des points singuliers de la surface normale F , nous pouvons nous borner, pour le problème que nous avons en vue, à considérer le cas dans lequel F a un seul point singulier x_0 .

Il est bien connu que, par une suite de dilatations, il est possible de transformer birationnellement F en une surface F' non-singulière projective (théorème de résolution des singularités d'une surface¹). En outre, le lieu exceptionnel E de F' (i.e. l'image réciproque dans F' du point x_0

¹ cf. S. Abhyankar [1], O. Zariski [20] [21].

de F) est connexe (théorème de connexion de Zariski, cf. EGA III 4.3) et nous pouvons supposer qu'il est la réunion d'un nombre fini de courbes E_1, E_2, \dots, E_t nonsingulières (théorème de résolution des singularités d'une courbe²) et telles que:

- (1) pour tout couple d'indices $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq t$, E_i et E_j se coupent transversalement³ en au plus un point x_{ij} , $x_{ij} \notin E_k$ pour tout autre indice k , $k \neq i$ et $k \neq j$;
- (2) la matrice d'intersection $\|(E_i \cdot E_j)\|_{1 \leq i, j \leq t}$ est définie négative. (Cf. D. Mumford [12]).

Notons par $p : F \rightarrow k$ et $p' : F' \rightarrow k$ les morphismes structuraux; par f le morphisme de F' sur F (qui est donc projectif, birationnel et, mieux, un isomorphisme hors de E). Soit H un diviseur très-ample sur F' relativement à k , donc aussi relativement à F (cf. EGA II 4.4.10).

Tout cycle (1-codimensionnel) positif $C = \sum_{i=1}^t n_i \cdot E_i$, avec support $E = \bigcup_{i=1}^t E_i$, tracé sur la surface non-singulière F' est identifié à un sous-schéma fermé (C, \mathcal{O}_C) de F' ayant comme espace sous-jacent E , obtenu comme image schématique dans F' du schéma

$$\coprod_{i=1}^t \text{Spec} (\mathcal{O}_{F', \xi_i} / \mathfrak{m}_{\xi_i}^{n_i}),$$

où ξ_i est le point générique de la courbe irréductible E_i de F' (cf. EGA IV 21.7).

Remarquons aussi que (C, \mathcal{O}_C) est le sous-schéma fermé de F' déterminé par le diviseur associé au cycle C , dans la correspondance biunivoque existant entre cycles et diviseurs de notre surface non-singulière (cf. EGA IV 21.6.9. et IV 21.2.12). Notons $\mathcal{O}_{F'}(-C)$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_{F'}$ qui définit le sous-schéma (C, \mathcal{O}_C) , et par $\lambda : \coprod_{i=1}^t \text{Spec} (\mathcal{O}_{F', \xi_i} / \mathfrak{m}_{\xi_i}^{n_i}) \rightarrow F'$ le morphisme canonique. Donc:

$$\mathcal{O}_{F'}(-C) = \text{Ker} (\mathcal{O}_{F'} \rightarrow \lambda_* \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{F', \xi_i} / \mathfrak{m}_{\xi_i}^{n_i})^4 \quad \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{F'} / \mathcal{O}_{F'}(-C).$$

² cf. par exemple I. R. Shafarevich [19] p. 38.

³ v. aussi la remarque en bas de la p. 9.

⁴ Localement, sur un ouvert affine $U = \text{Spec } A$ de F' ,

$$\mathcal{O}_{F'}(-C)|_U = \text{Ker} (A \rightarrow \bigoplus_{\xi_i \in U} A_{\mathfrak{p}_i} / \mathfrak{p}_i^{n_i} A_{\mathfrak{p}_i}),$$

où les \mathfrak{p}_i sont les idéaux premiers correspondants aux points $\xi_i \in U$. Si q_i est l'image réciproque dans A de l'idéal $\mathfrak{p}_i^{n_i} A_{\mathfrak{p}_i}$, par l'homomorphisme canonique $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}_i}$, alors $\mathcal{O}_{F'}(-C)|_U = \bigcap_{\xi_i \in U} q_i$.

Le schéma associé au cycle positif $\sum_{i=1}^t E_i$ est $(C, \mathcal{O}_C)_{\text{red}} = (E, \mathcal{O}_E)$. En outre, si $C' = \sum_{i=1}^t n'_i \cdot E_i$ est un autre cycle positif, avec support dans E , et si $C \geq C'$, on en déduit un morphisme surjectif des faisceaux structuraux :

$$\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow 0.$$

Nous notons \mathcal{F}^* le faisceau en groupes abéliens multiplicatifs des sections inversibles d'un faisceau en anneaux \mathcal{F} .

Soit $\varepsilon_i : E_i \hookrightarrow C$ l'immersion fermée de E_i dans un cycle C qui a pour support E .

Soit $d : H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \rightarrow \mathbb{Z}^t$ l'application qui, à toute classe de cohomologie d'un faisceau inversible \mathcal{L} sur C , associe $d(\text{cl}\mathcal{L}) = (\deg_{E_i} \varepsilon_i^* \mathcal{L})_{1 \leq i \leq t}$. On voit tout de suite que d est un homomorphisme surjectif de groupes ⁵.

2. Projectivité des surfaces propres et normales définies sur un corps de base fini

Soit F, F' et E comme dans paragraphe 1.

Notons par $\mathcal{G}_E = \{C = \sum_{i=1}^t n_i \cdot E_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$ le groupe abélien libre des cycles de F' avec support dans E .

Pour tout cycle X de F' – pas nécessairement dans \mathcal{G}_E – nous pouvons considérer l'homomorphisme de groupes $i_X \in \text{Hom}(\mathcal{G}_E, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^t$, défini par : $i_X(D) = (X \cdot D)$, pour tout $D \in \mathcal{G}_E$.

Soit $i : \mathcal{G}_E \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}_E, \mathbb{Z})$ l'homomorphisme de groupes qui envoie $C \in \mathcal{G}_E$ dans $i_C \in \text{Hom}(\mathcal{G}_E, \mathbb{Z})$.

LEMME (1):

- (i) $\mathcal{G}_E \xrightarrow{i} \text{Hom}(\mathcal{G}_E, \mathbb{Z})$ est injectif;
- (ii) Coker i est un groupe fini.

DÉMONSTRATION : (i) découle du fait que la matrice $\|(E_i \cdot E_j)\|$ est définie négative. (ii) résulte de (i) et du fait que $\mathcal{G}_E \cong \text{Hom}(\mathcal{G}_E, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^t$.

⁵ En effet, du théorème de Riemann-Roch pour les courbes, il découle que

$$\text{deg}_{E_i} : H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}^*) \cong \text{Pic}(E_i) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est un homomorphisme de groupes. La surjectivité résulte du fait que l'application composée $\text{Div } E_i \xrightarrow{\partial} \text{Pic } E_i \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}$ est surjective (cf. Mumford [14] p. 77–78 ou Kleiman [12] Rq. 2 p. 301; pour la définition de ∂ , v. EGA IV 21.3).

COROLLAIRE (2): *Pour tout cycle X sur F' (pas nécessairement dans \mathcal{G}_E) il existe un cycle C sur F' qui est dans \mathcal{G}_E et un entier $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, de façon telle que $n \cdot i_X = i_{nX} = -i_C$.*

COROLLAIRE (3): *Sur la surface F' , il est possible de trouver un diviseur très-ample¹ \tilde{H} et un cycle $\tilde{C} \in \mathcal{G}_E$ de façon telle que:*

- (j) $H^1(F', \mathcal{O}_{F'}(\tilde{H})) \cong H^2(F', \mathcal{O}_{F'}(\tilde{H})) \cong 0$;
- (jj) $i_{\tilde{H}} = -i_{\tilde{C}}$
- (jjj) $\tilde{C} > 0$ (donc $\text{Supp } \tilde{C} = E$).

DÉMONSTRATION: \tilde{H} et \tilde{C} , satisfaisant à (jj), s'obtiennent à partir du diviseur très-ample H de F' (cf. paragraphe 1) en appliquant le Corollaire (2) avec $X = H$. En prenant éventuellement un multiple positif de \tilde{H} (et de \tilde{C}), \tilde{H} satisfait aussi à la condition (j) (propriété de régularité des multiples des faisceaux amples, cf. EGA III 2.6.1 ou Kleiman [12] Th. 2 p. 312). Montrons que \tilde{C} vérifie la condition (jjj). Observons que \tilde{H} très-ample implique, en particulier, $(\tilde{H} \cdot E_i) > 0$, pour $1 \leq i \leq t$ (cf. Hartshorne [11] p. 30). Posons $\tilde{C} = C_1 - C_2$ avec $C_1 > 0$ et $C_2 \geq 0$. Montrons que $C_2 = 0$. Si $C_2 \neq 0$, $C_2 = \sum_k m_k \cdot E_k$, d'une part on a $(\tilde{C} \cdot C_2) = \sum_k m_k \cdot (\tilde{C} \cdot E_k) < 0$ puisque $m_k > 0$ et

$$(\tilde{C} \cdot E_k) = -(\tilde{H} \cdot E_k) < 0;$$

d'autre part, on a aussi $(\tilde{C} \cdot C_2) \geq 0$, puisque $(C_1 \cdot C_2) \geq 0^2$ et $(C_2 \cdot C_2) < 0$. Ceci est absurde. Donc, on conclut que $\tilde{C} > 0$. Q.E.D.

Le but que nous nous proposons, maintenant, est d'améliorer le Corollaire 3. Plus précisément, nous nous proposons de trouver, sur la surface F' , un diviseur très-ample H' et un cycle C' de support E , de façon que la restriction au schéma $(C', \mathcal{O}_{C'})$ du faisceau $\mathcal{O}_{F'}(H' + C')$ soit triviale, c'est-à-dire:

$$(jv) \quad \mathcal{O}_{F'}(H' + C') \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \mathcal{O}_{C'} \cong \mathcal{O}_{C'}.$$

LEMME (4): *Soit E le diviseur exceptionnel tracé sur la surface non-singulière F' , décrit précédemment (cf. paragraphe 1). Il existe un cycle positif E^0 sur F' , avec $\text{Supp } E^0 = E$, tel que:*

- (1) $H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \cong H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*)$, pour tout cycle $C \geq E^0$, $C \in \mathcal{G}_E$;
- (2) $J_{E^0} = \text{Ker}(H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^t)$ est un groupe fini.

¹ i.e. $\mathcal{O}_{F'}(\tilde{H})$ est très ample relativement à k (et à F).

² cf. Kleiman [12] Ch. I § 4.

REMARQUE: Pour démontrer l'affirmation (1), nous n'utiliserons, en aucune façon l'hypothèse de finitude sur le corps de base, mais seulement le fait que les courbes irréductibles E_i , $1 \leq i \leq t$, tracées sur la surface non-singulière F' sont telles que la matrice $\|(E_i \cdot E_j)\|$ est définie négative.

L'affirmation (2) se base, en revanche, de façon essentielle sur le fait que k est un corps fini. En effet, pour démontrer l'assertion (2), nous utiliserons le fait que, dans le cas d'une k -courbe irréductible X , l'ensemble des points k -rationnels du schéma Jacobien associé à X est fini. Mais, voyons les choses plus en détail.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4: Nous savons que, pour toute courbe irréductible E_i , nous pouvons trouver un entier $N_i > 0$ tel que, pour tout faisceau inversible \mathcal{L}_i défini sur E_i , si $\deg_{E_i} \mathcal{L}_i > N_i$ alors $H^1(E_i, \mathcal{L}_i) = 0$ (cf. Mumford [14] Cor. Th. 2 p. 80).

Du fait que les courbes E_i , composantes irréductibles de E , sont en nombre fini, nous pouvons trouver un entier positif suffisamment grand $N > 0$, tel que pour tout faisceau inversible \mathcal{L} défini sur une quelconque des E_i , $1 \leq i \leq t$, on ait $H^1(E_i, \mathcal{L}) = 0$, si $\deg_{E_i} \mathcal{L} > N$.

Soit E^0 un cycle tracé sur F' qui est un multiple positif suffisamment grand du cycle \tilde{C} , construit dans le Corollaire 3 et tel que

$$(E^0 \cdot E_i) < -N + (E_i \cdot E_i),$$

pour tout $1 \leq i \leq t$, (cela est possible par le fait que $(\tilde{C} \cdot E_i) < 0$, pour tout i).

Vérifions que E^0 est un cycle qui satisfait à la propriété (1).

Par construction, on a $\text{Supp } E^0 = \text{Supp } \tilde{C} = E$. Soit C un autre cycle, $C \geq E^0$ tel que $\text{Supp } C = E$. Posons $C - E^0 = \sum_{i=1}^t d_i \cdot E_i$. Démontrons l'affirmation (1) par récurrence sur $\sum_{i=1}^t d_i = d$.

Pour $d = 0$, elle est triviale.

Supposons $d \geq 1$. Du fait que

$$(C - E^0 \cdot C - E^0) = \sum_{i=1}^t d_i (C - E^0 \cdot E_i) < 0,$$

il existe un indice i_0 avec $d_{i_0} > 0$ et $(C - E^0, E_{i_0}) < 0$. Nous en déduisons que $(C \cdot E_{i_0}) < (E^0 \cdot E_{i_0}) < -N + (E_{i_0} \cdot E_{i_0})$.

Posons $D = C - E_{i_0}$. Par hypothèse de récurrence, nous pouvons supposer que $H^1(D, \mathcal{O}_D^*) \cong H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*)$. Pour compléter la démonstration, il suffira de montrer que $H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \cong H^1(D, \mathcal{O}_D^*)$. Notons par \mathcal{H} et \mathcal{H}' les noyaux des morphismes canoniques surjectifs

$$\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0, \quad \mathcal{O}_C^* \rightarrow \mathcal{O}_D^* \rightarrow 0.$$

On a $\mathcal{K}^2 = 0$.³

Donc, si pour tout $x \in F'$ nous définissons une application $\mathcal{K}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ de la façon suivante: $\alpha \mapsto 1 + \alpha$ ($\alpha \in \mathcal{K}_x$), nous obtenons un morphisme de faisceaux en groupes (\mathcal{K} est doté d'une structure additive, \mathcal{H} d'une multiplicative) qui est un isomorphisme.

Du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \mathcal{K} \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{F'}(-C) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{F'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{F'}(-D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{F'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_D \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \mathcal{O}_{E_{i_0}} \otimes \mathcal{O}_{F'}(-D) & & & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

³ Soit \mathcal{N} le noyau du morphisme canonique surjectif $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_E$ (i.e. \mathcal{N} est le nilradical de \mathcal{O}_C , cf. paragraphe 1). Remarquons que $\mathcal{N} \cdot \mathcal{K} = 0$.

En effet, localement, si U est un ouvert affine de F' qui ne contient pas ξ_{i_0} , alors $\mathcal{O}_C|_U = \mathcal{O}_D|_U$ donc $\mathcal{K}|_U = 0$. Si, au contraire, $U = \text{Spec } A$ contient ξ_{i_0} et éventuellement quelque autre point générique ξ_i , alors:

$$\mathcal{K}|_U = \bigcap_{\xi_i \in U} \mathfrak{s}_i/\mathfrak{q}_i, \quad \mathcal{N}|_U = \bigcap_{\xi_i \in U} \mathfrak{r}_i/\mathfrak{q}_i$$

où \mathfrak{q}_i est la contre-image dans A de $\mathfrak{p}_i^{n_i} A_{\mathfrak{p}_i}$ par l'homomorphisme canonique $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}_i}$, \mathfrak{r}_i celle de $\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{p}_i}$ et \mathfrak{s}_i celle de $\mathfrak{p}_i^{n'_i} A_{\mathfrak{p}_i}$ et où $n'_i = n_i$ si $i \neq i_0$, $n'_{i_0} = n_{i_0} - 1$ (\mathfrak{p}_i étant l'idéal premier de A correspondant au point $\xi_i \in U$). Donc, on voit aussitôt que

$$\mathcal{K}|_U \cdot \mathcal{N}|_U = \left(\bigcap \mathfrak{s}_i/\mathfrak{q}_i \right) \cdot \left(\bigcap \mathfrak{r}_i/\mathfrak{q}_i \right) = 0.$$

$\mathcal{K} \cdot \mathcal{N} = 0$ implique que $\mathcal{K} \cdot \mathcal{H} = 0$, puisque $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$, comme il résulte du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathcal{K} & \rightarrow & \mathcal{O}_C & \rightarrow & \mathcal{O}_D \rightarrow 0 \\
 & & & & \parallel & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{N} & \rightarrow & \mathcal{O}_C & \rightarrow & \mathcal{O}_E \rightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

dans lequel, la première colonne a été obtenue à partir de la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_{F'}(-E_{i_0}) \rightarrow \mathcal{O}_{F'} \rightarrow \mathcal{O}_{E_{i_0}} \rightarrow 0$ par tensorisation avec $\mathcal{O}_{F'}(-D)$, nous obtenons: $\mathcal{K} \cong \mathcal{O}_{E_{i_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \mathcal{O}_{F'}(-D)$. Donc:

$$\begin{aligned} \deg_{E_{i_0}} \mathcal{K} &= \deg_{E_{i_0}} (\mathcal{O}_{E_{i_0}} \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \mathcal{O}_{F'}(-D)) = (-D \cdot E_{i_0}) \\ &= (E_{i_0} \cdot E_{i_0}) - (C \cdot E_{i_0}) > N. \end{aligned}$$

Nous savons en outre, que $\mathcal{K} \cong \mathcal{H}$. Ainsi, vu la façon dont N a été choisi, nous pouvons affirmer que $H^1(E_{i_0}, \mathcal{K}) = 0$. Enfin, de la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}_C^* \rightarrow \mathcal{O}_D^* \rightarrow 0$, nous pouvons conclure que $H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \cong H^1(D, \mathcal{O}_D^*)$.

(2) Fixons, tout d'abord, des notations. Soit E^{\sqcup} le schéma $\coprod_{i=1}^t E_i$. Soit $u : E^{\sqcup} \rightarrow E$ le morphisme canonique. On a donc $u_* \mathcal{O}_{E^{\sqcup}} = \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}$.

Du fait que chaque morphisme $E_i \xrightarrow{e_i} E$ est une immersion fermée, donc finie, il découle que $u : E^{\sqcup} \rightarrow E$ est un morphisme fini (cf. EGA II 6.1.5); cela équivaut à dire que $\prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}$ est une \mathcal{O}_E -algèbre quasi-cohérente finie (EGA II 6.1.2).

Pour démontrer que le cycle E^0 satisfait aussi à la condition (2), il suffit de voir que:

- (A) $K_1 = \text{Ker} (H^1(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^1(E^{\sqcup}, \mathcal{O}_E^*))$ est un groupe fini;
- (B) $K_2 = \text{Ker} (H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E^*))$ est un groupe fini;
- (C) $K_3 = \text{Ker} (H^1(E^{\sqcup}, \mathcal{O}_E^*) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^t)$ est un groupe fini.

En effet, l'application considérée dans (2) est la composée de trois applications

$$H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E^*), \quad H^1(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^1(E^{\sqcup}, \mathcal{O}_E^{\sqcup}), \quad H^1(E^{\sqcup}, \mathcal{O}_E^{\sqcup}) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^t,$$

compte tenu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & H^1(E, \mathcal{O}_E^*) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*) & & & & H^1(E^{\sqcup}, \mathcal{O}_E^{\sqcup}) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathbb{Z}^t & & \end{array}$$

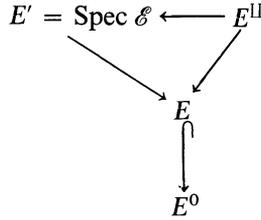
(A) Définissons⁴ une sous- \mathcal{O}_E -algèbre \mathcal{E} de l'algèbre finie $\prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}$, en posant:

⁴ Des constructions analogues ont été étudiées par Serre [18] Ch. 4 paragraphe 1.

$$\Gamma(U, \mathcal{E}) = \{s = (s_i)_{1 \leq i \leq t} \mid s_i \in \Gamma(U \cap E_i, \mathcal{O}_{E_i}) \\ \text{t.q. } s_i(x) = s_j(x) \text{ si } x \in E_i \cap E_j \cap U\}.$$

\mathcal{E} est une \mathcal{O}_E -algèbre quasi-cohérente finie et, en outre, $\mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{E}$ est un morphisme injectif de faisceaux en anneaux locaux, affirmations que l'on vérifie aussitôt localement (EGA II 6.1.2).

Donc, sur la surface F' nous avons une situation résumée dans le diagramme suivant :



De plus, comme nous avons supposé que les E_i se coupent transversalement⁵, nous avons maintenant $E' = E$, i.e. $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_E$.

⁵ Si nous n'avions pas supposé que les E_i se coupent transversalement, pour terminer la démonstration du fait que $\text{Ker}(H^1(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^1(E^{\text{II}}, \mathcal{O}_E^{\text{II}}))$ est un groupe fini, nous aurions eu encore besoin de montrer que $\text{Ker}(H^1(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^1(E, \mathcal{E}^*))$ est un groupe fini. Fait que nous pouvons démontrer de la façon suivante. Soit

$$I = \{x \in E \mid x = x_{ij} \in E_i \cap E_j, 1 \leq i, j \leq t\}.$$

Posons $\mathcal{U} = \text{Coker}(\mathcal{O}_E \hookrightarrow \mathcal{E})$, $\mathcal{V} = \text{Coker}(\mathcal{O}_E^* \hookrightarrow \mathcal{E}^*)$.

On voit tout de suite que $\mathcal{U} = 0$, et donc $\mathcal{V} = 0$, sauf pour $x \in I$. Donc $H^1(E, \mathcal{V}) = 0$.

En outre, $H^0(E, \mathcal{U}) = \bigoplus_{x \in I} \mathcal{E}_x / \mathcal{O}_{E,x}$ est un k -module de dimension finie (théorème de finitude, EGA III 3.2), donc il est fini, par l'hypothèse sur le corps k .

Nous voulons démontrer que $H^0(E, \mathcal{V})$ est un groupe fini. Pour cela, il suffit de démontrer que $\mathcal{E}_x^* / \mathcal{O}_{E,x}^*$ est un groupe fini, pour tout $x \in I$. Mais, ce fait découle essentiellement du lemme 1.6 de [2], qui nous assure que $\mathcal{E}_x^* / \mathcal{O}_{E,x}^* \cong \mathcal{E}_x / \mathcal{O}_{E,x}$.

En effet, posons $A = \mathcal{O}_x$, $A' = \mathcal{O}_{E,x}$. Nous savons que A et A' sont des anneaux locaux. Notons par m et m' leurs idéaux maximaux. Nous savons aussi que A, A' sont des k -espaces vectoriels et que $\dim_k A/A' < \infty$. Montrons que $A^*/A'^* \cong A/A'$. Soit $\mathfrak{a} = \text{Ann}_{A'}(A/A')$, donc A/A' peut être doté d'une structure de (A'/\mathfrak{a}) -module fidèle. Du fait que A/A' est un k -espace vectoriel de dimension finie, nous déduisons que A'/\mathfrak{a} est aussi un k -espace vectoriel de dimension finie, car $A'/\mathfrak{a} \hookrightarrow \text{End}_k(A/A')$. De la suite exacte

$$0 \rightarrow A'/\mathfrak{a} \rightarrow A/\mathfrak{a} \rightarrow A/A' \rightarrow 0$$

nous déduisons que A/\mathfrak{a} est un k -espace vectoriel de dimension finie. Donc, \mathfrak{a} est un idéal m -primaire, c'est-à-dire il existe $s > 0$ tel que $m^s \subseteq \mathfrak{a} \subset m$. De cela nous déduisons que $m^s \subset m'$. Considérons les anneaux $A_h = A' + m^h$ sous-anneaux de A , $0 \leq h \leq s$. A_h est local avec idéal maximal $\mathfrak{n}_h = m \cap A_h$ (cela découle du théorème de Cohen-Seidenberg). En outre, il est immédiat que nous avons une chaîne d'inclusions

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_s = A'.$$

Soit $\mathcal{F} = \text{Coker}(\mathcal{E} \rightarrow \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i})$. Notons par I l'ensemble des points $x_{ij} = E_i \cap E_j$, $1 \leq i, j \leq t$. Donc,

$$\mathcal{F}_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin I \\ \text{Coker}(\mathcal{E}_x \hookrightarrow \mathcal{O}_{E_{i,x}} \times \mathcal{O}_{E_{j,x}}) & \text{si } x = x_{ij} \in I. \end{cases}$$

De cela, il résulte que \mathcal{F} est un faisceau concentré sur un nombre fini de points $x \in I$, sur lesquels $\mathcal{F}_x \cong k(x)$, qui est un corps fini (EGA I 6.4.2). Donc, de ce qui précède, il découle aussi que $\mathcal{S} = \text{Coker}(\mathcal{E}^* \hookrightarrow \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}^*)$ est un faisceau en groupes concentré sur un nombre fini de points $x \in I$ sur lesquels il est facile de voir que $\mathcal{S}_x \cong k(x)^*$.

De la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(E, \mathcal{E}^*) \rightarrow H^0(E, \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}^*) \rightarrow \bigoplus_{x \in I} k(x)^* \rightarrow H^1(E, \mathcal{E}^*) \\ \rightarrow H^1(E, \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}^*) \end{aligned}$$

associé à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{E}^* \rightarrow \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}^* \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow 0$, nous déduisons que $\text{Ker}(H^1(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^1(E, \prod_{i=1}^t \mathcal{O}_{E_i}^*))$ est un groupe fini.

(B) L'affirmation (B) est une conséquence immédiate du fait bien connu que, si P est le schéma de Picard d'un schéma X propre sur un corps de base quelconque et si P' est le schéma de Picard de X_{red} (FGA 232 et 236; Murte [15]), alors il existe une suite exacte de schémas en groupes $0 \rightarrow G \rightarrow P \rightarrow P'$ où G est un groupe algébrique affine (cf. Oort [16] p. 12 Remarque; Borel [4] p. 101 Prop. 1.10; FGA 236 Prop. 6.5).

En appliquant ce qui précède à notre cas, nous obtenons une suite exacte de groupes de points k -valués $0 \rightarrow G(k) \rightarrow H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E^*)$ de laquelle nous déduisons que $\text{Ker}(H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E^*))$ est un groupe fini.

Posons $n_h^* = \{1 + x | x \in n_h\}$. Il est facile de voir que:

$$(a) A_h/A_{h+1} \cong n_h/n_{h+1}; \quad (b) A_h^*/A_{h+1}^* \cong n_h^*/n_{h+1}^*; \quad (c) n_h/n_{h+1} \cong n_h^*/n_{h+1}^*, \quad 0 \leq h \leq s.$$

De (a), (b) et (c) il découle que $A/A' \cong A^*/A'^*$, i.e. $\mathcal{E}_x/\mathcal{O}_{E,x} \cong \mathcal{E}_x^*/\mathcal{O}_{E,x}^*$.

Donc, en définitive à la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{O}_E^* \rightarrow \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow 0$ reste associée la suite exacte longue

$$0 \rightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^0(E, \mathcal{E}^*) \rightarrow H^0(E, \mathcal{V}) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^1(E, \mathcal{E}^*) \rightarrow 0$$

et, de ce qui précède, on peut aisément conclure que $\text{Ker}(H^1(E, \mathcal{O}_E^*) \rightarrow H^1(E, \mathcal{E}^*))$ est un groupe fini.

$$(C) \quad K_3 = \text{Ker} (H^1(E^{\text{ll}}, \mathcal{O}_{E^{\text{ll}}}^*) \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^t) = \bigoplus_{i=1}^t J_{E_i}$$

où

$$J_{E_i} = \text{Ker} (H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}^*) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}).$$

Nous savons que J_{E_i} est un groupe fini, étant isomorphe au groupe des points k -rationnels du schéma Jacobien associé à la courbe irréductible et non-singulière E_i tracée sur la surface projective F' (cf. Oort [16] Appendice; FGA 236 Cor. 3.20). Donc, on conclut que K_3 est un groupe fini.

Cela achève complètement la démonstration du Lemme 4.

PROPOSITION (5): *Soit E et F' comme dans paragraphe 1. Il est possible de trouver un diviseur très-ample H' et un cycle $C' \in \mathcal{G}_E$ sur la surface F' de façon à satisfaire les conditions (j), (jj), (jjj) du corollaire (3) et aussi:*

$$(jv) \quad \mathcal{O}_{F'}(H' + C') \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \mathcal{O}_{C'} \cong \mathcal{O}_{C'}.$$

DÉMONSTRATION: On va prendre pour H' et C' des multiples positifs convenables des diviseurs \tilde{H} et \tilde{C} introduits dans le Corollaire (3). Plus précisément, d'après le Lemme (4) (1) nous savons qu'il existe un cycle positif E^0 sur F' , avec $\text{Supp } E^0 = E$, tel que $H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \cong H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*)$ si $C \geq E^0$ et $C \in \mathcal{G}_E$. Donc, pour déterminer H' et C' satisfaisant à la condition (jv), il suffit de trouver un entier positif n suffisamment grand tel que

$$(jv') \quad \mathcal{O}_{F'}(n(\tilde{H} + \tilde{C})) \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \mathcal{O}_{E^0} \cong \mathcal{O}_{E^0}.$$

Comme $((\tilde{H} + \tilde{C}) \cdot E_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq t$, car $i_{\tilde{H}} = -i_{\tilde{C}}$, la classe de cohomologie de $\mathcal{O}_{F'}(\tilde{H} + \tilde{C}) \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} \mathcal{O}_{E^0}$ est dans le noyau de

$$d : H^1(E^0, \mathcal{O}_{E^0}^*) \rightarrow \mathbb{Z}^t.$$

Du fait que un tel noyau est un groupe fini, d'après le Lemme (4) (2), nous pouvons trouver un entier n tel que la relation (jv') soit satisfaite.

Q.E.D.

COROLLAIRE (6): $\mathcal{O}_{F'}(H' + C')$ est engendré par ses sections globales.

DÉMONSTRATION : Considérons la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{F'}(H') & \rightarrow & \mathcal{O}_{F'}(H' + C') & \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} & \mathcal{O}_{F'} & \rightarrow & \mathcal{O}'_{F'}(H' + C') & \otimes_{\mathcal{O}_{F'}} & \mathcal{O}_{C'} & \rightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & & & \parallel & & & & & \\ & & & & \mathcal{O}_{F'}(H' + C') & & & & \mathcal{O}_{C'} & & & & & \end{array}$$

déduite de la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{O}_{F'}(-C') \rightarrow \mathcal{O}_{F'} \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow 0$ par tensorisation avec $\mathcal{O}_{F'}(H' + C')$. Comme $H^1(F', \mathcal{O}_{F'}(H')) = 0$, de la suite exacte de cohomologie nous obtenons un homomorphisme surjectif

$$H^0(F', \mathcal{O}_{F'}(H' + C')) \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}).$$

Soit s une section globale de $\mathcal{O}_{F'}(H' + C')$ qui a pour image la section unité de $\mathcal{O}_{C'}$.

Alors s engendre $\mathcal{O}_{F'}(H' + C')$ aux points de E . Par ailleurs, on pouvait supposer $\mathcal{O}_{F'}(H')$ engendré par ses sections de sorte que $\mathcal{O}_{F'}(H' + C')$ est aussi engendré par ses sections en dehors de E .

THÉORÈME (7): *Toute surface propre et normale définie sur un corps fini est projective.*

DÉMONSTRATION :⁶ Soit H' et C' comme dans la Proposition (5). Posons

⁶ Nous avons avancé dans l'introduction, que pour démontrer le théorème il suffit de prouver sa validité dans le cas d'une surface normale avec un seul point singulier. En effet, posons-nous dans le cas général, et notons, alors, par $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ les points singuliers de la surface normale F . Soit $q^{(i)} : F^{(i)} \rightarrow F$ l'éclatement de F le long du sous-schéma fermé $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(n)}\}$, et soit $x_0^{(i)}$ le point $(q^{(i)})^{-1}(x^{(i)})$. Nous pouvons alors supposer, par le théorème de résolution des singularités d'une surface, avoir un diagramme commutatif du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{f^{(i)}} & F^{(i)} \\ \downarrow \eta & & \uparrow q^{(i)} \\ F & & \end{array} \quad 1 \leq i \leq n$$

dans lequel $F^{(i)}$ est une surface normale qui admet, au plus, un point singulier $x_0^{(i)}$; F' est une surface non-singulière projective, sur laquelle sont tracées des courbes exceptionnelles $E^{(i)} = (f^{(i)})^{-1}(x_0^{(i)})$, pour chacune desquelles nous pouvons penser être satisfaites les propriétés (1) et (2) de la page 1; f est un isomorphisme hors des points $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$. Nous savons trouver, pour tout i , $1 \leq i \leq n$, un diviseur très-ample $H^{(i)}$ et un cycle $C^{(i)} \in \mathcal{G}_{E^{(i)}}(\mathcal{G}_{E^{(i)}})$ est le groupe abélien libre des cycles de F' avec support dans $E^{(i)}$ sur F' , de façon telle que soient satisfaites les propriétés (j), (jj), (jjj) (cf. Cor. 3) et (jv) (cf. Prop. 5). Alors, nous voyons sans difficulté que nous pouvons appliquer au faisceau

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{F'}\left(\sum_{i=1}^n H^{(i)} + C^{(i)}\right)$$

le procédé démonstratif, que nous suivons pour démontrer le théorème dans le cas d'une surface normale avec un seul point singulier.

par commodité $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{F'}(H' + C')$. Notons, tout d'abord, que $f_* \mathcal{O}_{F'} \cong \mathcal{O}_F$ (EGA III 4.3.12).

Nous savons, en outre, (voir démonstration du Corollaire (6)) qu'il existe une section s de \mathcal{L} qui trivialisé \mathcal{L} au-dessus d'un voisinage $U' = f^{-1}(U)$ de E , (U étant un voisinage du point singulier $x_0 \in F$).

Donc, $f_* \mathcal{L} = \mathcal{M}$ est un \mathcal{O}_F -module inversible et $f^* \mathcal{M} \cong \mathcal{L}$. Comme \mathcal{L} est engendré par ses sections, il en est de même de \mathcal{M} . Du morphisme surjectif

$$p^* p_* \mathcal{M}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{M}^{\otimes n} \rightarrow 0 \quad n \geq 0 \quad (\text{EGA II 3.4.7})$$

nous déduisons un morphisme $r : F \rightarrow P = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(F, \mathcal{M}^{\otimes n}))$, tel que $r^* \mathcal{O}_P(1) \cong \mathcal{M}$ (EGA II 3.7.4 et II 3.7.9.1).

$$\begin{array}{ccccc} F' & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{r} & P \\ & \searrow p' & \downarrow p & \swarrow & \\ & & k & & \end{array}$$

Du fait que r est propre, donc fermé, et qu'il est dominant (EGA II 3.7.5), il s'ensuit que r est surjectif.

Pour toute courbe irréductible X de F , $\mathcal{M}|_X$ est ample, i.e. $\deg_X \mathcal{M}|_X > 0$ (Hartshorne [11] 3.2 p. 22). En effet, en étant f surjectif, il est possible de trouver une courbe irréductible X' de F' tel que $f(X') = X$ (Kleiman [12] Lemme 1 p. 303); en outre

$$\deg_{X'} \mathcal{L}|_{X'} = \deg f|_{X'} \cdot \deg_X \mathcal{M}|_X$$

(Kleiman [12] Prop. 6 p. 299) et, par construction, on sait que $\deg_{X'} \mathcal{L}|_{X'} > 0$.

Nous affirmons que r est un morphisme fini.

En effet, si quelque fibre de r contenait une courbe X de F (EGA III 4.4.2), alors nous aurions tout de suite une contradiction pour des raisons de degré.

La conclusion s'ensuit de la Proposition 2.6.2 des EGA III.

REMARQUE: *Toute surface propre et normale, qui admet seulement des singularités rationnelles isolées, est projective.*

La démonstration est essentiellement analogue à celle faite précédemment pour montrer la projectivité des surfaces propres et normales définies sur un corps fini. En effet, nous avons déjà remarqué que

l'hypothèse de finitude du corps de base a été utilisée seulement dans la preuve de l'affirmation (2) du Lemme 4. Dans les hypothèses actuelles, cette affirmation est encore vraie (M. Artin [3] Prop. 1 et [2] Th. 1.7), de cela, la conclusion s'ensuit. (Pour la définition et les premières propriétés des singularités rationnelles, v. M. Artin [3]).

3. Projectivité des surfaces propres et non-singulières en codimension 1 définies sur un corps de base fini

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'améliorer le résultat précédant. Plus précisément, nous allons affaiblir la condition de normalité.

Il est bien connu qu'une surface algébrique est normale si et seulement si elle vérifie les propriétés (R_1) et (S_2) (cela est un cas particulier du critère de Serre, EGA IV 5.8.6).

Nous savons, en outre, qu'une surface algébrique F possède la propriété (R_1) si et seulement si elle est non-singulière en codimension 1 (i.e. F est non-singulière en tout point $x \in F$ tel que $\overline{\{x\}}$ est de codimension 1 dans F , EGA IV 5.8.2).

Nous voulons démontrer maintenant que toute surface propre F non-singulière en codimension 1, définie sur un corps de base k fini, est projective.

Notons par $\text{Reg } F = R$ l'ouvert non-vide des points réguliers de la surface F (EGA IV 6.12.5 et IV 6.12.3).

Soit $S = \text{Sing } F$ le lieu singulier de F (i.e. $S = F - R$).

Du fait que $\dim F = 2$ et que S est un fermé rare de F on a toujours $\dim S \leq 1$ (EGA IV 4.1.2.1).

PROPOSITION (8): *Soit F une surface propre non-singulière en codimension 1 définie sur un corps de base quelconque. Notons par $F'' \xrightarrow{u} F$ la normalisation de F .*

F'' est projective si et seulement si F est projective.

DÉMONSTRATION: Si F est projective F'' aussi est projective (EGA II 6.3.10 et II 6.1.11).

Réciproquement, on sait que u est un morphisme fini et surjectif (EGA loc. cit.). Du fait que, par hypothèse, le lieu singulier S de F consiste en un nombre fini de points fermés, alors $S'' = u^{-1}(S)$ consiste, lui aussi, en un nombre fini de points fermés.

En ayant supposé F'' projective, nous pouvons trouver un diviseur très-ample H'' sur F'' , que nous pouvons choisir, en plus, de façon que

$\text{Supp } H'' \cap S'' = \emptyset$ (EGA II 4.5.4). Comme $F'' - S'' \cong F - S$, H'' est l'image réciproque d'un diviseur H de F , et on conclut que H est ample sur F (EGA III 2.6.2).

REMARQUE (9): En utilisant le théorème de Zariski-Goodman (cf. Goodman [8] p. 168–169 Th. 2 et Cor.), on aurait pu démontrer la Proposition (8) de la façon suivante. On sait que tout ouvert complémentaire d'un diviseur ample est affine, donc $U'' = F'' - H''$ est affine. Mais, alors par le théorème de Chevalley $U = F - u(H'')$ est affine (EGA II 6.1.6 et 6.7.1). Par construction, U contient tous les points singuliers de F , donc F est projective.

COROLLAIRE (10): *Soit F une surface propre et non-singulière en codimension 1, définie sur un corps fini. Alors, F est projective.*

DÉMONSTRATION: Il suffit d'appliquer la proposition précédente et le théorème (7).

4. Projectivité des schémas 2-dimensionnels irréductibles, propres, non singuliers en codimension 1 définis sur un corps de base fini ou extension algébrique d'un corps fini

4.1. Passage au cas non-réduit

Dans le paragraphe 3, nous avons démontré qu'une surface F (i.e. un schéma algébrique 2-dimensionnel, irréductible et réduit) propre sur un corps fini, et qui satisfait à la propriété (R_1) (et pas nécessairement à la propriété (S_2)) est projective.

Il est bien connu qu'un schéma algébrique est réduit si et seulement si il satisfait aux propriétés (R_0) et (S_1) (EGA IV 5.8.5 et I 6.3.7). En outre, on sait que si $k' \cong k$, la propriété $(S_{k'})$ implique (S_k) , et la $(R_{k'})$ implique (R_k) (EGA IV 5.8.2 et IV 5.7.2).

Nous nous proposons, maintenant, de démontrer la propriété suivante:

PROPOSITION (11): *Tout schéma 2-dimensionnel irréductible X (pas nécessairement réduit) propre tel que X_{red} soit non-singulier en codimension 1, défini sur un corps de base fini, est projectif.*

La proposition (11) découle du Corollaire (10) et du résultat général suivant:

PROPOSITION (12): *Soit X un schéma algébrique propre sur un corps K , de caractéristique $p > 0$.*

X est projectif $\Leftrightarrow X_{\text{red}}$ est projectif.

DÉMONSTRATION: (\Rightarrow) est clair (EGA II 4.6.16).

Pour vérifier que la condition est aussi suffisante, nous avons besoin du lemme suivant:

LEMME (13): Soit X un schéma algébrique défini sur un corps K de caractéristique $p > 0$. Soit $\bar{X} \xrightarrow{j} X$ un sous-schéma fermé de X défini par un \mathcal{O}_X -idéal \mathcal{F} nilpotent. Alors, pour tout $\bar{\mathcal{L}} \in \text{Pic}(\bar{X})$ et pour tout entier $n > 0$, il existe $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ tel que $j^* \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}}^{\otimes p^n}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME (13): En utilisant un procédé simple de récurrence, nous pouvons nous borner au cas $\mathcal{F}^2 = 0$. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}^* \rightarrow 0$$

(où $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^*$ est défini par $\alpha \mapsto 1 + \alpha$, $\alpha \in \mathcal{F}_x, x \in X$).

De la suite exacte longue de cohomologie qui lui est associée, bornons-nous à considérer:

$$\cdots \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots.$$

Nous savons que $H^2(X, \mathcal{F})$ est un K -espace vectoriel, donc tout p -multiple de chacun de ses éléments s'annule. Alors, pour tout $\bar{\mathcal{L}} \in \text{Pic}(\bar{X}) \cong H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*)$, $\bar{\mathcal{L}}^{\otimes p^n}$ est certainement dans le noyau du morphisme $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F})$, donc il est aussi dans l'image du morphisme $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*)$.

(\Leftarrow). Du fait que, dans notre cas, le nil-radical \mathcal{N} de \mathcal{O}_X est nilpotent (EGA I 6.1.6 et I 6.3.7), en appliquant le lemme (13) à l'immersion fermée $X_{\text{red}} \hookrightarrow X$, la conclusion découle de EGA II 4.6.16.

4.2. Passage au cas d'un corps de base extension algébrique (quelconque) d'un corps fini

En utilisant le procédé de descente fidèlement plate de Grothendieck, nous nous proposons de généraliser la proposition (11) au cas d'un corps de base extension algébrique d'un corps fini. En particulier, nous ré-obtenons, sous une forme plus générale, un résultat de M. Artin relatif aux surfaces propres définies sur la clôture algébrique d'un corps fini ([2] 2.11).

PROPOSITION (14): *Soit F un schéma 2-dimensionnel irréductible, propre sur un corps K , extension algébrique d'un corps fini k . Si F_{red} est non-singulier en codimension 1, alors F est projectif.*

DÉMONSTRATION: On sait qu'il existe un schéma 2-dimensionnel algébrique, irréductible \tilde{F} défini sur un corps \tilde{k} extension algébrique finie de k , de façon telle que le diagramme suivant soit cartésien:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \tilde{F} \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ K & \longrightarrow & \tilde{k} \end{array}$$

(EGA IV 8.8.2 (ii)). Par descente fidèlement plate, nous déduisons que \tilde{f} est propre (EGA IV 2.7.1 (vii)) et que \tilde{F}_{red} est non-singulier en codimension 1 (EGA IV 6.7.4). Nous savons que f est projectif si (et seulement si) \tilde{f} est projectif (EGA II 5.5.5 et IV 9.1.5). Donc, la conclusion s'ensuit en appliquant la proposition (11) au morphisme \tilde{f} .

5. Exemple d'une surface de Cohen-Macaulay, propre sur un corps fini, mais qui n'est pas projective

Dans ce paragraphe, nous montrons sur un exemple qu'une surface, propre sur un corps fini, qui est de Cohen-Macaulay (i.e. satisfait à la propriété (S_2) , EGA IV 5.7.3 et IV 5.1.4), mais qui est singulière en codimension 1 (i.e. ne satisfait pas à la propriété (R_1) , EGA IV 5.8.2), peut ne pas être projective.

Soit $X' = \mathbb{P}_k^2$ le plan projectif défini sur un corps de base fini k . Supposons tracées sur X' :

- une conique projective C , ayant un point rationnel;
- une droite projective D .

Posons $C \cap D = \{x_1, x_2\}$. Supposons donné, en outre, un isomorphisme $h : C \simeq D$, tel que $h(x_i) = x_i$, $i = 1, 2$, (EGA II 7.4.16; Fulton [7] cor. p. 195). Notons par \mathcal{T}_C et \mathcal{T}_D les $\mathcal{O}_{X'}$ -idéaux qui définissent les sous-schémas fermés C et D de X' . Soit Y' le sous-schéma fermé de X' réunion de C et D , i.e. $Y' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{T}_C \cap \mathcal{T}_D)$.

Soit $l : Y' \rightarrow Y'$ l'endomorphisme du schéma projectif Y' , défini de la façon suivante:

$$l|_{Y' \setminus D} = h \quad \text{et} \quad l|_D = \text{id}_{Y' \setminus D}.$$

On voit aussitôt que l est bien défini et est un morphisme de schémas, car si $x_i \in C \cap D$, on peut toujours trouver un voisinage ouvert W de x_i dans Y' , de façon telle que $W = V \cup h^{-1}(V)$, où V est un voisinage ouvert de x_i dans D , donc $l(W) = W$.

Noton par Y le schéma intègre, image schématique du morphisme $l: Y' \rightarrow Y$ (EGA I 9.5.1, I 9.5.9). Le morphisme canonique $g: Y' \rightarrow Y$ est propre (EGA II 5.4.3), de plus il est fini (EGA III 4.4.2).

Nous savons, alors, qu'il existe un schéma $X = X' \amalg_{Y'} Y$ obtenu en pinçant X' le long de Y' par g . Plus précisément, nous savons qu'il existe un diagramme commutatif de schémas

$$\begin{array}{ccc} Y' = C \cup D & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow v & \searrow t & \downarrow u \\ X' & \xrightarrow{f} & X = X' \amalg_{Y'} Y \end{array}$$

qui est cartésien, ainsi que cocartésien; en outre, nous savons que:

- (i) u est une immersion fermée;
 - (ii) f induit un isomorphisme de $X' \setminus Y'$ sur $X \setminus Y$;
 - (iii) f est un morphisme fini et surjectif;
- (cf. D. Ferrand [6] Th. 5.2 et Lemme 5.9).

De (iii), nous déduisons que X est
 un k -schéma 2-dimensionnel (EGA IV 5.4.2);
 irréductible (EGA IV 4.5.4);
 propre (étant X' projectif; EGA II 5.4.3, I 5.5.6, Bourbaki [5] § 1 N. 9 Lemme 5).

Du fait que le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} t_* \mathcal{O}_{Y'} & \longleftarrow & u_* \mathcal{O}_Y \\ \uparrow f_* & & \uparrow \\ f_* \mathcal{O}_{X'} & \longleftarrow & \mathcal{O}_X \end{array} \quad \text{(Ferrand [6] 4.3. (iii))}$$

il découle que X est un schéma de Cohen-Macaulay, qu'il est intègre, mais il n'est pas normal (autrement f serait un isomorphisme!).

Nous affirmons que X n'est pas projectif.

Supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe sur X un faisceau ample \mathcal{L} . Alors, $\mathcal{L}' = f_* \mathcal{L}$ est un faisceau ample sur X' (EGA II 2.6.2) donc, de la forme $\mathcal{L}' \cong \mathcal{O}_{X'}(d)$ (cf. Mumford [14] p. 91 Prop. 1).

De la commutativité des diagrammes:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \longrightarrow & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X' & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

nous déduisons que

$$\deg_Y \mathcal{L}|_Y = \deg_D \mathcal{L}'|_D \qquad \deg_Y \mathcal{L}|_Y = \deg_C \mathcal{L}'|_C$$

(cf. par exemple Kleiman [12] Prop. 5 p. 298 et Def. p. 301). Mais, alors, nous aurions :

$$\deg_D (\mathcal{O}_{X'}(d)|_D) = \deg_C (\mathcal{O}_{X'}(d)|_C) > 0 \quad (\deg_Y \mathcal{L}|_Y > 0, \text{ car } \mathcal{L} \text{ est ample})$$

et cela est absurde par le théorème de Bezout, puisque

$$\deg_D (\mathcal{O}_{X'}(d)|_D) = d \quad \text{et} \quad \deg_C (\mathcal{O}_{X'}(d)|_C) = 2d$$

vu le choix de D (droite) et C (conique), (cf. Kleiman [12] Cor. 3 p. 301; Mumford [14] Ex.p. 64; Fulton [7] p. 113).

6. Schémas de Kleiman

Nous savons qu'une variété pour être projective doit nécessairement satisfaire à la condition suivante: tout ensemble fini de points est contenu dans un ouvert affine (EGA II 4.5.4). C. Chevalley a conjecturé qu'une telle propriété caractérise les variétés propres non-singulières qui sont projectives (cf. paragraphe 0). En 1966, S. Kleiman a résolu la conjecture de Chevalley sous une forme très générale. Nous dirons, donc, en son honneur, qu'un schéma est de Kleiman si tout ensemble fini de points est contenu dans un ouvert affine. Ainsi, si V est une variété propre localement factorielle:

$$V \text{ est de Kleiman} \Leftrightarrow V \text{ est projective}$$

(cf. Kleiman [12] Th. 3 et Cor. 2 p. 327).

PROPOSITION 15: *Tout schéma 2-dimensionnel séparé et de type fini sur un corps fini (ou extension algébrique d'un corps fini) est de Kleiman.*

La Proposition précédente est une conséquence du Théorème (7), de la Remarque 6.3.10 des EGA II, et d'un résultat de M. Raynaud [17]

qui nous assure que si $X' \rightarrow X$ est un morphisme fini et surjectif entre schémas noethériens, X' est de Kleiman si et seulement si X est de Kleiman.

REMARQUE: L'exemple du paragraphe 5 montre qu'un surface de Kleiman propre peut ne pas être projective.

REFERENCES

- [1] S. ABHYANKAR: On the field of definition of a non-singular transform of an algebraic surface. *Ann. Math.* 65 (1957) 268–281.
- [2] M. ARTIN: Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces. *Am. J. of Math.* 84 (1962) 485–496.
- [3] M. ARTIN: On isolated rational singularities of surfaces. *Am. J. of Math.* 88 (1966) 129–136.
- [4] A. BOREL: *Linear algebraic groups*. Benjamin 1969.
- [5] (BAC) N. BOURBAKI: *Algèbre commutative*. Chapitre 5. Hermann 1964.
- [6] D. FERRAND: *Conducteur, descente et pinçement*. (thèse).
- [7] W. FULTON: *Algebraic curves*. Benjamin 1969.
- [8] J. E. GOODMAN: Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors. *Ann. Math.* 89 (1969) 160–183.
- [9] (FGA) A. GROTHENDIECK: Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique: les schémas de Picard (théorème d'existence; propriétés générales). *Sem. Bourbaki 1961/62 N. 232 et N. 236*.
- [10] (EGA) A. GROTHENDIECK: Eléments de géométrie algébrique. Rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné. *I.H.E.S. Publ. Math.* N. 4, 8, 11, 24, 28, 32.
- [11] R. HARTSHORNE: Ample subvarieties of algebraic varieties. *Lect. Notes Math. N. 156* Springer (1970).
- [12] S. KLEIMAN: Toward a numerical theory of ampleness. *Ann. Math.* 84 (1966) 293–344.
- [13] D. MUMFORD: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *I.H.E.S. Publ. Math.* N. 9, 5–22.
- [14] D. MUMFORD: Lectures on curves on an algebraic surface. With a section by G. M. Bergman. *Ann. Math. Studies N. 59 Princeton*.
- [15] J. P. MURRE: On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups. *I.H.E.S. Publ. Math.* N. 23, 5–43.
- [16] F. OORT: Sur le schéma de Picard. *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962) 1–14.
- [17] M. RAYNAUD: Un critère d'efficacité de descente. *Sem. Samuel E.N.S.J.F. 1967/68 Exp. 5*.
- [18] J. P. SERRE: *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann 1959.
- [19] I. R. SHAFAREVICH: *Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes*. Notes by C. P. RAMANUJAN: Tata Inst. Fund. Research, Bombay 1966.
- [20] O. ZARISKI: The reduction of singularities of an algebraic surface. *Ann. Math.* 40 (1939) 639–689.
- [21] O. ZARISKI: A simplified proof for the reduction of singularities of an algebraic surface. *Ann. Math.* 62 (1942) 583–593.

(Oblatum 17–IV–1974 & 13–I–1975)

Istituto Matematico 'G. Castelnuovo'
Università degli Studi di Roma
00185 Roma (I)