COMPOSITIO MATHEMATICA

JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Une stratification de l'espace des structures riemanniennes

Compositio Mathematica, tome 30, n° 1 (1975), p. 1-41

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1975__30_1_1_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 30, Fasc. 1, 1975, pag. 1–41
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

UNE STRATIFICATION DE L'ESPACE DES STRUCTURES RIEMANNIENNES

Jean-Pierre Bourguignon

Table des Matières

I. Introduction. Présentation

1. *Introduction*

I.1. *Dans cet article nous considérons l'ensemble $\mathscr{M}$ de toutes les métriques* riemanniennes sur une variété compacte fixe M. Le groupe D des difféomorphismes de M agit sur $\mathscr{M}$ par image réciproque. Toutes les notions géométriques globales sur M sont intrinsèques, autrement dit équivariantes par changements de coordonnées globaux, i.e. par action des difféomorphismes. Ainsi l'étude de l'espace des orbites de $\mathscr{M}$ par l'action de D, que nous notons $\mathscr{R}$ (espace des structures riemanniennes), apparaît naturellement comme une question intéressante.

I.2. Le premier résultat important dans l'étude locale de $\mathscr{R}$, obtenu par D. G. Ebin (cf. [10]) est l'existence d'une tranche de l'action de D sur $\mathscr{M}$.

2. *Sommaire des principaux résultats*

I.3. Nous établissons ici une série de résultats dont certains avaient été énoncés par A. E. Fischer (cf. [13]) en vue d'applications à la relativité générale, en particulier:

THÉORÈME VI.4: *$\mathscr{R}$ est stratifié par des variétés I.L.H.*[1] *$\mathscr{R}_{(G)}$, $\mathscr{R}_{(G)}$ étant l'ensemble des structures riemanniennes dont la classe de conjugaison du groupe des isométries est* (G).

I.5. L'ensemble d'indexation est ici l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes compacts de D qui sont groupes des isométries d'au moins une métrique sur M, groupes pour lesquels nous avons le théorème suivant

THÉORÈME III.23: *Soit H un sous-groupe compact de D. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) *Il existe une métrique sur M dont H est le groupe des isométries.*

(ii) *pour tout sous-groupe compact G de D contenant strictement H et ayant les mêmes orbites que lui, il existe un point m d'une orbite principale pour H où $(O^2T_m^*M)_{G_m}$ et $(O^2T_m^*M)_{H_m}$ sont distincts ($(O^2T_m^*M)_{G_m}$ désigne les formes bilinéaires symétriques sur T_mM invariantes par G_m).*

I.6. Ce théorème est un outil essentiel dans la preuve du théorème de stratification et permet aussi de prouver

COROLLAIRE VI.8: *L'ensemble $\mathscr{M}_G$ des métriques, dont le groupe des isométries est G, est un ouvert dense de l'ensemble $\mathscr{M}_G^1$ des métriques dont le groupe des isométries contient G.*

I.7. Pour prouver que $\mathscr{R}_{(G)}$ est une variété I.L.H., nous prouvons le résultat suivant

COROLLAIRE V.23: *Soient G un sous-groupe compact de D, N_G le normalisateur et C_G le centralisateur de G dans D. Alors N_G est un sous-groupe de Lie I.L.H. de D dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}_G$ est somme directe de $\mathscr{C}_G$ (algèbre de Lie de C_G) et de $\mathscr{S}$ (partie semi-simple de l'algèbre de Lie de G).*

I.8. Nous appliquons le résultat sur la stratification de $\mathscr{R}$ pour prouver

PROPOSITION VII.3: *Au voisinage d'une structure riemannienne qui admet une isométrie non triviale, $\mathscr{R}$ n'est pas une variété I.L.H.*

I.9. Nous considérons encore l'application τ qui à une métrique g associe sa courbure scalaire pour laquelle nous prouvons

[1] Au sens d'Omori, cf. [21].

Proposition VIII.8: *τ est une submersion I.L.H. sauf aux métriques g où τ_g est une constante non négative.*

3. *Plan général*

I.10. L'organisation générale de l'article est la suivante: au paragraphe II, nous rappelons les résultats établis sur $\mathscr{M}$ et les notions utilisées de variétés I.L.H. et d'applications I.L.H. Au paragraphe III, nous rappelons les résultats connus sur les actions des groupes compacts sur les variétés compactes et nous établissons la propriété caractérisant les sous-groupes compacts de D qui sont groupes des isométries d'une métrique. L'action sur les métriques des difféomorphismes fixant fortement un point (introduits au paragraphe IV) permet de construire la variété $\mathscr{R}_{m,1}$ des structures riemanniennes pointées qui 'revêt' $\mathscr{R}$. Pour établir que $\mathscr{R}_{(G)}$ est une variété I.L.H., nous étudions au paragraphe V successivement le centralisateur et le normalisateur de G dans D. Au paragraphe VI, nous prouvons que $\mathscr{R}$ est stratifié ainsi que diverses propriétés d'incidence des strates. Les applications présentées au paragraphe VII concernent la structure de $\mathscr{R}$ au voisinage des structures riemanniennes à isométries non triviales et la propriété de relèvement des homotopies de la projection π de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{R}$. L'opérateur différentiel définissant la courbure scalaire est enfin étudié au paragraphe VIII.

II. Généralités. Notations

II.1. Soit M une variété compacte connexe de dimension n. $\tau_M : TM \to M$ désigne le fibré tangent à M, $O^2\tau_M^* : O^2T^*M \to M$ le fibré des 2-tenseurs symétriques sur M, $\mathrm{pos}_M : \mathrm{Pos} \to M$ le sous-fibré de $O^2\tau_M^*$ des 2-tenseurs symétriques positifs sur M. $\mathscr{M}$ est l'espace des métriques riemanniennes sur M, sections C^∞ du fibré pos_M. $\mathscr{M}$ est un cône convexe positif ouvert dans $C^\infty(O^2T^*M)$ muni de la topologie C^∞.
II.2. D désigne le groupe des difféomorphismes C^∞ de M muni de la topologie C^∞. Il est connu que D est un groupe topologique (cf. [10]). D agit *à droite* sur les fonctions sur M et les champs de tenseurs (et nous continuerons à écrire à gauche les difféomorphismes!): soient X un champ de vecteurs sur M, $m \in M$ et $\varphi \in D$, alors

$$\varphi(X)(m) = (T_m\varphi)^{-1}[X(\varphi(m))].$$

Dans son action sur $C^\infty(O^2T^*M)$, D préserve $\mathscr{M}$: pour $\varphi \in D$, $g \in \mathscr{M}$, $m \in M$ et $X \in T_mM$,

$$\varphi(g)(m)(X, X) = g(\varphi(m))(T_m\varphi(X), T_m\varphi(X)).$$

II.3. Nous nous intéressons à $\mathscr{R}$, espace des orbites de $\mathscr{M}$ sous l'action de D muni de la topologie-quotient, que nous nommons *espace des structures riemanniennes*: la projection de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}/D$ est notée π. Les propriétés 'géométriques' sont invariantes par difféomorphisme: l'opération de passage au quotient préserve donc les relations d'équivalence entre métriques qui sont d'origine géométrique.

1. *I.L.H. variétés et I.L.H. morphismes*

II.4. Nous utilisons une notion de variété de Fréchet utile dans notre contexte, même si elle est assez faible: celle de variété I.L.H. due à Omori (cf. [21] page 169).

II.5. Definition: *Un espace topologique $\mathscr{V}$ est une variété I.L.H. modelée sur l'espace de Fréchet F (resp. une variété I.L.H. forte) si $\mathscr{V}$ a les propriétés* (i) *et* (ii) (*resp.* (i)) *et* (ii) *et* (ii')),

(i) *$\mathscr{V}$ est une limite projective de variétés hilbertiennes C^∞ $\mathscr{V}_i$ $(i \in \mathbb{N})$ modelées sur une suite d'espaces de Hilbert $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$, dont F est la limite projective, telles que $\mathscr{V}_i \supset \mathscr{V}_j$ pour $j \geqq i$,*

(ii) *pour tout x dans $\mathscr{V}$, il existe des voisinages ouverts de coordonnées $U_i(x)$ de x dans $\mathscr{V}_i$ et des homéomorphismes ψ_i de $U_i(x)$ sur des ouverts V_i dans E_i tels que si $j \geqq i$ $U_i(x) \supset U_j(x)$ et $\psi_{i|U_j} = \psi_j$.*

(ii') *$\varprojlim U_i(x)$ est un voisinage ouvert de x dans $\mathscr{V}$.*

Nous considérons que les $\mathscr{V}_i$ font partie de la donnée de $\mathscr{V}$.

II.6. Définissons maintenant une notion d'application I.L.H. entre variétés I.L.H.

Definition: *Soit $\Phi : \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ une application entre variétés I.L.H. Φ est une application I.L.H si Φ est limite projective d'applications $C^\infty \Phi_i : \mathscr{V}_{j(i)} \to \mathscr{V}'_i$ pour un certain $j(i)$ telles que*

$$\Phi_{i|\mathscr{V}_{j(i+1)}} = \Phi_{i+1}.$$

Φ est d'ordre $\leqq k$ si $j(i)$ peut être pris inférieur à $i+k$ pour tout i.

II.7. Remarque: Pour une application I.L.H. le fait d'être d'ordre $\leqq k$ n'a de sens que parce que nous considérons que les $\mathscr{V}_i$ font partie de la structure I.L.H. de $\mathscr{V}$.

2. *Le groupe D des difféomorphismes de M*

II.8. D est une variété I.L.H. forte (cf. [21] page 173) obtenue par limite des variétés de Sobolev D^s.[1] Il est classique que $T_{\mathrm{Id}} D = C^\infty(TM)$. (Nous le noterons $\mathfrak{D}$ dans la suite en tant qu'algèbre de Lie du groupe D). $\mathfrak{D}$ est en fait le modèle local de D. Rappelons comment les cartes de D sont construites: on choisit une métrique g sur M et, pour un champ de vecteurs suffisamment 'petit' $X \in \mathfrak{D}$, on définit, pour $m \in M$, $\mathbb{E}\mathrm{xp}\,(X)(m)$ comme le point de M au temps 1 sur l'unique géodésique issue de $X(m)$ paramétrée proportionnellement à son abscisse curviligne. On vérifie aisément que $\mathbb{E}\mathrm{xp}\,(X)$ est dans D pour X dans un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{D}$ (qu'on peut définir par $\max_{m \in M} g(X(m), X(m)) < c_g^2$ où c_g est le rayon de convexité de g).

II.9. De plus il est clair que si on change la métrique g avec laquelle la construction est faite, on trouve une nouvelle carte qui donne une structure équivalente à la précédente. En effet $\mathbb{E}\mathrm{xp} : U \to D$ est en fait $\Omega_{pr_1 \circ \mathrm{Exp}} : X \mapsto pr_1 \circ \mathrm{Exp} \circ X$ où $\mathrm{Exp} : TM \to M \times M$ est l'application exponentielle classique déduite de g. Pour deux métriques g et g', la courbe de métriques $tg + (1-t)g' (t \in [0, 1])$ permet d'exhiber la difféotopie Exp_{g_t} entre Exp_g et $\mathrm{Exp}_{g'}$ (si l'on se souvient que pour une famille compacte de métriques, il existe un nombre ε minorant les rayons de convexité de la famille de métriques: cf. [11] p. 59). Le choix d'une métrique adaptée au problème étudié apparaîtra comme indispensable dans la suite.

II.10. D est de plus un groupe de Lie I.L.H. puisque la multiplication à droite $\alpha_\varphi : \psi \mapsto \psi \circ \varphi$ est C^∞ I.L.H. pour $\varphi \in D$ ainsi que la multiplication à gauche $\Omega_\varphi : \psi \mapsto \varphi \circ \psi$ (pour celle-là c'est plus difficile, cf. [11] p. 82).

$\mathbb{E}\mathrm{xp} : U \to D$ est bien sûr une application I.L.H. d'un ouvert U de $\mathfrak{D}$ dans D.

Enfin dans D la prise de l'inverse $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ est encore une application I.L.H. (c'est aussi délicat, cf. [21] page 175).

3. *Le théorème de la tranche pour l'action de D sur $\mathscr{M}$*

II.11. $\mathscr{M}$ est de façon évidente une variété I.L.H. forte modelée sur $C^\infty(O^2 T^* M)$ puisque $\mathscr{M}$ est un ouvert de $C^\infty(O^2 T^* M)$. L'action de D sur $\mathscr{M}$ n'est pas nécessairement libre: il peut exister en $g \in \mathscr{M}$ des difféomorphismes φ tels que $\varphi(g) = g$: les isométries de g. Ce groupe d'isotropie D_g est d'après le théorème de Myers un sous-groupe de Lie compact de D (cf. [20]).

[1] Dans la suite, s est toujours supposé assez grand.

II.12. Deux propriétés de l'action sont cruciales.

D'abord l'orbite de g, soit $D \cdot g$, est une sous-variété fermée de $\mathscr{M}$ difféomorphe à ${}_{D_g}\backslash D$ (la démonstration d'Ebin pour munir ${}_{D_g}\backslash D^s$ d'une structure de variété ne permet pas exactement de munir ${}_{D_g}\backslash D$ d'une structure de variété I.L.H., mais dans [22] page 90 Omori résoud cette difficulté car $\mathfrak{D}_g$ est défini comme noyau d'un opérateur elliptique, voir paragraphe suivant II.13.)

D'autre part on prouve un théorème de la tranche pour l'action, i.e. il existe une sous-variété T de $\mathscr{M}$ passant par g telle que

(i) $(\forall \varphi \in D_g)(\varphi(T) = T)$;

(ii) $(\forall \varphi \in D)((\varphi(T) \cap T \neq \phi) \Rightarrow (\varphi \in D_g))$;

(iii) il existe une section χ définie sur un voisinage Vde g dans $D \cdot g$ de l'application $\varphi \mapsto \varphi(g)$ telle que l'application de $V \times T$ dans $\mathscr{M}$ définie par $(h, k) \mapsto \chi(h)(k)$ est un homéomorphisme sur son image.

Pour une preuve de cette propriété, voir [10] pages 28 et 30.

II.13. Le théorème de la tranche se démontre en calquant la preuve du théorème analogue pour l'action d'un groupe compact sur une variété de dimension finie. En effet $\mathscr{M}$ est muni d'une métrique riemannienne canonique $\langle\ ,\ \rangle_0$ invariante par D, à savoir en $g \in \mathscr{M}$ pour $h, k \in T_g\mathscr{M}$, $(T_g\mathscr{M} = C^\infty(O^2T^*M))$

$$\langle h, k\rangle_0 = \int_M g(h, k)v_g$$

(où v_g désigne la mesure de volume déduite de g). Cette métrique étant faible, on doit prouver qu'elle admet une connexion C^∞ et une application exponentielle, ce qui peut se faire (cf. [11] page 140). De plus l'espace tangent en g à $D \cdot g$ est l'image de $\mathfrak{D}$ par l'opérateur différentiel noté $\delta_g^* : \mathfrak{D} \to C^\infty(O^2T^*M)$ défini par

$$X \mapsto \tfrac{1}{2}\mathscr{L}_X g,$$

dont l'adjoint pour $\langle\ ,\ \rangle_0$ noté δ_g' (qui est une sorte de divergence des tenseurs symétriques) permet de définir l'espace normal à $D \cdot g$: k est normal à $D \cdot g$ si et seulement si $\delta_g' k = 0$. L'espace tangent en g à Tsera Ker δ_g'.

Nous nous réfèrerons à la décomposition:

$$C^\infty(O^2T^*M) = T_g\mathscr{M} = \operatorname{Im} \delta_g^* \oplus \operatorname{Ker} \delta_g'$$

comme étant celle de Berger-Ebin, cf. [2] page 383.

4. *Action d'un groupe I.L.H. sur une variété I.L.H.*

II.14. Nous allons prouver une extension aux variétés I.L.H. d'une condition suffisante pour que l'espace des orbites d'une variété sous l'action d'un groupe admette une structure de variété. Pour cela précisons ce que nous entendons par une action I.L.H. d'un groupe de Lie I.L.H. sur une variété I.L.H.

II.15. DEFINITION: *Soient $\mathscr{V}$ une variété I.L.H., Γ un groupe de Lie I.L.H. On dit que Γ agit de façon $C^{\infty,k}$ I.L.H. sur $\mathscr{V}$ si Γ_{i+k} agit sur $\mathscr{V}_i$ de façon C^{∞}, si l'application de $\Gamma \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ est un I.L.H. morphisme et si pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ est un I.L.H. morphisme d'ordre $\leqq 0$.*

II.16. PROPOSITION: *Soit Γ un groupe I.L.H. agissant de façon $C^{\infty,k}$ sur une variété I.L.H. $\mathscr{V}$. Supposons*

(i) *que le groupe Γ_{i+k} agit librement et proprement sur $\mathscr{V}_i$ pour tout i,*

(ii) *que pour tout $v \in \mathscr{V}_i$, l'application de Γ_{i+k} dans $\mathscr{V}_i$ qui à γ associe $\gamma(v)$ est une immersion,*

(iii) *qu'une tranche de l'action de Γ sur $\mathscr{V}$ et les applications de projection associées peuvent s'obtenir par limite projective de tranches de l'action de Γ_{i+k} sur $\mathscr{V}_i$ et des applications associées.*

Alors $\mathscr{V}/\Gamma$ a une structure de variété I.L.H. forte et $\mathscr{V} \to \mathscr{V}/\Gamma$ a une structure de fibré principal I.L.H de groupe structural Γ.

II.17. DEMONSTRATION: Remarquons d'abord que les hypothèses de la proposition permettent de mettre sur $\mathscr{V}_i/\Gamma_{i+k}$ une structure de variété hilbertienne dont un modèle local est donné par T_i tranche de l'action de Γ_{i+k} sur $\mathscr{V}_i$ d'après [4] page 63. De plus, puisque $\gamma : \mathscr{V}_i \to \mathscr{V}_i$ est un morphisme d'ordre $\leqq 0$ d'après le caractère $C^{\infty,k}$ de l'action de $\Gamma_{i,k}$ sur $\mathscr{V}_i$, nous avons un système projectif de variétés $\mathscr{V}_i/\Gamma_{i+k}$ dont la limite est $\mathscr{V}/\Gamma$ à cause de l'hypothèse (iii) qui relie le modèle local de $\mathscr{V}/\Gamma$, à savoir T, aux T_i. Nous obtenons ainsi une structure de variété I.L.H. forte sur $\mathscr{V}/\Gamma$. Le fait que $\mathscr{V} \to \mathscr{V}/\Gamma$ ait une structure de fibré principal de groupe structural Γ résulte de ce que les projections $\mathscr{V}_i \to \mathscr{V}_i/\Gamma_{i+k}$ ont cette propriété.

II.18. L'action de D sur $\mathscr{M}$ est une action $C^{\infty,1}$ I.L.H. de façon évidente. Nous avons vu que l'action admettait une tranche qu'on peut construire avec la propriété (iii). La propriété (ii) est aussi vérifiée pour cette action, mais par contre la propriété (i) n'est vérifiée qu'aux points de $\mathscr{M}$ où le groupe d'isotropie est réduit à l'identité, i.e. aux métriques sans autre isométrie que l'identité de M: nous notons cet ensemble $\underline{\mathscr{M}_{\mathrm{Id}}}$. $\mathscr{M}_{\mathrm{Id}}$ est un ouvert de $\mathscr{M}$ d'après un corollaire du théorème de la tranche; d'après la proposition II.17, $\mathscr{M}_{\mathrm{Id}} \to \mathscr{R}_{\mathrm{Id}} = \mathscr{M}_{\mathrm{Id}}/D$ est un fibré principal de groupe structural D.

II.19. Remarquons tout de même que D agit proprement sur $\mathscr{M}$. (Pour la signification de propre, nous suivons Bourbaki). D'après [3] page 117, l'action étant continue et les espaces métrisables, il suffit de prouver que toute suite de points d'une orbite convergeant vers un point de $\mathscr{M}$ se relève en une suite de difféomorphismes convergente dans D (vrai d'après la proposition G.13 de [10] page 28). Cette remarque sera utilisée ultérieurement en IV.6 et V.24.

III. Groupe des isométries d'une variété compacte

III.1. Tous les groupes considérés sont des sous-groupes de D, donc des groupes géométriques et non abstraits. Ils agissent par suite effectivement sur M. Nous nous intéressons aux sous-groupes compacts de D.

1. *Sous-groupes compacts de D*

D'après le classique théorème de Myers-Steenrod (cf. [20]), pour $g \in \mathscr{M}$, D_g est un sous-groupe de Lie compact de D.

III.2. Proposition : *Soit G un sous-groupe compact de D. Il existe une métrique sur M telle que $G \subset D_g$, i.e. dont G est un groupe d'isométries. Par suite G est un groupe de Lie.*

La preuve est classique et, étant donnée une métrique g_1 sur M, consiste à prendre la moyenne g de g_1 par rapport à la mesure de Haar de G. G est alors un sous-groupe fermé du groupe de Lie D_g, donc un groupe de Lie lui-même. ■

III.3. Remarque : D_g désigne *le groupe des isométries* de g par opposition à tout sous-groupe fermé de D_g dont nous dirons qu'il est *un groupe d'isométries* de g. La différence s'avèrera cruciale dans la suite du chapitre.

III.4. Soit $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact G. Puisque G est compact, $\mathscr{G}$ est réductive, ce qui signifie que $\mathscr{G} = \mathscr{Z} \oplus \mathscr{S}$, où $\mathscr{Z}$ est le centre de $\mathscr{G}$ (donc une sous-algèbre abélienne) et $\mathscr{S}$ semi-simple. Si $\tilde{G}$ est le revêtement universel de G et $(\tilde{G})^0$ sa composante connexe de l'identité, alors $(\tilde{G})^0 = \tilde{Z} \times \tilde{S}$ où $\tilde{Z}$ est un groupe de Lie abélien $\mathbb{R}^k$, et $\tilde{S}$ un groupe de Lie semi-simple simplement connexe.

A propos du groupe fondamental $\pi_1(G)$, nous avons le lemme suivant :

III.5. Lemme : *$\pi_1(G^0)$ est dans le centre de $\tilde{G}^0$, et de plus la projection de $\pi_1(G^0)$ sur $\tilde{Z}$ contient un réseau.*

En effet $\pi_1(G^0)$ est un sous-groupe discret distingué de $\tilde{G}^0$. Donc pour tout x de $\tilde{G}^0$ et tout a de $\pi_1(G^0)$, $x\,a\,x^{-1} \in \pi_1(G^0)$. L'application $x \mapsto x\,a\,x^{-1}$ étant continue et $\pi_1(G^0)$ discret, l'image de $\tilde{G}^0$ est connexe, donc réduite à a. L'image de $\tilde{Z}$ dans G^0 devant être compacte, $\pi_1(G^0)$ (qui est discret) contient en projection sur $\tilde{Z}$ un réseau. ■

III.6. LEMME: *Tout groupe de Lie compact G est engendré par sa composante connexe de l'identité G^0 et un nombre finie de racines de l'identité.*

D'abord G, étant compact, a un nombre fini de composantes connexes. Il suffit donc de montrer que dans chaque composante connexe il y a au moins une racine de l'identité. Soit G_1 une composante connexe de G et $\varphi \in G_1$. G étant compact, le sous-groupe fermé de G $\Phi = \overline{\{\varphi^n, n \in \mathbb{Z}\}}$ est un groupe abélien. Par suite Φ^0 est un tore. Si $\Phi^0 = \{\mathrm{Id}\}$, la proposition est prouvée; sinon il existe une puissance de φ, soit φ^l, telle que $\varphi^l \in \Phi^0$. Donc $\varphi^l = \mathscr{E}\mathrm{xp}\, X$ pour un élément X de φ ($\mathscr{E}\mathrm{xp}$ désigne l'exponentielle du groupe de Lie). Par suite $\psi = \varphi \cdot \mathscr{E}\mathrm{xp}\,(-X/l)$ est dans la même composante connexe de G que φ et $\psi^l = \mathrm{Id}$, puisque Φ est commutatif. ■

III.7. REMARQUES:

(i) On en déduit aisément dans le cas où G est un sous-groupe de D que les composantes connexes de D contenant un élément d'un groupe d'isométries sont de torsion dans le groupe D/D^0. Pour une application dans le cas où $M = T^n$, cf. [7] page 25.

(ii) Si φ est une isométrie d'une métrique g, alors φ préserve tout ce qui est défini en termes de la métrique: connexion de Levi-Civita, distances, application exponentielle (pour laquelle la relation suivante est vérifiée:

$$\text{pour } m \in M,\ X \in T_m M,\ \varphi(\exp_m X) = \exp_{\varphi(m)}[T_m \varphi(X)]).$$

2. *Action d'un groupe compact sur une variété compacte*

III.8. Introduisons quelques notations pour une telle action à gauche. Soit $m \in M$, $G \cdot m$ désigne l'orbite de m. Alors $G \cdot m$ est difféomorphe à $G_m \backslash G$ où G_m désigne le groupe d'isotropie en m. De plus si on considère $G_{m'}$ pour $m' = \varphi(m)$, alors

$$G_{m'} = \varphi G_m \varphi^{-1};$$

ainsi la classe de conjugaison notée (G_m) reste constante le long de l'orbite $G \cdot m$: c'est le type du sous-groupe d'isotropie. Enfin

$M_H = \{p \in M | G_p = H\}$ est un fibré principal à droite à groupe structural $\Gamma = N_H/H$ (N_H désigne le normalisateur de H dans G) et $M_{(H)} = \{p \in M | G_p \in (H)\}$ est difféomorphe de façon équivariante au fibré $G/H \times_\Gamma M_H$ $G/H \times_\Gamma M_H$ est obtenu en identifiant dans $G/H \times M_H$ (gH, p) et $(gH \cdot \gamma, \gamma^{-1} p)$ pour $\gamma \in \Gamma$) (cf. [16]] page 7).

III.9. Comme G agit à gauche sur M, les champs de vecteurs invariants à gauche sur G ne sont pas en général projetables sur M. Par contre les champs de vecteurs invariants à droite, eux, sont projetables. En effet, si nous nous restreignons à l'orbite de m dans M, soient π_m la projection de G sur $_{G_m}\backslash G \simeq G \cdot m$ et $X \in T_{\mathrm{Id}} G$; alors pour $\varphi \in G$ la courbe $\pi_m(\mathscr{E}\mathrm{xp}\,(sX)\varphi)$ ($\mathscr{E}\mathrm{xp}$ est l'exponentielle du groupe de Lie) a pour dérivée en $\varphi(m)$ $T\pi_m(TR_\varphi(X))$, soit $T\pi_m(X(\varphi))$ si X est invariant à droite. Les isométries infinitésimales de l'action (encore appelées champs de Killing) sont les champs invariants à droite sur G. On rappelle à cette occasion qu'en l'identité le crochet de deux champs invariants à droite est l'opposé du crochet des champs invariants à gauche ayant même valeur à l'identité.

III.10. Il existe un type d'orbites dit *principal*, dont le groupe d'isotropie est en quelque sorte minimum: son type est noté (H). Il est caractérisé par le fait que la représentation linéaire d'isotropie sur la tranche est triviale, i.e. l'image de G_m dans $Gl(T_m M/T_m(G \cdot m))$ est l'identité seulement. Soit $M_{(H)}$ la réunion de ces orbites: leur complémentaire est au moins de codimension 1: $M_{(H)}$ est un ouvert dense de M (pour tout cela dans le cas où G est connexe, cf. [15] page 713, l'extension au cas où G est compact non nécessairement connexe étant facile). De plus $M_{(H)} \to {}_G\backslash M_{(H)}$ est un fibré de fibre G/H. Dans l'espace des orbites de M : ${}_G\backslash M$ (qui est un espace métrique de façon claire), ${}_G\backslash M_{(H)}$ est donc un ouvert partout dense régulier qui a une structure de variété.

3. *Groupe des isométries d'une métrique*

III.11. Nous nous proposons de caractériser les sous-groupes compacts de D qui sont groupes *des* isométries d'une métrique sur M.

Une réponse partielle est déjà donnée par la proposition suivante.

III.12. Proposition: *Soient G le groupe des isométries d'une métrique sur M et H un sous-groupe fermé de G. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe une métrique sur M qui n'est pas invariante par G ou un de ses conjugués, mais qui est invariante par H.*

(ii) *il existe une orbite de H distincte d'une orbite de G ou, en un point m*

d'une orbite principale pour H, $(O^2T_m^*M)_{H_m}$ est distinct de $(O^2T_m^*M)_{G_m}$ ($(O^2T_m^*M)_{H_m}$ désigne l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur T_mM invariantes par H_m).

III.13. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons qu'il existe une métrique g invariante par H et non invariante par G ou un de ses conjugués. La seule chose à prouver est que dans le cas où G et H ont les mêmes orbites, il existe un point m d'une orbite principale où les formes bilinéaires sur T_mM invariantes par G_m et H_m sont distinctes. Supposons le contraire: soient m un point d'une orbite principale et $\varphi \in G$. Evaluons $\varphi(g)(m)$. Soit ψ un élément de H tel que $\psi(m) = \varphi(m)$ (un tel élément existe d'après l'hypothèse sur les orbites de G et H).

$$\varphi(g)(m) = (\psi\psi^{-1}\varphi)(g)(m) = (\psi^{-1}\varphi)(\psi(g))(m) = (\psi^{-1}\varphi)(g)(m)$$

puisque g est H-invariante.

Comme $\psi^{-1}\varphi \in G_m$ et que toute forme bilinéaire sur T_mM invariante par H_m est invariante par G_m,

$$\varphi(g)(m) = g(m).$$

La réunion des orbites principales étant dense dans M, et g et $\varphi(g)$ étant continues, $\varphi(g) = g$ partout et nous avons une contradiction.

III.14. (b) (ii) $\Rightarrow$ (i)

Commençons par le cas où G et H *n'ont pas les mêmes orbites.* Nous allons partir d'une métrique g dont le groupe des isométries est G et la perturber par un tenseur symétrique h. Pour t assez petit, $g+th$ a une unique projection sur $D\cdot g$ qui peut s'écrire $\varphi_t(g)$ pour une famille de difféomorphismes dépendant différentiablement de t (d'après la démonstration du théorème de la tranche où l'on prend une section C^∞ de la projection $D \to {}_G\backslash D$). Supposons que pour une suite de valeurs t_n tendant vers 0 le groupe des isométries de $g+th$ soit exactement $\varphi_t^{-1}G\varphi_t$ (d'après le théorème de la tranche, on sait déjà que $D_{g+th} \subset \varphi_t^{-1}G\varphi_t$). Choisissons ψ dans G et considérons l'égalité

$$(\varphi_{t_n}^{-1}\psi\varphi_{t_n})(g+t_nh) = g+t_nh.$$

Les deux membres ont des dérivées en $t = 0$, qui doivent ainsi être égales. Si X désigne le jet d'ordre 1 de la famille de difféomorphismes φ_t, nous obtenons

$$-\mathscr{L}_X\psi(g)+\psi(\mathscr{L}_Xg)+\psi(h) = h.$$

Comme $\psi \in G$, $\psi(g) = g$ et $\psi(\mathscr{L}_Xg) = \mathscr{L}_{\psi(X)}g$. D'où la relation

$$\psi(h)-h = \mathscr{L}_{X-\psi(X)}g.$$

Ainsi si nous construisons h, invariant par H, tel qu'il existe $\psi \in G$ pour lequel $\psi(h)-h$ ne soit pas la dérivée de Lie de g par rapport à un champ de vecteurs, D_{g+th} pour t assez petit sera distinct de G et de ses conjugués tout en contenant H.

III.15. L'idée pour construire h est la suivante: choisissons une orbite de H, soit $H \cdot m$ qui n'est pas une orbite de G. Nous pouvons alors trouver un élément ψ de G tel que l'image par ψ d'un voisinage de m dans l'orbite ne rencontre pas ce voisinage. En effet si les orbites $H \cdot m$ et $G \cdot m$ ont même espace tangent en m, elles diffèrent par leurs composantes connexes, auquel cas la propriété est claire. Sinon nous pouvons prendre pour ψ un difféomorphisme de G de petit déplacement obtenu dans le flot d'un champ de vecteurs de Killing de G (tangent à $G \cdot m$ donc) transverse à $H \cdot m$.

Prenons pour h le produit de g par une fonction positive f à support dans un 'petit' voisinage de l'orbite de H qui ne dépend que de la distance (par rapport à g) à $H \cdot m$, donc qui est invariante par H. Ainsi $\psi(h)-h$ est un tenseur conforme à g puisque $\psi \in G$. Or les tenseurs conformes à g qui s'écrivent $\mathscr{L}_Y g$ pour un certain champ de vecteurs Y forment un espace vectoriel de dimension finie, image par l'application $X \to \operatorname{div}_g X \cdot g$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes pour g, (cf. [18] page 310). Remarquons que la construction que nous avons faite contient par le support de f une infinité de paramètres comme le montre le lemme suivant:

III.16. Lemme: *Soit (f_n) une suite de fonctions telle que la suite des intersections des supports avec un fermé fixe (d'intérieur non vide) soit une suite strictement croissante de fermés. Alors les (f_n) forment un système linéairement indépendant.*

Soit $F_n = \operatorname{Supp} f_n \cap F$. Si $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i = 0$, alors en évaluant cette égalité en un point de F_1 où $f_1 \neq 0$, puis en un point de $F_1 \cap \complement F_2$ où f_1 et f_2 ne sont pas nulles, et ainsi de suite nous prouvons que tous les α_i sont nuls puisque le système linéaire de k équations à k inconnues ainsi obtenu est triangulaire supérieur à diagonale sans zéro, donc inversible. ■

Suite de la démonstration de la proposition III.12

Il est donc possible de choisir f de telle sorte que $\psi(h)-h$ ne soit pas tangent à l'orbite de g; en fait l'espace de ces tenseurs symétriques est de dimension infinie, d'où le résultat dans le cas où G et H n'ont pas les mêmes orbites.

III.17. Arrivons-en maintenant au cas où *G et H ont les mêmes orbites.* Soit m un point d'une orbite principale où il existe une forme bilinéaire h_m invariante par H_m, mais pas par G_m. h_m détermine une forme bilinéaire symétrique h sur $H \cdot m$ invariante par H. Nous pouvons transporter h aux orbites voisines par le transport parallèle déduit d'une métrique g invariante par G et nous rendons h à support dans un voisinage de $H \cdot m$ par une fonction plateau fonction de la distance à $H \cdot m$, donc invariante par H. Considérons alors pour t assez petit les métriques $g + th$. Elles sont invariantes par H et de plus le groupe des isométries de $g + th$ est inclus dans $\varphi_t^{-1} G \varphi_t = G^t$ pour la courbe de difféomorphismes φ_t issue de l'identité définie comme en III.14. En fait, en tout point de l'orbite principale la propriété sur les formes bilinéaires invariantes est vraie. Si $h(m)$ n'est pas invariante par $\psi \in G_m$, il existe pour t assez petit un élément $\psi_t \in G_m^t = \varphi_t^{-1} G_m \varphi_t = G_{\varphi_t^{-1}(m)}$ suffisamment proche de ψ pour que h ne soit pas invariant par ψ_t. Par suite le groupe des isométries de $g + th$ n'est pas un conjugué de G tout en contenant H. ■

III.19. Remarques:

(i) En fait la preuve de la proposition exhibe, issue d'une métrique invariante par G, une courbe de métriques invariantes par H non invariantes par G dès que (i) ou (ii) est satisfaite, ce qui sera exploité en VI.5. De plus si G et H n'ont pas les mêmes orbites, ces courbes dépendent d'une infinité de paramètres.

(ii) A priori trouver un champ de formes bilinéaires symétriques invariantes par H et non par G est une question plus générale que celle considérée en III.12. Il n'en est rien puisque, si g est une métrique invariante par G et si h est une telle forme bilinéaire symétrique, $k = [\exp(h^\sharp)]^\flat$ est une métrique sur M ($\sharp$ est l'isomorphisme de T^*M sur TM déduit de g et $\flat$ l'isomorphisme réciproque). k est invariante par H et non par G puisque pour $\varphi \in G$

$$\varphi(k) = [\exp(\varphi(h)^\sharp)]^\flat$$

et que $[\exp(\cdot^\sharp)]^\flat$ est un isomorphisme (ici exp désigne l'exponentielle des transformations linéaires).

III.20. Proposition: *Soient G le groupe des isométries d'une métrique g sur M et H un sous-groupe fermé. Alors si H vérifie une des conditions équivalentes de la proposition* III.12, $\mathcal{T}_G$ *(sous-espace de* $\operatorname{Ker} \delta'_g$ *formé des éléments invariants par G) est un fermé sans intérieur de $\mathcal{T}_H$, de* *codimension infinie dès que G et H n'ont pas les mêmes orbites.*

Rappelons qu'en III.14 nous avons établi qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une suite $t_n \to 0$ ($n \to \infty$) telle que le groupe des isométries de $g + t_n h$ soit un conjugué de G est que pour tout ψ de G

$$\psi(h) - h \in \operatorname{Im} \delta_g^*.$$

Considérons la condition: pour tout h invariant par H, pour tout ψ de G, $\psi(h) - h \in \operatorname{Im} \delta_g^*$. Montrons que cette condition est équivalente à ce que dans $\operatorname{Ker} \delta'_g$ tout élément invariant par H soit invariant par G. En effet si $h = h' + \delta_g^* X$ est la décomposition de Berger-Ebin de h (cf. II.13), $\psi(h)$ admet pour décomposition $\psi(h') + \delta_g^* \psi(X)$ car

$$\delta'_g[\psi(h')] = \psi[\delta'_g h'] = 0$$

(puisque ψ, étant une isométrie de g, commute à la dérivée covariante définie par g) et

$$\delta_g^*[\psi(X)] = \tfrac{1}{2}\mathscr{L}_{\psi(X)} g = \tfrac{1}{2}\psi(\mathscr{L}_X g).$$

Par suite la décomposition de Berger-Ebin de $h - \psi(h)$ est

$$h' - \psi(h') + \delta_g^*(X - \psi(X)).$$

Il y a donc équivalence pour tout ψ de G entre les propriétés $h' = \psi(h')$ et $h - \psi(h) \in \operatorname{Im} \delta_g^*$.

D'après la preuve de III.12, il existe des tenseurs h_0 arbitrairement petits pour lesquels on trouve $\psi \in G$ tel que $h_0 - \psi(h_0) \notin \operatorname{Im} \delta_g^*$. $\mathscr{T}_G$ est clairement un fermé de $\mathscr{T}_H$. Si $h \in \mathscr{T}_G$, alors $h + h_0 \notin \mathscr{T}_G$ tout en étant dans $\mathscr{T}_H$. Donc le complémentaire de $\mathscr{T}_G$ dans $\mathscr{T}_H$ est un ouvert dense et ainsi $\mathscr{T}_G$ est un fermé sans intérieur de $\mathscr{T}_H$. Si G et H n'ont pas les mêmes orbites, d'après la remarque III.19i), $\mathscr{T}_G$ est de codimension infinie dans $\mathscr{T}_H$. ■

III.21. REMARQUES:

(i) Les tenseurs h construits dans la proposition III.12 avaient un support aussi petit que l'invariance par H le rendait possible. L'opérateur associant à h sa composante h' dans $\operatorname{Ker} \delta'_g$ faisant intervenir le caractère global de M, il n'y a pas de raison pour que le support de h' coincide avec celui de h, ce qui rend la proposition III.20 non triviale, la nature du faisceau des sections locales de $\operatorname{Ker} \delta'_g$ étant mal connue.

(ii) Si h' dans $\operatorname{Ker} \delta'_g$ est invariant par H et non par G, la courbe de métriques $\exp_g^0(th')$ issue de g a un groupe des isométries inclus dans G pour t assez petit d'après le théorème de la tranche (cf. II.12). Mais ce groupe est distinct de G puisque, si, pour tout $\psi \in G$, il y a une suite $t_n \to 0$ telle que

$$\psi(\exp_g^0(t_n h')) = \exp_g^0(t_n h'),$$

alors $\psi(h') = h'$, ce qui n'est pas.

III.22. Nous pouvons maintenant donner une réponse plus précise au problème considéré en III.11.

III.23. THÉORÈME: *Soit H un sous-groupe compact de D. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe une métrique sur M dont H est le groupe des isométries;*

(ii) *pour tout sous-groupe compact G de D contenant strictement H et ayant les mêmes orbites que lui, il existe un point m d'une orbite principale pour H où $(O^2T_m^*M)_{G_m}$ et $(O^2T_m^*M)_{H_m}$ sont distincts (pour la notation $(O^2T_m^*M)_{G_m}$, voir* III.12).

III.24. PREUVE: (a) (i) $\Rightarrow$ (ii)

La preuve est la même que celle de la première partie de la proposition III.12, exposée en III.13.

(b) (ii) $\Rightarrow$ (i)

Soit g_0 une métrique quelconque sur M. La métrique $g_1 = \int_H \varphi(g_0) \mathrm{d}\varphi$ (où $\mathrm{d}\varphi$ désigne la mesure de Haar de H) est invariante par H. Si $D_{g_1} = H$, le théorème est prouvé. Sinon d'après la proposition III.12 (applicable à cause des hypothèses du théorème) nous pouvons construire g_2 avec

$$H \subseteq D_{g_2} \subsetneqq D_{g_1}.$$

Montrons qu'en un nombre fini k de pas nous trouvons $H = D_{g_k}$, d'où le théorème. En effet, à chaque pas, puisque $D_{g_{i+1}} \subsetneqq D_{g_i}$, soit $\mathfrak{D}_{g_{i+1}} \subsetneqq \mathfrak{D}_{g_i}$, soit $D_{g_{i+1}}$ et D_{g_i} différent par leurs composantes connexes. Comme toute chaîne d'algèbres de Lie reliant $\mathfrak{D}_{g_1}$ à $\mathscr{H}$ est finie, que chacun des D_{g_i} a un nombre fini de composantes et que la construction en réduit le nombre, en un nombre fini de pas nous arrivons à H. ■

III.25. REMARQUE: Il est clair d'après III.23 que si H est un sous-groupe compact de D tel qu'en un point m d'une orbite principale pour H, H_m est le sous-groupe maximal de $Gl(T_mM)$ laissant $(O^2T_m^*M)_{H_m}$ invariant, alors il existe sur M une métrique dont H est le groupe des isométries.

III.26. COROLLAIRE: *Tout sous-groupe de D isomorphe à S^1 est le groupe des isométries d'au moins une métrique sur M dès que* $\dim M \geqq 2$.

Soit H un sous-groupe de D isomorphe à S^1. En un point m d'une orbite principale, H_m est réduit à Id_{T_mM}, donc $(O^2T_m^*M)_{H_m} = O^2T_m^*M$.

$\{\pm \mathrm{Id}_{T_mM}\}$ est le sous-groupe maximal de $Gl(T_mM)$ laissant $O^2T_m^*M$ invariant; mais $\{\pm \mathrm{Id}_{T_mM}\}$ ne peut se rencontrer comme groupe d'isotropie linéaire d'une orbite principale que si H agit de façon homogène (puisque sur une orbite principale la représentation induite dans la tranche est triviale, cf. III.10). Mais dans ce cas, $\{\pm \mathrm{Id}_{T_mM}\}$ ne se rencontre pas non plus, car nous devrions avoir $M = H^0$ et ici nous supposons $\dim M \geqq 2$. D'après la remarque III.25, S^1 est donc le groupe des isométries d'au moins une métrique sur M. ■

III.27. COROLLAIRE: *Soit H un sous-groupe fini de D. Alors H est le groupe des isométries d'au moins une métrique sur M.*

Tout sous-groupe de D contenant H et qui a les mêmes orbites que H, en particulier les mêmes orbites principales, a le même nombre d'éléments que H, donc lui est identique. Nous pouvons appliquer le théorème III.23, d'où le corollaire. ■

III.28. Il est important de donner des exemples de sous-groupes compacts de D qui ne sont groupes *des* isométries d'aucune métrique sur M:

(i) Sur S^n, $SO(n+1)$ est un tel exemple puisqu'une métrique invariante par $SO(n+1)$ est nécessairement la métrique canonique dont le groupe des isométries est $O(n+1)$;

(ii) il y a aussi des exemples où le groupe des isométries obtenu n'a même pas l'algèbre de Lie de H: ainsi[1] si on considère G_2 pour l'inclusion canonique dans $SO(7)$, G_2 agit transitivement sur S^6 avec groupe d'isotropie $SU(3) = G_2 \cap SO(6)$, toute métrique invariante par G_2 est la métrique canonique (cf. [1] page 186); il en est de même de l'action transitive de *Spin* 7 sur S^7 déduite de l'inclusion de *Spin* 7 dans $SO(8)$ avec groupe d'isotropie $G_2 = SO(7) \cap \mathit{Spin}\ 7$.

IV. Difféomorphismes fixant fortement un point

IV.1. Fixons un point m de M.

Considérons $D_{m,1} = \{\varphi \mid \varphi \in D \text{ avec } \varphi(m) = m \text{ et } T_m\varphi = \mathrm{Id}_{T_mM}\}$. $D_{m,1}$ est dit *groupe des difféomorphismes fixant fortement le point m.*

1. *$D_{m,1}$ est un sous-groupe I.L.H. de D*

IV.2. LEMME: *$D_{m,1}$ est un sous-groupe I.L.H. fermé de D.*

[1] Je remercie L. Bérard-Bergery de m'avoir indiqué ces exemples.

Montrons d'abord que $D_{m,1}$ est un sous-groupe fermé de D; en effet l'application $\psi_{m,b}: D \to FM$ (où FM est le fibré des repères de M) $\psi_{m,b}(\varphi) = T_m\varphi(b)$ où b est une base choisie de T_mM est C^∞ (cf.[10] page 16) et $D_{m,1} = \psi_{m,b}^{-1}(m, b)$. Au niveau algèbre de Lie nous avons

$$\mathfrak{D}_{m,1} = T_{\mathrm{Id}_M} D_{m,1} = \{X | X \in \mathfrak{D}, X(m) = 0 \text{ et } T_m X = 0\}.$$

On peut construire un supplémentaire de $\mathfrak{D}_{m,1}$ dans $\mathfrak{D}$ de la façon suivante: on exhibe n champs de vecteurs C^∞ sur m ayant une valeur donnée en m et n^2 autres nuls en m et ayant une différentielle donnée en m.

De plus quelle que soit la métrique g avec laquelle on construit la carte exponentielle $D_{m,1}$ est totalement géodésique à partir de Id_M, car pour $X \in \mathfrak{D}$, $\mathbb{E}\mathrm{xp}\,(X) \in D_{m,1}$ puisque $X(m) = 0$ et $TX(m) = 0$ impliquent $(\mathbb{E}\mathrm{xp}\,X)(m) = m$ et $T_m\,\mathbb{E}\mathrm{xp}\,X = \mathrm{Id}_{T_mM}$. On obtient ainsi un voisinage I.L.H. de Id_M dans lequel $D_{m,1}$ est une sous-variété I.L.H. de D. Soit $\varphi \in D_{m,1}$, $\alpha_\varphi : \psi \to \psi \circ \varphi$, qui est un difféomorphisme I.L.H. d'ordre 0 (cf. [10] page 17), permet de transporter à un voisinage I.L.H. de φ cette structure I.L.H. sans ambiguité. ■

2. *$D/D_{m,1}$ est isomorphe au fibré des repères de M.*

IV.3. Le résultat suivant est connu.

Proposition: *$\bar{\psi}_{m,b}: D/D_{m,1} \to FM$ est un difféomorphisme sur son image.*

Evaluons d'abord $T_\varphi\psi_{m,b}: T_\varphi D \to TFM$. Pour $X \in T_\varphi D$, champ de vecteurs C^∞ au-dessus de φ,

$$T_\varphi\psi_{m,b}(X) = (X(m), T_m X(b)).$$

$\psi_{m,b}$ est clairement une submersion. Comme de plus $\psi_{m,b}$ est invariante par l'action à droite de $D_{m,1}$ sur D ($\psi_{m,b}(\varphi \circ \psi) = \psi_{m,b}(\varphi)$, si $\psi \in D_{m,1}$), $\psi_{m,b}$ définit une application $\bar{\psi}_{m,b}: D/D_{m,1} \to FM$ qui pour les variétés $D^s/D^s_{m,1}$ et les applications étendues $\bar{\psi}^s_{m,b}$ est un isomorphisme sur son image. Comme la structure I.L.H. est héritée de celle des $D^s/D^s_{m,1}$ (puisque $D_{m,1} = D^s_{m,1} \cap D$), $\bar{\psi}_{m,b}: D/D_{m,1} \to FM$ est un difféomorphisme sur son image. ■

IV.4. Le problème de savoir si $\psi_{m,b}$ est surjective est plus délicat: en effet si M n'est pas orientable, FM n'a qu'une composante et alors $\psi_{m,b}$ est surjective, car l'image est ouverte et fermée. Dans le cas où M est orientable, FM a deux composantes; pour que la composante ne contenant pas (m, b) soit atteinte, il faut et il suffit qu'il existe un difféomorphisme de M renversant l'orientation, ce qui n'est pas vrai pour toute variété. Ainsi sur $P^{2k}(\mathbb{C})$, il n'y a pas de difféomorphisme renversant l'orientation à cause de la structure cohomologique de $P^{2k}(\mathbb{C})$.

3. *Action de $D_{m,1}$ sur $\mathscr{M}$*

IV.5. Proposition: *$D_{m,1}$ agit librement sur $\mathscr{M}$.*

En effet si pour $\varphi \in D_{m,1}$, il existe g dans $\mathscr{M}$ tel que $\varphi(g) = g$, alors, d'après III.7 ii), $\varphi(\exp_m X) = \exp_m(T_m\varphi(X))$ puisque $\varphi(m) = m$. Comme de plus $T_m\varphi = \mathrm{Id}$ et la carte exponentielle en m est un difféomorphisme sur un ouvert partout dense de M, $\varphi = \mathrm{Id}_M$. ■

IV.6. Proposition: *Soit G un sous-groupe compact de D. Alors $\tilde{\psi}_{m,b} : G\backslash D \to G\backslash FM$ est un espace fibré I.L.H. à fibres $D_{m,1}$.*

Il est montré dans [22] page 90 que $G\backslash D^s$ a une structure de variété naturelle et qu'on en déduit sur $G\backslash D$ une-structure de I.L.H. variété forte. De plus D agit à droite sur $G\backslash D$. La fibration résulte alors de la fibration localement triviale

$$\psi_{m,b} : D \to F(M)$$

et de ce que $G\backslash(D/D_{m,1})$ est isomorphe à $(G\backslash D)/D_{m,1}$. ■

IV.7. Théorème: *$\mathscr{R}_{m,1} = \mathscr{M}/D_{m,1}$ est une variété I.L.H. forte.*

Nous allons appliquer la proposition II.16.

Vérifions donc que les hypothèses sont satisfaites. Les groupes $D^s_{m,1}$ opèrent librement d'après la proposition IV.5 et proprement comme sous-groupes fermés de D^s.

D'autre part pour tout $g \in \mathscr{M}$ l'application de $D^{s+1}_{m,1}$ dans $\mathscr{M}^s$ est une immersion (cf. [10] page 28).

Enfin, pour la dernière condition, la démonstration du théorème de la tranche dans $\mathscr{M}$ pour l'action de D (cf. [10] page 30) fournit une tranche pour l'action de $D_{m,1}$ qui est une limite projective des tranches pour les actions de $D^{s+1}_{m,1}$, si nous prouvons que le fibré $g \mapsto (\mathrm{Im}\ \delta^*_{g|\mathfrak{D}_{m,1}})^{\perp_0}$ est un sous-fibré C^∞ I.L.H. de $T\mathscr{M}$ le long de l'orbite sous $D_{m,1}$ d'une métrique g_0 supposée C^∞. Pour cela remarquons d'abord que

$$(\mathrm{Im}\ \delta^*_{g|\mathfrak{D}_{m,1}})^{\perp_0} = \mathrm{Ker}\ \delta'_g \oplus \delta^*_g(\mathfrak{D}^{\perp_{g,1}}_{m,1})$$

où $\mathfrak{D}^{\perp_{g,1}}_{m,1}$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{D}_{m,1}$ dans $\mathfrak{D}$ pour la forme bilinéaire $(X, Y)^1_g = \int_M g(\mathscr{L}_X g, \mathscr{L}_Y g)v_g$ qui est non négative, mais nulle sur $\mathfrak{D}_g$ et coercive sur tout supplémentaire de $\mathfrak{D}_g$ dans $\mathfrak{D}$. En fait $(\mathfrak{D}^s_{m,1})^{\perp g,1} = (\mathfrak{D}_{m,1})^{\perp g,1}$ dès que $s > n/2+1$, car $\mathfrak{D}_{m,1} \subset \mathfrak{D}^s_{m,1}$ et $(\mathfrak{D}^s_{m,1})^{\perp g,1}$ est de dimension constante, celle de FM.

Nous savons (cf. [10] page 31) que $g \mapsto \operatorname{Ker} \delta'_g$ est un sous-fibré C^∞ de $T\mathscr{M}^s$ le long de $D^{s+1}\cdot g_0$, donc a fortiori le long de $D^{s+1}_m \cdot g_0$. Prouvons que

IV.8. $$\delta^*_{\varphi(g_0)}(\mathfrak{D}^{\perp \varphi(g_0), 1}_{m,1}) = \varphi(\delta^*_{g_0}(\mathfrak{D}^{\perp g_0, 1}_{m,1}))$$

ce qui sera suffisant pour que $\operatorname{Im} \delta^*_{g|\mathfrak{D}_{m,1}}$ soit un sous-fibré C^∞.

$$(X, Y)^1_{\varphi(g_0)} = \int_M \varphi(g_0)(\mathscr{L}_X \varphi(g_0), \mathscr{L}_Y \varphi(g_0)) v_{\varphi(g_0)},$$

soit

$$(X, Y)^1_{\varphi(g_0)} = \int_M \varphi(g_0)(\varphi(\mathscr{L}_{\varphi^{-1}(X)} g_0), \varphi(\mathscr{L}_{^{-1}(Y)} g_0))\varphi(v_{g_0})$$

ou encore par changement de variable

$$(X, Y)^1_{\varphi(g_0)} = \int_M g_0(\mathscr{L}_{\varphi^{-1}(X)} g_0, \mathscr{L}_{\varphi^{-1}(Y)} g_0) v_{g_0} = (\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y))^1_{g_0}.$$

Maintenant lorsque Y parcourt $\mathfrak{D}_{m,1}$, $\varphi(Y)$ parcourt $\mathfrak{D}_{m,1}$ pour $\varphi \in D_{m,1}$. Donc si $X \in \mathfrak{D}^{\perp g_0, 1}_{m,1}$, $\varphi(X) \in \mathfrak{D}^{\perp \varphi(g_0), 1}_{m,1}$, comme de plus $\mathscr{L}_{\varphi(X)} \varphi(g_0) = \varphi(\mathscr{L}_X g_0)$, la relation IV.7 est prouvée.

La proposition II.16 est donc applicable et $\mathscr{M}/D_{m,1}$ est une variété I.L.H. forte. ■

IV.9. Proposition : *$\mathscr{M} \to \mathscr{R}_{m,1} = \mathscr{M}/D_{m,1}$ est un I.L.H. fibré principal de groupe structural $D_{m,1}$.*

Cela résulte directement de la construction de la structure de variété I.L.H. sur $\mathscr{M}/D_{m,1}$ et de ce que l'action de $D_{m,1}$ est une action I.L.H. $C^{\infty,1}$ libre. ■

V. $\mathscr{R}_{(G)}$ est une variété I.L.H.

1. *Métriques à groupe d'isométries G.*

V.1. Nous fixons pour tout ce paragraphe un sous-groupe compact G de D et supposons M muni d'une métrique dont G est un groupe d'isométries lorsque nécessaire. Certains des résultats sont valables pour tout groupe de Lie compact.

V.2. LEMME: *Soit $\mathscr{M}_G^1$ l'ensemble des métriques admettant G pour groupe d'isométries. $\mathscr{M}_G^1$ est un sous-cône convexe positif fermé de $\mathscr{M}$.*

Soit $P_G : C^\infty(O^2T^*M) \to C^\infty(O^2T^*M)$ l'application linéaire qui à h associe $\int_G \varphi(h) \mathrm{d}\mu(\varphi)$ où $\mathrm{d}\mu$ est la mesure de Haar de G. P_G est continue puisque: $\varphi \mapsto \bar{\varphi}(: g \mapsto \varphi(g))$ est continue, que, G étant compact, la famille des applications $\bar{\varphi}$ est bornée et que l'intégration par rapport à la mesure de Haar est une forme linéaire continue. Or

$$\mathscr{M}_G^1 = \mathscr{M} \cap \mathrm{Ker}\,(P_G - Id).$$

$\mathscr{M}_G^1$ est donc l'intersection de deux cônes convexes fermés, donc lui-même un cône convexe fermé. $\mathscr{M}_G^1$ est positif puisque $\mathscr{M}$ l'est, Ker $(P_G - Id)$ étant un sous-espace vectoriel. ■

V.3. Soit $\underline{\mathscr{M}_G}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_G^1$ formé des métriques admettant *exactement* G comme groupe *des* isométries.

V.4. LEMME: *$\mathscr{M}_G$ est un ouvert de $\mathscr{M}_G^1$.*

Si $\mathscr{M}_G$ est vide, le lemme est trivial.

Soit $g \in \mathscr{M}_G$. D'après le théorème de la tranche (cf. II.12), il existe un voisinage U de g dans $\mathscr{M}$ tel que pour $g' \in U$ le groupe des isométries de g' soit conjugué à un sous-groupe de G, donc en particulier ne peut être un groupe contenant strictement G. $U \cap \mathscr{M}_G^1$ est un voisinage de g dans $\mathscr{M}_G^1$ tout entier contenu dans $\mathscr{M}_G$. ■

V.5. En fait nous serons aussi intéressés par $\underline{\mathscr{M}_{(G)}}$ ensemble des métriques dont le groupe des isométries est dans la classe de conjugaison de G. $\mathscr{M}_{(G)}$ est le saturé de $\mathscr{M}_G$ par l'action de D.

V.6. Le sous-groupe $\underline{N_G}$ de D qui stabilise $\mathscr{M}_G$ est formé des difféomorphismes φ tels que pour tout ψ dans G

$$\psi(\varphi(g)) = \varphi(g)$$

autrement dit tel que $\varphi\psi\varphi^{-1}$ est une isométrie de G : N_G est le normalisateur de G dans D.

V.7. Pour montrer que $\mathscr{R}_{(G)}$ (ensemble des structures riemanniennes dont la classe de conjugaison du groupe des isométries est la classe de conjugaison de G) est une variété I.L.H., nous allons montrer que $_G\backslash N_G$ est un groupe I.L.H. agissant proprement et librement sur $\mathscr{M}_G$.

Pour cela nous allons d'abord considérer $\underline{C_G}$ le centralisateur de G dans D.

2. *Le centralisateur C_G de G dans D*

V.8. PROPOSITION: *C_G est un sous-groupe de Lie I.L.H. de D, d'algèbre de Lie $\mathscr{C}_G = \{X | X \in \mathfrak{D}$ et $\forall \varphi \in G, \varphi(X) = X\}$. De plus si D est muni de la métrique L^2 associée à une métrique sur M invariante par G, C_g^0 est totalement géodésique dans D à partir de Id_M.*

C_G est clairement un sous-groupe fermé de D.
Montrons qu'un voisinage de Id_M dans C_G est une sous-variété I.L.H. de D. Pour cela commençons par le lemme suivant.

V.9. LEMME: *$P_G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, qui au champ de vecteurs X associe $\int_G \varphi(X) \mathrm{d}\mu(\varphi)$, est un projecteur continu sur $\mathscr{C}_G$.*

Nous avons déjà vu que l'analogue de P_G sur les champs de tenseurs symétriques est continu. De plus puisque pour $\psi \in G$

$$\psi\left(\int_G \varphi(X)\mathrm{d}\mu(\varphi)\right) = \int_G \psi(\varphi(X))\mathrm{d}\mu(\varphi) = \int_G (\varphi \circ \psi)(X)\mathrm{d}\mu(\varphi),$$

soit encore

$$\psi(P_G(X)) = \int_G \zeta(X) R_\psi^*(\mathrm{d}\mu(\zeta)) = \int_G \zeta(X)\mathrm{d}\mu(\zeta),$$

il est clair que l'image de P_G est $\mathscr{C}_G$ et que $P_{G|\mathscr{C}_G} = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_G}$. ■

V.10. Ainsi $\mathscr{C}_G$ est un sous-espace fermé direct de $\mathfrak{D}$.

Soit i_g le rayon d'injectivité de la métrique g; si φ a une fonction de déplacement d_φ bornée par i_g, alors pour tout point m de M il y a une unique géodésique minimisante, c, de m à $\varphi(m)$. De plus si on note $X_\varphi(m) = \dot{c}(m)$ (c est paramétrée pour être de longueur un): $\varphi = \mathbb{E}\mathrm{xp}\,(X_\varphi)$. Considérons les difféomorphismes $\varphi_t = \mathbb{E}\mathrm{xp}\,(tX_\varphi)$ pour $t \in [0, 1+\varepsilon]$ (avec $\varepsilon < i_g - \max_{m\in M} d_\varphi(m)$). Soit $x \in G$, évaluons $\varphi_t(x(m))$: c'est le point de paramètre t situé sur la géodésique de $x(m)$ à $\varphi(x(m)) = x(\varphi(m))$, donc sur l'image par x de la géodésique de m à $\varphi(m)$; d'où $\varphi_t(x(m))$ coïncide avec $x(\varphi_t(m))$ et $\varphi_t \in C_G$. La géodésique de Id_M à φ dans D est toute entière dans C_G: ainsi $X_\varphi \in \mathscr{C}_G$. On peut donc trouver un voisinage de Id_M dans C_G qui est une sous-variété de D, image par $\mathbb{E}\mathrm{xp}$ d'un voisinage de 0 dans $\mathscr{C}_G$ ($\mathscr{C}_G$ est direct dans $\mathfrak{D}$). La structure de sous-variété au voisinage d'un point quelconque ψ de C_G s'obtient aisément puisque la composition à droite par ψ est une application C^∞. ■

V.11. J. Eells a annoncé un résultat analogue lors du Colloque du Centenaire E. Cartan. Pour traiter un problème relatif au mouvement des fluides, J. Marsden m'a communiqué qu'il avait prouvé la même proposition.

Nous reviendrons sur la structure de C_G en termes de la géométrie de M un peu plus tard (cf. V. 25 et suivants).

V.12. Remarque: Comme la composition à droite par un élément de D_{v_g} préserve le produit scalaire L^2 induit sur D par g, C_G sera aussi totalement géodésique aux points de $C_G \cap D_{v_g}$

V.13. Lemme: *Les composantes connexes de C_G sont isolées et donc dénombrables.*

Supposons que les composantes connexes de C_G ne soient pas isolées. Il existe alors une suite (φ_n) d'éléments de C_G tous dans des composantes connexes distinctes convergeant vers l'identité. A partir d'un certain rang, le maximum de la fonction de déplacement des φ_n est inférieur au rayon d'injectivité de la métrique g et d'après la preuve de la proposition V.8 les (φ_n) seraient dans C_G^0. ■

3. *Le normalisateur N_G de G dans D*

V.14. Nous partons alors de la suite exacte de groupes suivante

V.15. $$0 \to C_G \to N_G \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Aut} G$$

où Aut G désigne le groupe des automorphismes de G et α est l'application qui à $\varphi \in N_G$ associe l'automorphisme de G dans G, $X \mapsto \varphi X \varphi^{-1}$.

Comme d'après la proposition III.6, G est engendré par G^0 et un nombre fini d'éléments, Aut G est un groupe de Lie d'après [5] page 251. En particulier, la suite exacte V.15 est une suite exacte de groupes topologiques (N_G, sous-groupe fermé de D, est muni de la topologie induite par D).

Considérons alors le diagramme suivant où toutes les lignes et colonnes sont connues comme exactes sauf la dernière qui l'est aussi par voie de conséquence. Nous montrerons que le groupe ʕ est discret en V.21.

Pour établir la structure locale de $G\backslash N_G$, à cause du diagramme précédent et du résultat mentionné à propos du groupe ʕ, il suffit de connaître celle de $G^0\backslash N_G^0$.

Pour cela remarquons d'abord que la suite exacte V.15 donne, quand nous nous restreignons aux composantes connexes, une nouvelle suite exacte

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G^0 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & G/G^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_G^0 \arrow[r] \arrow[d] & N_G \arrow[r] \arrow[d] & N_G/N_G^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G^0\backslash N_G^0 \arrow[r] \arrow[d] & G\backslash N_G \arrow[r] \arrow[d] & \text{⸮} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

V.16. $$0 \to C_G \cap N_G^0 \to N_G^0 \to (\mathrm{Aut}\ G)^0$$

que nous allons rapprocher de la même suite exacte pour le groupe G^0

V.17. $$0 \to C_{G^0} \cap N_{G^0}^0 \to N_{G^0}^0 \to (\mathrm{Aut}\ G^0)^0.$$

V.18. Proposition: *Soit G un groupe de Lie compact.* (*Aut* $G^0)^0$ *est isomorphe à* G^0/Z_{G^0} (Z_{G^0} *est le centre de* G^0).

Prouvons d'abord que $(\mathrm{Aut}\ G^0)^0 \simeq \tilde{S}/Z_{\tilde{S}}$.

(On rappelle que $\tilde{S}$ est la partie semi-simple simplement connexe de $\tilde{G}^0$, ainsi qu'elle fut définie en III.4).

D'une part Aut $\tilde{S}$ est inclus dans $(\mathrm{Aut}\ G^0)^0$. En effet $\tilde{S}$ étant semi-simple connexe et simplement connexe, d'après [5] page 251, Aut $\tilde{S} = \tilde{S}/Z_{\tilde{S}}$. Comme $\pi_1(G^0)$ est central dans $\tilde{G}^0 = \tilde{Z} \times \tilde{S}$ d'après III.5, la projection de $\pi_1(G^0)$ dans $\tilde{S}$ est centrale dans $\tilde{S}$. Donc tous les automorphismes de $\tilde{S}$ passent au quotient (nous les étendons à $\tilde{G}^0$ par une action triviale sur $\tilde{Z}$).

D'autre part un automorphisme de G^0 définit sur $\mathscr{G}$ un automorphisme qui s'étend à $\tilde{G}^0$ et qui laissera invariant chaque élément de $\pi_1(G^0)$ s'il appartient à la composante connexe de l'identité de Aut G^0. Il suffit alors de constater que, la projection de $\pi_1(G^0)$ sur $\tilde{Z}$ contenant un réseau (cf. III.5), cet automorphisme induit l'identité sur $\tilde{Z}$.

Montrons pour finir que $\tilde{S}/Z_{\tilde{S}} \simeq G^0/Z_{G^0}$.

Cela résulte seulement de ce que la suite

$$0 \to \pi_1(G^0) \to \tilde{Z} \times Z_{\tilde{S}} \to Z_{G^0} \to 0$$

est exacte d'après [5] page 243 et de ce que, dans le diagramme suivant, toutes les colonnes et les lignes sauf la dernière étant connues comme exactes, la dernière ligne est aussi exacte.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \pi_1(G^0) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \tilde{Z} \times Z_{\tilde{S}} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{G^0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1(G^0) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{Z} \times \tilde{S} \arrow[r] \arrow[d] & G^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \tilde{S}/Z_{\tilde{S}} \arrow[r] \arrow[d] & G^0/Z_{G^0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

V.19. PROPOSITION: *Soit G un groupe de Lie compact.* $(Aut\ G)^0$ *est isomorphe à* $(Aut\ G^0)^0$.

En effet il y a une application évidente Aut $G \to$ Aut G^0, qui induit une inclusion (Aut $G)^0 \to$ (Aut $G^0)^0$, mais comme (Aut $G^0)^0 \simeq G^0/Z_{G^0}$, c'est une surjection puisque les automorphismes de G^0 provenant de la conjugaison par des éléments de G^0 se prolongent à G. ■

V.20. REMARQUES: Les propositions V.18 et V.19 (mentionnées faute de les avoir trouvées dans la littérature) ont les conséquences suivantes:

(i) les deux suites exactes V.16 et V.17 demeurent exactes si nous les prolongeons par 0, puisque G^0 est évidemment inclus dans $N^0_{G^0}$;

(ii) par suite, dans la suite V.15, l'image de N_G par α est une réunion de composantes connexes de Aut G.

V.21. PROPOSITION: N_G/N^0_G *est un groupe discret ainsi que le groupe* ʔ (*voir en* V.14).

Aut G étant un groupe de Lie, le groupe de ses composantes connexes est discret. Le sous-groupe de Aut (G)/(Aut $G)^0$ image de N_G/N^0_G par l'application induite par α est aussi discret. Comme $C_G/C_G \cap N^0_G$, qui est un quotient de C_G/C^0_G lui-même discret d'après le lemme V.13, est discret, il en est de même de N_G/N^0_G et du groupe ʔ qui en V.14 apparaît comme un quotient de N_G/N^0_G. ■

V.22. THÉORÈME: ${}_G\backslash N_G$ *est un groupe de Lie I.L.H. dont la topologie coïncide avec celle induite par l'inclusion* ${}_G\backslash N_G \to {}_G\backslash D$.

En effet, d'après V.14, ${}_G\backslash N_G$ est à un groupe discret près ${}_{G^0}\backslash N^0_G$. Montrons que ${}_{G^0}\backslash N^0_G$ *est* isomorphe à C^0_G/Z_{G^0} à un groupe discret près.

Pour cela revenons à la suite exacte V.16 complétée

$$0 \to C_G \cap N_G^0 \to N_G^0 \to G^0/Z_{G^0} \to 0.$$

Elle s'insère dans le diagramme de suites exactes suivant où toutes les colonnes et lignes sont connues comme exactes sauf la dernière, qui l'est par conséquent:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_{G^0} \arrow[r] \arrow[d] & G^0 \arrow[r] \arrow[d] & G^0/Z_{G^0} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_G \cap N_G^0 \arrow[r] \arrow[d] & N_G^0 \arrow[r] \arrow[d] & G^0/Z_{G^0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_G \cap N_G^0/Z_{G^0} \arrow[r] \arrow[d] & G^0\backslash N_G^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ainsi $C_G \cap N_G^0/Z_{G^0}$ est isomorphe à $G^0\backslash N_G^0$. Comme $C_G \cap N_G^0$ est un sous-groupe distingué de C_G, C_G^0/Z_{G^0} est à un groupe discret près isomorphe à $C_G \cap N_G^0/Z_{G^0}$ d'après V.13.

Nous avons vu en V.8 que C_G est un sous-groupe de Lie I.L.H. de D. Comme $G \cap C_G = Z_G$, et que $G\backslash D$ est une variété I.L.H. forte, $Z_G\backslash C_G$ est une variété I.L.H. forte et même un groupe de Lie I.L.H. Comme $G\backslash N_G$ est à un groupe discret près isomorphe à $Z_G\backslash C_G$, $G\backslash N_G$ a une structure de variété I.L.H. forte (et même de groupe de Lie I.L.H.) sans ambiguité qui est compatible avec la topologie induite par l'inclusion $G\backslash N_G \to G\backslash D$. ∎

V.23. Corollaire: *Au niveau des algèbres de Lie:* $\mathfrak{N}_G \simeq \mathscr{C}_G \oplus \mathscr{S}$ *et par suite* N_G *est un sous-groupe I.L.H de D.*

En effet un voisinage de l'identité de N_G apparaît comme isomorphe à un voisinage de l'identité dans $Z_G\backslash C_G) \times G$ d'après la démonstration du théorème V.22, d'où le corollaire. ∎

4. $\mathscr{R}_{(G)}$ *est une variété I.L.H.*

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

V.24. Théorème: $\mathscr{R}_{(G)} = \pi(\mathscr{M}_{(G)})$ *est une variété I.L.H. forte dont la* *topologie coincide avec celle de sous-espace de l'espace topologique $\mathscr{R}$ et $\mathscr{M}_G \to \mathscr{R}_{(G)}$ est un fibré principal de groupe structural ${}_G\backslash N_G$.*

Nous remarquons d'abord que $\mathscr{R}_{(G)}$ est aussi l'image par π de $\mathscr{M}_G$. Nous allons appliquer la proposition II.16. Pour cela prouvons que ${}_G\backslash N_G$ agit librement et proprement sur $\mathscr{M}_G$. Le caractère libre de l'action résulte de la définition de $\mathscr{M}_G$. De plus l'action de ${}_G\backslash N_G$ est propre puisque l'action de ${}_G\backslash D$ sur $\mathscr{M}_{(G)}$ l'est (cf. [10] page 28 et II.9), que N_G est fermé dans D et que donc ${}_G\backslash N_G$ est fermé dans ${}_G\backslash D$. La propriété analogue pour l'action de ${}_G\backslash N_G^{s+1}$ sur $\mathscr{M}_G^s$ suit trivialement (il faut toutefois remarquer que G *doit* être un sous-groupe compact de D et non de D^{s+1}).

De plus l'application qui à $G \cdot \varphi$ associe $\varphi(g)$ pour $\varphi \in N_G$ est une immersion puisque l'application de ${}_G\backslash D$ dans $\mathscr{M}$ en est une.

Quant à la troisième condition, elle est automatiquement vérifiée puisqu'elle l'est pour l'action de D sur $\mathscr{M}$ et que l'action de N_G n'est que la restriction de celle de D à la sous-variété $\mathscr{M}_G$.

D'après la proposition II.16, $\mathscr{R}_{(G)} = \mathscr{M}_G/N_G$ est une variété I.L.H. forte et la topologie sous-jacente est celle induite par l'inclusion de $\mathscr{R}_{(G)}$ dans $\mathscr{R}$ par la construction même des cartes locales de $\mathscr{R}_{(G)}$.

Remarquons pour terminer que si nous avions choisi un autre représentant de (G), soit G_1, nous aurions obtenu une structure I.L.H. équivalente. En effet $G_1 = \varphi G \varphi^{-1}$ pour un certain φ dans D et alors $\mathscr{M}_{G_1}$ se déduit de $\mathscr{M}_G$ par conjugaison par φ qui est une application C^∞ I.L.H. d'ordre $\leqq 0$ (cf. II.10). ■

REMARQUE: $\mathscr{R}_{(G)}$ n'est de dimension finie que si G agit transitivement.

5. *Lien de $\mathscr{C}_G$ avec la géométrie de M*

V.25. Il est intéressant de préciser ce que sont les éléments de C_G et N_G en termes de la géométrie de M. En tout point m de M,

$$T_m M = T_m(G \cdot m) \oplus [T_m(G \cdot m)]^\perp.$$

Nous désignons par pr_m^G le projecteur orthogonal de $T_m M$ sur $T_m(G \cdot m)$. Il est clair que, hormis le cas où il n'y a qu'un type d'orbites, $m \mapsto pr_m^G$ n'est pas un champ d'endomorphismes C^∞. Cependant

V.26. PROPOSITION: *Soit $X \in \mathscr{C}_G$ à support dans la réunion des orbites principales de G. Alors $pr^G X \in \mathscr{C}_G$.*

A propos de $pr^G X$ deux problèmes se posent: d'une part qu'il soit invariant par G, d'autre part qu'il soit C^∞ (pour qu'il appartienne à $\mathfrak{D}$).

Remarquons d'abord que

V.27. LEMME: *Pour $\varphi \in G$, $T\varphi \circ pr^G = pr^G \circ T\varphi$.*

Soient $m \in M$ et $Y \in T_m M$. Alors

$$Y_m = Y_m^T + Y_m^\perp \quad \text{avec} \quad Y_m^T \in T_m(G \cdot m) \quad \text{et} \quad Y_m^\perp \in T_m(G \cdot m)^\perp.$$

De plus $Y_m^T = (d/dt)(\eta_t(m))|_{t=0}$ pour une courbe η_t dans G. Ainsi

$$(T\varphi \circ pr^G)(Y_m) = (T\varphi \circ pr^G)(Y_m^T) = T_\varphi(Y_m^T) = \frac{d}{dt}\varphi(\eta_t(m))|_{t=0}$$

et par suite

$$(T\varphi \circ pr^G)(Y_m) \in T_{\varphi(m)}(G \cdot \varphi(m))$$

nous avons prouvé que

$$(T\varphi \circ pr^G)(Y_m) = (pr^G \circ T\varphi)(Y_m^T).$$

Il suffit donc de prouver que

$$(pr^G \circ T\varphi)(Y_m^\perp) = 0.$$

Pour cela remarquons que pour tout $Z_m \in T_m(G \cdot m)$

$$0 = g(Y_m^\perp, Z_m) = g(T\varphi(Y_m^\perp), T\varphi(Z_m))$$

puisque φ est une isométrie de g.

Or nous venons de montrer que $T\varphi(Z_m)$ est dans $T_{\varphi(m)}(G \cdot \varphi(m))$ et même décrit tout cet espace, puisque φ est un difféomorphisme préservant les orbites. Donc $T\varphi(Y_m^\perp) \in T_{\varphi(m)}(G \cdot \varphi(m))^\perp$. ■

V.28. *Suite de la preuve de la proposition* V.26

D'après le lemme si X est dans $\mathscr{C}_G$, alors $pr^G(X)$ est aussi invariant par G puisque, pour $\varphi \in G$,

$$\varphi(pr^G X) = T\varphi^{-1}(pr^G(X) \circ \varphi) = pr^G[T\varphi^{-1}(X \circ \varphi)] = pr^G(X).$$

$pr^G(X)$ est C^∞ au voisinage d'une orbite régulière puisque là pr^G est un champ C^∞ d'endomorphismes, d'où la proposition.

Pour établir la propriété pour $X \in \mathscr{C}_G$ sans condition de support, il faudrait établir que $pr^G X$ est C^∞ partout. ■

V.29. La proposition V.26 permet donc de décomposer $\mathscr{C}_G$ en $\mathscr{C}_G^\perp$ et $\mathscr{C}_G^T$ où $\mathscr{C}_G^\perp = \{X | X \in \mathscr{C}_G \text{ et } pr^G(X) = 0\}$ et

$$\mathscr{C}_G^T = \{X | X \in \mathscr{C}_G \quad \text{et} \quad pr^G(X) = X\}.$$

V.30. Proposition: *$\mathscr{C}_G^\perp$ contient en particulier les relèvements des champs de vecteurs sur la partie régulière de $_G\backslash M$. Donc $\mathscr{C}_G$ est de dimension infinie dès que G n'agit pas transitivement sur M.*

Soit H le groupe principal d'isotropie. Supposons l'action non transitive.

Soit U_1 la partie régulière de $_{G^0}\backslash M$. G/G^0 étant fini, $_G\backslash M$ a aussi une partie réguliére, soit U_2, qui est la projection d'un ouvert dense U de M. Il est classique que $M_{(H)} \to U_2$ est un G-fibré localement trivial. Si nous relevons un champ de vecteurs à support dans U_2 en un champ sur $M_{(H)}$ dans les espaces normaux aux orbites, nous obtenons un champ invariant par G (la représentation linéaire d'isotropie dans la tranche est triviale le long des orbites principales), donc un élément de $\mathscr{C}_G^\perp$. Comme les champs de vecteurs sur un ouvert d'une variété non réduite à un point forment un espace vectoriel de dimension infinie, $\mathscr{C}_G^\perp$ est de dimension infinie. ■

V.31. Pour étudier $\mathscr{C}_G^T$, il nous faut d'abord considérer le cas d'un espace homogène, ce qui revient à considérer ce qu'est $\mathscr{C}_G^T$ en restriction à une orbite (ou presque, voir V.33).

Remarquons d'abord que dans le cas où le groupe d'isotropie est réduit à Id_M, alors $\mathscr{C}_{G|G\cdot m}^T$ se réduit aux champs invariants à gauche (le flot doit commuter aux translations à gauche: c'est donc une translation à droite).

V.32. Proposition: *$\mathscr{C}_{G|G\cdot m}^T$ contient les images dans $G\cdot m$ des champs de vecteurs invariants à gauche projetables, i.e. ceux qui sont invariants par $ad(G_m)$.*

Un champ de vecteurs X invariant à gauche sur G est projetable sur $G\cdot m = {_{G_M}\backslash G}$ si et seulement s'il est *ad* G_M-invariant. En effet si X invariant à gauche est projetable, X vérifie

$$\forall y \in G_m, \ \forall x \in G, \ T_x R_y(X(x)) = X(xy).$$

Pour $x = \mathrm{Id}_M$, cela donne

$$T_{\mathrm{Id}_M} R_y(X(\mathrm{Id}_M)) = X(y);$$

comme X est invariant à gauche,

$$T_{\mathrm{Id}_M} R_y(X(\mathrm{Id}_M)) = T_{\mathrm{Id}_M} L_y(X(\mathrm{Id}_M))$$

et X est *ad* (G_m)-invariant.

Réciproquement si X est invariant à gauche et $ad\,(G_m)$-invariant, alors

$$T_x R_y(X(x)) = (T_x R_y \circ T_{\mathrm{Id}_M} L_x)(X(\mathrm{Id}_M)) = (T_y L_x \circ T_{\mathrm{Id}_M} R_y)(X(\mathrm{Id}_M))$$

puisque les translations à droite et à gauche commutent, soit

$$T_x R_y(X(x)) = (T_y L_x \circ T_{\mathrm{Id}_M} L_y)(X(\mathrm{Id}_M))$$

puisque X est $ad\,(G_m)$-invariant. Donc

$$T_x R_y(X(\mathrm{Id}_M)) = X(xy)$$

(puisque X est invariant à gauche), ce qui est la relation que nous voulions prouver. D'autre part nous avons vu que les champs invariants à gauche commutaient aux champs invariants à droite qui sont, eux, tous projetables. ■

V.33. La détermination de $\mathscr{C}^T_{G|G\cdot m}$ suppose que l'on connaisse le plus grand groupe d'isométries de l'orbite, ce qui est toujours délicat.

Si nous considérons sur U ouvert régulier de $_G\backslash M$ le fibré vectoriel localement trivial dont la fibre en $G\cdot m$ est formée des champs de vecteurs sur $G\cdot m$ images de champs de vecteurs sur G invariants à gauche et $ad\,(G_m)$-invariants, toute section de ce fibré à support dans U est un élément de $\mathscr{C}^T_G$.

VI. Stratification de $\mathscr{R}$

1. *Stratification associée à un ordre partiel*

VI.1. En dimension finie, les stratifications sont en général indexées par un entier naturel, l'ordre étant l'ordre naturel. Ici l'ensemble des indices est l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de D qui sont groupes des isométries pour au moins une métrique sur M, l'ordre étant l'inclusion des groupes. Dans notre cas l'ordre est seulement un ordre partiel.

VI.2. Définition: *Soient $\mathscr{T}$ un espace topologique et A un ensemble dénombrable muni d'un ordre partiel. Une partition $(\mathscr{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification I.L.H. de $\mathscr{T}$ si*

(i) *les $\mathscr{T}_\alpha$ sont munies de structures de variétés I.L.H. fortes compatibles avec la topologie induite par $\mathscr{T}$.*

(ii) *Si $\mathscr{T}_\alpha$ rencontre l'adhérence de $\mathscr{T}_\beta$, alors $\beta < \alpha$, et $\mathscr{T}_\alpha \subset \overline{\mathscr{T}}_\beta$. Nous dirons que les $\mathscr{T}_\alpha$ sont les strates de la stratification.*

VI.3. Lemme: *L'ensemble $\mathfrak{J}$ des classes de conjugaison de groupes des isométries de M est un ensemble dénombrable.*

Les classes d'isomorphie de groupes de Lie compacts réductifs forment un ensemble dénombrable. De plus chacune d'elles n'a qu'une infinité dénombrable d'actions équivalentes (cf. [23] page 364). ■

2. *Les* $(\mathscr{R}_{(G)})_{(G)\in\mathfrak{J}}$ *stratifient* $\mathscr{R}$.

VI.4. Théorème: $\mathscr{R}_{(G)}$ *pour* $(G)\in\mathfrak{J}$ *est une stratification I.L.H. de* $\mathscr{R}$.

Il est clair que les $\mathscr{R}_{(G)}$ pour $(G)\in\mathfrak{J}$ forment une partition de $\mathscr{R}$. Nous avons prouvé en V.24 que $\mathscr{R}_{(G)}$ pour (G) dans $\mathfrak{J}$ est une variété I.L.H. dont la topologie coïncide avec celle induite par $\mathscr{R}$.

Il nous reste à prouver la propriété de frontière, i.e. si $\tilde{g}\in\overline{\mathscr{R}_{(H)}}\cap\mathscr{R}_{(G)}$, alors H est un sous-groupe d'un conjugué de G et de plus tout $\tilde{g}'$ dans $\mathscr{R}_{(G)}$ est dans $\overline{\mathscr{R}_{(H)}}$.

La première propriété résulte du théorème de la tranche pour l'action de D sur $\mathscr{M}$. En effet soit g une métrique dont le groupe des isométries est G; $\tilde{g}$ est la structure riemannienne associée à g. Si $\tilde{g}\in\overline{\mathscr{R}_{(H)}}\cap\mathscr{R}_{(G)}$, il existe une suite de structures riemanniennes $\tilde{g}_n$ dans $\mathscr{R}_{(H)}$ telles que $(\tilde{g}_n)$ tende vers g lorsque n tend vers l'infini. Soit T_g la tranche en g de l'action de D. Nous pouvons choisir des représentants (g_n) de $(\tilde{g}_n)$ dans T_g pour n assez grand. D'après les propriétés d'une tranche, le groupe des isométries de g_n est un sous-groupe de $D_g = G$, donc H, conjugué de D_{g_n}, est conjugué à un sous-groupe de G.

Nous allons prouver la deuxième propriété sous la forme suivante:

VI.5. Proposition: *Soit* $\mathscr{H}\in\mathfrak{J}$ *et supposons* $\mathscr{H}\subsetneq(G)$. *Alors il existe un sous-groupe H de G avec* $H\in\mathscr{H}$ *tel que* $\bigcup_{H\subsetneq K\subseteq G}\mathscr{T}_K$ *soit distinct de* $\mathscr{T}_H$.

La preuve consiste à adapter celle du théorème III.23 à la situation présente. Soit H' un sous-groupe de G tel que $H'\in\mathscr{H}$; la construction faite en III.24b) peut se faire dans un voisinage arbitrairement petit de g.

Pour cela, ε étant donné, il suffit au i-ème pas de la construction de prendre la métrique g_i à moins de $\varepsilon/2^i$ de g_{i-1} (pour la distance déduite de la structure I.L.H. de $\mathscr{M}$) ce qui est possible.

Soit g' la métrique telle que $D_{g'} = H'$ ainsi obtenue. D'après le théorème de la tranche, nous pouvons écrire $g' = \psi(\exp^0 h)$ avec $\psi\in D$ et $h\in\operatorname{Ker}\delta'_g$. La métrique $\exp^0 h$ a pour groupe des isométries $H = \psi H'\psi^{-1}$ qui est un sous-groupe de G puisque $\exp^0 h$ est dans la tranche T_G en g.

La métrique L^2 sur $\mathscr{M}$ étant invariante par D et g par G, h est dans $\mathscr{T}_H$

mais il ne se trouve pas dans $\bigcup_{H \subsetneq K \subseteq G} \mathscr{T}_K$, sinon il y aurait un K ($H \subsetneq K \subseteq G$) laissant invariant h et $\exp^0 h$. ■

VI.6. *Suite de la preuve du théorème* VI.4

Si (H) et $(G) \in \mathfrak{J}$ avec $(H) \subseteq (G)$, prouvons que $\mathscr{R}_{(G)} \subseteq \overline{\mathscr{R}_{(H)}}$. Il suffit pour cela de compléter la preuve de la proposition VI.5 de la façon suivante: $g(t) = \exp^0 th$ est une courbe de métriques dont le groupe des isométries est G pour $t = 0$ et H pour $t \neq 0$, puisque pour $\varphi \in G$

$$\varphi(g(t)) = \exp^0 \varphi(th) = \exp^0 t\varphi(h). \quad ■$$

3. *Incidence des strates*

VI.7. Remarque: Dans VI.6 nous avons prouvé un peu plus que le fait que les $(\mathscr{R}_{(G)})$ stratifient $\mathscr{R}$. En effet, la démonstration du théorème VI.4 montre que si $(H) \subsetneq (G)$, alors $\mathscr{R}_{(G)} \subsetneq \overline{\mathscr{R}_{(H)}}$ autrement dit les strates s'intersectent autant qu'il est possible, ce qui est une propriété de régularité de la stratification.

VI.8. Corollaire: *$\mathscr{M}_G$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}^1_G$.*

D'après le lemme V.4, $\mathscr{M}_G$ est un ouvert de $\mathscr{M}^1_G$. Il est clair que

$$\mathscr{M}^1_G = \bigcup_{\substack{G' \supseteq G \\ G' \in \mathfrak{J}}} \mathscr{M}_{G'}.$$

Or dans la preuve du théorème VI.4, nous avons exhibé à partir d'une métrique g telle que $D_g = G'$, une courbe de métriques $g(t)$ avec $D_{g(t)} = G$ pour t petit $\neq 0$, prouvant le corollaire. ■

VI.9. Corollaire: *$\mathscr{M}_{\mathrm{Id}}$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}$ dès que* $\dim M \geqq 2$.

C'est le corollaire précédent dans le cas où $G = \mathrm{Id}_M$ dès qu'on remarque que $\mathscr{M}^1_{\mathrm{Id}} = \mathscr{M}$. ■

VI.10. Remarque: D. G. Ebin avait donné une démonstration 'à la main' de ce dernier corollaire utilisant la courbure (cf. [10] page 35).

VII. Applications

1. *$\mathscr{R}$ est-il une variété I.L.H.?*

VII.1. Il est clair que lorsque D ne contient aucun sous-groupe compact autre que $\{\mathrm{Id}_M\}$, $\mathscr{R}$ est une variété I.L.H. forte et $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{R}$ est un fibré principal de groupe structural D par application de II.16 puisqu'alors D agit librement. De telles variétés M existent (cf. [9]).

VII.2. Nous supposons maintenant que D contient au moins un sous-groupe compact non trivial. D contient alors nécessairement un sous-groupe G qui est groupe des isométries d'une métrique.

VII.3. PROPOSITION: *Au voisinage d'une métrique riemannienne qui a un groupe des isométries non trivial, $\mathscr{R}$ n'est pas une variété I.L.H.*

En effet soient g une telle métrique et G son groupe des isométries. G étant un groupe compact admet comme sous-groupe un groupe cyclique d'ordre premier. Si nous prouvons la proposition pour les métriques dont le groupe des isométries est un groupe cyclique d'ordre premier, comme il existe des chemins de métriques issus de g dans la tranche en g dont le groupe des isométries est un tel groupe sauf à l'origine (ainsi que nous l'avons prouvé en VI.6), tout voisinage de $\tilde{g} = \pi(g)$ contiendra des points en lesquels $\mathscr{R}$ n'est pas une variété.

VII.4. Supposons donc que le groupe des isométries de g' est un groupe cyclique d'ordre premier k, soit H; ainsi H n'a aucun sous-groupe non trivial. Le noyau $\mathscr{T}'_H$ du projecteur P_H sur $\mathscr{T}_H$ défini par $h \mapsto 1/k \sum_{\varphi \in H} \varphi(h)$ est stable par H. De plus par définition H agit librement sur $\mathscr{T}'_H - \{0\}$ (c'est là que nous utilisons le fait que H n'a aucun sous-groupe propre). Un voisinage de $\tilde{g}' = \pi(g')$ dans $\mathscr{R}$ est donné par la produit d'un voisinage U de 0 dans $\mathscr{T}_H$ par un voisinage V de 0 dans le quotient de $\mathscr{T}'_H$ par H. Or V est limite projective de voisinages V^s de 0 dans le quotient de $\mathscr{T}'^s_H$ (complété de $\mathscr{T}'_H$ pour la norme H^s) par H. Or H agit librement sur les sphères de $\mathscr{T}^s_H$; le quotient de ces sphères par H a donc pour groupe fondamental $\mathbb{Z}_k$. Comme les boules, qui se rétractent l'une sur l'autre par homothétie, forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathscr{T}'^s_H$, 0 n'a pas de voisinage contractible dans le quotient de $\mathscr{T}'^s_H$ par H. V n'est pas un voisinage d'un point d'une variété I.L.H. ■

VII.5. REMARQUE: Ainsi $\mathscr{R}_{m,1}$ apparaît comme une désingularisation de $\mathscr{R}$ et bien entendu la projection $p_{m,1} : \mathscr{R}_{m,1} \to \mathscr{R}$ contient les singularités de $\mathscr{R}$. Par exemple en $\bar{g}$, image dans $\mathscr{R}_{m,1}$ de la métrique considérée précédemment, la fibre de la projection p est $G \backslash F(M)$, alors qu'il y a des points voisins où elle est $F(M)$. Un modèle local de la façon dont ces différentes variétés de dimension finie s'organisent entre elles serait intéressant pour comprendre les singularités de $\mathscr{R}$.

Dans le cas de S^n, $\mathscr{R}_{m,1}$ est certainement la désingularisation minimale de $\mathscr{R}$ puisque $F(S^n) = 0(n+1)$, qui est le groupe des isométries des métriques à courbure constante sur S^n.

2. *Relèvement des chemins de $\mathscr{R}$*

VII.6. Proposition (D. G. Ebin non publié): *Dans toute classe d'homotopie de lacets de $\mathscr{R}$, il y a au moins un qui se relève dans $\mathscr{M}$.*

Soit $\tilde{\gamma}$ un lacet dans $\mathscr{R}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{g}$.

Soit $g \in \mathscr{M}$ une métrique dont la structure riemannienne est $\tilde{g}$.

Nous voulons montrer qu'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathscr{M}$ tel que $\pi \circ \gamma$ soit homotope à $\tilde{\gamma}$ et $\gamma(0) = g$.

Nous savons que $\bar{\pi}_g : T_g/D_g \to \mathscr{R}$ est un homéomorphisme sur un voisinage $\mathscr{U}_{\tilde{g}}$ de $\tilde{g}$ dans $\mathscr{R}$. De plus par construction $T_{\varphi(g)} = \varphi(T_g)$ pour $\varphi \in D$.

La notation $\mathscr{U}_{\tilde{g}}$ est donc justifiée: l'image de l'homéomorphisme $\bar{\pi}_g$ ne dépend que de $\tilde{g}$.

D'après une propriété classique des applications continues de source compacte, il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ de $[0, 1]$ telle que, pour tout $i = 1, \cdots, k$, il existe $s_i \in]t_{i-1}, t_i[$ tel que $\tilde{\gamma}([t_{i-1}, t_i])$ soit contenu dans $\mathscr{U}_{\tilde{\gamma}(s_i)}$.

La preuve de l'existence du relèvement va se faire par récurrence: supposons qu'il existe un chemin $t \mapsto \gamma_{i-1}(t)$ de $[0, t_{i-1}]$ dans $\mathscr{M}$ tel que $\gamma_{i-1}(0) = g$ et $\pi \circ \gamma_{i-1}$ soit homotope à $\tilde{\gamma}|_{[0, t_{i-1}]}$. Montrons qu'alors γ_{i-1} se prolonge en $\gamma_i : [0, t_i] \to \mathscr{M}$ tel que $\pi \circ \gamma_i$ soit homotope à $\tilde{\gamma}|_{[0, t_i]}$. Pour cela soit $g_i \in \pi^{-1}(\tilde{\gamma}(t_i))$ une métrique telle que $\gamma(t_{i-1})$ appartienne à T_{g_i}. Comme T_{g_i} est homéomorphe à un voisinage convexe de 0 dans un espace de Fréchet, il existe un chemin $\sigma : [t_{i-1}, t_i] \to T_{g_i}$ tel que $\sigma(t_{i-1}) = \gamma_{i-1}(t_{i-1})$ et $\pi \circ \sigma(t_i) = \tilde{\gamma}(t_i)$. Nous définissons $\gamma_i : [0, t_i] \to \mathscr{M}$ en mettant bout à bout γ_{i-1} et σ.

Alors γ_i satisfait la condition de récurrence. En effet $\pi \circ \sigma$ est homotope à $\tilde{\gamma}|_{[t_{i-1}, t_i]}$, car ces deux chemins sont dans $\mathscr{U}_{\tilde{\gamma}(s_i)}$ qui est contractile ($\mathscr{U}_{\tilde{\gamma}(s_i)}$ est homéomorphe à $\mathscr{T}_{g_i}/D_{g_i}$ quotient d'un ensemble convexe par un groupe de transformations linéaires). ∎

3. *Relèvement des disques de $\mathscr{R}$*[1]

VII.7. Si nous nous intéressons à prouver une propriété analogue à

[1] Ce paragraphe est une reprise de [7] § 4.

VII.6 pour le relèvement des disques nous sommes amenés à donner la définition suivante:

VII.8. DÉFINITION: *Soit* $p : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ *une application continue entre espaces connexes et localement connexes par arcs. p est dit avoir la propriété faible de relèvements des i-cubes* (*en abrégé P.F.R.* (*i*)) *si pour tout couple d'applications continues* (f, F)

$$f : I^{i-1} \times \{0\} \to \mathscr{V},$$
$$F : I^i \to \mathscr{W}, \qquad \textit{vérifiant}$$

(i) $p \circ f = F \circ j$ (*j désigne l'inclusion* $I^{i-1} \times \{0\} \to I^i$),
(ii) $p \circ f(I^{i-1} \times \{0\}) = F(\partial I^i)$,
dit couple admissible, il existe une application continue $\varphi : I^i \to X$ *telle que*:
(α) $p \circ \varphi|_{\partial I^i} = F|_{\partial I^i}$,
(β) $\varphi|_{I^{i-1} \times \{0\}} = f$,
(γ) $p \circ \varphi$ *est homotope à* F.

VII.9. PROPOSITION: *Si* $p : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ *vérifie P.F.R.* (*i*) *et P.F.R.* $(i+1)$, *alors on peut définir un homomorphisme de connexion pour tout* $w \in \mathscr{W}$ *et* $v \in p^{-1}(w)$,

$$\partial_i : \pi_i(\mathscr{W}, w) \to \pi_{i-1}(p^{-1}(w), v)$$

et le tronçon de suite (*j désigne ici l'inclusion de* $p^{-1}(w)$ *dans* $\mathscr{V}$)

$$\pi_i(p^{-1}(w), v) \xrightarrow{\pi_i(j)} \pi_i(\mathscr{V}, v) \xrightarrow{\pi_i(p)} \pi_i(\mathscr{W}, w) \xrightarrow{\partial_i} \pi_{i-1}(p^{-1}(w), v) ---$$
$$--- \xrightarrow{\pi_{i-1}(j)} \pi_{i-1}(\mathscr{V}, v) \xrightarrow{\pi_{i-1}(p)} \pi_{i-1}(\mathscr{W}, w)$$

est exact.

La démonstration, calquée sur le cas classique, est laissée au lecteur. ■

VII.10. REMARQUES:
(i) La proposition est vraie aussi dans le cas où $i = 1$, la suite exacte s'arrête alors à $\pi_0(\mathscr{V}, v) = 0$ puisque $\mathscr{V}$ est connexe.
(ii) P.F.R. (1) signifie seulement que dans toute classe d'homotopie de lacets en v, il y en a au moins un qui se relève, propriété que nous avons prouvée en VII.6 pour $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{R}$.

VII.11. PROPOSITION: *Supposons* $\dim M \geqq 2$. *Alors ou M n'admet l'action d'aucun groupe non trivial ou* π *ne vérifie pas simultanément P.F.R.* (2) *et P.F.R.* (3).

Supposons que π vérifie P.F.R. (2).

D'après VII.9 comme π vérifie P.F.R. (1), nous pouvons écrire le tronçon de suite exacte

$$\pi_1(\pi^{-1}(\tilde{g}), g) \to \pi_1(\mathcal{M}, g) \to \pi_1(\mathcal{R}, \tilde{g}) \to \pi_0(\pi^{-1}(\tilde{g}), g) \to 0.$$

$\mathcal{M}$ étant contractile, $\pi_1(\mathcal{M}, g) = 0$.

De plus $\pi^{-1}(\tilde{g}) \simeq {}_{D_g}\backslash D$ et le point-base g est associé par cet homéomorphisme à D_g.

Donc quel que soit $\tilde{g} \in \mathcal{R}$ nous avons un isomorphisme de $\pi_1(\mathcal{R}, \tilde{g})$ sur $\pi_0({}_{D_g}\backslash D, D_g)$.

Puisque dim $M \geqq 2$, nous savons d'après VI.9 que $\mathcal{M}_{\mathrm{Id}}$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}$. Soit $g_0 \in \mathcal{M}_{\mathrm{Id}}$ et $\tilde{g}_0 = \pi(g_0)$. Comme $\mathcal{R}$ est connexe et localement connexe par arcs,

$$\pi_1(\mathcal{R}, \tilde{g}) \simeq \pi_1(\mathcal{R}, \tilde{g}_0),$$

un isomorphisme pouvant être construit ainsi: on prend un chemin $\tilde{c}$ de $\tilde{g}_0$ à $\tilde{g}$ supposé relevable par π (il en existe toujours d'après une variante de VII.6) et à tout lacet γ en $\tilde{g}$ on associe le lacet en $\tilde{g}_0\, c^{-1} \circ \gamma \circ c$.

Interprétons l'isomorphisme de $\pi_0(D, \mathrm{Id}_M)$ sur $\pi_0({}_{D_g}\backslash D, D_g)$ déduit du précédent et des isomorphismes de $\pi_1(\mathcal{R}, \tilde{g})$ avec $\pi_0({}_{D_g}\backslash D, D_g)$ déjà établis. Soit g l'extrémité dans $\pi^{-1}(\tilde{g})$ du relèvement de $\tilde{c}$ issu de g_0. L'application de $\pi_0(D, \mathrm{Id}_M)$ sur $\pi_0({}_{D_g}\backslash D, D_g)$ déduite de $\tilde{c}$ consiste, étant donné $a \in \pi_0(D)$ et $\varphi \in a$, à associer à a la classe de φ dans $\pi_0({}_{D_g}\backslash D)$, puisque l'on peut prendre comme relèvement de $\tilde{c}$ issu de $\varphi(g_0)$ le chemin $\varphi(c)$.

Mais $p_g : D \to {}_{D_g}\backslash D$ est un espace fibré pour lequel nous pouvons écrire la suite exacte d'homotopie

$$\cdots \to \pi_0(D_g) \xrightarrow{\pi_0(i_g)} \pi_0(D) \xrightarrow{\pi_0(p_g)} \pi_0({}_{D_g}\backslash D) \to 0.$$

Or nous venons de voir que l'isomorphisme de $\pi_0(D, \mathrm{Id}_M)$ sur $\pi_0({}_{D_g}\backslash D, D_g)$ n'était autre que $\pi_0(p_g)$. $\pi_0(i_g)$ doit donc être l'application nulle. D'où

VII.12. PROPOSITION: *Si M admet une métrique ayant une isométrie non isotope à l'identité, π ne vérifie pas P.F.R.* (2).

Cette proposition, compte-tenu de III.6, peut prendre la formulation équivalente suivante,

VII.13. PROPOSITION: *Si M a une racine de l'identité non isotope à l'identité, alors π ne vérifie pas P.F.R.* (2).

VII.14. *Suite de la preuve de la proposition* VII.11

Supposons maintenant qu'en outre π vérifie P.F.R. (3). D'après la proposition VII.9, nous pouvons écrire le tronçon de suite exacte

$$\pi_2(\pi^{-1}(\tilde{g}), g) \to \pi_2(\mathscr{M}, g) \to \pi_2(\mathscr{R}, \tilde{g}) \to \pi_1(\pi^{-1}(\tilde{g}), g) \to \pi_1(\mathscr{M}, g) --- \\ --- \to \pi_1(\mathscr{R}, \tilde{g}).$$

$\mathscr{M}$ étant contractile, $\pi_2(\mathscr{M}, g) = 0$. On prouve comme précédemment que pour tout $\tilde{g} \in \mathscr{R}$ on a un isomorphisme de $\pi_2(\mathscr{R}, \tilde{g})$ sur $\pi_1({}_{D_g}\backslash D, D_g)$.

De la même façon qu'auparavant si on considère $g_0 \in \mathscr{M}_{\mathrm{Id}}$, on déduit de l'isomorphisme de $\pi_2(\mathscr{R}, \tilde{g})$ sur $\pi_1({}_{D_g}\backslash D, D_g)$ un isomorphisme de $\pi_1(D, \mathrm{Id}_M)$ sur $\pi_1({}_{D_g}\backslash D, D_g)$ en interprétant l'isomorphisme de $\pi_1(\pi^{-1}(\tilde{g}), g)$ sur $\pi_1(\pi^{-1}(\tilde{g}_0), g_0)$ obtenu par composition avec le lacet $\tilde{c}$.

En examinant à nouveau la construction, on voit que cet isomorphisme est $\pi_1(p_g)$. Donc dans la suite exacte d'homotopie du fibré $p_g : D \to {}_{D_g}\backslash D$ considérée dans son tronçon

$$\pi_1(D_g) \to \pi_1(D) \xrightarrow{\pi_1(p_g)} \pi_1({}_{D_g}\backslash D) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(D_g) \to 0,$$

l'homomorphisme de connexion est aussi nul et d'après l'exactitude et ce que nous avons établi auparavant, $\pi_0(D_g) = 0$ pour toute métrique g. Or si G est un sous-groupe compact de D, non trivial, il admet des sous-groupes finis non triviaux qui seront d'après le corollaire III.25 groupe des isométries d'au moins une métrique, d'où une contradiction. ■

VIII. Etude de l'application courbure scalaire

1. *L'application courbure scalaire*

VIII.1. Il est classique qu'à toute métrique g sur une variété M de dimension au moins deux, on associe une fonction sur M dite courbure scalaire notée $\tau(g)$, qui dans le cas de dimension deux est la courbure gaussienne et dans les dimensions supérieures est une moyenne sur la grasmanienne des deux-plans de la courbure sectionnelle (elle-même l'analogue de la courbure de Gauss pour un deux-plan).

On peut aussi partir du tenseur de courbure R associé à la métrique, qui est une section du fibré $\otimes^3 T^*M \otimes TM \to M$; la courbure de Ricci notée ρ, qui est une section du fibré $O^2 T^*M \to M$, s'obtient en prenant la trace de R (au signe près, il n'y a qu'une possibilité non triviale); la courbure scalaire est alors la trace de la courbure de Ricci (prise par rapport à la métrique g).

VIII.2. L'application qui à g associe $\tau(g)$ est un opérateur différentiel quasi-linéaire d'ordre deux de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{F}(M)$ espace vectoriel des fonctions sur M, qui, en coordonnées locales sur M normales en $m \in M$, admet l'expression suivante

$$[\tau(g)](m) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x^j \partial x^j} \right).$$

L'extension de τ à $\mathscr{M}^s$ sera encore notée τ.

VIII.3. Lorsque à partir d'une métrique g, nous considérons une variation de métriques $g(t)$ C^1 au voisinage de 0, $d\tau(g(t))/dt|_{t=0}$ est un opérateur différentiel linéaire de $T_g\mathscr{M} = C^\infty(0^2 T^*M)$ dans $\mathscr{F}(M)$ que nous noterons τ'_g. τ'_g s'exprime à partir d'opérateurs classiques (cf. [2] page 385)

$$\tau'_g(h) = \delta_g \delta'_g h + \Delta_g \operatorname{Trace}_g h - g(\rho(g), h)$$

où δ_g est l'adjoint de d pour le produit scalaire $L^2(v_g)$ sur les fonctions de M encore nommé codifférentielle et $\Delta_g = \delta_g d$ le laplacien sur les fonctions.

VIII.4. Proposition: *La variation première de la courbure scalaire pour la variation $g + t\rho(g)$ où $\rho(g)$ est la courbure de Ricci de g est*:

$$\tau'_g(\rho(g)) = -g(\rho(g), \rho(g)) + \tfrac{1}{2}\Delta_g[\tau(g)].$$

Pour prouver la proposition il suffit de remarquer que

VIII.5. $$\delta'_g \rho(g) = -\tfrac{1}{2} d[\tau(g)]$$

qui est l'expression avec nos notations de la seconde identité de Bianchi où nous avons fait deux contractions pour faire apparaître δ'_g et la courbure de Ricci. D'où

$$\tau'_g(\rho(g)) = -\tfrac{1}{2}\delta_g d[\tau(g)] + \Delta_g[\tau(g)] - g(\rho(g), \rho(g))$$

soit après simplification la formule cherchée. ■

VIII.6. Remarque: Soit M une variété admettant une structure spinorielle (il faut et il suffit que sa deuxième classe de Stiefel-Whitney soit nulle) dont le $\hat{A}$-genre est non nul (cf. [19]). Alors toute métrique à courbure scalaire nulle sur M est en fait à courbure de Ricci nulle (pour une autre preuve voir [17]).

En effet les variétés M décrites précédemment sont connues pour ne pas admettre de métriques à courbure scalaire positive ou nulle non identiquement nulles.

Soit g_0 une métrique sur M telle que $\tau(g_0) = 0$.

D'après la proposition VIII.4, si nous varions g_0 par $g(t) = g_0 - t\rho(g_0)$, alors

$$\tau'_{g0}(\rho(g_0)) = g(\rho(g_0), \rho(g_0))$$

ce qui accroît la courbure scalaire en tous les points où la courbure de Ricci n'est pas nulle.

Ceci ne suffit pas exactement pour conclure puisque la dérivée seconde de $\tau(g_0)$ peut être négative aux points où $\rho(g_0)$ est nul, déterminant en ces points le comportement de $\tau(g_0)$. Mais en considérant la dérivée de la formule (9) de [19] et la valeur de $\tau'_g(\rho(g_0))$, on peut conclure.

2. *$\tau : \mathscr{M} \to \mathscr{F}(M)$ est une submersion*

VIII.7. Le prochain théorème est une version générale d'un théorème dû dans le cas où $\tau(g) \leqq 0$ non identiquement nulle à A. Fischer et J. Marsden (cf. [14]). Pour une utilisation de la proposition, voir [17].

VIII.8. PROPOSITION: *$\tau : \mathscr{M} \to \mathscr{F}(M)$ est une submersion I.L.H. sauf aux métriques g où $\tau(g)$ est une constante non négative.*

Nous allons prouver que $T_g\mathscr{M} = \operatorname{Ker} \tau'_g \oplus \operatorname{Im} \tau'^*_g$ et que $T_{\tau(g)}\mathscr{F}(M) = \operatorname{Im} \tau_g$ dès que $\tau(g)$ n'est pas une constante non négative. Pour cela d'après [2] page 383, il suffit de prouver que τ'^*_g adjoint de τ'_g pour les produits scalaires L_2 sur les tenseurs symétriques et les fonctions est injectif à symbole injectif, car alors $\tau'_g\tau'^*$ est elliptique sans noyau.

Evaluons τ'^*_g : pour $f \in \mathscr{F}$ $\quad \tau'^*_g(f) = (\Delta_g f)g + \delta^*_g df - f\rho(g)$.

VIII.9. LEMME: *τ'^*_g est injectif dès que $\tau(g)$ n'est pas une constante non négative.*

Supposons que l'on trouve une fonction f non identiquement nulle telle que

$$\tau'^*_g(f) = 0.$$

Appliquons δ'_g à l'équation obtenue. Par un calcul direct, nous trouvons

$$\text{VIII.10.} \qquad -d\delta_g df + \delta'_g\delta^*_g df + \rho(g) \underset{\smile}{\otimes} df - f\delta'_g\rho(g) = 0,$$

où $\underset{\smile}{\otimes}$ désigne le produit tensoriel contracté.

Or nous avons prouvé (cf. [6]) que pour toute 1-forme ξ

$$(d\delta_g + \tfrac{1}{2}\delta_g d)\xi - \delta'_g\delta^*_g\xi = \rho(g) \underset{\smile}{\otimes} \xi$$

(ce n'est qu'une forme particulièrement adaptée à notre problème de l'identité de Ricci).

Si nous reportons cette formule dans VIII.10, nous trouvons que:

$$f\delta'_g \rho(g) = 0.$$

Or comme nous avons vu en VIII.5 que $\delta'_g \rho(g) = -\frac{1}{2} d\tau(g)$, la relation à laquelle nous aboutissons est

VIII.11. $$f\, d\tau(g) = 0.$$

Si nous prenons la trace de l'équation: $\tau'^*_g(f) = 0$, nous trouvons $(n-1)\Delta_g f = \tau(g) f$ ($n = \dim M$), relation qui permet de transformer la relation VIII.11 en

VIII.12. $$\delta^*_g df = f\left(\rho(g) - \frac{\tau(g)}{n-1} g\right).$$

Remarquons alors que si $f^{-1}(0)$ a un intérieur non vide, f est nulle partout ce qui est contraire à l'hypothèse; en effet si m est intérieur à à $f^{-1}(0)$, le long de toute géodésique c issue de m f satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$f'' = f\left[\rho(g)(\dot{c}, \dot{c}) - \frac{\tau(g)}{n-1}\right]$$

avec des conditions initiales en m nulles, donc f est nulle. Les géodésiques issues de m recouvrant M, f serait nulle partout.

Donc le complémentaire de $f^{-1}(0)$ dans M est un ouvert dense et nous déduisons de VIII.11 que $d\tau(g) = 0$ partout, d'où le lemme, car si la valeur constante de $\tau(g)$ était négative, le laplacien sur les fonctions aurait une valeur propre négative, ce qui n'est pas possible. ■

VIII.13. *Suite de la preuve de la proposition* VIII.8

Il nous reste à vérifier que τ'^*_g a un symbole injectif, ce qui est facile, car pour $\xi \in T^*M$, $f \in \mathscr{F}$,

$$\sigma_\xi(\tau'^*_g) \cdot f = (-g(\xi, \xi) g + \xi \otimes \xi) f$$

qui est clairement injectif dès que $n > 1$. ■

3. *Lien entre les stratifications de $\mathscr{M}$ et de $\mathscr{F}(M)$*

VIII.14. $\mathscr{F}(M)$ possède une stratification naturelle, dite stratification de Whitney, particulièrement bien adaptée à l'action de $D \times D(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{F}(M)$ (cf. [8]). Les fonctions de Morse excellentes (i.e. celles qui n'ont pas de valeurs critiques égales) forment la strate de codimension 0 qui est un ouvert dense; ces fonctions sont stables par l'action de $D \times D(\mathbb{R})$, autrement dit l'orbite d'une telle fonction f contient un voisinage de f. Les fonctions avec un seul point critique dégénéré par l'introduction d'une coordonnée au cube ou avec deux valeurs critiques égales forment la strate de codimension 1: l'orbite de telles fonctions par $D \times D(\mathbb{R})$ est une sous-variété de codimension 1 de $\mathscr{F}(M)$. Les autres strates ont une définition analogue.

VIII.15. La remarque de base est que τ commute à l'action de D sur $\mathscr{M}$ et sur $\mathscr{F}(M)$, i.e. pour $\varphi \in D$, $g \in \mathscr{M}$,

$$\tau(\varphi(g)) = \varphi(\tau(g)).$$

Mais contrairement à ce qui se passe pour les métriques, il y a des fonctions de Morse excellentes, donc appartenant à la strate de codimension 0 qui admettent des groupes compacts de difféomorphismes d'invariance: par exemple la fonction hauteur du plongement canonique de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$ admet $0(n)$ comme groupe compact d'invariance. Ainsi les deux stratifications ne sont pas envoyées strates dans strates par l'application τ; la courbure scalaire ne contient pas assez d'information géométrique pour nous assurer qu'un difféomorphisme qui la laisse invariante est une isométrie.

REFERENCES

[1] M. Berger: Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive. *Ann. Scuola Norm. Sup. da Pisa 3ème série, vol. 15* (1961) 179–246.

[2] M. Berger and D. G. Ebin: Some decompositions of the space of symmetric tensors on a manifold. *J. of Diff. Geom. vol. 3, No 3* (Sept. 1969) 379–392.

[3] N. Bourbaki: *Topologie générale, livre III*, ch. I. Hermann.

[4] N. Bourbaki: *Variétés différentielles et analytiques, § 1–7*, fascicule de résultats. Hermann.

[5] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie*, ch. 2 et 3. Hermann.

[6] J. P. Bourguignon: Sur le vecteur de courbure d'une variété riemannienne compacte. *Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272* (1971) 736–739.

[7] J. P. Bourguignon et E. Mazet: *Sur le problème de riemanniennisation des fibrations différentiables*. Preprint (1972).

[8] J. Cerf: Stratification naturelle des espaces de fonctions C^∞. *Publ. Math. de l'I.H.E.S., 39* (1970).

[9] P. E. Conner, F. Raymond and P. J. Weinberger: Manifolds with no periodic maps, *Proc. of the 2nd Conference on Compact Transformation Groups II*, Amherst, (1971), Lect. Notes in Math. No 299.

[10] D. G. Ebin: The space of riemannian metrics. *Proc. of the A.M.S. Symposia in Pure Math., vol. XV*, Global Analysis, Berkeley (1968) 11–40.

[11] D. G. Ebin: *Espace des métriques et mouvement des fluides via les variétés d'applications* (1971), Publication du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

[12] D. G. Ebin and J. Marsden: Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible perfect fluid. *Annals of Math. vol. 92, No. 1* (1970) 102–163.

[13] A. E. Fischer: The theory of superspace, in *Relativity*, édité par Carmeli, Fickler, Witten, Plenum Press (1970) p. 303–355.

[14] A. E. Fischer and J. Marsden: *Submanifolds of riemannian metrics with prescribed scalar curvature*. Preprint Berkeley (1973).

[15] W. V. Hsiang and W. Y. Hsiang: Differentiable actions of compact connected classical groups I. *Amer. J. of Math. 89* (1967) 705–786.

[16] K. Jänich: *Differenzierbare G. Mannigfaltigkeiten*. Lect. Notes in Math. No 59 (1968).

[17] J.Kazdan and F. Warner: Prescribing curvatures. *Proc. of the A.M.S. Symposia in Pure Math. Differential Geometry*, Stanford (1973).

[18] S. Kobayashi and N. Nomizu: *Foundations of differential geometry*. Interscience.

[19] A. Lichnerowicz: Spineurs harmoniques. *Note aux. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257* (1963) 7–9.

[20] S. B. Myers and N. Steenrod: The group of isometries of a riemannian manifold. *Ann. of Math. 40* (1939) 400–456.

[21] H. Omori: On the group of diffeomorphisms on a compact manifold. *Proc. of the A.M.S. Symposia in Pure Math.* Global Analysis, Berkeley (1968) 167–183.

[22] H. Omori: Groups of diffeomorphisms and their subgroups. *Trans. A.M.S., vol. 179* (1973 85–122.

[23] R. S. Palais: Equivalence of nearby differentiable actions of a compact group. *Bull. A.M.S. 67* (1961) 362–364.

(Oblatum 19–IV–1974)

Centre de Mathématiques de
l'Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75230 Paris Cedex 05, France