Compositio Mathematica

HARALD RINDLER

Gleichverteilte folgen von operatoren

Compositio Mathematica, tome 29, n° 2 (1974), p. 201-211
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1974__29_2_201_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 29, Fasc. 1, 1974, pag. 201–212
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

GLEICHVERTEILTE FOLGEN VON OPERATOREN

Harald Rindler

Einleitung

Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit linkem Haarmaß dx. Für $f \in L^1(G)$ sei $\|f\|_1 = \int |f(x)| \mathrm{d}x$; der Linkstranslationsoperator L_y, $y \in G$ ist definiert durch $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$, $f \in L^1(G)$, $x \in G$. L_y ist ein isometrischer Operator. In [20] wurde folgender Gleichverteilungsbegriff eingeführt.

DEFINITION 1: Eine Folge (a_n) in G heißt $L^1(G)$-gleichverteilt, wenn für alle $f \in L^1(G)$ mit $\int f(x) \mathrm{d}x = 0$

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \right\|_1 = 0 \text{ gilt.}$$

Auf kompakten Gruppen stimmt der Begriff der $L^1(G)$-Gleichverteilung mit dem klassischen Gleichverteilungsbegriff überein. (s. [20], Theorem 1, bzw. [2]). Gibt es $L^1(G)$-gleichverteilte Folgen, dann ist G mittelbar. (s. [20]; [17], Ch. 8, § 4.5, Ch. 8, § 3.1, § 6.5). Wir zeigen:

THEOREM 1: *Ist G eine lokalkompakte mittelbare Gruppe, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dann gibt es $L^1(G)$-gleichverteilte Folgen.*

THEOREM 2: *Sei U eine stark stetige Darstellung von G durch isometrische Operatoren auf einem reflexiven Banachraum B, P die Projektion auf dem Teilraum von $B = \{b \in B, U(g)b = b$ für alle $b \in B\}$, dann gilt für jede $L^1(G)$-gleichverteilte Folge (a_n)*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U(a_n) = P$$

(in der starken Operatortopologie).

KOROLLAR 1: *Ist B ein Hilbertraum, U außerdem eine irreduzible nichttriviale unitäre Darstellung, dann gilt*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U(a_n) = 0.$$

Korollar 2: *Ist (a_n) $L^1(G)$-gleichverteilt, dann gilt für jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung D von G ungleich der trivialen*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} D(a_n) = 0$$

d.h. $\varphi(a_n)$ ist gleichverteilt in G_B, der Bohrkompaktifizierung von G, ($\varphi: G \to G_B$, sei der 'Bohrhomomorphismus').

Bemerkung 1: Betrachtet man in Theorem 2 speziell den Fall $G = Z$ der diskreten Gruppe der ganzen Zahlen; sei U ein beliebiger unitärer Operator auf einem Hilbertraum H, dann definiert $z \to U^z$ eine unitäre Darstellung von G; aus der trivialen Tatsache, daß die Folge $(a_n) = n$ $L^1(Z)$-gleichverteilt ist, folgt dann, daß

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^n = P$$

gilt, der mittlere Ergodensatz von Neumann's.

Bemerkung 2: Für Spezialfälle wurde Korollar 2 schon in [20] gezeigt. Aus dem Korollar folgt die Existenz von gleichverteilten Folgen in allen kompakten Gruppen, die sich als Bohrkompaktifizierung mittelbarer Gruppen mit abzählbarer Basis darstellen lassen. Diese Gruppen ([9] VII) sind bekanntlich nie metrisch, wenn nicht G selbst schon kompakt ist. Die Existenz glv. Folgen in metrischen kompakten Gruppen folgt bekanntlich aus dem individuellen Ergodensatz [10], der nicht metrische Fall is komplizierter und es gelten keine analogen Resultate (s. z.B. [15]). Von speziellem Interesse ist die Bohrkompaktifizierung, falls G maximal-fast periodisch ist (z.B. abelsch, kompakt, [9], VII) dann läßt sich G als dichte Teilmenge von G_B auffassen. Jede $L^1(G)$-glv. Folge ist dann glv. in G_B und somit $L^1(G_B)$-glv., da G_B kompakt ist. Die Umkehrung ist aber z.B. für $G = R$ falsch ([21], Th. 3, z.B. $(a_n) = (n^x)$, $x > 1$ nicht ganz).

Aus Korollar 2 folgt für kompakte Gruppen, daß jede $L^1(G)$-glv. Folge gleichverteilt im üblichen Sinn ist auf Grund des verallgemeinerten Weyl'schen Kriteriums (s. [10]).

Für abelsche Gruppen ergibt sich, daß jede $L^1(G)$-glv. Folge, glv. im Sinne von Hartman ist (s. [6]); ebenso im Sinne von Rubel (s. [1], [22]). Keine Relation besteht mit der Theorie der Relativen Gleichverteilung im nicht kompakten Fall ([4], [7]). Gemeinsam mit Theorem 1 ergeben sich daraus für mittelbare Gruppen mit abzählbarer Basis (jede abelsche Gruppe ist mittelbar, [17] Ch. 8, 3.3) neue Existenzbeweise solcher Folgen.

Ist G nicht notwendig mittelbar, dann gilt noch

THEOREM 3: *Sei G eine lokalkompakte Gruppe, U eine stark stetige Darstellung, von G durch Operatoren auf einem reflexiven separablen Banachraum, B für alle* $b \in B$, $b \neq 0$ *gibt es ein* $U(g)$ *mit* $U(g)b \neq b$, *dann gibt es eine Folge* (a_n) *in G mit*

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U(a_n)b = 0 \qquad \text{für alle } b \in B.$$

BEMERKUNG 1: Im Gegensatz von Theorem 1 läßt Theorem 3 keine analoge Verallgemeinerung der Problemstellungen auf topologische Halbgruppen zu. (Siehe z.B. [5], Seite 85, sowie [19] für weitere Verallgemeinerungen.)

BEMERKUNG 2: Aus Th. 3 folgt nicht die Existenz einer Folge (a_n), sodaß Theorem 3 gleichzeitig für alle Darstellungen gilt, auch im Falle, daß G abzählbare Basis hat. Für abzählbar viele Darstellungen läßt sich dies natürlich gleichzeitig erreichen, da die direkte Summe der Hilberträume dann wieder separabel ist. Zur Illustration der Problemstellung sei folgendes erwähnt: Ist $G = R$ die Gruppe der reellen Zahlen, dann erfüllt die linksreguläre Darstellung von R auf $L^2(R)$ $y \to L_y$ die Voraussetzungen von Th. 3., ferner ist die Darstellung direktes Integral aller irreduziblen (eindimensionalen) Darstellungen (Satz von Plancherel), man kann aber sogar eine Folge (a_n) finden mit

$$\lim \left\| \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} L_{a_n} f \right\|_2 = 0 \qquad \text{für alle f} \in L^2(R)$$

und

$$\limsup_{N \to \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{iya_n} \right| = 1 \qquad \text{für alle } y \in R.$$

Der Begriff der $L^1(G)$-Gleichverteilung läßt sich u.a. auf gewisse Banachalgebren, nämlich Segal-Algebren ausdehnen.

Eine Segal-Algebra $S^1(G)$ ist ein dichter linearer Teilraum von $L^1(G)$ mit einer Norm $\|\cdot\|_s \geqq \|\cdot\|_1$, $f \in S^1(G)$, $y \in G \Rightarrow L_y f \in S^1(G)$, $\|L_y f\|_s = \|f\|_s$ und $y \to L_y$ ist stark stetig. $S^1(G)$ ist eine Algebra bezüglich der Faltung$*$ ([18], § 4, Seite 17). Analog wie in Definition 1 ergibt sich der Begriff der $S^1(G)$-gleichverteilten Folge. Beispiele von Segal-Algebren sind, $L^p(G)$, $1 \leqq p < \infty$, $C(G)$ der Raum der stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm im kompakten, sowie $L^1(G) \cap L^p(G)$, $\|f\|_s = \|f\|_1 + \|f\|_p$ im nicht kompakten Fall. (weitere Beispiele siehe [18], § 5). Jede Segalalgebra hat linke approximierende Einheiten, d.h. für alle $f \in S^1(G)$ und für $\forall \varepsilon > 0$ gibt es ein $u \in S^1(G)$ mit $\|u * f - f\|_s < \varepsilon$.

Wir wollen nun stets voraussetzen, daß $S^1(G)$ auch rechte approximierende Einheiten hat. Symmetrische und pseudosymmetrische Segalalgebren (s. [18], Seite 17) haben diese Eigenschaft, insbesondere jede Segal-algebra $S^1(G)$ mit G abelsch dasselbe gilt auch für den kompakten Fall. ([12]).

THEOREM 4: *$S^1(G)$ habe rechte approximierende Einheiten, dann gilt: Eine Folge (a_n) ist genau dann $S^1(G)$-glv. wenn sie $L^1(G)$-glv. ist.*

Wählt man $S^1(G) = C(G)$, falls G kompakt ist, so erhält man daraus einen neuen Beweis der Tatsache, daß die Gleichverteilungsbegriffe auf kompakten Gruppen übereinstimmen. Im Gegensatz zu dem in [21] benützt der Beweis nicht die zusätzliche Hypothese, daß G separabel sein soll, die für die übliche Glv. klarerweise erforderlich ist, für die $L^1(G)$-Gleichverteilung nicht a priori folgt, da $L^1(G)$-glv. Folgen (a_n) i.a. nicht dicht sein müssen. Doch ist leicht zu zeigen, daß G abzählbar kompakt sein muß (die von $\{a_n\} \cup V$, V eine kompakte Umgebung des neutralen Elements erzeugte Untergruppe, stimmt mit G überein). Ist G abelsch, dann folgt aus Korollar 2 und [1] Prop. 2.4. daß G notwendigerweise separabel sein muß.

Für G kompakt, $S^1(G) = C(G)$ wurde Th. 4 bereits in [23] gezeigt und auf den Fall der gleichmäßigen Gleichverteilung übertragen, den wir hier verallgemeinern.

DEFINITION 2: Sei G kompakt, dann heißt eine Folge (a_n) glm.glv., wenn

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_k \frac{1}{N} \left|\sum_{n=1}^{N} f(a_{n+k})\right|\right) = 0 \qquad \text{für alle } f \in C(G)$$

mit $\int f(x)\mathrm{d}x = 0$ gilt.

Aus dieser mit der üblichen klarerweise äquivalenten Definition ergibt sich in natürlicher Weise

DEFINITION 3: Eine Folge (a_n) heißt $S^1(G)$-glm. glv., wenn

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_k \left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} L_{a_{n+k}} f\right\|_s\right) = 0 \qquad \text{für alle } f \in S^1(G), \text{ mit}$$

$\int f(x)\mathrm{d}x = 0$ gilt

THEOREM 5: *Eine Folge (a_n) ist $S^1(G)$-glm.glv. genau dann wenn sie $L^1(G)$-glm. glv. ist. ($S^1(G)$ habe rechte a. Einheiten).*

KOROLLAR: *Für kompakte Gruppen ist die Folge (a_n) genau dann glm. glv. wenn sie $L^1(G)$-glm. glv. ist.*

BEMERKUNG: Die Beweismethode in [21] für den gleichverteilten Fall liefert dieses Resultat nicht. Die Existenz glm. glv. Folgen läßt sich nicht mit den in Theorem 1 verwendeten Methoden zeigen. Ist G nicht kompakt ist $L^2(G)$ keine Segal-Algebra, wie man leicht verifiziert. $L^2(G)$ ist ein separabler Hilbertraum, daher gibt es stets $L^2(G)$-glv. Folgen. (Definition analog Def. 1). Die Existenzfrage ist jedoch trivial (G muß nicht einmal separabel sein), ferner ist jede $L^1(G)$-glv. Folge $L^2(G)$-glv. (Th. 3). Ist G abelsch, dann gilt:

THEOREM 6: *Eine Folge (a_n) in einer abelschen Gruppe G mit abzählbarer Basis ist genau dann $L^2(G)$-glv., wenn zu jeder Indexfolge N_j, eine Teilfolge N_{j_i} existiert mit*

$$\lim_i \frac{1}{N_{j_i}} \sum_{1 \leqq n \leqq N_{j_i}} h(a_n) = 0 \qquad \textit{für fast alle } h \in \hat{G},$$

$h \neq h_0$, dem trivialen Charakter.

BEMERKUNG: Ist G kompakt, metrisch, dann ist die Restriktion 'fast alle' überflüssig, außerdem die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße folgenkompakt und es ergibt sich ein anderer Beweis, daß jede $L^2(G)$-glv. Folge glv. ist (Th. 4). Für G, den 1-dimensionale Torus wurde dies bereits in [11] gezeigt.

Schließlich zeigen wir noch

THEOREM 7: *Eine reelle Folge (a_n) mit $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)n = \infty$ ist $L^2(R)$-gleichverteilt.*

Beweise

BEMERKUNG: Wir setzen $L_0(G) = \{f, f \in L^1(G), \int f(x)\mathrm{d}x = 0\}$.

(1) BEWEIS VON THEOREM 1: Da G das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist $L_0(G)$ separabel.

Sei $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ eine abzählbar dichte Teilmenge von $L_0(G)$. Sei $m \in N$ gegeben; da G mittelbar ist, gibt es einen Operator $L^{(m)} = \sum c_n L_{y_n^{(m)}}$, $c_n > 0$, $\sum c_n = 1$, $y_n^{(m)} \in G$ mit:

$$(1) \qquad \|L^{(m)} f_k\|_1 < \frac{1}{m} \qquad 1 \leqq k \leqq m$$

(siehe [18], § 10, Seite 44, (1), (2)). Man kann o.B.d.A. annehmen, daß $L^{(m)}$ von folgender Form ist:

$$(2) \qquad L^{(m)} = \frac{1}{M_m} \sum_{n=1}^{M_m} L_{z_n^{(m)}}, \quad z_n^{(m)} \in G,\ M_m \text{ eine natürliche Zahl.}$$

Wir wählen Folgen natürlicher Zahlen N_i, K_i derart, daß

$$(3) \qquad N_1 = 1 \quad N_{i+1} - N_i = K_i \cdot M_i \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} \frac{M_i}{N_i} = 0 \text{ gilt.}$$

Sei (a_n) folgendermaßen definiert:

$$(4) \qquad a_n = z_i^{(m)} \qquad \text{für } n = N_m + jM_m + i, \quad j < K_m, \quad i \leqq M_m,$$

dann ist die Folge (a_n) $L^1(G)$-gleichverteilt.

Es genügt dann zu zeigen, daß

$$\lim_N \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f_k \right\|_1 = 0 \qquad \text{für } k = 1, 2, \cdots$$

gilt, dann gilt auch

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \right\|_1 \to 0 \qquad \text{für alle } f \in L_0(G),$$

da die Operatoren

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} = L_N$$

Kontraktionen sind.

Sei also $k \in N$, $\varepsilon > 0$ gegeben; sei $r \geqq k$, $r \in N$ so gewählt, daß $1/r < \varepsilon$ und $M_i/N_i < \varepsilon$ für $i \geqq r$ gilt; sei schließlich $N(\varepsilon) \geqq N_r/\varepsilon$. Für $N \geqq N(\varepsilon)$ gilt dann:

$$(5) \qquad \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f_k \right\|_1 < \varepsilon(2\|f_k\|_1 + 1)$$

Beweis von (5): sei $N_k < N_l + jM_l + i = N$, $j < K_l$, $i \leqq M_l$, dann gilt unter Beachtung von (2) und (4):

$$\|\sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f_k\|_1 \leqq \|\sum_{n=1}^{N_r} L_{a_n} f_k\|_1 + \sum_{m=k}^{l-1} K_m M_m \|L^{(m)} f_k\|_1 + jM_l \|L^{(l)} f_k\|_1$$

$$+ M_l \|f_k\|_1 \leqq N_r \|f_k\|_1 + \sum K_m M_m \frac{1}{m} + jM_l \cdot \frac{1}{l} + M_l \|f_k\|_1$$

$$\leqq N(\varepsilon) \cdot \varepsilon \|f_k\|_1 + \sum_{n=1}^{l-1} K_m M_m \varepsilon + jM_l \varepsilon + \varepsilon N_l \|f_k\|_1$$

$$\leqq \varepsilon N \|f_k\|_1 + N\varepsilon + \varepsilon N \|f_k\|_1 = \varepsilon N(2\|f_k\|_1 + 1)$$

damit ist (5) gezeigt und Theorem 1 bewiesen.

(2) Beweis von Theorem 2: Sei $x \to U_x$ die stark stetige Darstellung auf B, dann wird B zu einem $L^1(G)$-Modul durch

$$f * b = \int f(x) U_x b \, dx, \qquad f \in L^1(G), \quad b \in B$$

(s. [14], § 32). Es gilt nun

Proposition 1: *Sei B ein $L^1(G)$-Modul, U die entsprechende Darstellung von G, dann gilt für jede $L^1(G)$-glv. Folge (a_n)*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U_{a_n} b \right\|_B = 0 \ \textit{für alle}\ b \in L_0(G) * B.$$

Aus den Relationen $L_a f * b = U_a(f * b)$ bzw. $\|f * b\|_B \leqq \|f\|_1 \|b\|_B$ folgt daher

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U_{a_n}(f * b) \right\|_B \leqq \lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \right\|_1 \|b\|_B = 0$$

für alle $f \in L^0_1(G)$, $b \in B$. q.e.d.

Sei X_0 der Teilraum der der Projektion P entspricht, dann gilt nach einem Resultat von Dixmier (s. [5], Th. 3.8.4.) $B = X_0 \oplus X_1$ und $\inf\{\|\sum c_n U_{y_n} b\|_B, c_n > 0 \sum c_n = 1, y_n \in G\} = 0$ für alle $b \in X_1$. Sei nun $b \in X_1$ gegeben $u \in L^1(G)$ gewählt mit $\|u * b - b\|_B < \varepsilon$. (Falls $u \geqq 0$ $\int u = 1$ und der Träger von u in einer genügend kleinen Umgebung des neutralen Elementes enthalten ist folgt dies aus der starken Stetigkeit von U). Sei $L = \sum c_n L_{y_n}$, $c_n > 0 \sum c_n = 1$ gewählt mit $\|Lb\|_B < \varepsilon$, sei nun $g = u - Lu$, dann gilt $g \in L_0(G)$ und $\|g * b - b\|_B = \|(u - Lu) * b - b\|_B \leqq \|u * b - b\|_B + \|Lu * b\|_B < \varepsilon + \|L(u * b - b) + Lb\|_B < \varepsilon + L(u * b - b\|_B + \|Lb\|_B < 3\varepsilon$, da L eine Kontraktion ist. Damit ist gezeigt, daß $L_0(G) * B$ dicht in X_1 ist und Theorem 2 folgt aus Proposition 1, da man zum Abschluß übergehen kann, da die Operatoren $(1/N) \sum_1^N U_{a_n}$ Kontraktionen sind.

Korollar 1 folgt aus der Tatsache, daß für eine irreduzible nichttriviale Darstellung U, $P = 0$ gilt. Korollar 2 ist unmittelbar klar.

(3) Beweis von Theorem 3: Aus Th. 3.8.4b in [5] folgt (aufgrund der Voraussetzungen des Theorems ist $X_0 = 0$), daß

$$\inf\{\|\sum c_n U_{y_n} b\|_B, c_n > 0 \sum c_n = 1, y_n \in G\} = 0 \quad \text{für alle } b \in B \text{ gilt.}$$

Betrachtet man die Produktdarstellung: $g \to (U_g, U_g, \cdots, U_g)$ auf $B^m = B \times B \times \cdots \times B$, $m \geqq 1$, dann erhält man allgemeiner wie in (1) zu jedem $\varepsilon > 0$ und für alle $b_1, b_2, \cdots, b_m \in X_1$ einen Operator $L^{(\varepsilon)}$ mit $\|L^{(\varepsilon)} b_i\| < \varepsilon$, $1 \leqq i \leqq m$ und Theorem 3 folgt analog wie Th. 1.

(4) Beweis von Theorem 4: $y \to L_y$ definiert eine stark stetige Darstellung $S^1(G)$ wird ein (nicht notwendig reflexiver) $L^1(G)$-Modul (s. [18], § 4) aufgrund von Proposition 1 genügt es zu zeigen, daß $L_0(G) * S^1(G)$ dicht in $S_0(G)$ ist. ($S_0(G) = \{f \in S^1(G), \int f = 0\}$). Sei $f \in S_0(G)$, dann gibt es laut Voraussetzung des Theorems zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u \in S^1(G)$ mit $\|f * u - f\|_s < \varepsilon$, $f * u \in L_0(G) * S^1(G)$ und daher ist $L_0(G) * S^1(G)$ dicht in $S_0(G)$. Nach dem Cohen'schen Faktorisationssatz gilt dann sogar: $L_0(G) * S^1(G) = S_0(G)$ da $L_0(G)$ beschränkte approximierende Einheiten hat, da die Existenz einer $L^1(G)$-gleichverteilten Folge impliziert, daß G mittelbar ist, ([21], Prop. 1) und mittelbare Gruppen durch obige Eigenschaft charakterisiert werden können ([16]). Aus Proposition 1 folgt dann Theorem 4 unmittelbar. (Die eine Richtung ist trivial.)

Bemerkung: Aus [16], [18] § 11 Proposition 1, [3] Th. 3a, bzw. [13] ergibt sich ein ähnlicher Beweis der ebenso wie dieser zeigt, daß die Existenz von rechten approximierenden Einheiten eine (formal) zu starke Voraussetzung ist, doch dürfte noch kein Beispiel einer Segal-Algebra ohne rechte approximierende Einheiten bekannt sein.

(5) *Der Beweis von Theorem 5 geht analog.*

Wir zeigen das Korollar.

$C(G)$, der Raum der stetigen Funktionen, ist eine Segal-Algebra (mit rechten a.E., dies ist ein klassisches Resultat); aufgrund von Theorem 5 genügt es daher zu zeigen:

$$(6) \qquad (a_n) \text{ ist glm.glv.} \Leftrightarrow (a_n) \text{ ist } C(G)\text{-glm.glv.}$$

Beweis: '$\Leftarrow$': Es gelte

$$\lim_N \left(\sup_k \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_{n+k}} f \right\|_\infty \right) = 0 \qquad \text{für alle } f \in C_0(G),$$

insbesondere gilt dann

$$\lim_N \left(\sup_k \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_{n+k}} f(e) \right| \right) = 0 \qquad (e = \text{Einheitselement}),$$

d.h. die Folge (a_n^{-1}) ist glm.glv. oder die Folge (a_n) ist glm.glv. ($\int f(x^{-1}) dx = \int f(x) dx$)!)

'$\Rightarrow$': Sei (a_n) glm.glv., $f \in C_0(G)$, $\varepsilon > 0$ gegeben: sei $f_x(y) = f(y^{-1}x)$, dann gilt natürlich $f_x \in C_0(G)$, und wir erhalten

$$(7) \qquad \lim_N \left(\sup_k \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_{n+k}} f_x(e) \right| \right) = 0.$$

Da f stetig, G kompakt ist, ist f fastperiodisch und daher die Menge der

Translaten f_x, $x \in G$ totalbeschränkt; daher folgt aus (7), daß

$$\lim_N \left(\sup_k \left(\sup_{x \in G} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_{n+k}} f_x(e) \right| \right)\right) = \lim_N \left(\sup_k \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_{n+k}} f \right\|_\infty \right) = 0$$

Damit ist das Korollar gezeigt.

(6) Beweis von Theorem 6: Sei $f \in L^1 \cap L^1(G)$, $\int f = 0$. Sei $\hat{G}$ die Charaktergruppe von G, $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte: $\hat{f}(h) = \int_G f(x) \times \overline{h}(x) \mathrm{d}x$ $h \in \hat{G}$ dann folgt aus der Relation $(L_a f)\hat{}(h) = \overline{h(a)} \hat{f}(h)$:

$$\text{(8)} \quad \left(\frac{1}{N} \sum_{1}^{N} L_{a_n} f \right)^{\wedge}(h) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overline{h(a_n)} \hat{f}(h) = g_N(h) \qquad \text{für alle } h \in \hat{G}.$$

Ist die Folge (a_n) gleichverteilt in G_B, folgt aus dem Weyl'schen Kriterium und der Tatsache, daß $\hat{f}(h_0) = \int f = 0$ gilt, daß

$$\text{(9)} \qquad \lim_{N \to \infty} g_N(h) = 0 \qquad \text{für alle } h \in \hat{G} \text{ gilt.}$$

Da $|g_N(h)| \leqq |\hat{f}(h)|$ und $\hat{f} \in L^1 \cap L^2$ gilt $(\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, (Satz von Plancherel), folgt aus dem Satz von Lebesgue über dom. Konvergenz, daß

$$\text{(10)} \qquad \lim_{N \to \infty} \|g_N\|_2 = 0.$$

Der Satz von Plancherel liefert dann wegen (8), daß auch

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \right\|_2 = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Damit ist (ii) gezeigt. Beachtet man, daß analog aus $\lim_k g_{N_k}(h) = 0$ für fast alle $h \in \hat{G}$ folgt, daß auch $\lim_k \|g_{N_k}\|_2 = 0$ gilt, ergibt sich der 'dann'-Teil der Behauptung.

Ist umgekehrt (a_n) L^2-gleichverteilt, $f \in L^1 \cap L^2(G)$, $\hat{f}(h_0) = \int f = 0$ und $\hat{f}(h) \neq 0$ für alle $h \in \hat{G}$, $h \neq h_0$ (G hat abzählbare Basis), dann gilt

$$\text{(11)} \quad \lim_{N \to \infty} \left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \right) \right\|_2 = \lim_{N \to \infty} \left\| \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \right)^{\wedge} \right\|_2$$
$$= \lim_{N \to \infty} \left(\int \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overline{h(a_n)} \hat{f}(h) \right|^2 \mathrm{d}h \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Aus (10) folgt aber für eine passende Teilfolge: $g_{N_j}(h) \to 0$ für fast alle $h \in \hat{G}_j$ und da $\hat{f}(h) \neq 0$ für $h \neq h_0$ erhalten wir wegen (11), daß

$$\lim \frac{1}{N_j} \sum_{1}^{N_j} h(a_n) = 0$$

für fast alle $h \neq h_0$ gilt und der 'nur dann'-Teil folgt unmittelbar.

(7) Beweis von Theorem 7

Beweis: Wir verwenden folgendes einfache, aber nützliche Lemma:

Lemma 1: *Sind* (a_n) *und* (b_n) *monotone reelle Folgen mit*: $(b_{n+1}-b_n) \leqq (a_{n+1}-a_n)$ *und ist* $f = k_I$, *die charakteristische Funktion eines Intervalles* I, *dann gilt*

$$\|\sum_{n=1}^{N} L_{b_n} f\|_2 \geqq \|\sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f\|_2 \qquad \textit{für alle } N.$$

Beweis: Routineüberlegung.

Wir können im Beweis von Theorem 7 o.B.d.A. annehmen, daß die Folge (a_n) monoton ist. Wir wählen eine Folge (b_n) mit $0 \leqq (b_{n+1}-b_n) \leqq (a_{n+1}-a_n)$, sodaß $b_{n+1}-b_n$ monoton fallend gegen 0 konvergiert und $\lim_n n(b_{n+1}-b_n) = \infty$ gilt. Bekanntlich ist dann (b_n) gleichverteilt mod. x für alle $x > 0$. ([2], § 3). Es gilt daher

$$(12) \qquad \lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{iybn} = 0 \qquad \text{für alle } y \neq 0, \text{ also für fast alle } y \in R.$$

(Im kompakten Fall ist dieser Schluß falsch.) Die Beweismethode in Theorem 6, (9), (10) liefert,daß

$$(13) \qquad \lim_N \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{b_n} f \right\|_2 = 0 \quad \text{für alle } f \in L^2(R) \text{ gilt.}$$

Aus Lemma 1 folgt dann, da die Linearkombination charakteristischer Funktionen von Intervallen dicht in $L^2(R)$ liegen, daß

$$(14) \qquad \lim_N \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} L_{a_n} f \right\|_2 = 0 \qquad \text{für alle } f \in L^2(R) \text{ gilt,}$$

und die Folge (a_n) L^2-gleichverteilt ist. q.e.d.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] D. Berg, M. Rajagopalan and A. Rubel: Uniform distribution in locally compact abelian groups. *Trans. of the AMS Vol. 133, No. 2* (1968) 435–446.

[2] J. Cigler and G. Helmberg: Neuere Entwicklung aus der Theorie der Gleichverteilung. *J.-ber. Deutsch. Math.-Verein. 64* (1961) 1–50.

[3] H. G. Feichtinger: Zur Idealtheorie van Segal-Algebren. *Manuscripta math. 10* (1973) 307–312.

[4] P. Gerl: Relative Gleichverteilung in lokalkompakten Räumen. *Math. Z. 121* (1971) 24–50.

[5] P. F. Greenleaf: *Invariant means on topological groups*. Van Nostrand, Mathematical Studies 16 (1969).

[6] S. HARTMAN: Remarks on equidistribution on noncompact groups. *Compositio Math. 16* (1965) 66–71.
[7] G. HELMBERG: Gleichverteilte Folgen in lokalkompakten Räumen. *Math. Z. 86* (1964) 157–189.
[8] E. HEWITT and K. A. ROSS: *Abstract harmonic analysis I, II.* Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer (1963 und 1970).
[9] H. HEYER: *Dualität lokalkompakter Gruppen.* Lecture notes in mathematics, 150, Springer, Berlin (1970).
[10] E. HLAWKA: Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. *Ren. Cir. M. die Palermo, S. II, vol. IV* (1955) 33–47.
[11] J. F. KOKSMA and R. SALEM: Uniform distribution and Lebesgue Integration. *Acta Sci, Math. Szeged 12B* (1950) 87–96.
[12] E. KOTZMANN: *Dissertation.* Wien (1974).
[13] M. LEINERT: A contribution to Segal-algebras. *Manuscripta math. 10* (1973) 299–306.
[14] L. H. LOOMIS: *Abstract harmonic analysis.* Van Nostrand, New York (1953).
[15] H. NIEDERREITER: Uniformly distributed sequences in compact spaces. *Compositio Math. 25, 1* (1972) 93–99.
[16] H. REITER: Sur certains idéaux dans $L^1(G)$. *C. R. Acad. Sci. Paris 267, Serie A* (1968) 882–885.
[17] H. REITER: *Classical harmonic analysis and locally compact groups.* Oxford at the Clarendon Press (1968).
[18] H. REITER: *L^1-algebras and Segal-algebras.* Lecture notes in mathematics, 231, Springer, Berlin (1971).
[19] M. RIEMERSMA: *Π-Morphisms and invariant means on semitopological semigroups.* Dissertation Utrecht (1973).
[20] H. RINDLER: Ein Gleichverteilungsbegriff für mittelbare Gruppen. *Sitzungsber. math. naturwiss. Kl. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 182,* 93–105 (1974) im Druck.
[21] H. RINDLER: *Zur L^1-Gleichverteilung auf abelschen und kompakten Gruppen.* Preprint Wien 1974.
[22] L. A. RUBEL: Uniform distribution in locally compact groups. *Comment Math. Helv. 39* (1965) 253–258.
[23] H. SCHOISSENGEIER: *Gleichmäßig gleichverteilte Folgen in lokalkompakten Räumen.* Anzeiger der Österr. Akad. der Wiss. 1974.

(Oblatum 10–XII–1973 & 21–V–1974)

Mathematisches Institut
der Universität in Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien