F. EL ZEIN

La classe fondamentale d'un cycle

Compositio Mathematica, tome 29, nº 1 (1974), p. 9-33
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1974__29_1_9_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 29, Fasc. 1, 1974, pag. 9–33
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

LA CLASSE FONDAMENTALE D'UN CYCLE [1]

F. El Zein

Grothendieck a annoncé en 1956 [4], qu'on peut associer à tout cycle d'un schéma X lisse sur un corps k, une classe fondamentale dans la cohomologie de Hodge $H^*(X, \Omega^*_{X/k})$ qui définit un morphisme de l'anneau de Chow dans cette cohomologie. Le complexe dualisant de la variété X [8] nous permet d'expliciter ce morphisme. On obtiendra de la même manière la classe fondamentale dans la cohomologie de De Rham $H^*_{DR}(X, \Omega^*_{X/k})$.

1. Calcul de la différentielle d'un complexe Résiduel.
2. Construction de la Classe fondamentale.
3. Compatibilité avec la formule de Künneth.
4. Compatibilité du produit d'intersection et du cup-produit.
5. La classe fondamentale en cohomologie de De Rham.
6. La classe fondamentale d'un cycle en Géométrie analytique.

Hypothéses et notations

On considère une variété X de dimension n, intègre et lisse sur un corps k, de faisceau structural $\mathcal{O}_X$. On utilise les mêmes notations que [8]. En particulier si $Z' \subset Z$, le foncteur $\boldsymbol{H}^*_{Z/Z'}(*)$ désigne la cohomologie à support dans Z modulo Z'. Pour un point x de X et un $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$, $\Gamma_x(\mathscr{F})$ désigne le groupe des germes de sections de $\mathscr{F}$ au voisinage de x, à support dans $\bar{x}$ l'adhérence de x, le $i$ème foncteur dérivé associé est $H^i_x(*)$; $cd_X(x)$ est la codimension de $\bar{x}$ dans X.

Pour un groupe G, on note $i_x G$ le faisceau constant G sur $\bar{x}$ et nul ailleurs.

Rappel sur le complexe résiduel

Le complexe résiduel $K^{\cdot}_X$ de X est le complexe de Cousin de $\Omega^n_{X/K}[n]$, concentré sur l'intervalle $[-n, 0]$. Pour tout morphisme de type fini

[1] Ce travail a été subventionné par le Conseil National de la Recherche Scientifique libanais en 1972.

$f: Z \to X$ on peut définir un complexe résiduel $f^! K^{\cdot}_X$ sur Z; Si f est lisse de dimension relative m: $f^! K^{\cdot}_X \cong f^* K^{\cdot}_X \otimes_Z \Omega^m_{Z/X}$.

Soit $i: Y \to X$ une immersion fermée, $K^{\cdot}_Y$ est isomorphe à $i^! K^{\cdot}_X = i^* \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(i_* \mathcal{O}_Y, K^{\cdot}_X)$. Pour tout indice $j \in [0, n]$, $K^{j-n}_X \simeq \coprod_{cd(x)=j} i_x H^j_x(\Omega^n_X)$ et $K^{j-n}_Y \simeq \coprod_{cd(x)=j} i_x \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x}, H^j_x(\Omega^n_X))$. Si Y est de codimension pure p, $K^{\cdot}_Y$ est concentré sur les degrés $[-n+p, 0]$, et $H^p_y(\Omega^n_X)$ étant dualisant pour $\mathcal{O}_{X,y}$ on a $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^n_{X,y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \mathrm{H}^p_y(\Omega^n_X))$; c'est-à-dire: $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \Omega^n_X) = 0$ pour $i < p$ et $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \Omega^n_X) \simeq \boldsymbol{H}^{p-n}(K^{\cdot}_Y)$ s'injecte dans $K^{p-n}_Y \simeq \coprod_{cd(y)=0} i_y \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^n_{X,y})$.

Remarque: Tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathscr{F}$, décalé au degré $-n$, localement libre, de type fini, est quasi-isomorphe au complexe de faisceaux quasi-cohérents injectifs $K^{\cdot}_X(\mathscr{F}) \simeq K^{\cdot}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega^n_X)^V \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}$.

1. Calcul de la différentielle d'un complexe résiduel

1.1. Soit $Z.$ la filtration de X par la codimension: $Z_i = \{x \in X : cd_X(x) \geqq i\}$. Le complexe résiduel $K^{\cdot}_X(\mathcal{O}_X)$ est égal en degré $-n+i$ à $\boldsymbol{H}^i_{Z_i/Z_{i+1}}(\mathcal{O}_X) \simeq \coprod_{cd(x)=i} i_x H^i_x(\mathcal{O}_X)$ ([8] ch. IV var 6-F).

La différentiel $d^{-n+i}_X: \coprod_{cd(x)=i} i_x H^i_x(\mathcal{O}_X) \to \coprod_{cd(y)=i+1} i_y H^{i+1}_y(\mathcal{O}_X)$ se déduit du morphisme de connexion $\delta: H^i_{Z_i + Z_{i+1}}(\mathcal{O}_X) \to H^{i+1}_{Z_{i+1}/Z_{i+2}}(\mathcal{O}_X)$([8], Prop. 2.5 p. 235).

Si $f_1, \cdots, f_i$ forment un système de paramètres de l'anneau régulier $\mathcal{O}_{X,x}$ (nécessairement une suite régulière), les idéaux $I^{[n]}_x = (f^n_1, \cdots, f^n_i)_{n \in \mathbb{N}}$ alternent avec les puissances $n$ième de l'idéal maximal $(\mathfrak{M}^n_x)_{n \in \mathbb{N}}$ et on a:

$$H^i_x(\mathcal{O}_X) \simeq \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}\left(\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{\mathfrak{M}^n_x}, \mathcal{O}_{X,x}\right) \simeq \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}\left(\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f^n_1, \cdots, f^n_i)}, \mathcal{O}_{X,x}\right)$$
$$\simeq \varinjlim_n \frac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f^n_1, \cdots, f^n_i)}$$

Le premier isomorphisme est déduit de l'isomorphisme de foncteurs sur la catégorie des $\mathcal{O}_{X,x}$-modules:

$$\Gamma_x(*) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}\left(\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{\mathfrak{M}^n_x}, *\right);$$

et le dernier isomorphisme est obtenu à l'aide du complexe de Koszul de la suite $f_1, \cdots, f_i$, la limite inductive est considérée pour les morphismes:

$$\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f^n_1, \cdots, f^n_i)} \xrightarrow{\times f^m_1, \cdots, f^m_i} \frac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f^{m+n}_1, \cdots, f^{m+n}_i)}.$$

Dans la suite, si A est un anneau, M un A-module, et $f_1, \cdots, f_i$ des éléments de A, l'image d'un élément $a \in M/(f_1^r, \cdots, f_i^r)$ dans la

$$\varinjlim_n \frac{M}{(f_1^n, \cdots, f_i^n)}$$

sera noté

$$\left[\begin{matrix} a \\ f_1^r, \cdots, f_i^r \end{matrix}\right].$$

1.2. *Réduction au cas d'une courbe de Gorenstein*

Soit x un point de X de codimension i, et $y \in \bar{x}$ de codimension $i+1$ dans X. On peut trouver des éléments $f_1, \cdots, f_i \in \mathcal{O}_{X,y}$ qui forment un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$ et un élément $f_{i+1} \in \mathcal{O}_{X,y}$ tel que $(f_1, \cdots, f_i, f_{i+1})$ forment aussi un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$. Les sous-variétés fermées Z_r définies par $(f_1^r, \cdots, f_i^r)$ sont des intersections complètes dans un voisinage de x dans X, qu'on suppose égal à X pour simplifier, admettant $x = x_0, x_1, \cdots, x_l$ comme points génériques des composantes irréductibles, correspondant à des idéaux premiers $\mathfrak{P}_0, \cdots, \mathfrak{P}_l$, dans $\mathcal{O}_{X,y}$, de même hauteur i.

1.2.1. PROPOSITION: *Avec les notations ci-dessus, le diagramme suivant, est commutatif, et permet d'expliciter le morphisme*: $H_x^i(\mathcal{O}_X) \to H_y^{i+1}(\mathcal{O}_X)$ *induit par la différentielle* d_X.

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{s\in[0,l]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x_s}}(\mathcal{O}_{Z_r,x_s}, H^i_{x_s}(\mathcal{O}_{X,x_s})) \arrow[d, "d_{Z_r}"] & \coprod\limits_{s\in[0,l]} \left(\dfrac{\mathcal{O}_{X,x_s}}{(f_1^r, \cdots, f_i^r)}\right) \arrow[l, "\beta_0"'] \arrow[d, "(-1)^{n-i}"', "P"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Z_r,y}, H^{i+1}_y(\mathcal{O}_{X,y})) & \dfrac{\coprod\limits_{s\in[0,l]} \mathcal{O}_{X,x_s}/(f_1^r, \cdots, f_i^r)}{\mathcal{O}_{X,y}/(f_1^r, \cdots, f_i^r)} \arrow[l, "\beta_1"']
\end{tikzcd}$$

Avec P: la projection canonique, c'est la différentielle du complexe de Cousin de $\mathcal{O}_{Z_r}$: $K^{\cdot}_{Z_r}(\mathcal{O}_{Z_r})/sp(\mathcal{O}_{Z_r,y})$; d_{Z_r} la différentielle de $j^{!}K^{\cdot}_X(\mathcal{O}_X)/Sp(\mathcal{O}_{Z_r,y})$ où j est l'immersion $Z_r \to X$; d_X la différentielle de $K^{\cdot}_X(\mathcal{O}_X)$; β_0 (resp. β_1) est l'isomorphisme déduit de la résolution de $\mathcal{O}_{Z_r,x_s}$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}$, de $\mathcal{O}_{Z_r,y}/(f_{i+1}^n)$) par le complexe de Koszul de la suite $f_1^r, \cdots, f_i^r$.

Soit $K^{\cdot}(f_1^r, \cdots, f_i^r)$ le complexe de Koszul de la suite régulière $f_1^r, \cdots, f_i^r$, $j = Z_r \to X$ l'immersion fermée, et $K^{\cdot}_X(\mathcal{O}_X)$ le complexe résiduel de X, résolution de $\mathcal{O}_X[n]$. On a les quasi-isomorphismes

$$j_*\mathcal{O}_{Z_r}[n-i] \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(K^{\cdot}(f_1^r, \cdots, f_i^r), \mathcal{O}_X[n]) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_X(j_*\mathcal{O}_{Z_r}, K^{\cdot}_X(\mathcal{O}_X))$$

On retrouve ainsi que $\mathcal{O}_{Z_r}$ est dualisant pour Z_r (on dit que Z_r est de Gorenstein ([8] ch. 5 § 9 et [1]), le complexe de Cousin $K^{\cdot}_{Z_r}(\mathcal{O}_{Z_r})/Sp(\mathcal{O}_{Z_r,y})$ de $\mathcal{O}_{Z_r,y}$, concentré en d^0: 0 et 1, est:

$$\coprod_{s\in[0,l]} \frac{\mathcal{O}_{X,x_s}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)} \xrightarrow{p} \coprod_{s\in[0,l]} \frac{\mathcal{O}_{X,x_s}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)} \Big/ \frac{\mathcal{O}_{X,y}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)}$$

où p est la projection canonique.

Le quasi-isomorphisme ci-dessus donne lieu à un isomorphisme sur les complexes résiduels:

$$j_* K^{\cdot}_{Z_r}(\mathcal{O}_{Z_r})[n-i] \simeq \operatorname{Hom}(j^*\mathcal{O}_{Z_r}, K^{\cdot}_X(\mathcal{O}_X))$$

En degré $-n+i$, l'isomorphisme β_0:

$$\begin{aligned}\coprod_{s\in[0,l]} i_{x_s} \frac{\mathcal{O}_{X,x_s}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)} &\simeq \coprod_{s\in[0,l]} i_{x_s} \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x_s}}(\mathcal{O}_{Z_r,x_s}, \mathcal{O}_{X,x_s}) \\ &\simeq \coprod_{s\in[0,l]} i_{x_s} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x_s}}(\mathcal{O}_{Z_r,x_s}, H^i{}_{x_s}(\mathcal{O}_{X,x_s}))\end{aligned}$$

En degré $-n+i+1$, l'isomorphisme β_1:

$$i_y\left(\coprod_{s\in[0,l]} \frac{\mathcal{O}_{X,x_s}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)} \Big/ \frac{\mathcal{O}_{X,y}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)}\right) \simeq i_y\left(\frac{(\mathcal{O}_{X,y})_{f_{i+1}}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)} \Big/ \frac{\mathcal{O}_{X,y}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r)}\right)$$

$$\simeq i_y \varinjlim_n \frac{\mathcal{O}_{X,y}}{(f_1^r,\cdots,f_i^r, f_{i+1}^n)} \simeq i_y \varinjlim_n \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathcal{O}_{X,y}}\left(\frac{\mathcal{O}_{Z_r,y}}{(f_{i+1}^n)}, \mathcal{O}_{X,y}\right)$$

$$\simeq i_y \varinjlim_n \operatorname{Hom} \mathcal{O}_{X,y}\left(\frac{\mathcal{O}_{Z_r,y}}{(f_{i+1}^n)}, H_y^{i+1}(\mathcal{O}_{X,y})\right)$$

$$\simeq i_y \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Z_r,y}, H_y^{i+1}(\mathcal{O}_{X,y})).$$

dans le cas de l'isomorphisme β_0, les propriétés suivantes interviennent:

(1) Le module $H_y^{i+1}(\mathcal{O}_{X,y})$ est dualisant de support $\bar{y}$.

(2) Pour un anneau B et un élément $g\in B$, on a $B_g/B \simeq \varinjlim_n B/(g^n)$.

(3) L'anneau, $(\mathcal{O}_{X,y})_{f_{i+1}}/(f_1^r,\cdots,f_i^r)$ est artinien dont les idéaux premiers sont P_s pour $s\in[0,l]$, et par conséquent isomorphe à:

$$\coprod_{s\in[0,l]} \mathcal{O}_{X,x_s}/(f_1^r,\cdots,f_i^r).$$

2. Construction de la classe fondamentale

2.1.1. THÉORÈME: *Soit Y une sous-variété fermée de X, de codimension pure p, il existe alors un morphisme canonique*: $\Omega_Y^{n-p}[n-p] \to K^{\cdot}_Y$.

Le morphisme $\Omega_Y^{n-p} \to K_Y^{-n+p}$

Si Y est intègre de point générique y, et $(t_1, \cdots, t_p)$ un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$; on a la suite exacte:

$$\frac{\mathfrak{M}_{X,y}}{\mathfrak{M}_{X,y}^2} \to \Omega_{X,y}^1 \underset{\mathcal{O}_{X,y}}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y} \to \Omega_{Y,y}^1 \to 0.$$

Soit H le module

$$\mathrm{Im}\left[\sum_{h+h'=n-p-1} \overset{h}{\otimes}\, \Omega_{X,y}^1 \otimes \frac{\mathfrak{M}_{X,y}}{\mathfrak{M}_{X,y}^2} \overset{h'}{\otimes}\, \Omega_{X,y}^1\right]$$

dans $\Omega_{X,y}^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} \mathcal{O}_{Y,y}$. On en déduit de la suite exacte l'isomorphisme:

$$\Lambda_0 \colon \Omega_{Y,y}^{n-p} \xrightarrow{\sim} \Omega_{X,y}^{n-p} \underset{\mathcal{O}_{X,y}}{\otimes} \mathcal{O}_{Y,y}/H$$

Le morphisme $\Omega_{X,y}^{n-p} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \to \Omega_{X,y}^{n} \otimes \mathcal{O}_{Y,y}$ qui envoie l'élément $w \otimes 1$ en $w \wedge \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_p$ s'annule sur H et définit un morphisme

$$\Lambda_1 \colon \frac{\Omega_{X,y}^{n-p} \otimes \mathcal{O}_{Y,y}}{H} \to \Omega_{X,y}^n \otimes {}^p\Lambda \left(\frac{\mathfrak{M}_{X,y}}{\mathfrak{M}_{X,y}^2}\right)^V$$

on définit: $\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_0 \colon \Omega_{Y,y}^{n-p} \to \Omega_{X,y}^n \otimes \Lambda^p(\mathfrak{M}_{X,y}/\mathfrak{M}_{X,y}^2)^V$. Si on compose Λ avec l'isomorphisme fondamental local, on a:

$$\theta_y \colon \Omega_{Y,y}^{n-p} \to \Omega_{X,y}^n \otimes \Lambda^p \left(\frac{\mathfrak{M}_{X,y}}{\mathfrak{M}_{X,y}^2}\right)^V \to \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega_{X,y}^n)$$
$$\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, H_y^p(\Omega_{X,y}^n)) = K_Y^{p-n}.$$

Le morphisme cherché est le composé $\theta_y \circ \varphi_y \colon \Omega_Y^{n-p} \xrightarrow{\varphi_y} i_y \Omega_{Y,y}^{n-p} \xrightarrow{\theta_y} K_Y^{-n+p}$. Il reste à démontrer que le morphisme composé avec la différentielle est nul, on considère d'abord le cas d'une variété normale puis on s'y ramène en utilisant la normalisée d'une variété quelconque.

Cas où Y est normal

Pour tout point $z \in Y$ de codimension 1, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,z}$ est de valuation discrète. On peut trouver p éléments $t_1, \cdots, t_p \in \mathcal{O}_{X,z}$ qui engendrent l'idéal $\mathcal{I}_{Y,z}$ et qui forment avec un élément $t_{p+1} \in \mathcal{O}_{X,z}$, un système régulier de paramètres. Soit $w \in \Gamma\Omega_Y^{n-p}$ et $w_z \in \Omega_{X,z}^{n-p}$ un relèvement de w régulier en z, l'image

$$\theta_y \circ \varphi_y(w) = \left[1 \to \begin{bmatrix} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p \wedge w_z \\ t_1 \cdots t_p \end{bmatrix}\right] \in H_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, H_y^p(\Omega_X^n))$$

comme $w_z \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p$ est régulier en z, on conclut que $d \circ \theta_y \circ \varphi_y = 0$, d'après le calcul précédent de la différentielle.

REMARQUE: *Si Y est de plus séparable sur k*, soit $V \subset Y$ un ouvert affine d'algèbre A, tel que Ω^1_V soit libre de base $dl_1 \cdots dl_{n-p}$. Un élément $w \in \Omega^{n-p}_{Y,y}$ s'écrit $w = \alpha\, dl_1 \wedge \cdots \wedge dl_{n-p}$ avec $\alpha \in \mathcal{O}_{Y,y}$; dire que $d \circ \theta_y(w) = 0$ c'est dire que $v_z(\alpha) = 0$ pour tout point $z \in V$, de codimension 1, v_z désignant la valuation de $\mathcal{O}_{X,z}$, ceci est équivalent à $w \in \Gamma\Omega^{n-p}_V$ [[12], § 10 – th. 16 – cor. 3, vol. II]. On retrouve ainsi que le faisceau de cohomologie $\mathrm{Ext}^p_X(\mathcal{O}_Y, \Omega^n_X) \simeq \boldsymbol{H}^{-n+p}(K^\cdot_Y)$ s'identifie au faisceau des formes différentielles régulières aux points simples de Y.

Cas où Y est intègre

Le problème étant local, on peut supposer Y affine, soit $f\colon \tilde{Y} \to Y$ la variété normalisée de Y; on peut trouver une immersion $j\colon Y \to Y \times k^s$ tel dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times k^s \arrow[r, "i_s"] \arrow[d, "p_1"] & X \times k^s \arrow[d, "p_2"] \\ & Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Soit y' le point générique de $\tilde{Y}$ et

$$\theta_y : i_{y'}\Omega^{n-p}_{\tilde{Y},y'} \to i_{y'}\,\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^n_{X,y}) \to f^! K^\cdot_Y[-n+p]$$

le morphisme qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} f_* i_{y'}\Omega^{n-p}_{\tilde{Y},y'} \arrow[r] & f_* i_{y'}\,\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^n_{X,y}) \arrow[r] & f_* f^! K^\cdot_Y[-n+p] \arrow[d, "Trf"] \\ i_y\Omega^{n-p}_{Y,Y} \arrow[u, "f^*"] \arrow[r] & i_y\,\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^n_{X,y}) \arrow[r] & K^\cdot_Y[-n+p] \end{tikzcd}$$

Il suffit de démontrer qu'on a un morphisme de complexes:

$$\Omega^{n-p}_{\tilde{Y}} \to i_{y'}\Omega^{n-p}_{\tilde{Y},y'} \xrightarrow{\tilde{\theta}_y} f^! K^\cdot_Y[-n+p]$$

D'après le cas précédent, on sait constuire un morphisme de complexes:

$$\Omega^n_{\tilde{Y}} \xrightarrow{\varphi_y} i_{y'}\Omega^{n-p}_{\tilde{Y},y'} \xrightarrow{\theta_y} i_{y'}\,\mathrm{Ext}^{p+s}_{\mathcal{O}_{X\times k^s,y'}}(\mathcal{O}_{\tilde{Y},y'}, \Omega^{n+s}_{X\times k^s,y'}) \to (i_s \circ j)^! K^\cdot_{X\times k^s}[-n+p]$$

Ainsi on se ramène à démontrer la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ext}^{p+s}(\mathcal{O}_{\tilde{Y},y'}, \Omega^{n+s}_{X\times k^s,y'}) \arrow[d, "\mathrm{Rés}^{X\times k^s}_{Y,X}"] \\ \Omega^{n-p}_{\tilde{Y},y} \arrow[ur, "\theta'_{y'}"] \arrow[dr, "\theta_y"'] & \\ & \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^n_{X,y}) \end{tikzcd}$$

en effet c'est l'isomorphisme $\mathrm{Rés}^{X\times k^s}_{Y,X}$ qui identifie $(i_s \circ j)^! K^\cdot_{X\times k^s}$ et $(i \circ f)^! K^\cdot_X$.

Le problème est local en y et on a:

$$\begin{tikzcd}
Sp(\mathcal{O}_{Y,y}) \times k^s \arrow[rr, "i_s"] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "p_1"] & & Sp(\mathcal{O}_{X,y}) \times k^s \arrow[d, "p_2"] \\
Sp(\mathcal{O}_{\tilde{Y},y'}) \arrow[r, "\sim", "f"'] & Sp(\mathcal{O}_{Y,y}) \arrow[r, "i"'] & Sp(\mathcal{O}_{X,y})
\end{tikzcd}$$

Soit $q_1, \cdots, q_s$ une suite régulière qui définit $\tilde{Y}$ dans $Y \times k^s$ au voisinage de y', et $t_1, \cdots, t_p$ un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$. Pour $w \in \Omega^{n-p}_{Y,y'}$, soit w_y un relèvement de w dans $\Omega^{n-p}_{X,y}$ l'élément de $\tilde{\theta}_y(w)$ est représenté par

$$\begin{bmatrix} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p \wedge w_y \\ t_1 \cdots t_p \end{bmatrix}$$

et l'élément $\theta_{y'}(w)$ est représenté par

$$\begin{bmatrix} dq_1 \wedge \cdots \wedge dq_s \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p \wedge w_y \\ q_1 \cdots q_s, t_1 \cdots t_p \end{bmatrix}$$

ces 2 éléments se correspondent bien par l'isomorphisme $\text{Rés}^{X \times k^s}_{\tilde{Y},X}$ d'après les propriétés de ce dernier.

Cas où Y est quelconque

Soit $Y_1, \cdots, Y_t$ les composantes irréductibles de Y, munies de leur structure intègre et $h_j: Y_j \to Y$ les immersions canoniques. Le morphisme $\Omega^{n-p}_Y \to K^{\cdot}_Y[-n+p]$ est celui qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{n-p}_Y \arrow[rr] \arrow[d, "\sum h_j^*"'] & & K^{\cdot}_Y[-n+p] \\
\bigoplus_{j \in [1,t]} h_{j_*} \Omega^{n-p}_{Y_j} \arrow[rr] & & \bigoplus_{j \in [1,t]} h_{j_*} K^{\cdot}_{Y_j}[-n+p] \arrow[u, "\sum Tr\, h_j"']
\end{tikzcd}$$

2.1.2. PROPOSITION: *Soit V une variété lisse et $\gamma: X \to V$ un morphisme lisse, une immersion fermée $i: Y \to X$ d'une sous-variété Y intègre, de codimension p et de point générique y, tel que $\eta = \gamma \circ i$ soit un morphisme fini et dominant. Soit $t_1, \cdots, t_p$ un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$, et pour toute forme $w \in \Omega^{n-p}_{V,y}$, un relèvement $w_y \in \Omega^{n-p}_{X,y}$, alors la classe fondamental $C_Y \in \mathrm{Hom}\,(\Omega^{n-p}_{Y,y}, \Omega^{n-p}_{V,\eta(y)})$ fait correspondre à $w \in \Omega^{n-p}_{Y,y}$ la forme*

$$Rés \begin{bmatrix} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p \wedge w_y \\ t_1, \cdots, t_p \end{bmatrix} \in \Omega^{n-p}_{V,\eta(y)} \therefore$$

Si de plus X est séparable sur k, w se met sous la forme: $a \times \eta^*(w')$ avec $w' \in \Omega^{n-p}_{V,\eta(y)}$ et $a \in \mathcal{O}_{Y,y}$. Alors: $C_Y(w) = Tr(\eta)(a)w'$.

Il suffit d'appliquer l'isomorphisme Résidu:

$$H(\mathcal{O}_{Y,y}, H^p_y(\Omega^n_X)) \rightrightarrows H(\mathcal{O}_{Y,y}, \Omega^{n-p}_{V,\eta(y)})$$

à la classe fondamentale calculée précédemment.

Si de plus X est séparable sur k, le morphisme η est étale en y; $\Omega^{n-p}_{Y,y} \simeq \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \Omega^{n-p}_{V,\eta(y)}$ et on peut appliquer la formule de la trace ([8], R 6 p. 198) pour calculer le résidu.

2.1.3. Le morphisme qu'on vient de définir correspond à une classe fondamentale dans $\operatorname{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \Omega^p_X)$, de la manière suivante:

$$\operatorname{Hom}(\Omega^{n-p}_Y, K^\cdot_Y[-n+p]) \underset{I}{\rightarrow} \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y \otimes \Omega^{n-p}_X, K^\cdot_X[-n+p]) \simeq$$

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y, K^\cdot_X[-n+p] \otimes (\Omega^{n-p}_X)^V).$$

on obtient ainsi un élément dans:

$$H^{p-n}(\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y, K^\cdot_X(\Omega^p_X))) \simeq \operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega^p_X)$$

Le morphisme I s'obtient à partir de l'immersion $i: Y \to X$ en composant d'un côté avec $Tr\, i: i_* K^\cdot_Y \to K^\cdot_X$ et de l'autre avec $i^*: \mathcal{O}_Y \otimes \Omega^{n-p}_X \to i_* \Omega^{n-p}_Y$.

Cette classe fondamentale se représente par

$$\begin{bmatrix} dt_1 \cdots dt_p \\ t_1 \cdots t_p \end{bmatrix} \in \operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega^p_X)$$

ou $t_1, \cdots, t_p$ forment un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$ lorsque Y admet y comme point générique. On peut considérer la classe fondamentale dans $H^p(X, \Omega^p_X)$ à l'aide des morphismes:

$$\operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega^p_X) \to H^p_Y(X, \Omega^p_X) \to H^p(X, \Omega^p_X).$$

3. Compatibilité avec la formule de Künneth

Dans toute la suite on considère deux variétés X et X' lisses sur k, et leur produit

$$V = X \underset{k}{\times} X' \begin{array}{l} \xrightarrow{P'} X' \\ \xrightarrow[P]{} X \end{array}$$

3.1. *Rappel de la formule de Künneth*

3.1.1. Théorème: *Pour tout faisceau de modules $\mathcal{F}$ sur X, resp. $\mathcal{F}'$ sur X', on a l'isomorphisme suivant entre les espaces de cohomologie.*

$$H^n(X \times X', P^*\mathcal{F} \otimes P'^*\mathcal{F}') \simeq \sum_{q+q'=n} H^q(X, \mathcal{F}) \underset{k}{\otimes} H^{q'}(X', \mathcal{F}')$$

On se réfère pour la démonstration et les notations à [[6], livre III, ch. 0, § 11.8]. Considérons un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X (resp.

$\mathscr{U}' = (U'_j)_{j\in J}$ de X'), ouvert, affine, fini, et $\mathscr{U}\times\mathscr{U}' = (U_i \times U'_j)_{(i,j)\in I\times J}$ le recouvrement de V. Soit: $C^{\cdot} = C^{\cdot}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ le complexe des cochaînes: $[C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{i_0\cdots i_q} \Gamma(U_{i_0\cdots i_q}, \mathscr{F})]_{q\in N}$ (resp. $C' = C^{\cdot}(\mathscr{U}', \mathscr{F}')$ sur X').

$E^{\cdot} = C^{\cdot}(\mathscr{U}\times\mathscr{U}', \mathscr{F}\otimes\mathscr{F}')$ le complexe des cochaînes:

$$[E^n = \prod_{(i_0, j_0)\cdots(i_n, j_n)} \Gamma(U_{i_0\cdots i_n}\times U_{j_0\cdots j_n}, \mathscr{F}\otimes\mathscr{F}')]_{n\in N}$$

on a

$$E^n = \prod_{(i_0, j_0)\cdots(i_n, j_n)} \Gamma(U_{i_0\cdots i_n}, \mathscr{F}) \underset{k}{\otimes} \Gamma(U'_{j_0\cdots j_n}, \mathscr{F}')$$

$$\simeq \prod_{i_0\cdots i_n} \Gamma(U_{i_0\cdots i_n}, \mathscr{F}) \underset{k}{\otimes} \prod_{j_0\ldots j_n} \Gamma(U'_{j_0\,\ldots j_n}, \mathscr{F}') \simeq (C^{\cdot} \underset{k}{\times} C'^{\cdot})_n =$$

la $n$ième composante du produit cartérien – donc $E^{\cdot} \simeq C^{\cdot}\times_k C'^{\cdot}$.

L'isomorphisme de Künneth s'obtient comme composé des isomorphismes suivants:

$$H^*(X\times X', \mathscr{F}\otimes\mathscr{F}') \underset{\mathrm{I}}{\simeq} H^*(E^{\cdot}) \underset{\mathrm{II}}{\simeq} H^*(C^{\cdot}\underset{k}{\otimes} C'^{\cdot}) \underset{\mathrm{III}}{\simeq} H^*(C^{\cdot})\underset{k}{\otimes} H^*(C'^{\cdot})$$
$$\simeq H^*(X, \mathscr{F})\underset{k}{\otimes} H^*(X', \mathscr{F}')$$

L'isomorphisme I se trouve dans [(6) livre III, ch. 0. 12.4.6]; le théorème d'Eilenberg-Zilber donne l'isomorphisme II [(3) – I–Th. 3.9.1]; enfin on trouve l'isomorphisme III dans [(3) I, th. 5.5.2].

3.2.1. Proposition: *Les complexes* $K_V^{\cdot}(\mathcal{O}_V)$ *et*

$$\tilde{K}_V^{\cdot} = P^*K_X^{\cdot}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_V} P'^*K_{X'}^{\cdot}(\mathcal{O}_{X'})$$

sont quasi-isomorphes.

Soit $x\in X$ (resp. $x'\in X'$) deux points de codimension i (resp. i'), la variété $\bar{x}\times\bar{x}' \simeq P^{-1}(\bar{x})\cap P'^{-1}(\bar{x}')$ a un nombre fini de points génériques $(u_j)_{j\in J}$, de codimension $i+i'$ tel que $P(u_j) = x$ et $P'(u_j) = x'$. Soit $f_1, \cdots, f_i$ (resp. $f'_1, \cdots, f'_{i'}$) un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$ (resp. $\mathcal{O}_{X',x'}$), les images des éléments $f_1, \cdots, f_i, f'_1, \cdots, f'_{i'}$, dans $\mathcal{O}_{V,u^j}$ qu'on note de même, forment un système de paramètres.

On définit un morphisme $\varphi^{i,i'}: H_x^i(\mathcal{O}_X)\otimes_k H_{x'}^{i'}(\mathcal{O}_{X'}) \to H_{u_j}^{i+i'}(\mathcal{O}_V)$ qui est induit, sous la forme:

$$\varphi^{i,i'}: \varinjlim_n \frac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f_1^n, \cdots, f_i^n)} \underset{k}{\otimes} \varinjlim_n \frac{\mathcal{O}_{X',x'}}{(f_1'^n, \cdots, f_{i'}'^n)} \to \varinjlim_n \frac{\mathcal{O}_{V,u^j}}{(f_1^n, \cdots, f_i^n, f_1'^n, \cdots, f_{i'}'^n)}$$

par le morphisme canonique $\mathcal{O}_{X,x}\otimes_k \mathcal{O}_{X',x'} \to \mathcal{O}_{V,u^j}$. Les différents morphismes $\varphi^{i,i'}$ definissent un morphisme $\Phi: \tilde{K}_V^{\cdot} \to K_V^{\cdot}(\mathcal{O}_V)$ qui commute aux différentielles: Soit $y\in\bar{x}$ (resp. $y'\in\bar{x}'$) de codim $i+1$ (resp. $i'+1$). Supposons que $(f_1, \cdots, f_i, f_{i+1})$ (resp. $f'_1, \cdots, f'_i, f'_{i'+1}$) forment un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$ (resp. $\mathcal{O}_{X',y'}$) et considérons les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd}
H^i_x(\mathcal{O}_X) \otimes_k H^{i'}_{x'}(\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r, "\varphi^{i+i'}"] \arrow[d, "d = (-1)^i d_X \otimes 1 + 1 \otimes d_X"'] & \sum\limits_{\substack{u_j \\ P(u_j)=x,\, P'(u_j)=x'}} H^{i+i'}_{u_j}(\mathcal{O}_V) \arrow[d, "d_V"] \\
H^{i+1}_y(\mathcal{O}_X) \otimes H^{i'}_{x'}(\mathcal{O}_{X'}) \oplus H^i_x(\mathcal{O}_X) \otimes H^{i'+1}_{y'}(\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\varphi^{i+i'+1}"] & \sum\limits_{\substack{w_k \\ P(w_k)=y,\, P'(w_k)=x'}} H^{i+i'+1}_{w_k}(\mathcal{O}_V) \oplus \sum\limits_{\substack{t_l \\ P(t_l)=x,\, P'(t_l)=y'}} H^{i+i'+1}_{t_l}(\mathcal{O}_V)
\end{tikzcd}$$

ou encore

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f_1^n, \cdots, f_i^n)} \otimes \varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{X',x'}}{(f_1'^n, \cdots, f_{i'}'^n)} \arrow[r, "\varphi^{i+i'}"] \arrow[d, "(-1)^i d_X \otimes 1 + 1 \otimes d_X"'] & \sum\limits_{u_j} \varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{V,u_j}}{(f_1^n \cdots f_i^n, f_1'^n \cdots f_{i'}'^n)} \arrow[d, "d_V"] \\
\left(\varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{X,y}}{(f_1^n \cdots f_{i+1}^n)} \otimes \varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{X',x'}}{(f_1'^n \cdots f_{i'}'^n)}\right) \oplus \left(\varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{X,x}}{(f_1^n \cdots f_i^n)} \otimes \varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{X',y'}}{(f_1'^n \cdots f_{i'+1}'^n)}\right) \arrow[r, "\varphi^{i+i'+1}"] & \sum\limits_{w_k} \varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{V,w_k}}{(f_1^n \cdots f_{i+1}^n, f_1'^n \cdots f_{i'}'^n)} \oplus \sum\limits_{t_l} \varinjlim\limits_n \dfrac{\mathcal{O}_{V,t_l}}{(f_1^n \cdots f_i^n, f_1'^n \cdots f_{i+1}'^n)}
\end{tikzcd}$$

On a $d_V \circ \varphi^{i+i'} = \varphi^{i+i'+1} \circ [(-1)^{i'} d_X \otimes 1 + 1 \otimes d_{X'}]$.

Comme on le voit d'après le calcul précédent de la différentielle; on remarque l'isomorphisme de passage suivant qui introduit le bon signe:

$$\varinjlim_n \frac{\mathcal{O}_{V,w_k}}{(f_1^n, \cdots, f_{i+1}^n, f_1'^n, \cdots, f_{i'}'^n)} \xrightarrow{(-1)^{i'}} \varinjlim_n \frac{\mathcal{O}_{V,w_k}}{(f_1^n, \cdots, f_i^n, f_1'^n, \cdots, f_{i'}'^n, f_{i+1}^n)}$$

REMARQUE: Soit A (resp. A') une k-algèbre, une résolution $M^{\cdot}$ (resp. $M'^{\cdot}$) de A (resp. A') par des modules sur A (resp. A'). Alors $M^{\cdot} \otimes_k M'^{\cdot}$ est une résolution de $A \otimes_k A'$.

D'après cette remarque $\tilde{K}_V^{\cdot} = P^* K_X^{\cdot}(\mathcal{O}_X) P'^* K_X^{\cdot}(\mathcal{O}_{X'})$ est une résolution de $\mathcal{O}_V$, et $\Phi: \tilde{K}_V^{\cdot} \to K_V^{\cdot}(\mathcal{O}_V)$ est un quasi-isomorphisme qui induit l'identité sur $\mathcal{O}_V$.

3.2.2. THÉORÈME: *Soit Z (resp. Z') une sous-variété fermée de X (resp. X'), de codimension p (resp. p'), C_Z (resp. $C_{Z'}$) leur classe de cohomologie dans $H^p(X, \Omega_X^p)$ (resp. $H^{p'}(X', \Omega_{X'}^{p'})$) et $C_{Z \times Z'}$ la classe de $Z \times Z'$ dans $H^{p+p'}(X \times X', \Omega_{X \times X'}^{p+p'})$. La classe $C_{Z \times Z'}$ est l'image, par l'isomorphisme de Künneth, de $C_Z \otimes C_{Z'}$.*

Soit:

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{\mathrm{Hom}}_X^{\cdot}(\mathcal{O}_Z, K_X^{\cdot}(\Omega_X^p)) \times & \xrightarrow{\psi} & \underline{\mathrm{Hom}}_V^{\cdot}(\mathcal{O}_{Z \times Z'}, & \xrightarrow{\Phi} & \underline{\mathrm{Hom}}_V^{\cdot}(\mathcal{O}_{Z \times Z'}, K_V^{\cdot}(\Omega_V^{p+P'})) \\
\times \underline{\mathrm{Hom}}_{X'}^{\cdot}(\mathcal{O}_{Z'}, K_{X'}^{\cdot}(\Omega_{X'}^{p'})) & & K_V^{\cdot} \otimes p^*\Omega_X^p \otimes p'^*\Omega_{X'}^{p'}) & & \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\
\underline{\mathrm{Hom}}_X^{\cdot}(\mathcal{O}_X, K_X^{\cdot}(\Omega_X^p)) \times \underline{\mathrm{Hom}}_{X'}^{\cdot}(\mathcal{O}_{X'}, K_{X'}^{\cdot}(\Omega_{X'}^{p'})) & & \xrightarrow[{[\Phi \circ \psi]'}]{} & & \underline{\mathrm{Hom}}_V^{\cdot}(\mathcal{O}_V, K_V^{\cdot}(\Omega_V^{p+P'}))
\end{array}$$

Le morphisme Φ est déduit de ce qui précède et le morphisme ψ est défini par $\psi(f \times f') = f \otimes f'$. Le morphisme $[\Phi \circ \psi]'$ est défini à la manière de $\Phi \circ \psi$, tandis que α (resp. β) est déduit de la projection $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ (resp. $\mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_{Z'}$). Soit z (resp. z') le point générique de Z, qu'on suppose irréductible, (resp. Z') et $(u_l)_{l \in [1,h]}$ les points génériques de $Z \times Z'$ en nombre fini, de codimension $p+p'$. [(11), III, D.5, lemme 6]. Si les éléments $t_1, \cdots, t_p$ (resp. $t'_1, \cdots, t'_p$) forment un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,z}$ (resp. $\mathcal{O}_{X',z'}$) leurs images $t_1, \cdots, t_p, t'_1, \cdots, t'_{p'}$ dans $\mathcal{O}_{V,u_l}$ forment aussi un système régulier de paramètres. L'image par $\Phi \circ \psi$ des classes fondamentales

$$\left[1 \to \begin{bmatrix} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p \\ t_1, \cdots, t_p \end{bmatrix}\right] \times \left[1 \to \begin{bmatrix} dt'_1 \wedge \cdots \wedge dt'_{p'} \\ t'_1, \cdots, t'_{p'} \end{bmatrix}\right]$$

est la classe fondamentale de $Z \times Z'$ dans $\mathrm{Hom}_V(\mathcal{O}_{Z \times Z'}, K_V^{\cdot}(\Omega_V^{p+P'}))$qui admet pour composante

$$1 \to \left[\begin{matrix} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p \wedge dt'_1 \wedge \cdots \wedge dt'_{p'} \\ t_1 \cdots t_p\, t'_1 \cdots t'_{p'} \end{matrix}\right]$$

dans $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{V,u_l}}(\mathcal{O}_{Z\times Z',u_l},\ H^{p+p'}_{u_l}(\Omega^{p+p'}_V))$.

Le morphisme $[\Phi \circ \psi]'$ induit un morphisme:

$$\begin{array}{ccccc} H^*[\Gamma(X, K^{\cdot}_X(\Omega^p_X))] & \times & H^*[\Gamma(X', K^{\cdot}_{X'}(\Omega^{p'}_{X'}))] & \longrightarrow & H^*[\Gamma(V, K^{\cdot}_V(\Omega^{p+p'}_V))] \\ \wr\Big| & & \wr\Big| & & \wr\Big| \\ H^*(X, \Omega^p_X) & \times & H^*(X', \Omega^{p'}_{X'}) & \longrightarrow & H^*(V, \Omega^{p+p'}_V) \end{array}$$

qui envoie $C_X(Z) \times C_{X'}(Z')$ en $C_X(Z \times Z')$. Il reste à voir que c'est exactement le morphisme de Künneth. Considérons les complexes doubles $C^{\cdot}(\mathcal{U}, K^{\cdot}_X(\Omega^p_X))$ et $C^{\cdot}(\mathcal{U}', K^{\cdot}_{X'}(\Omega^{p'}_{X'}))$. L'accouplement défini par $[\varphi \circ \psi]'$ s'étend à ces doubles complexes et aux suites spectrales associées: (voir le schéma à la fin).

$$\begin{aligned} {}'E^{r,s}_2 \times {}'\tilde{E}^{r',s'}_2 &= H^r[H^s(\mathcal{U}, K^{\cdot}_X(\Omega^p_X))] \times H^{r'}[H^{s'}(\mathcal{U}', K^{\cdot}_{X'}(\Omega^{p'}_{X'})) \\ &\to H^{r+r'}[H^{s+s'}(\mathcal{U}, \mathcal{U}', K^{\cdot}_V(\Omega^{p+p'}_V)) \end{aligned}$$

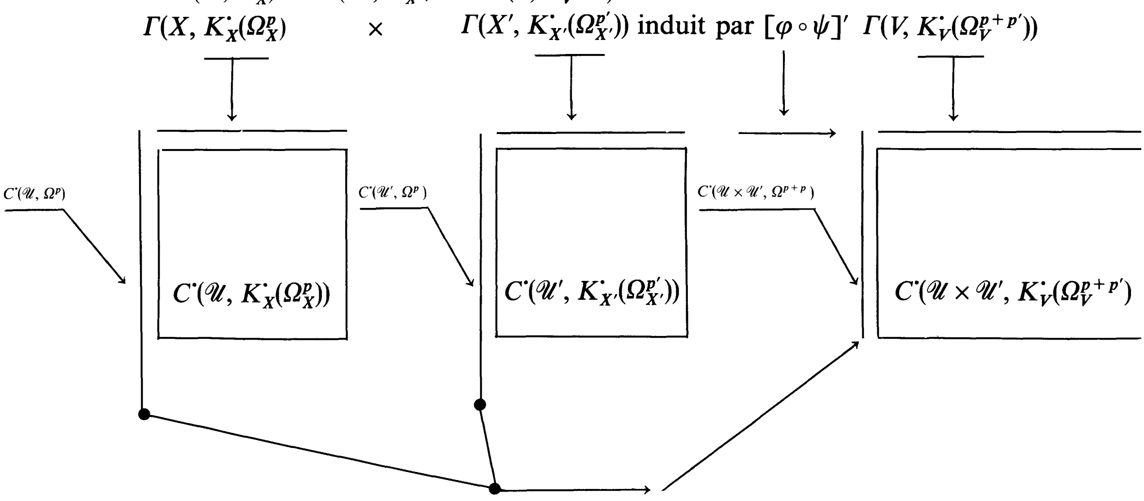
ces suites dégènèrent et donnent l'accouplement:

$$H^*[\Gamma(X, K^{\cdot}_X(\Omega^p_X))] \times H^*[\Gamma(X', K^{\cdot}_{X'}(\Omega^{p'}_{X'}))] \to H^*[\Gamma(V, K^{\cdot}_V(\Omega^{p+p'}_V))]$$

$$\begin{aligned} {}''E^{r,s}_2 \times {}''\tilde{E}^{r',s'}_2 &= H^r[\mathcal{U}, \boldsymbol{H}^s(K^{\cdot}_X(\Omega^p_X) \times H^{r'}[\mathcal{U}', \boldsymbol{H}^{s'}(K^{\cdot}_{X'}(\Omega^{p'}_{X'}))] \\ &\to H^{r+r'}[\mathcal{U}, \mathcal{U}', \boldsymbol{H}^{s+s'}(K^{\cdot}_V(\Omega^{p+p'}_V))] \end{aligned}$$

ces suites dégènèrent et donnent l'accouplement de Künneth:

$$H^*(X, \Omega^p_X) \times H^*(X', \Omega^{p'}_{X'}) \to H^*(V, \Omega^{p+p'}_V)$$



induit par la formule de Künneth.

4. Compatibilité du produit d'intersection et du cup-produit

4.1.1. Remarque: *Soit un schéma affine X, des faisceaux quasi-cohérents $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ sur X, deux sous-schémas fermés, l'un Y défini par une suite $(f_i)_{i\in[1,p]}$ dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et l'autre Z défini par une suite $(g_j)_{j\in[1,q]}$ dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Considérant le complexe de Koszul associé à une suite de fonctions; pour tout $n \in \mathbb{N}$ le complexe simple associé à $K^{\cdot}((f_i^n), \mathscr{F}) \otimes K^{\cdot}((g_j^n), \mathscr{H})$ est isomorphe à $K^{\cdot}((f_i^n, g_j^n), \mathscr{F} \otimes \mathscr{H})$.*

Considérant le calcul de la cohomologie à support dans un fermé comme limite inductive de cohomologie de complexes de Koszul associés à une suite de fonctions définissant ce fermé [[6], *ch. III*, § 1].

Le morphisme: $H_Y^{\cdot}(X, \mathscr{F}) \otimes H_Z^{*}(X, \mathscr{H}) \to H_{Y\cap Z}^{\cdot+*}(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{H})$ déduit de l'isomorphisme précédent est égal au cup-produit.

Soit $G^{\cdot}(\mathscr{F})$ la résolution flasque canonique d'un faisceau [[3] II, p. 167], $K^{\cdot}(f_i^n), \mathscr{F})$ le complexe de Koszul associé à la suite $(f_i^n)_{i\in[1,p]}$. On peut considérer le complexe simple associé au complexe double $G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i^n), \mathscr{F}))$ qui est une résolution de $K^l((f_i^n), \mathscr{F})$ en degrés $(., l)$; il est facile de vérifier que ce complexe est isomorphe à $K^{\cdot}((f_i^n), G^{\cdot}(\mathscr{F}))$.

Le morphisme $K^{\cdot}(((f_i^n), \mathscr{F}) \to G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i^n), \mathscr{F}))$ est un quasi-isomorphisme.

Le complexe $G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F}) = \varinjlim_n G^{\cdot}[K^{\cdot}((f_i^n), \mathscr{F})]$ est une résolution flasque de $K^{\cdot}(((f_i), \mathscr{F}) = \varinjlim_n K^{\cdot}((f_i^n), \mathscr{F})$, et il admet donc pour cohomologie $\boldsymbol{H}_Y^{*}(X, \mathscr{F})$ à support dans Y. On en déduit que l'injection: $\Gamma_Y(X, G^{\cdot}[K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F})]) \to \Gamma(X, G^{\cdot}[K^{\cdot}(f_i), \mathscr{F}])$ est un quasi-isomorphisme

Considérons la projection canonique:

$$\Gamma_Y(X, G^{\cdot}[K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F})]) \to \Gamma_Y(X, G^{\cdot}[K^0((f_i), \mathscr{F})]) = \Gamma_Y(X, G^{\cdot}(\mathscr{F})),$$

on va voir que c'est un quasi-isomorphisme. La suite spectrale de terme initial $''E_2^{pq} = H_{II}^p H_I^q[\Gamma_Y(X, G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F})))]$ est convergente, le foncteur $K^{\cdot}((f_i), *)$ étant exact, on peut écrire:

$$\begin{aligned} H_I^q[\Gamma_Y(X, G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F})))] &\simeq H_{II}^q[\Gamma_Y(X, K^{\cdot}((f_i), G^{\cdot}(\mathscr{F})))] \\ &\simeq H_{II}^q[K^{\cdot}(f_i), \Gamma_Y(X, G^{\cdot}(\mathscr{F}))] \simeq K^{\cdot}((f_i), H_Y^q(X, \mathscr{F})). \end{aligned}$$

On en déduit que $''E_2^{pq} \simeq H_Y^p(X, H_Y^q(X, \mathscr{F}))$ dégénère et donne le quasi-isomorphisme cherché. On a défini ainsi un isomorphisme canonique $H^{\cdot}(X, K^{\cdot}[(f_i), \mathscr{F}]) \xrightarrow{\sim} H^{\cdot}(\Gamma_Y(X, G^{\cdot}(\mathscr{F})))$.

La deuxième étape consiste à considérer les accouplements:

$$G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F})) \otimes G^{\cdot}(K^{\cdot}((g_j), \mathscr{H})) \to G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i, g_j), \mathscr{F} \otimes \mathscr{H}))$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_Y(X, G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F}))) \otimes \Gamma_Z(X, G^{\cdot}(K^{\cdot}((g_j), \mathscr{H}))) \\ &\qquad \to \Gamma_{Y\cap Z}(X, G^{\cdot}(K^{\cdot}((f_i, g_j), \mathscr{F} \otimes \mathscr{H}))) \end{aligned}$$

ces accouplements se déduisent des accouplements:

$$K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F}) \otimes K^{\cdot}((g_j), \mathscr{H}) \to K^{\cdot}((f_i, g_j), \mathscr{F} \otimes \mathscr{H})$$
$$\text{et } G^{\cdot}(\mathscr{F}) \otimes G^{\cdot}(\mathscr{H}) \to G^{\cdot}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{H})$$

De même ces accouplements passent aux suites spectrales, et par conséquent sont compatibles avec l'isomorphisme construit ci-dessus; on en déduit la compatibilité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} H^{\cdot}[\Gamma(X, K^{\cdot}((f_i), \mathscr{F}))] \otimes H^{\cdot}[\Gamma(X, K^{\cdot}((g_j), \mathscr{H}))] & \longrightarrow & H^{\cdot}[\Gamma(X, K^{\cdot}(f_i, g_j, \mathscr{F} \otimes \mathscr{H}))] \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ H^{\cdot}[\Gamma_Y(X, G^{\cdot}(\mathscr{F}))] \otimes H^{\cdot}[\Gamma_Z(X, G^{\cdot}(\mathscr{H}))] & \longrightarrow & H^{\cdot}[\Gamma_{Y \cap Z}(X, G^{\cdot}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{H}))] \end{array}$$

4.1.2. Corollaire: *Avec les notations précédentes.*

(i) *Soit des symboles*

$$\begin{bmatrix} & w & \\ f_1, & \cdots, & f_p \end{bmatrix} \in H^p_Y(X, \Omega^p_X), \qquad \begin{bmatrix} & w' & \\ g_1, & \cdots, & g_q \end{bmatrix} \in H^q_Z(X, \Omega^q_X)$$

on a

$$\begin{bmatrix} & w & \\ f_1, & \cdots, & f_p \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} & w' & \\ g_1, & \cdots, & g_q \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} & w \wedge {}^t w' & \\ f_1, \cdots, f_q, & g_1, \cdots, & g_q \end{bmatrix} \in H^{p+q}_{Y \cap Z}(X, \Omega^{p+q}_X).$$

(ii) *Soit $\Delta: X \to X \times X$ le morphisme diagonal, le morphisme canonique*:

$$K^{\cdot}_X(\Omega^p_X) \otimes_k K^{\cdot}_X(\Omega^q_X) \to K^{\cdot}_{X \times X}(\Omega^{p+q}_{X \times X}) \text{ (resp. } K^{\cdot}_X(\Omega^{\cdot}_X) \otimes_k K^{\cdot}_X(\Omega^{\cdot}_X) \to$$

$\to K^{\cdot}_{X \times X}(\Omega^{\cdot}_{X \times X}))$ *induit un morphisme dont le composé avec*:

$$\Delta^*: H^{p+q}_{Y \times Z}(X \times X, \Omega^{p+q}_{X \times X}) \to H^{p+q}_{Y \cap Z}(X, \Omega^{p+q}_X)$$

correspond au cup-produit.

4.1.3. Proposition: *Soit Y une sous-variété lisse et connexe, de codimension p dans X, et S une sous-variété de Y, de codimension q dans Y. Il existe un morphisme canonique injectif: $H^q_S(Y, \Omega^l_Y) \to$ $\mathrm{H}^{q+p}_S(X, \Omega^{l+p}_X)$ pour tout entier l, qui fait correspondre pour $l = q$ la classe fondamentale de S dans X, à celle de S dans Y.*

La suite exacte $0 \to \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \to \mathscr{O}_Y \otimes \Omega^1_X \to \Omega^1_Y \to 0$ induit pour tout $l \in \mathbb{N}$ un morphisme: $\Omega^l_Y \to \Omega^{l+p}_X \otimes \wedge^p (\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}^2_Y)^V \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathscr{O}_Y, \Omega^{l+p}_X)$. (L'isomorphisme fondamental local [(8) p. 179]. On en déduit les morphismes:

$$H^q_S(Y, \Omega^l_Y) \to H^q_S(X, \underline{\mathrm{Ext}}^p(\mathscr{O}_Y, \Omega^{l+p}_X)) \to H^q_S(X, \boldsymbol{H}^p_Y(\Omega^{l+p}_X)) \simeq H^{q+p}_S(S, \Omega^{l+p}_X)$$

Ce dernier isomorphisme se déduit de la suite spectrale du foncteur composé $\Gamma_S = \Gamma_S \circ \Gamma_{-Y}$; les termes $E_2^{ij} = H_S^i(X, \boldsymbol{H}_Y^j(\Omega_X^l))$ sont nuls pour $j \neq p$ car $\boldsymbol{H}_Y^j(\Omega_X^l)$ est nul pour $j \neq p$; la suite spectrale, étant dégénérée, donne l'isomorphisme.

Soit s le point générique de S, et un système régulier de paramètres $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q) \in \mathcal{O}_{X,s}$ tel que les p premiers éléments définissent Y en s. Les images g_i' dans $\mathcal{O}_{Y,s}$ des g_i, forment un système de paramètres. Le morphisme qu'on vient de construire est compatible avec un morphisme qui se définit au point générique s: $H_s^q(\Omega_Y^l) \to H_s^{q+p}(\Omega_X^{l+p})$ et qui établit la correspondance suivante des symboles:

$$\begin{bmatrix} w/Y \\ g_1'^m \cdots g_q'^m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} df_1 \wedge \cdots \wedge df_i \wedge \cdots \wedge df_p \wedge w \\ f_1 \cdots f_p, g_1^m \cdots g_q^m \end{bmatrix}$$

où $w \in \Omega_{X,S}^l$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors on peut vérifier facilement que ce morphisme est injectif et que l'image de la classe fondamentale de S dans Y est celle de S dans X.

Remarque: *On peut associer* ([2] p. 395) *à toute variété X étale sur un voisinage de s dans X et qui se rétracte sur un voisinage de s dans S, un morphisme Résidu: $H_s^{p+q}(\Omega_X^{l+p}) \to H_s^q(\Omega_Y^l)$ inverse à gauche du morphisme $H_s^q(\Omega_Y^l) \to H_s^{p+q}(\Omega_X^{l+p})$.*

4.1.4. Proposition (Réduction à la diagonale): *Soit Y et Z deux sous-variétés de X de codimension pure p et q respectivement, de produit d'intersection défini $Y \cdot Z$ et d'intersection S. Notons $\Delta : X \to X \times X$ le morphisme diagonal, et Δ_T l'image d'une sous-variété T de X. Le morphisme injectif: $H_S^{p+q}(X, \Omega_X^{p+q}) \simeq_{\Delta_*} H_{\Delta_S}^{p+q}(\Delta_X, \Omega_{\Delta_X}^{p+q}) \to H_{\Delta_S}^{p+q+n}(X \times X, \Omega_{X \times X}^{p+q})$ fait correspondre $C_{Y \times Z} \cup C_{\Delta_X}$ à $C_Y \cup C_Z$, et $C_{Y \times Z \cdot \Delta_X}$ à $C_{Y \cdot Z}$.*

Soit le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} H_Y^p(X, \Omega_X^p) \times H_Z^q(X, \Omega_X^q) \arrow[r, "\cup"] & H_S^{p+q}(X, \Omega_X^{p+q}) \arrow[r, "\Delta_*", "\simeq"'] & H_{\Delta_S}^{p+q}(\Delta_X, \Omega_{\Delta_X}^{p+q}) \arrow[d, "\psi"] \\ H_{Y \times Z}^{p+q}(X \times X, \Omega_{X \times X}^{p+q}) \times H_{\Delta_X}^n(X \times X, \Omega_{X \times X}^n) \arrow[ur, "\Delta^*"] \arrow[rr, "\cup"] & & H_{\Delta_S}^{p+q}(X \times X, \Omega_{X \times X}^{p+q+n}) \end{tikzcd}$$

D'après le corollaire 4.1.2. (ii): $\Delta^*(C_{Y \times Z}) = C_Y \cup C_Z$; d'après la proposition 4.1.3., et le corollaire 4.1.2. (i) $\psi \circ \Delta_*(C_Y \cup C_Z) = \psi \circ \Delta_* \circ \Delta^*(C_{Y \times Z}) = C_{Y \times Z} \cup C_{\Delta_X}$. De même on a: $\psi \circ \Delta_*(C_{Y \cdot Z}) = C_{Y \times Z \cdot \Delta_X}$.

4.1.5. Définitions: Soit V une variété et $(K_V^\cdot, \delta)$ son complexe résiduel, des éléments $f_1, \cdots, f_p \in \Gamma(V, V)$ en position d'intersection complète (la sous-variété Z_i définie par $(f_1, \cdots, f_i)$ est de codimension pure i dans V). Pour toute sous-variété S, on désigne par $\delta_S = P_S \circ \delta$ le composé de la projection $P_S : K_V^\cdot \to \Gamma_S K_V^\cdot$ et de la différentielle δ. On définit un morphisme de modules gradués: $\text{Rés}_{f_1 \cdot f_p} = \delta_{Z_p} \circ \cdots \circ \delta_{Z_i} \circ \cdots \circ \delta_{Z_1} : K_V^{\cdot} \to \Gamma_{Z_p} K_V^{\cdot}$. Supposons V de dimension pure n, de points génériques $(v_i)_{i \in I}$ et soit $w \in \sum_i \Omega^n_{V, v_i}$, on note aussi $\text{Rés}_{f_1 \cdots f_p}(w)$ l'élément $\text{Rés}_{f_1 \cdots f_p}(\theta(w))$, où $\theta : \sum_i \Omega^n_{V, v_i} \to K_V^{-n}$ est le morphisme canonique. Si $w \in \Omega^n_V$ et la suite (f_i) est régulière dans $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$, on a

$$\text{Rés}_{(f_i)}\left(\frac{w}{\prod_i f_i}\right) = \begin{bmatrix} w \\ f_1 \cdots f_p \end{bmatrix}.$$

4.1.6. PROPOSITION :*Supposons X séparable sur k et soit deux sous-variétés intègres Y et Z de codimension respective p et q dans X, d'intersection S, sous-variété intègre de codimension $p+q$ dans X et de point générique s. Il existe une suite régulière $(f_i)_{i \in [1, p]}$ dans $\mathcal{O}_{X,s}$, qui admet Y comme composante irréductible au voisinage de s, et tel que les restrictions f_i' des f_i à Z soient en position d'intersection complète géomètrique au voisinage de s. Pour tout symbole*

$$\theta = \begin{bmatrix} \varphi \\ f_1^m \cdots f_p^m \end{bmatrix} \in H^p_Y(X, \Omega^p_X),$$

le cup-produit avec la classe fondamentaleC_Z:

$$\theta \cup C_Z \in \text{Hom}_Z(\Omega_Z^{n-p-q}[n-p-q], K_Z^{\cdot})$$

fait correspondre à $w \in \Gamma \Omega_Z^{n-p-q}$ l'élément

$$\text{Rés}_{f_1' \cdots f_p'}\left(\frac{\varphi/Z \wedge w}{f_1'^m \cdots f_p'^m}\right) \in \Gamma K_Z^{\cdot}.$$

Construction d'une suite (f_i)

Soient P_Y et P_Z les idéaux de Y et Z dans $\mathcal{O}_{X,s}$; on prend f_1 dans $P_Y - P_Z$. Les idéaux premiers minimaux $(P_{1,l})_{l \in L}$, [resp. $(P'_{1,l'})_{l' \in L'}$] contenant f_1 (resp. $(f_1)+P_Z$) sont de codimension 1 (resp. $q+1$); donc $P_Y - \{(U_l P_{1,l}) \cup (U_{l'} P_{1,l'})\}$ n'est pas vide, sinon y serait de codimension au plus 1 pour $P_Y \subset P_{1,l}$, ou S serait de codimension au plus $q+1$ pour $P_Y \subset P'_{1,l'}$; ce qui permet de choisir f_2, et par récurrence la suite $(f_i)_{i \in [1,p]}$.

Calcul du cup-produit

Soit $(t_1, \cdots, t_q)$ un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,z}$ au point générique z de Z. On peut construire une suite régulière $(g_1, \cdots, g_q)$ dans $\mathcal{O}_{X,s}$, qui admet Z comme composante irréductible en s, et qui forme avec la suite $(f_i)_{i \in [1,p]}$ un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,s}$. Il existe une matrice carrée A à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,z}$ tel que:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ g_q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t_1 \\ \cdot \\ t_q \end{pmatrix}$$

puisque les éléments $g_i \in \mathfrak{M}_z \mathcal{O}_{X,z}$, et les (t_i) engendrent l'idéal maximal. La classe fondamentale C_Z étant régulière en s, peut être représentée par un symbole

$$\begin{bmatrix} \psi \\ g_1, \cdots, g_q \end{bmatrix} \in H^q_Z(X, \Omega^q_X)$$

avec $\psi \in \Omega^q_{X,s}$. On a:

$$\begin{bmatrix} |A| dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \\ g_1, \cdots, g_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ g_1, \cdots, g_q \end{bmatrix}$$

dans $H^q_z(\Omega^q_X)$ et $|A|\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q = \psi$ modulo $(g_1, \cdots, g_q)\Omega^q_{X,z}$.

D'après le corollaire 4.1.2. (i) et le calcul direct de la différentielle de $K^{\cdot}_X$, le cup-produit

$$\theta \cup C_Z = \begin{bmatrix} \psi \wedge \varphi \\ g_1 \cdots g_q, f_1^m \cdots f_p^m \end{bmatrix} = \text{Rés}_{g_1 \cdots g_q f_1 \cdots f_p} \left(\frac{\psi \wedge \varphi}{g_1 \cdots g_q, f_1^m \cdots f_p^m} \right)$$

$$= \text{Rés}_{f'_1 \cdots f_{p'}} \begin{bmatrix} \dfrac{\psi \wedge \varphi}{f_1^m \cdots f_p^m} \\ g_1 \cdots g_q \end{bmatrix}.$$

D'après ce qui précède, pour tout $w \in \Gamma \Omega_X^{n-p-q}$:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\psi \wedge \varphi \wedge w}{f_1^m \cdots f_p^m} \\ g_1 \cdots g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| \dfrac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge \varphi \wedge w}{f_1^m \cdots f_p^m} \\ g_1 \cdots g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge \varphi \wedge w}{f_1^m \cdots f_p^m} \\ t_1 \cdots t_q \end{bmatrix}$$

dans $H^q_z(\Omega^n_X)$. Enfin, considérant l'isomorphisme: $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{Z,z}, H^q_z(\Omega^n_X)) \simeq \Omega^{n-q}_{Z,z}$, on obtient

$$\frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge \varphi/Z \wedge w/Z}{f_1'^m \cdots f_p'^m} \in \Omega^{n-q}_{Z,z},$$

c'est-à-dire, $\theta \cup C_Z \in \mathrm{Hom}(\Omega_Z^{n-q}, K^{\cdot}_Z[-n+p+q])$ et pour $w' \in \Omega^{n-q}_{Z,z}$, l'image

$$\theta \cup C_Z(w') = \text{Rés}_{f_{1'} \cdots f_{p'}} \left(\frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge \varphi/Z \wedge w'}{f_1'^m \cdots f_p'^m} \right) \in H^p_s(\Omega_Z^{n-q}).$$

4.1.7. Proposition: *X étant lisse sur k, soit Y une sous-variété lisse decodimension p dans X, une sous-variété Z intègre de codimension q dans X. Si l'intersection $Y \cap Z$ est propre*:

$$C_Y \cup C_Z = C_{Y \cdot Z} \quad \textit{dans} \quad H^{p+q}_{Y \cap Z}(X, \Omega_X^{p+q}).$$

Le problème étant local, on peut supposer l'intersection $Y \cap Z = S$ intègre de point générique s, et faire un raisonnement local, au voisinage de s. Il existe une suite d'éléments $f_1, \cdots, f_p \in \mathcal{O}_{X,s}$ qui définit Y au voisinage de s.

Cas où Y est définie par une équation f

Supposons Z affine (au voisinage de s) d'algèbre A et soit $f' \in A$ la restriction de f à Z, qui définit S' d'algèbre $A/(f')$. La sous-algèbre intègre S, de même espace topologique que S' est définie par un idéal premier $\mathfrak{P}_S$ dans A. D'après le lemme de normalisation de Noether on peut trouver un morphisme fini injectif $\varphi^*: k[t_1, \cdots, t_{n-q-1}, t] \to A$ tel que $\varphi^*(t) = f'$. On peut donc disposer du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{S} \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\psi'"'] & \tilde{Z} \arrow[d, "\psi"] \\
S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Z \arrow[d, "\varphi"] \\
T^{n-q-1} \arrow[r, shift right, "j"'] & T^{n-q} \arrow[l, shift right, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

i immersion canonique; T^{n-q} l'espace affine d'algèbre $k[t_1, \cdots, t_{n-q-1}, t]$ et T^{n-q-1} défini par $t = 0$, j l'injection canonique et γ la projection canonique, φ un morphisme fini et $\varphi' = \gamma \circ \varphi \circ i$; $\psi: \tilde{Z} \to Z$ est la normalisée de Z et $\tilde{S} = \psi^{-1}(S)$.

D'après la proposition 4.1.6., le cup-produit $C_Y \cup C_Z$ se représente pour l'élément de $\operatorname{Hom}(\Omega_Z^{n-q-1}, K_Z^{\cdot})$:

$$\Omega_Z^{n-q-1} \in w \to \operatorname{Rés}_{f'}\left(\frac{df' \wedge w}{f'}\right) \in K_Z^{\cdot}[-n+q+1].$$

On va voir qu'en fait $C_Y \cup C_Z \in \operatorname{Hom}(\Omega_S^{n-q-1}[n-q-1], K_S^{\cdot})$. Soit z le point générique de Z, $\tilde{f} = \psi^*(f')$ et $\tilde{w} = \psi^*(w)$, on a:

$$Tr(\psi)\left[\frac{d\tilde{f} \wedge \tilde{w}}{\tilde{f}}\right] = \frac{df' \wedge w}{f'} \in \Omega_{Z,z}^{n-q}$$

et

$$Tr(\psi')\left[\operatorname{Rés}_{\tilde{f}}\left(\frac{d\tilde{f} \circ \tilde{w}}{\tilde{f}}\right)\right] = \operatorname{Rés}_{f'}\left(\frac{df' \wedge w}{f'}\right).$$

Soit $b \in P$ et $w = bw_1$ [resp. $w = db \wedge w_1$], un point $\tilde{s}$ générique d'une composante irréductible de $\tilde{S}$; l'anneau $\mathcal{O}_{\tilde{Z},\tilde{s}}$ est de valuation discrète et admet une uniformisante u; on peut écrire $\psi^*(b) = a_1 u^{n_1}$ et $\tilde{f} = a_2 u^{n_2}$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{Z},\tilde{s}}$ où a_1 et a_2 sont inversibles, n_1 et n_2 sont des entiers strictement positifs. Alors la forme

$$\frac{d\tilde{f} \wedge \tilde{w}}{f} = n_2 a_1 u^{n_1 - 1} du \wedge \tilde{w}_1 + a_1 u^{n_1} \frac{da_2 \wedge \tilde{w}_1}{a_2}$$

est régulière en $\tilde{s}$ et son résidu nul [resp.

$$\frac{d\tilde{f} \wedge \tilde{w}}{f} = n_2 u^{n_1 - 1} du \wedge da_1 \wedge \tilde{w}_1 + n_1 a_1 u^{n_1 - 1} \frac{da_2 \wedge du \wedge \tilde{w}_1}{a_2} + u^{n_1} \frac{da_2 \wedge da_1 \wedge \tilde{w}_1}{a_2}$$

est régulière en $\tilde{s}$ et son résidu nul]. On en déduit que

$$\text{Rés}_{\tilde{f}}\left(\frac{d\tilde{f} \wedge \tilde{w}}{\tilde{f}}\right) = \text{Rés}_{f'}\left(\frac{df' \wedge w}{f'}\right) = 0$$

si $i^*w = 0$; c'est-à-dire $C_Y \cup C_Z \in \text{Hom}(\Omega_S^{n-q-1}, K_S^{\cdot})$.

Soit t_1 le point générique de T^{n-q-1}, toute forme $w \in \Omega_{S,s}^{n-q-1}$ se met sous la forme $a'\varphi'^*(w')$ où $a' \in \mathcal{O}_{S,s}$ et $w' \in \Omega^{n-q-1}_{T^{n-q-1}, t_1}$, soit $a \in \mathcal{O}_{Z,s}$ un relèvement de a', la forme $\varphi^* \circ \gamma^*(w')$ est un relèvement de $\varphi'^*(w')$.

D'après les isomorphismes:

$$K_Z^{\cdot} \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}_Z, K_{T^{n-q-1}}^{\cdot}), \; K_S^{\cdot} \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}_S, K_{T^{n-q-1}}^{\cdot})$$

et la formule de la trace ou propriété de normalisation du résidu ([8] R 6 p. 198), on peut écrire: $C_Y \cup C_Z(w) \in \text{Hom}(\varphi'_* \mathcal{O}_S, K_{T^{n-q-1}}^{\cdot})$ fait correspondre à $b' \in \mathcal{O}_{S,s}$ l'élément:

$$\text{Rés}_t\left(\frac{Tr(\varphi)(ab)\gamma^* w' \wedge dt}{t}\right) = \overline{Tr\,\varphi(ab)}w' \in \Omega^{n-q-1}_{T^{n-q-1}, t_1} \subset K_S^{\cdot}.$$

où $b \in \mathcal{O}_{Z,s}$ est un relèvement de b', et la barre au dessus de $Tr\,\varphi(ab)$ désigne sa restriction à T^{n-q-1}.

D'autre part la classe fondamentale $C_S \in \text{Hom}(\Omega_S^{n-q-1}[n-q-1], K_S^{\cdot})$, et $C_S(w) \in \text{Hom}(\varphi'_* \mathcal{O}_S, K_{T^{n-q-1}}^{\cdot})$ fait correspondre à tout $b' \in \mathcal{O}_{S,s}$ l'élément $Tr\,\varphi'(a'b')w' \in \Omega^{n-q-1}_{T^{n-q-1}, t_1}$, d'après la proposition 2.1.2. Enfin la multiplicité d'intersection $i(Y \cdot Z) = \text{long}(\mathcal{O}_{Z,s}/(f'))$, donc on peut conclure avec le lemme suivant:

4.1.8. LEMME: *Soit A et B deux anneaux locaux noethériens intègres, d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$, on suppose $\mathfrak{N}$ engendré par un élément $t \in B$. Soit k' le corps résiduel de A et k celui de B, $P' : A \to k'$ et P: $B \to k$ les projections canoniques $\varphi : B \to A$ un morphisme fini injectif.*

(i) *A est libre sur B*

(ii) *Pour tout élément $d \in A$; $P[Tr_{A/B}(d)] = \lg(A/\varphi(t)A) Tr_{k'/k} P'(d)$.*

(i) L'anneau $A/\varphi(t)A$ étant naturellement plat sur $k \simeq B/(t)$, il suffit de démontrer $T\mathcal{O}r_1^B(A, B/(t)) = 0$, pour conclure que A est plat, donc libre sur B, d'après le Théorème 5.6. dans ([7] 60–61 Exp. IV).

Le produit tensoriel avec A, de la suite exacte $0 \to B \xrightarrow{\times t} B \to B/(t) \to 0$, nous donne la suite exacte $0 \to A \xrightarrow{\times \varphi(t)} A \to A/\varphi(t)A \to 0$ puisque A est intègre, d'où $T\mathcal{O}r_1^B(A, B/(t)) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
k' \arrow[r, "P'_2"] & A' \arrow[r, "P'_1"] & A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ll, bend right, "P'"'] \\
& k \arrow[u] \arrow[ul] & B \arrow[l, "p"]
\end{tikzcd}$$

(ii) Se référant au diagramme, soit $A' = A/(\varphi(t))$. Soit $(a_i)_{i\in[1,n_0]} \in A$ des éléments de A, dont les classes dans k' forment une base sur k; des éléments $(a_i^l(_{i\in[1,n_l]} \in \mathfrak{M}^l$, dont les classes dans $\mathfrak{M}^l A'$ modulo $\mathfrak{M}^{l+1}A'$ forment une base du k' espace vectoriel $\underset{l\in N}{\mathfrak{M}^l A'}/\mathfrak{M}^{l+1}A$. On peut voir facilement que les classes des éléments $\{(a_i \times a_j^l)_{i\in[1;n]}, j \in [1, n_l]\}$ dans A', forment une base sur k (pour $l = 0, a_1^0 = 1$). La longueur de A' est égale à: $lg(A') = \sum_l n_l + 1$ et la dimension de A' sur k: $\dim_k A' = dim_k k' \times lg\, A' = n(\sum_l n_l + 1)$.

Les éléments $(a_i a_j^l)$ forment alors une base finie de A sur B. Soit $d \in A$, et $k \in \mathbb{N}$, tel que $d \in \mathfrak{M}^k - \mathfrak{M}^{k+1}$ (on pose $\mathfrak{M}^0 = A$):

$$da_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{i'} a_j + \sum_{\substack{l \geqq 1,\, \delta\in[1,n_l] \\ j\in[1,n]}} \overline{\alpha_{\delta,j}^{i',l}}\, a_j a_\delta^l,$$

avec $\alpha_j^{i'}$, $\alpha_{\delta,j}^{i',l} \in B$, resp. dans A': $\bar{d}\bar{a}_{i'} = \sum \bar{\alpha}_j^{i'} \bar{a}_j + \sum \alpha_{\delta,j}^{i',l} \bar{a}_j \bar{a}_\delta^l$.

$$da_{i'} a_{j'}^{l'} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{i'} a_j a_{j'}^{l'} + \sum \alpha_{\delta,j}^{i',l} a_j a_\delta^l a_{j'}^{l'};$$

$$\overline{da_{i'} a_{j'}^{l'}} = \sum \bar{\alpha}_j^{i'} \bar{a}_j \bar{a}_{j'}^{l'} + \sum \overline{\alpha_{\delta,j}^{i',l}} \bar{a}_j \bar{a}_\delta^l \bar{a}_{j'}^{l'}.$$

L'élément $\sum \overline{\alpha_{\delta,j}^{i',l}} \bar{a}_j \bar{a}_\delta^l \bar{a}_{j'}^{l'} \in \mathfrak{M}^{l'+1}$; la composante de: $\overline{da_{i'} a_{j'}^{l'}}$ sur $\overline{a_{i'} a_{j'}^{l'}}$ est donc égale à $\bar{\alpha}_{i'}^{i'}$, c'est-à-dire sur la diagonale de la matrice associée à la multiplication par $\bar{d}$ par rapport à la base considérée, on trouve au début:

$$\begin{matrix} \bar{\alpha}_1^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \bar{\alpha}_{i'}^{i'} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \bar{\alpha}_n^n \end{matrix}$$

qui se répète pour $l' \geqq 1$ et $j' \in [1, n_{l'}]$.

On trouve
$$P[Tr_{A/B}(d)] = (\sum_{l\geq 1} n_l + 1) \sum_{i'\in 1}^{n} \alpha_{i'}^{i'}$$
De même on prouve que: $Tr_{k'/k}(P'(d)) = \sum_{i'\in 1}^{n} \bar{\alpha}_{i'}^{i'}$, d'où le résultat cherché.

Cas général

Supposons la proposition vraie dans le cas d'intersection avec une sous-variété lisse de codimension $p-1$. Soit Y' la sous-variété lisse définie au voisinage de s par $(f_2, \cdots, f_p)$, et considérons les cycles premiers $(W_j)_{j\in[1,l]}$ correspondants aux idéaux premiers minimaux à contenir l'idéal de $\mathcal{O}_{X,z}$ engendré par l'idéal de Z et l'élément f_1. Soit $f_{1,j}$ la classe de f_1 dans $\mathcal{O}_{Z,w_j}$ et $n_j = lg(\mathcal{O}_{Z,w_j}/f_{1,j})$ la longueur. Si Y_1 désigne le cycle défini par f_1, le produit d'intersection $Y_1 \cdot Z = \sum n_j w_j$.

D'après l'hypothèse de récurrence: $C_{Y'\cdot W_j} = C_Y \cup C_{W_j}$, et d'après ce qui précède: $C_{Y_1\cdot Z} = C_{Y_1} \cup C_Z = \sum_{j\in[1,l]} n_j C_{W_j}$, enfin l'associativité du produit d'intersection et du cup-produit permet d'écrire:
$$C_{Y\cdot Z} = C_{(Y'\cdot Y_1)\cdot Z} = C_{Y'\cdot(Y_1\cdot Z)} = \sum_{j\in[1\ l]} n_j C_{Y'\cdot W_j} = \sum_j n_j C_{Y'} \cup C_{W_j}$$
$$= C_{Y'} \cup (C_{Y_1} \cup C_Z), = (C_{Y'} \cup C_{Y_1}) \cup (C_Z) = C_Y \cup C_Z.$$

4.1.9. Théorème: *Soit Y et Z deux cycles de X, de codimension pure p et q de produit d'intersection définie $Y \cdot Z$. On a l'égalité dans $H^{p+q}_{Y\cap Z}(X, \Omega_X^{p+q})$: $C_Y \cup C_Z = C_{Y\cdot Z}$.*

Se ramener au cas de la proposition 4.1.7., après Réduction à la diagonale 4.1.4.

4.1.10 Corollaire: *Supposons X quasi-projective, deux cycles équivalents dans X ont même classe fondamentale.*

Soit $P: X\times k \to k$ la projection canonique, t le paramètre sur k et $T = P^*(t)$. Les classes fondamentales de $X_0 = X\times\{0\}$ et $X_1 = X\times\{1\}$ sont égales: Considérons la résolution de $\Omega^1_{X\times k}$ par $K^{\cdot}_{X\times k}(\Omega^1_{X\times k})$, la classe C_{X_0} se représente par le symbole $[{}^{dT}_{T}]$ (resp. C_{X_1} par $[{}^{dT}_{T-1}]$). Soit la forme rationnelle $dT/T(T-1)$:
$$\delta_{X\times k}\left(\frac{dT}{T(T-1)}\right) = \begin{bmatrix} dT/T-1 \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dT/T \\ T-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dT \\ T-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} dT \\ T \end{bmatrix}$$
$$= C_{X_1} - C_{X_0}$$
les deux classes sont cohomologues.

Soit, maintenant deux cycles de X équivalents: Y et Z, il existe par définition un cycle D de $X\times k$ tel que $D\cdot X_0 = Y$ et $D\cdot X_1 = Z$ soient définis. On a:
$$C_Y = C_D \cup C_{X_0} = C_D \cup C_{X_1} = C_Z.$$

5. La classe fondamentale en cohomologie de De Rham

5.1.1. Soit x un point de codimension j dans X, un voisinage V de x affine, un entier i et $d\colon \Omega_X^i \to \Omega_X^{i+1}$ la différentielle. On peut utiliser le diagramme commutatif I, déduit de la suite exacte: $0 \to \Gamma_{\bar{x}\cap V}(*) \to \Gamma_V(*) \to \Gamma_{V-(\bar{x}\cap V)}(*)$ [[7]. Local cohomology 60–61] pour calculer $H_x^j(d)$: $H_x^j(\Omega_X^i) \to H_x^j(\Omega_X^{i+1})$. Soit $(f_1, \cdots, f_j)$ un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$ défini au voisinage V de x, le recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de V défini par $(f_l)_{l\in[1,j]}$.

$$\begin{tikzcd}
H^{j-1}_{V-(\bar{x}\cap V)}(\Omega^i) \arrow[r, "\overset{\delta}{\sim}"] \arrow[d, "H^{j-1}(d)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & H^{j}_{\bar{x}\cap V}(\Omega^i) \arrow[d, "H^j(d)"] \\
H^{j-1}_{V-(\bar{x}\cap V)}(\Omega^{i+1}) \arrow[r, "\overset{\delta}{\sim}"] & H^{j}_{\bar{x}\cap V}(\Omega^{i+1})
\end{tikzcd}$$

On peut utiliser le complexe de Čech: $C^\cdot(\mathcal{U}, *)$ et l'isomorphisme de connexion δ du diagramme I, explicité dans [(6) ch. III, § 1.], pour calculer $H_x^j(d)$.

On trouve, avec les notations des symboles, où $w \in \Omega_{X,x}^i$:

$$H_x^j(d)\left(\begin{bmatrix} w \\ f_1^n \cdots f_j^n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (f_1^n \cdots f_j^n)dw - d(f_1^n \cdots f_j^n) \wedge w \\ f_1^{2n} \cdots f_j^{2n} \end{bmatrix}$$

5.1.2. Proposition: *Pour toute sous-variété Y de X, on peut associer une classe fondamentale de Y dans $H_{DR}^\cdot(X, \Omega_X^\cdot)$, à support dans Y. Si Y est irréductible de point générique y, de codimension p et $(t_1, \cdots, t_p)$ un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,y}$, alors le symbole*

$$\begin{bmatrix} dt_1 \cdots dt_p \\ t_1 \cdots t_p \end{bmatrix} \in H_y^p(\Omega_X^p)$$

définit la classe de Y dans $H_Y^{2p}(X, \Omega_X^\cdot)$.

Pour tout $i \in [0, n]$, le complexe $K_X^\cdot(\Omega_X^i) = K_X^\cdot \otimes (\Omega_X^n)^V \otimes \Omega_X^i$ est une résolution de Ω_X^i par des faisceaux quasi-cohérents injectifs. Le complexe double $K_X^\cdot(\Omega_X^\cdot)$ permet donc, de calculer la cohomologie de De Rham de X; il est muni d'une différentielle horizontale δ_X déduite de celle de $K_X^\cdot$ et d'une différentielle verticale d_X déduite de celle de $\Omega_X^\cdot$. On a vu dans les calculs précédents (§ 2), que l'élément

$$\begin{bmatrix} dt_1 \cdots dt_p \\ t_1 \cdots t_p \end{bmatrix} \in H_y^p(\Omega_X^p)$$

est annulé par δ_X, et ne dépend pas du choix des t_i. La différentielle d_X appliqué à $H_y^p(\Omega_X^p)$ est égal à $H_y^p(d)$, calculé ci-dessus.

Soit:

$$d_X\begin{bmatrix} t_i \wedge dt_i \\ t_1\cdots t_p \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (t_1\cdots t_p)d(dt_1\wedge\cdots\wedge dt_p) - d(t_1\cdots t_p)\wedge dt_1\wedge\cdots\wedge dt_p \\ t_1^2\cdots t_p^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Le cas d'une variété quelconque se déduit facilement du cas irréductible.

5.1.3. Soit X et X' deux variétés lisses sur k; comme au § 3, les complexes $K_X^{\cdot}(\Omega_X^{\cdot}) \otimes_k K_{X'}^{\cdot}(\Omega_{X'}^{\cdot})$ et $K_{X\times X'}^{\cdot}(\Omega_{X\times X'}^{\cdot})$ sont quasi-isomorphes, ce qui permet de définir un morphisme

$$H_{DR}^{2p}(X, \Omega_X^{\cdot}) \otimes H_{DR}^{2p'}(X', \Omega_{X'}^{\cdot}) \to H_{DR}^{2(p+p')}(X\times X', \Omega_{X\times X'}^{\cdot}),$$

compatible avec le morphisme de Künneth en cohomologie de De Rham. Si C_Y, classe fondamentale d'une sous-variété Y de X, est représenté par le symbole

$$\begin{bmatrix} dt_1\wedge\cdots\wedge dt_p \\ t_1\cdots t_p \end{bmatrix}$$

resp. $C_{Y'}$, classe de Y' dans X', est représenté par

$$\begin{bmatrix} dt' \wedge\cdots\wedge dt'_{p'} \\ t'_1\cdots t'_{p'} \end{bmatrix}$$

l'image de $C_Y \otimes C_{Y'}$ est le symbole

$$\begin{bmatrix} dt_1\wedge\cdots\wedge dt_p\wedge dt'_1\wedge\cdots\wedge dt'_{p'} \\ t_1\cdots t_p t'_1\cdots t'_{p'} \end{bmatrix}$$

classe fondamentale de $C_{Y\times Y'}$ dans $X\times X'$.

5.1.4. De même, on peut déduire facilement la compatibilité du produit d'intersection des cycles avec le cup-produit en cohomologie de De Rham, à partir du résultat en cohomologie de Hodge au § 4. Soit Y une sous-variété de codimension pure p dans X, resp. Z de codimension pure q dans X. Considérons le complexe double $G^{\cdot}(\Omega_X^{\cdot})$, résolution flasque de Godement de $\Omega_X^{\cdot}$, et la suite spectrale de terme $E_2^{ij} = H^i(H_Y^j(X, \Omega_X^l)_{l\in Z})$, [resp. $E_2'^{i',j'} = H^{i'}(H_Z^{j'}(X, \Omega_X^l)_{l\in Z}), E_2''^{i''j''} = H^{i''}(H_{Y\cap Z}^{j''}(X, \Omega_X^L)_{l\in Z})$]. convergente vers $H_Y^{i+j}(X, \Omega_X^{\cdot})$, [resp. $H_Z^{i'+j'}(X, \Omega_X^{\cdot}), H_{Y\cap Z}^{i''+j''}(X, \Omega_X^{\cdot})$], Le cup-produit définit un accouplement $E_2^{i,j}\times E_2'^{i',j'} \to E_2''^{i+i',j+j'}$ qui induit à la limite le cup-produit de cohomologie de De Rham. D'après le § 4 et 5.1.2.: $C_Y \cup C_Z = C_{Y\cdot Z}$ dans $E_2''^{i+i',j+j'}$, donc l'égalité reste vraie à la limite.

6. La classe fondamentale d'un cycle en géométrie analytique

La construction du complexe dualisant d'un espace analytique ([10]. § 5) se déduit du cas algébrique; en un point x, le complexe dualisant de l'anneau local en x, donne la fibre du complexe analytique.

Soit X une variété analytique de dimension n sur $\mathbb{C}$, et Y un sous-espace analytique fermé, de codimension pure p dans X.

Pour définir la classe fondamentale de Y dans $H^p(X, \Omega_X^p)$, il suffit de définir un élément fondamental dans $\mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_Y, \Omega_X^p)$, ou une section globale qui est un cycle dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_Y, K_X^{-n+p}(\Omega_X^p))$. Soit $(y_i)_{i\in I}$ les idéaux premiers dans $\mathcal{O}_{X,x}$ des composantes irréductibles Y_i du germe de Y en un point $x \in X$; la fibre en x de ce dernier faisceau, s'écrit:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x}, K_{X,x}^{-n+p}(\Omega_X^p)) \simeq \sum_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x(y_i)}}(\mathcal{O}_{Y,x(y_i)}, H^p_{(y_i)}(\Omega^p_{X,x}))$$

$-\mathcal{O}_{X,x(y_i)}$ désigne le localisé en (y_i).

Pour tout indice $i \in I$, soit $(t_x^{1,i}, \cdots, t_x^{p,i})$ un système régulier de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x(y_i)}$, l'élément

$$\sum_{i\in I}\left(1 \to \begin{bmatrix} dt_x^{1,i} \wedge \cdots \wedge dt_x^{p,i} \\ t_x^{1,i} \cdots t_x^{p,i} \end{bmatrix}\right)$$

correspond à la classe fondamentale du germe (Y, x). Il reste à voir que ça varie d'une manière continue en x.

Soit K un polydisque compact (modulo une carte dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$), voisinage de x dans X. On peut supposer K assez petit pour vérifier la condition: Pour tout $i \in I$ et tout $z \in Y_i \cap \mathring{K}$ les images de $(t_x^{\lambda,i})_{\lambda\in[1,p]}$ dans $\mathcal{O}_{X,z,Y_i}$ sont définies, et forment un système régulier de paramètres. Comme la classe fondamentale locale ne dépend pas du choix du système de paramètres, on voit que ces classes fondamentales locales se recollent bien.

Remarque: On démontre de même que le produit cartésien (resp. le cup-produit) des classes fondamentales, est compatible avec le produit (resp. le produit d'intersection des cycles).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bass: On the ubiquity of Gorenstein Rings. *Math. Zeitschrift 82* (1963) 8–28.

[2] F. El Zein: Résidus en Géom. Algébrique. *Compositio Mathematica 23* (1972) 379–405.

[3] R. Godement: *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.

[4] A. Grothendieck: *The cohomology theory of abstract algebraic varieties.* International congress of Math. Edinburgh 1958. Cambridge univ. Press. 1960 p. 103–118.

[5] A. GROTHENDIECK: Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. *Séminaire Bourbaki no. 149*, IHP Paris 1957.

[6] A. GROTHENDIECK: *E.G.A. éléments de Géom. Algébrique*. I.H.E.S. France.

[7] A. GROTHENDIECK: *S.G.A. Séminaire de Géom. Algébrique*. I.H.E.S. France.

[8] R. HARTSHORNE: *Residues and duality*. Springer Lecture notes no. 20 (1966).

[9] R. HARTSHORNE: *Ample subvarieties*. Springer Lecture notes no. 156 (1970)

[10] RAMIS-RUGET: Complexe dualisant et théorèmes de dualité en Géom. analytique. IHES 38, France.

[11] J. P. SERRE: Algèbre Locale et Multiplicités. *Lecture notes in Maths. no. 11* (1965).

[12] ZARISKI-SAMUEL: *Commutative Algebra*. 2 vol. Van Nostrand, Princeton.

(Oblatum 25–IV–1973 & 23–I–1974)

Fouad El Zein
Université Paris VII – Mathématiques
75221 – Paris – France