YVES COLIN DE VERDIÈRE

Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. II

Compositio Mathematica, tome 27, nº 2 (1973), p. 159-184

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__27_2_159_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 27, Fasc. 2, 1973, pag. 159-184
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

SPECTRE DU LAPLACIEN ET LONGUEURS DES GÉODÉSIQUES PÉRIODIQUES II

Yves Colin de Verdière

Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne C^∞ de dimension d connexe compacte; cet article a pour but de montrer l'existence de développements asymptotiques reliant le spectre $(\lambda_n)_{n\in N}$ du laplacien de (M, g) opérant sur les fonctions de $C^\infty(M; C)$ aux géodésiques périodiques. Nous obtenons dans un cas générique un développement de

$$\sum_{n\in N} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{z}\right) = \int_M E\left(\frac{1}{z};\ x, x\right) v_g(x)$$

(E désigne la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et v_g la mesure canonique sur (M, g)) quand $z = \xi_0 + iy(\xi_0 > 0$ fixé) qui s'écrit comme une somme de termes oscillants dont les périodes sont reliées simplement aux longueurs des géodésiques périodiques. La formule trouvée généralise celle obtenue dans [7] pour des variétés de dimension 2 à courbure strictement négative, mais ici la majoration du reste est moins bonne, car on connaît moins bien les géodésiques périodiques. Des formules exactes de ce genre sont connues pour les tores plats (formule de Poisson), pour les variétés de dimension 2 à courbure constante négative ([10]) et aussi pour certains espaces homogènes comme S^2 et S^3 ([3]).

La méthode utilisée consiste à écrire la solution fondamentale de l'équation de la chaleur complexe $E(z; x, y)$ comme somme de la série de perturbation obtenue à partir d'une paramétrix bien choisie et à regarder ce qui se passe dans les différents termes de la série en appliquant la méthode de la phase stationnaire. Une méthode analogue est utilisée par R. Balian et C. Bloch [2] dans l'étude du noyau de Green d'un domaine borné de $\boldsymbol{R}^3$. Quand on fait le calcul, on voit apparaître comme valeurs critiques les carrés des longueurs de géodésiques périodiques. On peut préciser le résultat lorsque l'on fait l'hypothèse que les géodésiques périodiques forment des variétés critiques non dégénérées: on trouve alors la dimension de ces variétés critiques et leur indice modulo 4.

Dans le chap. 1, nous faisons quelques rappels sur l'espace des lacets d'une variété riemannienne compacte et son approximation par des lacets géodésiques par morceaux. Nous introduisons aussi les deux propriétés génériques $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ que nous utiliserons.

Dans le chap. 2, nous faisons des rappels sur la construction de la solution fondamentale à partir d'une paramétrix et démontrons quelques majorations.

Dans le chap. 3, nous introduisons les classes de développements asymptotiques (F_α) et démontrons un théorème d'unicité.

Dans le chap. 4, nous montrons comment la méthode de la phase stationnaire s'applique à des variétés critiques non dégénérées.

Dans le chap. 5, nous donnons l'énoncé du théorème principal et des généralisations au cas d'un laplacien opérant sur les sections d'un fibré et à une formule de trace lorsqu'on se donne une isométrie de (M, g).

Dans le chap. 6, nous démontrons ces théorèmes.

Dans le chap. 7, nous appliquons les résultats de V à la recherche de propriétés géométriques ou topologiques de (M, g) que l'on peut déduire de la connaissance du spectre du laplacien; notamment, nous envisageons le cas des variétés à géodésiques toutes périodiques et le cas de la propriété $(\mathscr{P}_2)$.

1. Espace des lacets d'une variété riemannienne compacte

Soit $\Omega(M)$ l'espace des applications $\gamma : S^1 \to M$ absolument continues et telles que $\dot{\gamma}$ soit de carré sommable. On peut munir $\Omega(M)$ d'une structure de variété hilbertienne: les vecteurs tangents X à $\Omega(M)$ en γ sont les champs de vecteurs le long de γ absolument continus et de dérivée $\dot{X} = D_{\dot{\gamma}}X$ de carré sommable. La structure hilbertienne est donnée par (par exemple [9] p. 112)

$$\langle X, Y\rangle = \int_{S^1} \{(X(t), Y(t))_{\gamma(t)} + (\dot{X}(t), \dot{Y}(t)_{\gamma(t)}\} \mathrm{d}t$$

où dt désigne la mesure transportée de la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R}$ par l'identification que nous ferons toujours de S^1 à $[0, 1]$.

La fonction *énergie* E_0 sur $\Omega(M)$ est

$$\gamma \rightsquigarrow \int_{S^1} |\dot{\gamma}|^2.$$

Cette fonction est différentiable et ses points critiques sont les géodésiques périodiques de (M, g), la valeur critique correspondante est le carré de la longueur de cette géodésique. Nous *noterons* $\mathscr{L}$ l'ensemble de ces longueurs. Un élément $L \in \mathscr{L}$ *sera dit* (ND) si l'ensemble des points critiques correspondant à la valeur critique L^2 est une réunion finie de sous-variétés critiques connexes compactes non dégénérées au sens de [13] p. 46. W étant une telle variété critique, *nous posons* $n(W) = \dim(W)-1$ *et* $j(W) =$ indice de E_0 sur W. *Ce sont la nullité et l'indice des géodésiques périodiques éléments de* W.

Nous ferons intervenir les propriétés $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ de (M, g): $(\mathscr{P}_1)$ *Toutes les* $L \in \mathscr{L}$ *sont* (ND).

$(\mathscr{P}_2)$ *Toutes les* $L \in \mathscr{L}-\{0\}$ *sont* (ND), *de nullité* 0 *et si* γ *est une géodésique périodique de longueur* L, *la variété critique d'énergie* L^2 *n'a que deux composantes connexes*:

$$W_+ = \{(t \rightsquigarrow \gamma(t+a)) | a \in [0, 1[\}$$
$$W_- = \{(t \rightsquigarrow \gamma(a-t)) | a \in [0, 1[\}$$

(i.e. les géodésiques périodiques sont isolées, non dégénérées, et de longueurs deux à deux distinctes).

On peut facilement montrer à partir du résultat d'Abraham ([1]) sur les 'bumpy metrics' que les propriétés $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont génériques.

Nous allons construire, comme le fait Milnor ([14] p. 88–92), pour l'espace des chemins joignant deux points p et q, des approximations de $\Omega(M)$ par des sous-variétés de dimension finie dont les éléments sont des lacets géodésiques par morceaux.

Notons

$$X_n = \{(u_0, \cdots, u_{n-1}) | \forall i \in \{0, \cdots, n-1\}, u_i \in]0, 1[, \sum_{i=0}^{n-1} u_i = 1\}$$

et pour

$$U \in X_n, t_0 = 0, t_1 = u_0, \cdots, t_i = \sum_{j=0}^{i-1} u_j, \cdots, t_n = 1;$$

$\overline{xy}$ la distance riemannienne de x à y, ρ le rayon d'injectivité de (M, g) et *on définit l'ouvert*

$$M_0^n = \{(x_0, \cdots, x_{n-1}) \in M^n | \forall i \in \{0, \cdots, n-1\}, \overline{x_i x_{i+1}} < \rho \text{ en posant } x_n = x_0\}$$

du produit riemannien M^n.

Définissons pour $U \in X_n$ un plongement j_U de M_0^n dans $\Omega(M)$ par: $j_U((x_0, \cdots, x_{n-1})) =$ le lacet γ tel que $\gamma(t_i) = x_i$ et $\gamma_{[t_i, t_{i+1}]}$ est la géodésique minimisante de x_i à x_{i+1} paramètrée proportionnellement à l'arc. On a

$$E_0 \circ j_U((x_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i};$$

on note $E_U = E_0 \circ j_U$.

PROPOSITION (1.1): *La restriction de j_U aux points critiques de E_U est une bijection de cet ensemble sur les points critiques de E_0 d énergie inférieure à $L_U^2 = (\rho/\text{Max}(u_i))^2$. De plus W est une variété critique non dégénérée de E_0 d'énergie inférieure à L_U^2 si et seulement si $j_U^{-1}(W)$ est une variété critique non dégénérée de E_U. Les indices et nullités respectives sont alors égaux.*

PROPOSITION (1.2): *Soit $h: X_n \times M_0^n \to X_n \times \Omega(M)$ définie par $h = Id_{X_n} \times j_U$ et $\tilde{E}: X_n \times M_0^n \to \boldsymbol{R}$ par $\tilde{E}(U, (x_i)) = E_0 \circ J_U((x_i))$. Alors h est un plongement et définit une bijection des points critiques de $\tilde{E}$ sur les couples (U, γ) tels que γ soit une géodésique périodique de longueur $L_\gamma < \rho/\text{Max}(u_i)$. De plus, si W est une variété critique connexe non dégénérée de E_0 d'énergie $L^2 < (n\rho)^2$, $h^{-1}(X_n \times W)$ est une variété critique connexe non dégénérée de $\tilde{E}$ de dimension $n(W)+n$ et d'indice $j(W)$.*

2. Construction de la solution fondamentale complexe de l'équation de la chaleur

Rappelons la définition suivante ([7]):

(2.1) *Une application $E: \boldsymbol{C}^+ \times M \times M \to \boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^+ = \{z \in \boldsymbol{C} | \text{Re}(z) > 0\})$ sera dite solution fondamentale complexe de l'équation de la chaleur* (S.F.C.E.C.) *si*:
(i) *E est holomorphe par rapport à z, C^2 au moins par rapport à x et y et vérifie $\partial E/\partial z + \Delta_y E = 0$.*
(ii) *Pour toute fonction continue f sur M et tout α, avec $|\alpha| < \pi/2$, on a*:

$$\lim_{|z|\to 0 \text{ et } |\text{Arg}(z)| \leqq \alpha} \left(\int_M E(z; x, y) f(y) v_g(y) \right) = f(x).$$

L'existence et l'unicité d'une S.F.C.E.C. sont classiques et peuvent se démontrer en prolongeant à t dans $\boldsymbol{C}^+$ les calculs de [4] p. 204 à 215. Nous allons reprendre cette construction afin de fixer les notations et de donner quelques majorations utiles pour la suite.

Etant donnés ρ_0 et ρ_1 vérifiant $0 < \rho_0 < \rho_1 < \rho$ nous nous donnons une fonction $\eta: \boldsymbol{R} \to [0, 1]$, C^∞ et telle que $\eta(t) = 1$ pour $t \leqq \rho_0$, $\eta(t) = 0$ pour $t \geqq \rho_1$ et $\eta'(t) < 0$ pour $t \in]\rho_0, \rho_1[$. Reprenant les notations de [4], nous définissons la paramétrix H_k par

$$\text{(2.2)} \quad H_k(z; x, y) = \eta(\overline{xy}) \cdot (4\pi z)^{-d/2} \cdot \exp\left(-\frac{\overline{xy}^2}{4z}\right) (U_0(x, y) + \cdots + z^k U_k(x, y))$$

(les puissances de z pour z dans $\boldsymbol{C}^+$ sont définis par prolongement holomorphe des puissances usuelles sur $\boldsymbol{R}_*^+$) et posons

$$L_k = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_y\right) H_k,$$

donc:

$$L_k(z; x, y) = (4\pi z)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\overline{xy}^2}{4z}\right)\left(\sum_{i=-1}^{k} V_i(x, y) z^i\right) \tag{2.3}$$

où les V_i sont C^∞ sur $M \times M$ et vérifient:

$$\forall i \in \{-1, \cdots, k-1\}, \operatorname{supp}(V_i) \subset \{\rho_0 \leqq \overline{xy} \leqq \rho_1\} \tag{2.4}$$

et Supp $(V_k) \subset \{\overline{xy} \leqq \rho_1\}$

$$V_{-1}(x, y) = \eta'(\overline{xy}) \cdot \overline{xy} U_0(x, y) \tag{2.5}$$

et donc $V_{-1}(x, y) < 0$ pour $\rho_0 < \overline{xy} < \rho_1$.

On peut alors écrire les produits de compositions qui permettent de calculer E de la manière suivante:

$$(L_k)^{*n} * H_k(z; x, y) = z^n \int_{M^n \times X_{n+1}} L_k(zu_0; x, x_1) \cdots L_k(zu_{n-1}; x_{n-1}, x_n) \times H_k(zu_n; x_n, y) \bigotimes_{i=1}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

où μ_n est la mesure homogène de masse $1/n!$ sur le simplexe X_{n+1}. Soit:

$$(L_k)^{*n} * H_k(z; x_0, x_{n+1}) = \int_{M^n \times X_{n+1}} \exp\left(-\frac{1}{4z}\sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}\right) \cdot P_n^k\left(\frac{1}{z}; U; x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}\right) \cdot \bigotimes_{i=1}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \tag{2.6}$$

avec

$$P_n^k(z; U; (x_i)) = z^{-n} \prod_{i=0}^{n-1} \left\{\left(\frac{z}{4\pi u_i}\right)^{d/2} \sum_{j=-1}^{k} V_j(x_i, x_{i+1}) \left(\frac{u_i}{z}\right)^j\right\} \times \left(\frac{z}{4\pi u_n}\right)^{d/2} \left\{\sum_{j=0}^{k} U_j(x_n, x_{n+1}) \left(\frac{u_n}{z}\right)^j \eta(\overline{x_n x_{n+1}})\right\} \tag{2.7}$$

$$P_n^k(z; U; (x_i)) = \sum_{l=l_0}^{(n+1)d/2} p_{n,l}^k(U; (x_i)) \cdot z^l \qquad (2l_0 \in \boldsymbol{Z}) \tag{2.8}$$

en particulier

$$p_{n,(n+1)d/2}^k(U; (x_i)) = \left\{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{V_{-1}(x_i, x_{i+1})}{u_i \cdot (4\pi u_i)^{d/2}}\right\} \frac{U_0(x_u, x_{n+1}) \cdot \eta(\overline{x_n x_{n+1}})}{(4\pi u_n)^{d/2}}$$

est indépendant de k.

Posons

$$|P_n^k|(z;U,(x_i)) = \sum_{l=l_0}^{(n+1)d/2} |p_{n,l}^k(U;(x_i)| \cdot |z|^l,$$

nous avons la:

Proposition (2.9): *Si $k > d/2$ et z tel que $Re(z) = \xi_0 > 0$ fixés, il existe des nombres C_1 et C_2 indépendants de n, tels que*:

$$\int_{M^n \times X_{n+1}} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}\right] \cdot |P_n^k|(z;U;(x_i)) \bigotimes_{i=1}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$
$$\leqq C_1 \cdot C_2^n \cdot |z|^{(n+1)d/2} \cdot \left(\overline{n\left(k - \left[\frac{d}{2}\right]\right)!}\right)^{-1}.$$

Il est clair à partir de 2.2 à 2.5 que, pour z tel que $\mathrm{Re}(z) = \xi_0$ et $u \in]0,1[$, on a, en posant

$$|H_k|(z;x,y) = \eta(\overline{xy}) \cdot |4\pi z|^{-d/2} \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \overline{xy}^2\right)$$
$$\cdot \sum_{i=0}^{k} |U_i(x,y)| \cdot |z|^i$$

et de même pour $|L_k|$ à partir de L_k:

$$|L_k|\left(\frac{u}{z};x,y\right) \leqq C_3 \cdot u^{k-d/2}|z|^{d/2+1}$$

et

$$|H_k|\left(\frac{u}{z};x,y\right) \leqq C_4 \cdot \exp\left(\frac{-\xi_0}{4} \cdot \frac{\overline{xy}^2}{u}\right) \cdot |z|^{d/2} \cdot u^{-d/2}.$$

Une intégration par rapport à x_n montre que:

$$\int_{M^n \times X_{n+1}} \left[\prod_{i=0}^{n-1} |L_k|\left(\frac{u_i}{z};x_i,x_{i+1}\right)\right] |H_k|\left(\frac{u_n}{z};x_n;x_{n+1}\right)$$
$$\times \bigotimes_{i=1}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \leqq C_5 \cdot C_6^n \cdot |z|^{(n+1)d/2}$$
$$\times \int_{\{u_i \geqslant 0; \sum_{i=0}^{n-1} u_i \leqslant 1\}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} u_i\right)^{k-d/2} . du_0 \cdots du_{n-1}.$$

On en déduit 2.9 par une estimation de cette dernière intégrale.

Proposition (2.10): *Soit* $C_{\xi_0} = \{z |\ \mathrm{Re}(z) \geqq \xi_0 > 0\}$, *la S.F.C.E.C. sur M vérifie la majoration suivante*:

$$\forall \xi_0 > 0, \forall \alpha > 0; \exists C \text{ et } C' > 0 \text{ telles que}:$$

$$\forall z \in C_{\xi_0}, \left|E\left(\frac{1}{z};x,y\right)\right| \leqq C \cdot \exp(C' \cdot |z|^\alpha).$$

En vertu de la proposition 2.9 il suffit de choisir k tel que

$$k-\left[\frac{d}{2}\right] > \frac{d}{2\alpha}$$

et d'utiliser le fait que

$$E = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L_k^{*n} * H_k .$$

3. Les développements (F_α)

DÉFINITION (3.1): *Soit $f: \boldsymbol{C}^+ \to \boldsymbol{C}$ une fonction majorée par une exponentielle sur la droite* Re $(z) = \xi_0$, *on pose pour $(\sigma, t) \in \boldsymbol{R}_*^+ \times \boldsymbol{R}$:*

$$\hat{f}(\sigma, t) = \int_{\boldsymbol{R}} f(\xi_0+iy) \exp\left[ity-\sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right] \cdot \mathrm{d}y.$$

(ξ_0 est supposé fixé et ne figure donc pas dans les notations).

LEMME (3.2): *Soit*

$$P: z \mapsto \sum_{p=p_0}^{p_1} a_p z^{p/2} (p_0, p_1, p \in \mathrm{Z})$$

et

$$|P|: z \mapsto \sum_{p=p_0}^{p_1} |a_p||z|^{p/2},$$

on a pour $\sigma \leqq 1$:

(3.3) *Pour $p_0 \geqq 0$ et $t \leqq 0$:*

$$|\hat{P}(\sigma, t) \leqq C\Gamma\left(\frac{p_1}{2}\right) \cdot \sigma^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma}\right) |P| \left(2\xi_0 + \frac{|t|+2}{\sigma}\right)$$

(3.4) *Pour $p_0 \geqq 0$ et $|t| > 0 : \hat{P}(\sigma, t) = 0(\sigma^{-\frac{1}{2}})$ uniformément pour $|t| \geqq t_0 > 0$*

(3.5) *Pour $p_1 \leqq 0$:*

$$|\hat{P}(\sigma, t)| \leqq \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |P|(\xi_0).$$

DÉMONSTRATION: (3.5) est facile. Pour montrer le reste, posons:

$$I_k(\sigma, t) = \int_{\boldsymbol{R}} (\xi_0+iy)^{k/2} \cdot \exp\left(ity-\sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right) \cdot \mathrm{d}y$$

et faisons le changement de variable

$$\zeta = y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \frac{it}{2\sigma}.$$

En appliquant la formule de Cauchy, il vient si k est pair ou si $t \leqq 0$:

$$I_k(\sigma, t) = \exp\left(\frac{it}{\sqrt{\sigma}} - \frac{t^2}{4}\right) \cdot \int_{\boldsymbol{R}} \left(\xi_0 - \frac{t}{2\sigma} + i\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \zeta\right)\right)^{k/2} \cdot \exp(-\sigma\zeta^2) \cdot \mathrm{d}\zeta.$$

On en déduit 3.3, et 3.4 pour P ne contenant que des puissances entières de z. Il reste donc à montrer 3.4 pour $P(z) = z^{n-\frac{1}{2}}$ $(n \in \boldsymbol{N})$. Utilisant

$$\int_{\boldsymbol{R}} \exp(-zx^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}},$$

il vient:

$$\hat{P}(\sigma, t) = \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}} \exp\left(-\xi_0 x^2 + iy(t-x^2) - \sigma\left(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right) \cdot (\xi_0 + iy)^n \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Soit φ une fonction de $\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ égale à 0 au voisinage de 0 et à 1 au voisinage de $\sqrt{t}$. Ecrivant $1 = \varphi(x) + (1-\varphi(x))$, on sépare l'intégrale précédente en deux intégrales: la première se majore en faisant des intégrations par parties en x avant d'intégrer en y; la seconde en intégrant en y et en utilisant (3.4) pour $P(z) = z^n$.

Lemme (3.6): *Soit*

$$Q(z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot z^{\alpha_n} & \textit{pour } \operatorname{Im}(z) \geqq 0 \\ \overline{Q(\bar{z})} & \textit{pour } \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

avec $a_n \in \boldsymbol{C}$ *et* $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N$. *Si* a_N *est non nul, il existe un nombre* h *non nul tel que, quand* $\sigma \to 0$, *on ait:*

$$\hat{Q}(\sigma, 0) \sim h \cdot \sigma^{-(\alpha_N+1)/2}$$

et donc, si

$$\hat{Q}(\sigma, 0) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right),$$

on a $Q = 0$.

Un calcul simple montre que l'on peut prendre

$$h = a_N \exp\left(i\alpha_N \cdot \frac{\pi}{2}\right) \int_{\boldsymbol{R}^+} v^\alpha \exp(-(v-1)^2)\mathrm{d}v + \overline{a_N} \exp\left(-i\alpha_N \frac{\pi}{2}\right) \times \int_{\boldsymbol{R}^+} v^\alpha \exp(-(v+1)^2)\mathrm{d}v$$

qui est non nul si a_N est non nul.

REMARQUE: C'est ici que sert $\exp(-\sigma(y-1/\sqrt{\sigma})^2)$ dans la définition 3.1; il aurait été plus naturel de prendre $\exp(-\sigma y^2)$.

DÉFINITION (3.7): *Soit t_n une suite strictement croissante de nombres réels positifs ou nuls, f et f_n des applications de $\mathbf{C}^+$ dans $\mathbf{C}$, on écrira:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-zt_n)\cdot f_n(z)(F_0)$$

si

i) $\forall t \notin \{t_n\},\ \hat{f}(\sigma, t) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$

ii) $\forall n \in \mathbf{N},\ \hat{f}(\sigma, t_n) = \hat{f}_n(\sigma, 0)\cdot \exp(-\xi_0 t_n) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$

et

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-zt_n)\cdot f_n(z)(F_\alpha) \ (\alpha \text{ réel})$$

si

$$z^\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-zt_n)\cdot z^\alpha \cdot f_n(z)(F_0).$$

On dira qu'une fonction g est de type T_α si g s'écrit de la manière suivante:

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot z^{\alpha_j} & \textit{pour } \mathrm{Im}(z) \geqq 0 \\ \overline{g(\bar{z})} & \textit{pour } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

avec $-\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N$ et $a_j \in \mathbf{C}$.

PROPOSITION (3.8): *Le développement*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-zt_n)\cdot f_n(z)(F_\alpha)$$

est unique si les f_n sont de type T_α.

C'est une conséquence immédiate du lemme 3.6.

Nous allons voir dans le chapitre 4 que la méthode de phase stationnaire donne des fonctions de type T_α.

4. Méthode de la phase stationnaire pour des variétés critiques non dégénérées

Nous allons expliquer comment on peut adapter les calculs faits par Fedoriuk ([8]) et Maslov ([12] p. 227 à 243) pour des points critiques isolés non dégénérés à des variétés critiques non dégénérées et démontrer le:

THÉORÈME (4.1): *Soit X une variété riemannienne C^∞ de dimension N, g une fonction C^∞ à support compact de X dans $\mathbf{C}$ et f une fonction C^∞ de X dans $\mathbf{R}$ ayant pour seuls points critiques dans le support de g une variété critique connexe compacte non dégénérée W de dimension n et d'indice j. Désignons pour $x \in W$ par $\mathrm{Hess}_\perp f(x)$ la restriction du Hessien de f à l'espace normal en x à W, on a pour tout entier K:*

$$\int_X \exp(-zf(x)) \cdot g(x) v_X(x) = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{(N-n)/2} \cdot \exp\left(ij\frac{\pi}{2} - zf(W)\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{K} a_k \cdot z^{-k} + z^{-K} \cdot r_K(z)\right)$$

avec

$$a_0 = \int_W g(x) \cdot |\det(\mathrm{Hess}_\perp f(x))|^{-\frac{1}{2}} \cdot v_W(x)$$

et $r_K(z) \to 0$ quand $\mathrm{Im}(z) \to +\infty$ ($\mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ *étant fixe*).

Nous aurons besoin de quelques lemmes faciles:

LEMME (4.2): *Soit φ une fonction de $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ égale à* 1 *au voisinage de* 0, *on a*:

$$\int_{\mathbf{R}} t^m \cdot \exp(-zt^2) \cdot \varphi(t) \mathrm{d}t = \varepsilon \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdot z^{-(m+1)/2} + 0(|z|^{-\infty})$$

$$\int_{\mathbf{R}} t^m \cdot \exp(zt^2) \cdot \varphi(t) \mathrm{d}t = \varepsilon \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdot \exp\left(i(m+1)\frac{\pi}{2}\right) \cdot z^{-(m+1/2)} + 0(|z|^{-\infty})$$

($\varepsilon = 1$ (*resp.* 0) *si m est pair* (*resp. impair*)).

LEMME (4.3): *K étant fixé, il existe m tel que si les dérivées d'ordre $\leqq m$ d'une fonction $g \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^d)$ s'annulent à l'origine on ait*:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp[+z(x_1^2 + \cdots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \cdots - x_d^2)] \cdot g(x_1, \cdots, x_d) \mathrm{d}x = 0(|z|^{-K})$$

quand $\mathrm{Im}(z) \to +\infty$.

LEMME (4.4): *Si g est dans $\mathscr{D}(\mathbf{R}^d)$, on a*:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \exp(z(x_1^2 + \cdots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \cdots - x_d^2)) \cdot g(x_1, \cdots, x_d) \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} \exp\left(ij\frac{\pi}{2}\right) \left(g(0) + \sum_{k=1}^{K} a_k \cdot z^{-k} + z^{-K} r_K(z)\right)$$

avec $r_K(z) \to 0$ quand $\mathrm{Im}(z) \to +\infty$.

DÉMONSTRATION: Ecrire $g(x) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_d) \cdot P(x_1, \cdots, x_d) + \psi(x_1, \cdots, x_d)$ où φ est comme dans 4.2, P est un polynôme et ψ comme dans 4.3.

On peut maintenant démontrer le théorème 4.1. à l'aide de la réduction de Morse pour des variétés critiques non dégénérées ([13] p. 46):

On suppose $f(W) = 0$ et on se ramène par partition de l'unité au cas où le support de g est dans une carte de Morse, c'est-à-dire une carte $\varphi : U \to X$ telle que $f \circ \varphi(x_1, \cdots, x_N) = -(x_1^2 + \cdots + x_j^2) + x_{j+1}^2 + \cdots + x_{N-n}^2$. On a donc:

$$\int_X \exp(-zf(x)) \cdot g(x) v_X(x)$$
$$= \int_{R^N} \exp(z(x_1^2 + \cdots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \cdots - x_{N-n}^2))$$
$$g \circ \varphi(x_1, \cdots, x_N) \cdot \operatorname{Jac} \varphi(x_1, \cdots, x_N) \cdot dx_1 \cdots dx_N.$$

Intégrant par rapport aux n dernières variables, il vient:

$$\int_X \exp(-zf(x)) \cdot g(x) v_X(x) = \int_{R^{N-n}} \exp(z(x_1^2 + \cdots + x_{N-n}^2))$$
$$\cdot \bar{g}(x_1, \cdots, x_{N-n}) dx_1 \cdots dx_{N-n}.$$

On peut appliquer le lemme 4.4; on vérifie que $\bar{g}(o)$ peut s'écrire:

$$\bar{g}(o) = 2^{(N-n)/2} \cdot \int_W g(x) \cdot |\text{dét}(\operatorname{Hess}_\perp f(x))|^{-\frac{1}{2}} v_W(x).$$

On a ainsi démontré le théorème.

5. Enonce des théorèmes principaux

THÉORÈME A: *Soit (M, g) une variété riemannienne C^∞ compacte connexe de dimension d; $(\lambda_n)_{n \in N}$ le spectre du laplacien opérant sur les fonctions M dans $\mathbf{C}$; $\mathcal{L}$ l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de (M, g) qui est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}^+$;*

$$Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{z}\right)$$

(A.1.) *Si*

$$t \notin \left\{\frac{L^2}{4} \,|\, L \in \mathcal{L}\right\},$$

on a, pour tout $\alpha \geqq 0$:

$$\widehat{z^\alpha Z(z)}(\sigma, t) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$$

(A.2.) *Si l'ensemble $\mathscr{L}$ est discret, on peut ordonner les longueurs en une suite $L_0 = 0 < L_1 < L_2 < \cdots < L_n < \cdots$ et on a, pour tout $\alpha \geqq 0$:*

$$Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha}(z) \cdot \exp\left(-z \cdot \frac{L_n^2}{4}\right) (F_\alpha)$$

De plus si L_n est (ND) *et correspond à des variétés critiques connexes $(W_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant A}$ de nullité n_λ et d'indice j_λ, il existe des fonctions*

$$P_\lambda^\alpha(z) = \begin{cases} \exp\left(ij_\lambda \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot (a_0 \cdot z^{(n_\lambda+1)/2} + a_1 \cdot z^{(n_\lambda-1)/2} + \cdots \\ \qquad + a_l \cdot z^{-[2\alpha-1]/2}) \, (a_0 > 0) \; si \; \mathrm{Im}\,(z) \geqq 0 \\ \overline{P_\lambda^\alpha(\bar{z})} \qquad\qquad si \; \mathrm{Im}\,(z) < 0 \end{cases}$$

telles que

$$f_n^\alpha(z) = \sum_{\lambda=1}^{A} P_\lambda^\alpha(z).$$

De plus une telle fonction f_n^α étant de type T_α est unique. En particulier pour $n = 0$, on retrouve les coefficients du développement de Minakshisundaram-Pleijel.

Remarque (5.1): Le développement précédent généralise certaines formules connues

(i) La formule de Poisson pour les tores plats: dans ce cas les variétés critiques sont toutes de dimension d et d'indice 0, on a

$$\forall \alpha, P_\lambda^\alpha(z) = \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{d/2} \mathrm{vol}\,(M).$$

(ii) La formule de [5] p. 26 qui donne le développement de Z pour (S^3, g_0), on a alors $L_n = 2\pi n$ et $f_n^\alpha(z) = -(\pi z)^{\frac{3}{2}} n^2 + \cdots$ pour $n \geqq 1$ ce qui correspond à une nullité égale à 4 et un indice à 2 (mod 4).

(iii) Les formules de [7] et [10] p. 233 pour les variétés de dimension 2 à courbure < 0 pour lesquelles $n_\lambda = 0$ et $j_\lambda = 0$.

Remarque (5.2): Le théorème précédent n'implique pas sous la seule hypothèse $(\mathscr{P}_1)$ que deux variétés ayant même spectre du laplacien ont même longueurs des géodésiques périodiques. En effet f_n^α peut peut-être être nulle si on a deux variétés critiques W_1 et W_2 d'indices différents de 2 (mod 4) et de même dimension. Par contre, sous l'hypothèse $(\mathscr{P}_2)$, deux variétés ayant même spectre du laplacien auront mêmes longueurs des géodésiques périodiques et mêmes indices (mod 4).

Nous allons maintenant énoncer trois autres théorèmes qui peuvent se démontrer de façon analogue.

THÉORÈME B: *Soit (M, g) comme dans le théorème A, ξ un fibré vectoriel C^∞ basé sur M muni d'une dérivation covariante L, Δ un laplacien au sens de E. Combet* ([6] p. 247) *opérant sur les sections de ce fibre, $(\lambda_n^\xi)_{n\in N}$ le spectre de ce laplacien et Z^ξ la fonction qui lui est associée comme dans le théorème A, le théorème A reste vrai sans changement sauf que le coefficient a_0 dans P_λ^α peut être nul. De plus si $W = SO(2)\cdot\gamma$ où γ est une géodésique périodique isolée non dégénérée le coefficient a_0^ξ de P_W^α est égal à $a_0^{\mathbf{R}}\cdot p(\xi, \gamma)$ où $p(\xi, \gamma)$ est la trace du transport parallèle dans ξ le long de γ qui est une application de ξ_x dans ξ_x pour tout x de γ (cette trace est évidemment indépendante du choix de x).*

Le théorème C concerne le développement asymptotique de la solution fondamentale elle-même, nous introduisons des propriétés analogues à (ND), $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ pour les géodésiques joignant x à y (x et y deux points de M) en utilisant la fonction énergie sur l'espace $\Omega_{x,y}(M)$ des courbes de classe H^1 joignant x à y. Il résulte notamment du théorème de Sard que, pour x fixé, la propriété $\mathscr{P}_2(x, y)$ est vraie pour presque tout y de M.

THÉORÈME C: *Soit (M, g) comme dans le théorème A; x et y deux points de M; $\mathscr{L}(x, y)$ l'ensemble des longueurs des géodésiques qui joignent x à y;* (C.1.) *Si*

$$t \notin \left\{\frac{L^2}{4} \,|L \in \mathscr{L}(x, y)\right\},$$

on a $\forall\alpha \geqq 0$:

$$\widehat{z^\alpha E\left(\frac{1}{z}\,;\, x, y\right)(\sigma, t)} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

(C.2.) *Si $\mathscr{L}(x, y)$ est un sous-ensemble discret de $\mathbf{R}^+$, on peut l'écrire* $0 \leqq L_0 < L_1 < \cdots < L_n$, *on a* $\forall\alpha \geqq 0$:

$$E\left(\frac{1}{z}\,;\, x, y\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha,x,y}(z)\cdot\exp\left(-\frac{z}{4}L_n^2\right) \quad (F_\alpha)$$

en particulier si L_n est (ND) *et correspond à une réunion de variétés critiques $(W_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant\Lambda}$ de dimension d_λ et d'indice j_λ, on a*:

$$f_n^{\alpha,x,y}(z) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} P_\lambda^{\alpha,x,y}(z)$$

avec

$$P_\lambda^{\alpha,x,y}(z) = \begin{cases} \exp\left(ij_\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)(a_0 z^{(d+d_\lambda)/2} + \cdots) & si\ \mathrm{Im}(z) \geqq 0 \\ \overline{P_\lambda^{\alpha,x,y}(\bar{z})} & si\ \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

De plus $f_n^{\alpha,x,y}(z)$ *étant alors de type* T_α *est unique. En particulier si* $\overline{xy} < \rho$ *le premier terme* $(L_0 = \overline{xy})$ *est*

$$f_0^{\alpha,x,y}(z) = \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{d/2} \left(\sum_i U_i(x, y) \cdot z^{-i}\right).$$

Dans le théorème D, nous introduisons une *isométrie* T de $(M, g) : T$ opère alors sur les espaces propres du laplacien, par $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$, de manière isométrique. Soit t_λ la trace de cette isométrie pour la valeur propre λ. Nous donnons un développement asymptotique de

$$Z_T(z) = \sum_{\lambda \in \mathbf{R}^+} t_\lambda \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{z}\right)$$

($t_\lambda = 0$ si λ n'est pas une valueur propre). Pour cela nous introduisons la sous-variété $\Omega\,(M; T)$ de $H^1([0, 1]; M)$ (étudiée indépendamment dans [16]) définie par: $\Omega(M, T) = \{\omega \in H^1\,([0, 1]; M) | \omega(1) = T(\omega(0))\}$ et la fonction E_T obtenue par restriction de l'énergie E_0 à cette sous-variété (Pour $T = \mathrm{Id}$, on est comme dans le théorème A. Les points critiques de E_T sont les géodésiques ω telles que $\omega(1) = T\omega(0))$ et $\dot\omega(1) = T'(\dot\omega(0))$. Nous pouvons introduire des propriétés (ND), $\mathscr{P}_1(T)$ et $\mathscr{P}_2(T)$ analogues aux précédentes et nous avons:

THÉORÈME D: *Soient* (M, g) *comme dans le théorème A*, T *une isométrie et* $\mathscr{L}_T$ *l'ensemble des longueurs des géodésiques critiques pour* E_T (D.1). *Si*

$$t \notin \left\{\frac{L^2}{4} \,|\, L \in \mathscr{L}_T\right\},$$

on a pour tout $\alpha \geqq 0$:

$$\widehat{z^\alpha \cdot Z_T(z)}(\sigma, t) = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

(D.2.) *Si l'ensemble* $\mathscr{L}_T$ *est discret, on peut ordonner les longueurs* $0 \leqq L_0 < L_1 < \cdots < L_n < \cdots$ *et on a pour tout* $\alpha \geqq 0$:

$$Z_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha,T}(z) \cdot \exp\left(-z \cdot \frac{L_n^2}{4}\right) (F_\alpha).$$

De plus, si L_n *est* (ND) *et correspond à des variétés critiques connexes* $(W_\lambda)_{1 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda}$ *de dimension* d_λ *et d'indice* j_λ, *il existe des fonctions*

$$P_\lambda^{\alpha,T}(z) = \begin{cases} \exp\left(ij_\lambda \dfrac{\pi}{2}\right)(a_0 \cdot z^{\mathrm{d}_\lambda/2} + \cdots + a_l \cdot z^{-[2\alpha-1]/2})\ (a_0 > 0) & \\ & \textit{pour } \mathrm{Im}\,(z) \geqq 0 \\ \overline{P_\lambda^{\alpha,T}(\bar z)} & \textit{pour } \mathrm{Im}\,(z) < 0 \end{cases}$$

telles que

$$f_n^{\alpha, T}(z) = \sum_{\lambda=1}^{A} P_\lambda^{\alpha, T}(z);$$

$f_n^{\alpha, T}$ *étant alors de type* T_α *est unique. Si* $L_0 = 0$ *et est* (ND), *les variétés* (W_λ) *correspondantes sont les points fixes de* T *et on a*:

$$P_\lambda^{\alpha, T}(z) = \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{d_\lambda/2} \int_{W_\lambda} \frac{v_{w_\lambda}(x)}{|\det(\mathrm{Id}-T')_\perp(x)|^{\frac{1}{2}}} (1+a_2 z^{-1} + \cdots)$$

où $(\mathrm{Id}\text{-}T')_\perp$ *désigne la restriction de* Id-T' *à l'espace normal en* x *à* W_λ.

6. Démonstration des théorèmes A, B, C et D

Nous donnons une démonstration détaillée du théorème A pour $\alpha = 0$. L'extension à $\alpha \geqq 0$ ne présente pas d'autre difficulté qu'un alourdissement de l'écriture.

Nous expliquons ensuite brièvement comment on peut en déduire des démonstrations des trois autres théorèmes.

6.1. *Un lemme de majoration*

Nous appliquerons la méthode de la phase stationnaire avec des fonctions qui ne sont pas C^∞: en effet la fonction

$$(x, u) \rightsquigarrow u^{-k} \cdot \exp\left(-\frac{z}{4} \cdot \frac{\overline{ax}^2}{u}\right)$$

n'est même pas bornée si $k > 0$.

Nous aurons besoin du:

LEMME (6.1): *Soit* $f : X_{n+1} \to \mathbf{R}$ *définie par*

$$f(u_0, \cdots, u_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i^2}{u_i}$$

avec, pour $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\alpha_i \in [\rho_0, \rho_1]$ *et* $\alpha_n \in [0, \rho_1]$, Φ *une fonction* C^∞ *sur* $\mathbf{R}$ *à support compact disjoint de* $[n\rho_0, n\rho_1]$, $(k_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *des réels, avec la seule condition* $k_n \leqq d/2$, *il existe pour tout* $K \in \mathbf{N}$, *des nombres* C_K *et* $D_K > 0$ *ne dépendant que de* n, ρ_0, ρ_1, (k_i) *et* Φ *tels que, pour tout* $\alpha_n \leqq D_K$, *on ait*:

$$\left| \int_{X_{n+1}} \exp\left(-\frac{z}{4} f(U)\right) \cdot \Phi(\sqrt{f(U)}) \cdot u_0^{k_0} \cdots u_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot u_n^{-k_n} \mu_n(U) \right|$$
$$\leqq \frac{C_K}{|z|^K \cdot \alpha_n^{d-2}}$$

DÉMONSTRATION: C_j noteront des réels > 0 ne dépendant que de $n, \rho_0, \rho_1, (k_i)$ et Φ. Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$\Omega_i^\varepsilon = \left(U \in X_{n+1} \middle| \left|\frac{\alpha_i}{u_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

pour $i \in \{0, \cdots, n-2\}$ et

$$\Omega_{n-1}^\varepsilon = \left\{U \in X_{n+1} \middle| \forall i \in \{0, \cdots, n-2\}, \left|\frac{\alpha_i}{u_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}\right| < \varepsilon\right\}.$$

Il existe des nombres $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant 5}$ tels que, pour $\varepsilon \leqq C_1$, $\alpha_n \leqq C_2$ et $U \in A = \Omega_{n-1}^\varepsilon \cap \operatorname{Supp}(\Phi \circ \sqrt{f})$, on ait:

(i) $\displaystyle \left|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_n}{u_n}\right| \geqq \frac{C_3}{\alpha_n}$

ou

(ii) $\displaystyle u_n \geqq C_4 \text{ et } \left|\frac{\alpha_0}{u_0} - \frac{\alpha_n}{u_n}\right| \geqq C_5.$

Il est d'abord clair qu'on a $f(U) \geqq (n\rho_0)^2$ et donc dans A: $f(U) \geqq (n\rho_1)^2 + C_6$. Posant

$$\frac{\alpha_i}{u_i} = (1+\eta_i)\frac{\alpha_0}{u_0},$$

on obtient alors les deux inégalités si

$$\varepsilon' = \frac{n\varepsilon}{\rho_0} < \tfrac{1}{2}:$$

$$C_7 \leqq (n\rho_1)^2 \cdot \frac{(u_n + 4\varepsilon')}{1-u_n} + \frac{\alpha_n^2}{u_n}$$

et

$$C_8 \leqq \alpha_n^2 + n\rho_1(1+2\varepsilon') \cdot \alpha_n \left(1 + \eta_n + \frac{1}{1+\eta_n}\right).$$

De la première, on tire

$$\frac{\alpha_n^2}{u_n} \geqq \frac{C_7}{2} \text{ ou } u_n \geqq C_4.$$

De la seconde $\eta_n \leqq -C_9$ ou $\eta_n \cdot \alpha_n \geqq C_{10}$. On en tire le résultat cherché.

On construit alors une partition de l'unité C^∞ sur X_{n+1}, $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ subordonnée au recouvrement

$$\Omega_0^{C_1}, \cdots, \Omega_{n-1}^{C_1} \cap \left\{u_n > \frac{C_4}{2}\right\}, \Omega_{n-1}^{C_1} \cap \{u_n < C_4\},$$

ces fonctions dépendant continûment des α_i pour $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ et on pose

$$K_i = \int_{X_{n+1}} g\varphi_i \mu_n$$

(où g est la fonction dont nous cherchons à majorer l'intégrale).

– *Majoration des K_i pour $i \in \{0, 1, \cdots, n-2\}$*

On paramètre X_{n+1} à l'aide de $u_0, \cdots, u_i, u_{i+2}, \cdots, u_n$ et on intègre par parties par rapport à u_i en remarquant que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u_i}\right| \geqq \varepsilon\rho_0 .$$

On a alors:

$$|K_i| \leqq \frac{C_K}{|z|^K} \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{\xi_0}{4} \cdot \frac{\alpha_n^2}{u_n}\right) \cdot u_n^{-d/2} \mathrm{d}u_n$$

ce qui donne le résultat.

– *Majoration de K_{n-1} et K_n*

On paramètre X_{n+1} à l'aide de $u_0, \cdots, u_{n-1}$ et on intègre par parties par rapport à u_0. Pour K_{n-1} on utilise $u_n \geqq C_4$ et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u_0}\right| \geqq \rho_0 \cdot C_5 ;$$

pour K_n,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u_0}\right| \geqq \frac{C_3}{u_n} .$$

6.2. *Démonstration du théorème A pour $\alpha = 0$*

Les applications $z \rightsquigarrow Z(z)$ et

$$z \rightsquigarrow \int_M E\left(\frac{1}{z} ;\ x, x\right) v_g(x)$$

étant holomorphes dans $\boldsymbol{C}^+$ et coïncidant pour z réel positif sont égales. De plus on peut facilement montrer que $|Z(z)| \leqq C \cdot |z|^d$ et donc considérer la fonction $\hat{Z}(\sigma, t)$. Utilisant 2.6 il vient:

$$\text{(6.2.1)} \quad \hat{Z}(\sigma, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \int_{M_0{}^{n+1} \times X_{n+1} \times \boldsymbol{R}} \exp\left[-\frac{\xi_0 + iy}{4} E_U((x_i)) + ity - \sigma\left(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right] \times P_n^k(\xi_0 + iy;\ U;\ x_0, x_1, \cdots, x_n, x_0) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \otimes \mathrm{d}y .$$

Soit, en reprenant les notations de 2.8, $P_n^k = P_n^{k+} + P_n^{k-}$ avec

$$P_n^{k+}(z) = \sum_{l \geqslant 0} p_{n,l}^k(z) \cdot z^l; \; P_n^{k-} = \sum_{l<0} p_{n,l}^k(z) \cdot z^l$$

et en décomposant l'intégrale de manière évidente:

$$\hat{Z}(\sigma, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (I_n^+(\sigma, t) + I_n^-(\sigma, t)). \tag{6.2.2}$$

Pour évaluer $\hat{Z}(\sigma, t)$ nous choisissons H_k à l'aide du:

LEMME (6.2.3): *$t \geqq 0$ étant donné, on peut choisir ρ_0, ρ_1 et k (paramètres dont dépend la paramétrix H_k), φ une fonction C^∞ sur $\boldsymbol{R}$ égale à 1 dans un voisinage de t et à support dans $[t-\beta, t+\beta](\beta > 0)$ et n_0 un entier, tels que*:

(i) $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \{|I_n^+(\sigma, t)| + |I_n^-(\sigma, t)|\} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$;

(ii) *Pour tout* $n \in \{0, 1, \cdots, n_0\}$, $[n\rho_0, n\rho_1] \cap [2\sqrt{t-\beta}, 2\sqrt{t+\beta}] = \emptyset$;

(iii) *Si* $2\sqrt{t} \notin \mathscr{L}$, $[2\sqrt{t-\beta}, 2\sqrt{t+\beta}] \cap \mathscr{L} = \emptyset$;

(iv) *Si* $2\sqrt{t}$ *est un point isolé de* $\mathscr{L}$, $[2\sqrt{t-\beta}, 2\sqrt{t+\beta}| \cap \mathscr{L} = \{2\sqrt{t}\}$.

On a alors:

(v) $$\hat{Z}(\sigma, t) = \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n \int_{M_0^{n+1} \times X_{n+1} \times \boldsymbol{R}} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4} E_U((x_i)) + iy\left(t - \frac{E_U((x_i))}{4}\right) - \sigma\left(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right] \cdot \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right) \times P_n^{k+}(z; U, (x_i)) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \otimes \mathrm{d}y + 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

Démonstration de 6.2.3: Les choix se font par étapes successives. On prend $k = 2d+1$ et ρ_0 tel que pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $n\rho_0 \neq 2\sqrt{t}$.

On peut majorer l'intégrale I_n^- en intégrant d'abord par rapport à y et en utilisant 3.5:

$$|I_n^-(\sigma, t)| \leqq \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{M_0^{n+1} \times X_{n+1}} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4} E_U((x_i))\right] \cdot |P_n^{k-}|(\xi_0; U; (x_i)) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

c'est-à-dire à l'aide de 2.9:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |I_n^-(\sigma, t)| = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right). \tag{6.2.4}$$

Il existe un entier n_0, ne dépendant que de ρ_0 et k qui sont déjà choisis, tel que pour $n \geqq n_0+1$, on ait:

(6.2.5) $\quad \operatorname{Supp}(P_n^{k+}) \subset C^+ \times \{((x_i), U) | E_U((x_i)) \geqq 4(t+1)\}.$

En effet, posant $N((x_i)) = \# \{i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ tels que $\overline{x_i x_{i+1}} \geqq \rho_0\}$, on a $|E_U((x_i))| \geqq (N((x_i))\rho_0)^2$ et on voit d'autre part qu'on peut écrire:

$$P_n^k(z; U; (x_i)) = \sum_{j_0, \cdots, j_n} V_{j_0}(x_0, x_1) \cdots V_{j_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) U_{j_n}(x_n, x_0)\, \eta(\overline{x_n x}) \times Q_{j_0, \cdots, j_n}(U) \cdot z^{n(d/2-1) - \sum_{i=0}^{n} j_i + d/2}$$

Donc, dans P_n^{k+}, les (j_i) qui interviennent sont tels que

$$\sum_{i=0}^{n} j_i \leqq n\left(\frac{d}{2} - 1\right) + \frac{d}{2}.$$

De plus les conditions de support 2.4. des fonctions U_j et V_j font que l'on a:

$$\sum_{i=0}^{n} j_i \geqq (n - N((x_i))k - N((x_i)).$$

On en déduit (6.2.5).

Avec n_0 ainsi choisi, on peut choisir ρ_1, β et φ de façon à avoir (ii), (iii), et (iv). Il nous suffit alors de majorer

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |I_n^+(\sigma, t)|$$

pour montrer (i). On va utiliser la condition 6.2.5. et le lemme 3.2. en intégrant d'abord par rapport à y. Soit

$$Y_p = \{(U, (x_i)) | E_U((x_i)) \in [4(t+p), 4(t+p+1)[\},$$

on a pour $n \geqq n_0+1$:

$$\operatorname{Supp} P_n^{k+} \subset C^+ \times (\bigcup_{p=1}^{\infty} Y_p).$$

Nous *noterons* $I_n^p(\sigma, t)$ l'intégrale sur Y_p. En appliquant 3.2., il vient:

$$|I_n^p(\sigma, t)| \leqq \frac{C(\xi_0)}{\sqrt{\sigma}} \cdot \Gamma\left(\frac{(n+1)d}{4}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma}\right) \cdot \int_{Y_p} \exp\left(\frac{-\xi_0}{4} E_U((x_i))\right) \times |P_n^{k+}| \left(2\xi_0 + \frac{p+3}{\sigma};\ U; (x_i)\right) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

et en utilisant la proposition 2.9., le choix de k et la formule de Stirling:

$$|I_n^p(\sigma, t)| \leqq \frac{C_1}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma}\right) \cdot C_2^n \cdot \left(2\xi_0 + \frac{p+3}{\sigma}\right)^{(n+1)d/2} (\overline{(n+1)d}!)^{-1}$$

$$\times \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |I_n^p(\sigma, t)| \leqq \frac{C_3}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma} + C_4 \sqrt{\frac{p+3}{\sigma}}\right)$$

Par sommation en p, il vient (i).

Pour montrer (v) il suffit de montrer que, pour $n \leqq n_0$:

$$\int_{M_0{}^{n+1} \times X_{n+1} \times \mathbf{R}} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4} E_U((x_i)) + iy\left(t - \frac{E_U((x_i))}{4}\right) - \sigma\left(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right]$$

$$\cdot \left(1 - \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)\right) P_n^{k+}(z; U; (x_i)) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \otimes \mathrm{d}y$$

$$= 0\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

Cette majoration se fait avec 3.4. en se servant du fait que, dans le support de la fonction à intégrer, on a

$$\left| t - \frac{E_U((x_i))}{4} \right| \geqq t_0 > 0.$$

Le théorème A va alors résulter de l'utilisation de la méthode de phase stationnaire dans l'évaluation de l'intégrale (v). Posons:

$$J_n(z) = (-1)^n \int_{M_0{}^{n+1} \times X_{n+1}} \exp\left(-\frac{z}{4} E_U((x_i))\right) \cdot P_n^{k+}(z; U, (x_i))$$

$$\times \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

Lemme (6.2.6): *Pour tout $n \leqq n_0$, il existe une fonction ψ_n, C^∞ à support compact, dans $\mathbf{R}$ égale à* 1 *au voisinage de* 0 *telle que*

$$K_n(z) = \int_{M_0{}^{n+1} \times X_{n+1}} \exp\left(-\frac{z}{4} E_U((x_i))\right) \cdot P_n^{k+}(z; U; (x_i)) \cdot \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)$$

$$\times \psi_n(\overline{x_n x_0}) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

soit une fonction bornée en $y = \mathrm{Im}\,(z)$ et que les points critiques de $\tilde{E}$ vérifient $\psi_n(\overline{x_n x_0}) = 0$.

Démonstration de 6.2.6: On applique 6.1. avec $\alpha_i = \overline{x_i x_{i+1}}$ et $\Phi(t) = \varphi(t^2/4)$. Les points critiques de $\tilde{E}$ vérifient alors, par dérivation par rapport aux u_i,

$$\frac{\alpha_0}{u_0} = \ldots = \frac{\alpha_n}{u_n}$$

et donc d'après la démonstration de 6.1., pour $\alpha_n \leqq C_2$, il n'y a pas de tels points critiques dans le support de $\varphi \circ \tilde{E}/4$. On prend alors $K = (n+1)\mathrm{d}/2$ et ψ_n telle que Supp $(\psi_n) \subset \,]\leftarrow, \inf(C_2, D_K)]$. En intégrant par rapport à μ_n, il vient

$$|K_n(z)| \leqq C_K \cdot \int_{M_0^{n+1}} \overline{x_n x_o}^{2-d} \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i).$$

Cette intégrale étant absolument convergente, on en déduit 6.2.6.

*Démonstration du théorème A.*1: On peut écrire $J_n(z) = (-1)^n\{K_n(z) + L_n(z)\}$ avec

$$L_n(z) = \int_{M_0^{n+1} \times X_{n+1}} \exp\left(-\frac{z}{4}\tilde{E}(U;(x_i))\right) \cdot \varphi_n(z;U;(x_i)) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

où la fonction $\varphi_n = (\varphi^0\tilde{E}/4)(1-\psi_n)P_n^{k+}$ est C^∞ à support compact à cause de 6.2.3. (iii), $\tilde{E}$ n'a pas de points critiques dans le support de φ_n. On en déduit A.1. en appliquant le théorème 4.1 avec $X = M_0^{n+1} \times X_{n+1}$ et $W = \emptyset$.

*Démonstration de A.*2: L'existence des f_n^0 s'en déduit trivialement: les prendre par exemple toutes égales à $Z(z) \cdot \exp(z.\,L_n^2/4)$.

Dans l'hypothèse où L_n est (ND), on a 6.2.3. (iv) et soit φ_λ une partition de l'unité sur $M_0^{n+1} \times X_{n+1}$ avec la propriété que φ_λ soit égale à 1 au voisinage de $h^{-1}(X_{n+1} \times W_\lambda)$(h cf. I.2)

$$L_n(z) = \sum_{\lambda=1}^{A} \int_{M_0^{n+1} \times X_{n+1}} \exp\left(-\frac{z}{4}E_U(x_i)\right) \cdot P_n^{k+}(z;U;(x_i)) \cdot \varphi\left(\frac{E_U(x_i)}{4}\right) \times (1-\psi_n(\overline{x_n x_0}))\varphi_\lambda(U;(x_i)) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U).$$

L'évaluation de ces intégrales se fait alors en appliquant directement le théorème 4.1. avec "N" $= (n+1)d+n$ et "n" $= n_\lambda + 1 + n$ (cf. Prop. 1.2) en remarquant que le terme de plus haut degré dans P_n^{k+} est en $z^{(n+1)d/2}$ avec un coefficient égal à

$$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{(n+1)d/2} V_{-1}(x_0, x_1) \cdots V_{-1}(x_{n-1}, x_n) U_0(x_n, x_0)\eta(\overline{x_n x_0})$$

dont le signe est $(-1)^n$ pour $\rho_0 < \overline{x_i x_{i+1}} < \rho_1$ et $\overline{x_n x_0} < \rho_1$.

K_n étant bornée en z, on a $\hat{K}_n(\sigma, t) = 0\,(1/\sqrt{\sigma})$. On en déduit finalement les résultats annoncés dans A.2.

Schéma de démonstration du théorème B: On peut lire dans [6] p. 252 à 254 la construction des paramétrix pour le laplacien sur les sections d'un fibré. Ces paramétrix permettent de faire la même démonstration que pour le théorème A. La relation donnant a_0^ξ se démontre en utilisant le fait que le U_0^ξ de la paramétrix peut s'écrire $U_0^\xi\,(x, y) = U_0^R(x, y) \cdot \Theta(x, y)$ où $\Theta(x, y)$ est le transport parallèle de ξ_y à ξ_x le long de la géodésique minimisante de x à y. Les produits de compositions s'interprètent alors en composant les transports parallèles $\Theta(x_0, x_1)$, $\Theta(x_1, x_2) \cdots$ et $\Theta(x_n, x_0)$.

Schéma de démonstration du théorème C: On applique la démonstration de A au développement de

$$E\left(\frac{1}{z}\,;\; x, y\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (L_k)^{*n} * H_k\left(\frac{1}{z}\,;\; x, y\right).$$

Pour le calcul de $f_0(z)$ pour $\overline{xy} < \rho$, il suffit de choisir ρ_0 et ρ_1 tels que $\overline{xy} < \rho_0 < \rho_1 < \rho$; la valeur critique $\overline{xy}$ n'intervient alors que dans le premier terme de la série précédente.

Schéma de démonstration de D: En utilisant

$$t_\lambda = \sum_{\lambda_n = \lambda} \int_M \varphi_n(x)\varphi_n(Tx)v_g(x).$$

($\{\varphi_n | \lambda_n = \lambda\}$ étant une base orthonormée de E_λ), il vient:

$$Z_T(z) = \int_M E\left(\frac{1}{z}\,;\; x, Tx\right) v_g(x)$$

On écrit alors E comme dans la démonstration de A et on est ramené à chercher les points critiques de

$$(U, x_0, x_1, \cdots, x_n) \to \frac{\overline{x_0 x_1}^2}{u_0} + \cdots + \frac{\overline{x_n T x_0}^2}{u_n}.$$

Cela se fait à l'aide de $\Omega(M, T)$ et E_T comme dans I. On est alors dans une situation qui se traite comme le théorème A.

Les coefficients pour $L_0 = 0$ se calculent par évaluation d'intégrale du genre

$$I_\lambda(z) = \int_M \left(\frac{z}{4\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{z}{4} \cdot \overline{xTx}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} U_i(x, Tx) \cdot z^{-i}\right)\varphi_\lambda(x)v_g(x)$$

où φ_λ est une fonction égale à 1 au voisinage de W_λ: on procède directement par la méthode de phase stationnaire.

7. Applications à des propriétés déterminées par le spectre

Dans ce chapitre, nous noterons Sp (M, g) le spectre du laplacien opérant sur les fonctions sur M et $\mathrm{Sp}_k(M, g)$ le spectre du laplacien opérant sur les formes différentielles extérieures de degré k.

A. Variétés à géodésiques toutes périodiques

Pour une géodésique périodique, nous appellerons *période* la longueur de la plus petite géodésique périodique dont elle soit une itérée. On peut à partir du théorème 5.A. se poser le problème réciproque: existe-t-il deux variétés (M_1, g_1) et (M_2, g_2) telles que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$ et Sp $(M_1, g_1) \neq$ Sp (M_2, g_2)? la réponse est oui; en effet, on peut construire (voir par exemple [15], p. 145–154) sur la variété S^2 des structures riemanniennes distinctes de la structure canonique et telles que toutes leurs géodésiques soient périodiques de période 2π. D'autre part il est classique que S^2 munie de la structure canonique est caractérisée par son spectre ([4] p. 227).

On peut expliciter la fonction $f_n^\alpha(z)$ du théorème (5.A.) pour une variété dont toutes les géodésiques de longueur L_n sont périodiques (elles ne sont pas nécessairement de mêmes périodes). En eflet, dans ce cas, l'ensemble des géodésiques périodiques de longueur L_n est une sous-variété compacte connexe de dimension 2d-1 de $\Omega(M)$: c'est l'image du fibré unitaire tangent $T_1(M)$ par l'application $j : (x, v) \rightsquigarrow (t \mapsto \exp_x(tL_n v))$ qui est un plongement. De plus la longueur L_n est (ND), en effet d'après [5] le hessien de E en un point critique a au plus $2d$–1 valeurs propres nulles. On a donc, dans ce cas,

$$f_n^\alpha(z) = z^{d-\frac{1}{2}} \cdot (a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots) \cdot \exp\left(ij_n \frac{\pi}{2}\right).$$

On peut énoncer le

THÉORÈME (7.A): *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte C^∞ de dimension d et $L \in \mathscr{L}-\{0\}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) *L est* (ND) *et la fonction $f_L^\alpha(z)$ correspondant par le théorème* 5.A. *est en $z^{d-\frac{1}{2}}$.*
(ii) *Toutes les géodésiques de longueurs L sont périodiques.*

Il nous reste à démontrer que (i) implique (ii). Soit W une variété critique de E connexe compacte de dimension $2d$–1 et d'énergie L^2. Considérons l'application $k : T_1(M) \to H^1([0, 1]; M)$ définie par $k(x, v) = (t \mapsto \exp_x(tLv))$. C'est un plongement dont l'image est une variété connexe compacte de dimension $2d$–1 contenant W et donc qui lui est égale.

B. Etude du cas générique $(\mathscr{P}_2)$

Nous étudions quelles propriétés géométriques et topologiques de (M, g) on peut déduire de la connaissance de Sp (M, g) dans le cas où (M, g) a la propriété $(\mathscr{P}_2)$ définie en *I*.

THÉORÈME (7.B.1): *Si* (M, g) *vérifie* $(\mathscr{P}_2)$, Sp (M, g) *détermine* $\mathscr{L}$ *et les indices modulo* 4 *des géodésiques périodiques*; *il détermine aussi la longueur des géodésiques périodiques primitives* (*i.e. qui ne sont pas des itérées*) *et le nombre de géodésiques périodiques géométriquement distinctes.*

Ce théorème est une conséquence facile du théorème 5.A.

THÉORÈME (7.B.2): *Si* (M, g) *vérifie* $(\mathscr{P}_2)$, *les* $(\mathrm{Sp}_k(M, g))_{0 \leqslant k \leqslant d}$ *déterminent non seulement* $\mathscr{L}$ *et les indices modulo* 4, *mais le transport parallèle le long de chaque géodésique périodique* γ *qui est une isométrie de* $T_{\gamma(0)}M$.

En effet soit A ce transport parallèle, il résulte du théorème 5.B. que $\mathrm{Sp}_k(M, g)$ détermine la trace de $\Lambda^k(A)$ et il suffit d'utiliser la relation

$$\det(I + s \cdot A) = \sum_{k=0}^{d} s^k \cdot \mathrm{Tr}\,(\Lambda^k(A))$$

qui détermine A par son polynôme caractéristique.

Nous nous intéressons maintenant à des propriétés topologiques de M. On peut écrire les *inégalités de Morse pour les nombres de Betti de l'espace des lacets* $\Omega(M)$ ([13]):

$$(7.B.3) \qquad b_0(\Omega(M)) \leqq 2\#\{L \in \mathscr{L}^* | j(L) = 0 (\mathrm{mod}\ 4)\} + 1$$

et pour $i \geqq 1$:

$$b_i(\Omega(M)) \leqq 2\#\{L \in \mathscr{L}^* | j(L) = i (\mathrm{mod}\ 4)\} = 2\#\{L \in \mathscr{L}^* | j(L) = \\ = i - 1 (\mathrm{mod}\ 4)\} + b_i(M).$$

Notamment, on a les résultats suivants sur le $\pi_1(M)$: dans le cas où le nombre de géodésiques périodiques d'indice 0(mod 4) est fini, on en déduit que le nombre de classes de conjugaison de $\pi_1(M)$ (classes d'homotopie libre) est fini et une majoration de ce nombre. On a aussi une majoration du nombre de classes primitives. En particulier, s'il n'y a aucune géodésique périodique primitive d'indice 0(mod 4), la variété est simplement connexe.

Dans le cas contraire où il y a une infinité de géodésiques périodiques ayant pour indice 0(mod 4), on peut avoir des renseignements sur la croissance des classes de conjugaison de $\pi_1(M)$.

DÉFINITION (7.B.4): *Soit* $\mathscr{C}(M)$ *l'ensemble des classes de conjugaison du groupe* $\pi_1(M)$ *et S un système fini de générateurs de* $\pi_1(M)$, *on pose*

$\varphi_S(u) = \#\{\alpha \in \mathscr{C}(M) | \alpha$ admet un représentant qui s'écrit comme un mot de longueur inférieure à u par rapport aux éléments de S et à leurs inverses$\}$. *On dira que* $\mathscr{C}(M)$ *est exponentielle* (*resp. polynômiale degré* k) *si* $\varphi_S(u) \leqq A$ exp (Bu)(resp. $\varphi_S(u) \leqq C|u|^k$ *pour un certain* S. *Nous posons*

$$\psi(l) = \#\{L \in \mathscr{L} | L \leqq l \text{ et } j(L) = 0 \ (\mathrm{mod}\ 4)\}.$$

Nous allons montrer comment on peut majorer φ_S à l'aide ψ qui est déterminée par Sp (M, g) dans le cas $(\mathscr{P}_2)$.

THÉORÈME (7.B.5): *Si* $\psi(l)$ *est majorée par une exponentielle en* l (*resp. un polynôme de degré* k *en* l), $\mathscr{C}(M)$ *est exponentielle* (*resp. polynômiale de degré* k).

DÉMONSTRATION: Soit $(\tilde{M}, \tilde{g})$ le revêtement riemannien universel de (M, g) et D un domaine fondamental relativement compact. On peut identifier canoniquement les éléments de S à des automorphismes $g_1, \cdots,$ g_N du revêment $(\tilde{M}, \tilde{g})$, posons $\delta = \sup \{\overline{xg_i(x)} | i \in \{1, \cdots, N\}$ et $x \in D\}$. A tout α de $\mathscr{C}(M)$ on sait associer une géodésique périodique γ_α^* de longueur L_α qui minimise l'énergie dans la classe d'homotopie libre associée à α et donc d'indice 0(mod 4).

Si g est un représentant de α qui s'écrit

$$g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ g_{i_k}^{\varepsilon_k} \ (\varepsilon_j = \pm 1),$$

on a:

$$L_\alpha \leqq \overline{xg(x)} \leqq \overline{xg_{i_1}(x)} + \cdots + \overline{xg_{i_k}(x)} \leqq k\delta.$$

On en déduit $\varphi_S(s) \leqq 2\psi(\delta \cdot s)$ et donc le résultat cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM: Bumpy metrics. *Proc. Symp. Pure Math. vol. 14* (1970) 1–3.

[2] R. BALIAN et C. BLOCH: Distributions of eigenfrequenties for the wave equation in a finite domain III. Eigenfrequenties density oscillation. *Ann. of Physics 69. vol. 1* (1972) 76–160.

[3] A. BENABDALLAH: *Noyau de diffusion sur les espaces homogènes compacts.* Thèse de 3ème cycle. Lyon (1972).

[4] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET: Les spectre d'une variété riemannienne. *Lectures Notes in Mathematics 194.* Springer Verlag 1971.

[5] R. BOTT: On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory. *Comm. on Pure and Applied Math. 9* (1956) 171–206

[6] E. COMBET: Paramétrix et invariants sur les variétés compactes. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, tome 3* (1970) 247–271.

[7] Y. COLIN de VERDIÈRE: Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I. *Composition Mathematica*, Vol. 27, Fasc. 1 (1973). (1972) (résumé dans C.R.A.S., Paris, t. 275 A, 805–808).

[8] M. V. FEDORIUK: Méthode de la phase stationnaire pour les intégrales multiples. *Journal de Math. Appliquées et de Physique Mathématique, vol. 2 no 1* (1962) 145–150.

[9] P. Flaschel et W. Klingenberg: Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeit. Periodätische Geodätische – *Lectures Notes in Mathematics 282*, Springer Verlag 1972.
[10] H. P. Mc Kean: Selberg's Trace Formula as Applied to a compact Riemann Surface. *Comm. on Pure and Applied Math. XXV* (1972) 225–246.
[11] H. P. Mc Kean et I. M. Singer: Curvature and the eigenvalues of the laplacien. *J. of diff. geometry 1* (1967) 43–69.
[12] V. P. Maslov: Théorie des perturbations et Méthodes asymptotiques (Traduction française Dunod 1972)
[13] W. Meyer: Kritische Mannigfaltigkeiten in Hilbert mannigfaltigkeiten. *Math. Ann. 170* (1967) 45–66.
[14] J. Milnor: Morse Theory. *Ann. of Math. Studies 51* (1963).
[15] M. Berger: *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute, Bombay (1965).
[16] Karsten Grove: Condition (C) for the energy integral on certain path-spaces and applications to the theory of geodecics. *J. Diff. Geom. vol. 8* (1973) (a paraître).

(Oblatum 4–VII–1973)

67, rue Croulebarbe
75013–Paris