COMPOSITIO MATHEMATICA

M. BERGER

Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes

Compositio Mathematica, tome 26, n° 2 (1973), p. 129-149

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1973__26_2_129_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 26, Fasc. 2, 1973, pag. 129-149
Noordhoff International Publishing
Printed in the Netherlands

SUR LES PREMIÈRES VALEURS PROPRES DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

par

M. Berger

1. Introduction

Il existe de très nombreux résultats sur les premières valeurs propres du laplacien pour les domaines bornés de $\boldsymbol{R}^n$; voir une mise au point récente dans [14]. Par contre, pour les variétés riemanniennes compactes, on connaît seulement les résultats suivants. Soit λ_1 la première valeur propre du laplacien Δ opérant dans l'espace $C^\infty(X)$ des fonctions sur la variété riemannienne compacte (X, g). Alors:

1.1 (cf. [6], 179-180): si la courbure de Ricci ρ de (X, g) vérifie $\rho \geqq (n-1)g$, alors $\lambda_1 \geqq n$; ce résultat est le meilleur possible: $\lambda_1 = n$ si et seulement si (X, g) est la sphère (S^n, g_0), de dimension n, munie de sa structure riemannienne canonique g_0.

1.2. (cf. [6], page 196): $\lambda_1 \geqq \dfrac{h^2}{4}$, où h est la borne inférieure du rapport

$$\frac{\text{volume}\,(W, g)}{\inf\{\text{volume}\,(W_1, g), \text{volume}\,(W_2, g)\}}$$

lorsque W parcourt l'ensemble des sous-variétés fermées de X qui réalisent une partition de X en deux sous-variétés ouvertes W_1, W_2 dont W est le bord commun.

1.3. (cf. [6], page 189): si (X, g) est à courbure sectionnelle positive, alors $\lambda_1 \leqq k(n)$. (diamètre $(X, g))^{-2}$, où $k(n)$ est un saclaire dépendant seulement de la dimension n de X.

1.4. Le travail [1] fournit pour λ_1 de (X, g) une borne inférieure ne dépendant que de: la dimension de X, le diamètre de (X, g), son rayon d'injectivité, une borne inférieure de la courbure de Ricci et une borne supérieure de la courbure sectionnelle.

Contrairement au 1.1, aucun des résultats 1.2, 1.3 et 1.4 n'est le meilleur possible.

1.5 (cf. [9]): si S^2 est la sphère de dimension 2 et g une structure riemannienne quelconque sur S^2:

1.6 $$\lambda_1 \leqq \frac{8\pi}{\text{aire}\,(S^2, g)}\,;$$

mieux, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois premières valeurs propres de (S^2, g), on a toujours:

1.7 $$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \geqq \frac{3\,\text{aire}\,(S^2, g)}{8\pi}\,.$$

Ici, les deux inégalités sont les meilleures possibles: elles caractérisent la sphère canonique (S^2, g_0).

Dans le présent article, nous donnons trois résultats: deux positifs, un négatif. Le premier (n° 2), est une borne supérieure pour λ_1 qui fait intervenir les normes des formes harmoniques de degré 1 de (X, g) et la borne inférieure du volume des hypersurfaces de X non homologues à 0 dans X; en dimension deux, cette borne ne fait plus intervenir la norme des formes harmoniques et est caractéristique du tore plat équilatéral.

Le deuxième résultat consiste à montrer qu'un inégalité généralisant 1.7 serait fausse pour $X = S^n$ si $n \geqq 3$ ou $X = T^2$, le tore de dimension 2: cf. 4.3 et 4.22. Le n°. 4 contient deux résultats connexes: 4.15 et 4.24.

Le troisième (n° 5) est assez spécial: il concerne les variétés de Blaschke Green, i.e. dont toutes les géodésiques issues d'un point x (quelconque) de X passent toujours par un antipode $\tilde{x}$ au bout du temps π.

Pour alléger le n° 4, on a introduit un n° 3 consacré aux calculs des variations premières et secondes des valeurs propres du laplacien d'une variété riemannienne.

1.8 *Convention.* Toutes les variétés considérées seront *compactes*; pour une variété riemannienne (X, g) l'assertion '$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *sont les k premières valeurs propres de* (X, g)' signifiera ceci: les k nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les k plus petits choisis dans l'ensemble des valeurs propres, différentes de 0, du laplacien de (X, g), opérant sur les fonctions $C^\infty(X)$, cet ensemble étant constitué de ces valeurs propres *répétées* un nombre de fois égal à leur multiplicité. Si par exemple λ_1 est valeur propre d'ordre h et $k \leqq h$, alors les k premières valeurs propres de (X, g) sont $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1, \ldots, \lambda_k = \lambda_1$.

1.9 *Notations.* Pour la variété riemannienne (X, g), on notera $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\,\cdot}$ les symboles de Christoffel, ∇ la dérivation covariante de tout tenseur, Hess $f = \nabla df$ le hessien de la fonction $f \in C^\infty(X)$, v_g la mesure canonique et volume

$$(X, g) = \int_X v_g$$

la masse totale de (X, g) pour la mesure v_g; si plus généralement Y est une sous-variété de X, volume(Y, g) désignera son volume pour la structure riemannienne induite par g sur Y.

1.10 Pour la variété X, on notera $\overset{1}{\bigcirc} X$ (resp. $\overset{2}{\bigcirc} X$) l'espace des formes différentielles de degré 1 (resp. des formes différentielles bilinéaires symétriques) sur X, et '$\cdot \circ \cdot$' le produit symétrique de

$$\xi, \eta \in \overset{1}{\bigcirc} X\colon \xi \circ \eta = \tfrac{1}{2}(\xi \otimes \eta + \eta \otimes \xi) \in \overset{2}{\bigcirc} X.$$

Par exemple le hessien Hess f est dans $\overset{2}{\bigcirc} X$. On notera $\delta : \overset{2}{\bigcirc} X \to \overset{1}{\bigcirc} X$ l'opérateur de la variété riemannienne (X, g) qui s'écrit, en coordonnées locales:

$$(\delta h)_i = -\sum_k \nabla^k h_{ki}.$$

1.11 Pour les fonctions, les éléments de $\overset{1}{\bigcirc} X$ ou de $\overset{2}{\bigcirc} X$, on notera $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire ponctuel des extensions tensorielles de g et

$$\langle \cdot , \cdot \rangle = \int_X (\cdot \mid \cdot) v_g$$

le produit scalaire global. De même pour les normes ponctuelles et globales: $|\cdot|$, $\|\cdot\|$.

2. Carcan, formes harmoniques et première valeur propre

Pour une variété riemannienne compacte (X, g) notons $\mathscr{H}^1(X; \mathbf{Z})$ le réseau des formes harmoniques de degré 1 et à périodes toutes entières (cf. [4], 9) et c la borne inférieure de volume (Y, g) lorsque Y parcourt les sous-variétés de codimension 1 de X qui ne sont pas homologues à 0 dans X; si a est la dimension de X, le scalaire c n'est donc autre que le $(a-1)$-carcan de (X, g) : [4], 6.

2.1. Théorème. *Pour toute X orientable et quelle que soit la structure riemannienne g sur X, on a*

$$\lambda_1 \leqq \frac{4\pi^2}{c^2} \inf \{\|\omega\|^4 : \omega \in \mathscr{H}^1(X; \mathbf{Z}) - \{0\}\}.$$

Pour démontrer 2.1 considérons $\omega \in \mathscr{H}^1(X; \mathbf{Z}) - \{0\}$ et l'application de Jacobi $j_\omega : X \to S^1$ de X sur le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$, obtenue en intégrant ω le long d'une courbe quelconque joignant $x_0 \in X$ fixé à x: $j_\omega(x) = \int_\gamma \omega$ (cf. par exemple [4], 5.7). Posons $p = j_\omega$; à $f \in C^\infty(S^1)$ quelconque on associe $F = f \circ p \in C^\infty(X)$. Si dt désigne la 1-forme canonique de S^1, on a par définition de $j_\omega = p$: $p^* dt = \omega$. Si f' désigne la dérivée usuelle de f, i.e. $df = f' dt$, on aura $dF = p^* df = (f' \circ p)\omega$; et $|dF|^2 = (f' \circ p)^2 |\omega|^2$.

D'après le principe du minimum pour λ_1 (cf. par exemple [6], p. 186), on a, pour toute $\kappa \in C^\infty(X)$ telle que $\int_X \kappa v_g = 0$:

$$\frac{||d\kappa||^2}{||\kappa||^2} = \frac{\int_X |d\kappa|^2 v_g}{\int_X \kappa^2 v_g} \geqq \lambda_1 .$$

Le théorème 2.1 va résulter d'un choix convenable de κ. Considérons $\alpha \in S^1$ et $f_\alpha = t \hookrightarrow \cos(2\pi(t-\alpha))$, puis $F_\alpha = f_\alpha \circ p$ et enfin

$$\int_X F_\alpha v_g .$$

Comme $f_{\alpha+\frac{1}{2}} = -f_\alpha$ pour tout α, il existe, par continuité, un $\alpha \in S^1$ tel que

$$\int_X F_\alpha v_g = 0.$$

Pour cet α, posons $f = f_\alpha$, $F = F_\alpha$. Il ne reste plus qu'à évaluer $||dF||^2$ et $||F||^2$.

La situation $p : X \to S^1$, $\omega = p^* dt$ est un cas particulier de celle traitée dans la démonstration de la proposition 10.3 de [4]: ici $Y = S^1$, notre p est le f de [4] et $\alpha = w$, $\beta = dt$. Cette démonstration de [4] permet de faire les calculs ci-dessous où, par abus mais pour simplifier, nous avons pris les intégrales sur X et S^1 tout entiers. Remarquons d'abord que, comme $d(*\omega) = 0$ parce que ω est harmonique, le scalaire

$$k = \int_{p^{-1}(t)} *\omega$$

est indépendant de la valeur régulière $t \in S^1$ (d'après la formule de Stokes si l'on veut ou parce que $p^{-1}(t)$, $p^{-1}(t')$ sont homologues pour deux valeurs régulières quelconques t, t'). Pour calculer cette constante k, on calcule

$$||\omega||^2 = \int_X *\omega \wedge \omega = \int_X *\omega \wedge p^* dt = \int_{S^1} \left(\int_{p^{-1}(t)} *\omega \right) dt = k \int_{S^1} dt = k,$$

donc $k = ||\omega||^2$, soit pour toute valeur t régulière:

2.2 $$\int_{p^{-1}(t)} *\omega = ||\omega||^2.$$

Ensuite:

$$||F||^2 = \int_X F^2 v_g = \int_X \frac{F^2}{|\omega|^2} *\omega \wedge \omega = \int_X \frac{(f \circ p)^2}{|\omega|^2} *\omega \wedge p^* dt$$
$$= \int_{S^1} \cos^2 (2\pi(t-\alpha)) \left(\int_{p^{-1}(t)} \frac{*\omega}{|\omega|^2} \right) dt.$$

L'inégalité de Schwarz entraîne:

$$2.3 \quad \int_{p^{-1}(t)} \frac{*\omega}{|\omega|^2} \cdot \int_{p^{-1}(t)} *\omega \geqq \left(\int_{p^{-1}(t)} \frac{*\omega}{|\omega|} \right)^2 = (\text{volume}\,(p^{-1}(t), g))^2 \geqq c^2$$

par définition de c: en effet, $\omega \neq 0$ entraîne que $p^{-1}(t)$ est non homologue à 0 (cf. [4], 5.5). D'où, à l'aide de 2.3:

$$||F||^2 \geqq \frac{c^2}{||\omega||^2} \int_{S^1} \cos^2 (2\pi(t-\alpha))\, dt.$$

Puis, plus simplement:

$$||dF||^2 = \int_X |dF|^2 v_g = \int_X (f' \circ p)^2 |\omega|^2 v_g = \int_X (f' \circ p)^2 *\omega \wedge \omega$$
$$= \int_X (f' \circ p)^2 *\omega \wedge p^* dt = \int_{S^1} f'^2 \left(\int_{p^{-1}(t)} *\omega \right) dt$$
$$= 4\pi^2 ||\omega||^2 \int_{S^1} \sin^2 (2\pi(t-\alpha))\, dt,$$

grâce encore à 2.2. Comme

$$\int_{S^1} \sin^2 (2\pi(t-\alpha))\, dt = \int_{S^1} \cos^2 (2\pi(t-\alpha))\, dt,$$

on a bien:

$$\frac{||dF||^2}{||F||^2} \leqq \frac{4\pi^2 ||\omega||^4}{c^2}$$

pour toute $\omega \in \mathscr{H}^1(X; \mathbf{Z}) - \{0\}$, d'où le résultat.

Pour pleinement utiliser 2.1 il faudrait des relations universelles (i.e. indépendantes de g, sur X donnée) entre c et $\inf \{||\omega||^2 : \omega \in \mathscr{H}^1(X; \mathbf{Z}) - \{\{0\}\}$. Il y a un cas où l'on peut conclure, c'est celui où $a = \dim X = 2$, car alors (cf. [4], 10):

$$2.4 \qquad \inf \{||\omega||^2 : \omega \in \mathscr{H}^1(X; \mathbf{Z}) - \{0\}\} \leqq (u_{2\gamma, 1})^{-1/\gamma},$$

où γ désigne le genre de la surface compacte orientable X et $u_{\cdot,\cdot 1}$ une constante arithmétique liée à la constante d'Hermite ([4], 7). D'où le

2.5 Corollaire. *Soit X une surface compacte de genre γ; alors pour toute structure riemannienne g sur X:*

$$\lambda_1 \leqq \frac{4\pi^2}{c^2}(u_{2\gamma,1})^{-2\gamma}.$$

Dans le cas particulier où X est le tore T^2, i.e. $\gamma = 1$, *on a*

$$\lambda_1 \leqq \frac{16\pi^2}{3c^2},$$

et en outre

$$\lambda_1 = \frac{16\pi^2}{3c^2}$$

si et seulement si (X, g) est isométrique au tore plat équilatéral.

Il n'y a que le cas du tore à regarder; on a $u_{2,1} = \sqrt{3}/2$ ([4], 7) et si l'égalité est atteinte, elle l'est d'abord nécessairement dans l'inégalité de Schwarz 2.3, donc $|\omega|$ est constante ce qui entraîne que (X, g) est un tore plat (cf. démonstration de 10.7 dans [4]), tore plat qui est éguilatéral parce que l'égalité est atteinte dans 2.4 (cf. [4], 7).

2.6. Remarque. Considérant le résultat de Hersch 1.6, on peut se demander ce qu'il en est du produit $\lambda_1$aire (T^2, g) lorsque g varie sur le tore T^2, produit qui vaut $8\pi^2/\sqrt{3}$ pour le tore plat équilatéral (cf. 4.). Pour tout autre tore plat de volume V on a bien

$$\lambda_1 V \leqq \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$$

d'après [6], p. 148 et [4], 7.5 et 7.11. Il serait intéressant de décider, si pour $V =$ aire (T^2, g) on a

2.7 $$\lambda_1 V \leqq \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}} \text{ pour toute } g,$$

et sinon si $\lambda_1 V$ reste borné ou non. Voir aussi 4.22.

3. Formulaire pour les variations premières et secondes d'une valeur propre

Soit (X, g) une variété riemannienne compacte et G une famille à un paramètre t de structures riemanniennes sur X, telle que $G(0) = g$. Pour tout t désignons encore par la même lettre, et sans y faire figurer t, les différents invariants riemanniens utilisés pour $G(t)$, par exemple (cf. 1.9, 1.10, 1.11): $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$, Hess, δ, ∇, les symboles de Christoffel $\Gamma^{\cdot}_{\cdot\cdot}$, enfin le laplacien Δ opérant sur les fonctions. On pose:

$$H = \frac{dG}{dt}, \; K = \frac{dH}{dt} = \frac{d^2G}{dt^2}, \; h = H(0), \; k = K(0)$$

$$\tilde{H} = \operatorname{trace}_G H, \; \tilde{h} = H(0) = \operatorname{trace}_g h,$$

enfin on désigne par . ′ les dérivées par rapport à t.

Supposons qu'il existe une fonction Φ et un scalaire Λ, dépendants de t et C^2 en t, tels que

3.1 $$\forall t : \Delta\Phi = \Lambda\Phi.$$

Posons $\Phi(0) = \varphi$ et $\Lambda(0) = \lambda$ et proposons-nous de calculer

$$\lambda' = \Lambda'(0) \text{ et } \lambda'' = \Lambda''(0) = \frac{d^2\Lambda}{dt^2}(0).$$

On supposera en outre normée, i.e. $||\Phi||^2 = 1$ pour tout t. Il faut d'abord connaître l'opérateur Δ' défini par

$$\forall f \in C^\infty(X) : \Delta' f = \frac{d(\Delta f)}{dt}.$$

Prenons des coordonnées locales quelconques; on sait que (cf. par exemple [6], pages 30 et 128):

3.2 $$\begin{aligned}\Delta f &= -\operatorname{trace}_G \operatorname{Hess} f = -\sum_{i,j} G^{ij}\nabla_i\nabla_j f \\ &= -\sum_{i,j} G^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right),\end{aligned}$$

où (G^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (G_{ij}). On a alors la formule

3.3 $$\Delta' f = (H \,|\, \operatorname{Hess} f) - (\delta H + \tfrac{1}{2} d\tilde{H} \,|\, df).$$

Comme $\langle \Delta f, g\rangle = \langle df, dg\rangle$ pour toutes $f, g \in C^\infty(X)$ et pour tout t, en dérivant et en appliquant la formule 3.7 ci-dessous et la formule 2.10 de [2], on obtient

$$\langle \Delta' f, g\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \tilde{H}\Delta f, g\rangle = \tfrac{1}{2}\langle \tilde{H} df, dg\rangle - \langle df, dg, H\rangle.$$

En transformant $\langle df, dg, H\rangle$ par la formule de Stokes on trouve

$$\begin{aligned}\langle \Delta' f, g\rangle = &-\tfrac{1}{2}\langle \tilde{H}\Delta f, g\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \delta(\tilde{H} df), g\rangle \\ &+ \langle (\operatorname{Hess} f | H), g\rangle - \langle (\delta H | df), g\rangle.\end{aligned}$$

Ceci ayant lieu pour toute g, on aura bien

$$\begin{aligned}\Delta' f &= -\tfrac{1}{2}\tilde{H}\Delta f - \tfrac{1}{2}(d\tilde{H} | df) + \tfrac{1}{2}\tilde{H}\Delta f + (\operatorname{Hess} f | H) - (\delta H | df) \\ &= (\operatorname{Hess} f | H) - (df | \delta H + \tfrac{1}{2} d\tilde{H}).\end{aligned}$$

On peut maintenant dériver 3.1 pour trouver

3.4 $$\Delta\Phi' = \Lambda\Phi' + \Lambda'\Phi + (d\Phi | \delta H + \tfrac{1}{2} d\tilde{H}) - (H | \operatorname{Hess} \Phi).$$

On en déduit Λ' par la condition de Fredholm classique, obtenue en effectuant le produit scalaire global des deux membres de 3.4 avec Φ; comme $\langle \Phi, \Delta\Phi' \rangle = \langle \Delta\Phi, \Phi' \rangle = \Lambda\langle \Phi, \Phi' \rangle$ et que $||\Phi||^2 = 1$, il reste

3.5 $$\Lambda' = \langle H, \Phi \text{ Hess } \Phi \rangle - \langle \Phi d\Phi, \delta H + \tfrac{1}{2} d\tilde{H} \rangle.$$

Que l'on transforme en

3.6 $$\Lambda' = -\langle H, d\Phi \circ d\Phi \rangle - \tfrac{1}{4}\langle d(\Phi^2), d\tilde{H} \rangle,$$

parce que $d(\Phi^2) = 2\Phi d\Phi$ et que

$$\langle d(\Phi^2), \delta H \rangle = \langle \text{Hess } (\Phi^2), H \rangle = \langle 2\Phi \text{ Hess } \Phi + 2d\Phi \circ d\Phi, H \rangle$$

d'après la formule 2.6 de [2].

On obtient Λ'' en dérivant l'égalité 3.6. Pour calculer cette dérivée, il faut connaître celle des produits scalaires globaux,

$$\frac{d(\langle \xi, \eta \rangle)}{dt}, \frac{d(\langle r, s \rangle)}{dt},$$

où $\xi, \eta \in \overset{1}{\bigcirc} X$ (resp. $r, s \in \overset{2}{\bigcirc} X$) sont des 1-formes différentielles (resp. des formes différentielles bilinéaires symétriques) dépendant de t. Mais $d((r|s))/dt$ est fourni par la formule 2.15 de [2], et on a facilement la formule analogue

3.7 $$\frac{d((\xi|\eta))}{dt} = (\xi'|\eta) + (\xi/\eta') - (\xi \circ \eta | H),$$

d'où les dérivées cherchées:

3.8 $$\frac{d(\langle r, s \rangle)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_X (r|s) v_G\right]$$
$$= \langle r', s \rangle + \langle r, s' \rangle - 2\langle r, s, H \rangle + \tfrac{1}{2}\langle \tilde{H} r, s \rangle$$

d'après la formule 2.10 et la notation $\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$ page 288 de [2]. De même:

3.9 $$\frac{d(\langle \xi, \eta \rangle)}{dt} = \langle \xi', \eta \rangle + \langle \xi, \eta' \rangle - \langle \xi \circ \eta, H \rangle + \tfrac{1}{2}\langle \tilde{H}\xi, \eta \rangle .$$

De 3.6, 3.8 et 3.9 on déduit, avec encore l'aide de la formule $d\tilde{H}/dt = \tilde{K} - |H|^2$:

3.10 $$\begin{aligned} \Lambda'' = & -\langle K, d\Phi \circ d\Phi \rangle - 2\langle H, d\Phi \circ d\Phi' \rangle + 2\langle H, H, d\Phi \circ d\Phi \rangle \\ & - \tfrac{1}{2}\langle \tilde{H} \cdot H, d\Phi \circ d\Phi \rangle - \tfrac{1}{2}\langle d(\Phi\Phi'), d\tilde{H} \rangle \\ & - \tfrac{1}{4}\langle d(\Phi^2), d(K - |H|^2) \rangle + \tfrac{1}{4}\langle H, d(\Phi^2) \circ d\tilde{H} \rangle \\ & - \tfrac{1}{8}\langle d(\Phi^2), \tilde{H}\, d\tilde{H} \rangle. \end{aligned}$$

En remarquant que (formule de Stokes):

3.11 $$\langle h, d\varphi \circ d\varphi' \rangle = \langle \delta h, \varphi' d\varphi \rangle - \langle h, \varphi' \text{ Hess } \varphi \rangle$$

et en spécialisant en $t = 0$ on trouve

3.12 $$\lambda' = -\langle h, d\varphi \circ d\varphi\rangle - \tfrac{1}{4}\langle d(\varphi^2), d\tilde{h}\rangle = -\langle h, \varphi \operatorname{Hess}\varphi\rangle - \langle \delta h + \tfrac{1}{2}d\tilde{h}, \varphi d\varphi\rangle,$$

3.13 $$\begin{aligned}\lambda'' = & -\langle k, d\varphi \circ d\varphi\rangle + 2\langle h, \varphi' \operatorname{Hess}\varphi\rangle - 2\langle \delta h, \varphi' d\varphi\rangle \\ & + 2\langle h, h, d\varphi \circ d\varphi\rangle \\ & - \tfrac{1}{4}\langle d(\varphi^2), d(k - |h|^2)\rangle - \tfrac{1}{2}\langle \tilde{h}h, d\varphi \circ d\varphi\rangle - \tfrac{1}{2}\langle d(\varphi\varphi'), d\tilde{h}\rangle \\ & + \tfrac{1}{4}\langle d(\varphi^2) \circ dh, h\rangle - \tfrac{1}{8}\langle d(\varphi^2), \tilde{h}d\tilde{h}\rangle.\end{aligned}$$

3.14 A quelles conditions existe-t-il Λ et Φ vérifiant 3.1? Le fait que la multiplicité des valeurs propres ne soit pas toujours constante crée des difficultés; en particulier, la famille G peut-être C^∞ sans qu'il existe Φ, Λ vérifiant 3.1 et C^∞: voir [10], page 111 pour ce genre de contre-exemple. Par contre, ces ennuis n'arrivent pas si l'on se limite à une famille G analytique réelle en t. Précisément:

3.15 Lemme. *Si G est analytique réelle en t et si λ est une valeur propre de multiplicité k de Δ_g (où $g = G(0)$), alors il existe k scalaires et k fonctions: Λ_i, Φ_i $(i = 1, \cdots, k)$ dépendant de t de façon analytique réelle et tels que:*

1. *$\Delta\Phi_i = \Lambda_i\Phi_i$ pour tous i et t,*
2. *$\Lambda_i(0) = \lambda$ pour tout i,*
3. *$\{\Phi_i\}$ est, pour tout, orthonormée.*

Si le développement en série entière de G est

$$G(t) = \sum_i t^i a_i,$$

on étend G à un domaine du plan complexe $\boldsymbol{C}$ en posant

$$G(\kappa) = \sum_i \kappa^i a_i,$$

pour κ de module assez petit, et on définit un opérateur associé sur X: $\Delta_{G(\kappa)} : C^\infty(X; \boldsymbol{C}) \to C^\infty(X; \boldsymbol{C})$ en formalisant au cas complexe la formule 3.2:

3.16 $$\Delta_{G(\kappa)} f = -\sum_{i,j} G^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right), \quad f \in C^\infty(X; \boldsymbol{C}),$$

où l'on a posé:

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_h G^{kh}\left(\frac{\partial G_{hj}}{\partial x_i} + \frac{\partial G_{hi}}{\partial x_j} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_h}\right).$$

Le domaine de cet opérateur est l'espace de Sobolev $H^2(X)$, qui est indépendant de κ parce que X est compacte. La formule de définition 3.16

montre que, pour $f \in H^2(X)$ donnée, l'application $\kappa \mapsto \Delta_{G(\kappa)} f$ est holomorphe en κ, puisque la matrice (G_{ij}) étant holomorphe et inversible, sa matrice inverse le sera aussi, ainsi que les dérivées partielles $\partial Gh_j / \partial x_i, \cdots$. Tout ce qui précède montre que $G(\kappa)$ est une famille holomorphe d'opérateurs de type (A), au sens de [10], page 375. Comme cette famille est self-adjointe (par construction et parce que le laplacien $\Delta_{G(t)}$ l'est pour t réel), nous sommes dans les conditions d'application de l'avant-dernier alinea de la page 386 de [10]: alors la conclusion du lemme résulte de suite de cet alinéa.

4. Deux contre-exemples

Il est naturel de rechercher des généralisations de 1.6 ou 1.7, où S^2 est remplacée par une autre variété X. Nous avons déjà rencontré cette question en 2.6 pour $X = T^2$, le tore de dimension 2; voir aussi 4.22. Pour ce qui est de généraliser 1.6, la question est, à notre connaissance, complètement ouverte. Par contre nous montrons ci-dessous que la généralisation de 1.7 est fausse pour $X = T^2$ et pour $X = S^n$ si $n \geqq 3$.

4.1. Rappelons d'abord que, pour la sphère canonique (S^n, g_0), la première valeur propre vaut n et est multiple d'ordre $n+1$, puis que toute φ telle que $\Delta\varphi = n\varphi$ est telle que

4.2 $$\operatorname{Hess} \varphi = -\varphi g,$$

(cf. [6], page 160 et l'ensemble de la démonstration du théorème d'Obata, pages 180-181). Posons $V_0 =$ volume (S^n, g_0); alors:

4.3. Théorème. *Pour tout $n \geqq 3$ il existe sur S^n des structures riemanniennes g telles que, si $V =$ volume (S^n, g) et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ sont les $n+1$ premieres valeurs propres de (S^n, g), on ait*

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i V^{2/n})^{-1} < (n+1)(n V_0^{2/n})^{-1}.$$

D'après [3], 12.19, dès que $n \geqq 3$ il existe des $h \in \overset{2}{\bigcirc} S^n$ tels que à la fois $h \neq 0$, $\delta h = 0$, $\tilde{h} = 0$. Fixons désormais un tel h et considérons la famille à un paramètre t de structures riemanniennes sur S^n définie par

$$G: G(t) = g_0 + th.$$

Elle vérifie banalement la conditon d'analyticité de lemme 3.14, donc en particulier il existe $n+1$ fonctions et scalaires Φ_i, Λ_i dépendant C^∞ de t, tels que $\Delta\Phi_i = \Lambda_i\Phi_i$ pour tous i et t, et tels que les $\varphi_i = \Phi_i(0)$ forment une base des fonctions propres pour $\lambda_1 = n$ de (S^n, g_0). On peut supposer la famille $\{\Phi_i\}$ $i = 1, \cdots, n+1$ orthonormée pour tout t; en particulier $\{\varphi_i\}$ sera orthonormée.

On est dans les conditions d'applications des formules 3.12, 3.13. Compte tenu de 4.2, $\delta h = 0$, $\tilde{h} = 0$, la formule 3.12 fournit

4.4 $$\forall_i : \lambda_i' = \frac{d\Lambda_i}{dt}(0) = \langle h, n\varphi_i^2 g\rangle = n\langle \tilde{h}, \varphi_i^2\rangle = 0.$$

La formule 3.13, puisque

$$k = \frac{d^2G}{dt^2}(0) = 0,$$

se réduit à:

$$\begin{aligned}\lambda_i'' = \frac{d^2\Lambda_i}{dt^2}(0) &= 2\langle h, \varphi_i' \operatorname{Hess} \varphi_i\rangle + 2\langle h, h, d\varphi_i \circ d\varphi_i\rangle \\ &\qquad + \tfrac{1}{4}\langle d(\varphi_i^2), d(|h|^2)\rangle \\ &= -2n\langle h, \varphi_i\varphi_i' g\rangle + 2\langle h, h, d\varphi_i \circ d\varphi_i\rangle + \tfrac{1}{4}\langle d(\varphi_i^2), d(|h|^2)\rangle \\ &= -2n\langle \tilde{h}, \varphi_i\varphi_i'\rangle + 2\langle h, h, d\varphi_i \circ d\varphi_i\rangle + \tfrac{1}{4}\langle d(\varphi_i^2), d(|h|^2)\rangle,\end{aligned}$$

soit

4.5 $$\forall i : \lambda_i'' = 2\langle h, h, d\varphi_i \circ d\varphi_i\rangle + \tfrac{1}{4}\langle d(\varphi_i^2), d(|h|^2)\rangle.$$

4.6 Nous aurons besoin seulement de $\sum_i \lambda_i''$:

$$\sum_i \lambda_i'' = 2\langle h, h, \sum_i (d\varphi_i \circ d\varphi_i)\rangle + \tfrac{1}{4}\langle d(\sum_i \varphi_i^2), d(|h|^2)\rangle.$$

Or, pour (S^n, g_0), on a:

4.7 $$\sum_i \varphi_i^2 = \frac{n+1}{V_0}, \quad \sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i = \frac{n+1}{V_0} g.$$

En effet, $\{\varphi_i\}$ étant une base orthonormée, la fonction $\sum_i \varphi_i^2$ et la forme différentielle bilinéaire symétrique $\sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i$ seront toutes deux invariantes par le groupe d'isométries $O(n+1)$ de (S^n, g_0). Ce qui montre d'abord que $\sum_i \varphi_i^2$ est une fonction constante w sur S^n, constante que l'on calcule en remarquant que $||\varphi_i||^2 = 1$ pour tout i entraîne:

$$\langle w, 1\rangle = wV_0 = \sum_i \langle \varphi_i^2, 1\rangle = \sum_i ||\varphi_i||^2 = n+1.$$

Puis $\sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i$ est une forme quadratique invariante par $O(n+1)$, donc proportionnelle à g; le facteur de proportionnalité s se calcule en prenant la trace de l'égalité

$$sg = \sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i:$$

$$\operatorname{trace}_g(sg) = ns = \sum_i \operatorname{trace}_g (d\varphi_i \circ d\varphi_i) = \sum_i |d\varphi_i|^2,$$

$$\sum_i ||d\varphi_i||^2 = \sum_i n||\varphi_i^2|| = n(n+1), \text{ donc } \langle ns, 1\rangle = nsV_0 = n(n+1).$$

Il reste donc seulement (voir la définition de $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle$ dans [2], page 288):

4.8 $$\sum_i \lambda_i'' = 2\left\langle h, h, \frac{n+1}{V_0}\right\rangle = \frac{2(n+1)}{V_0}\,||h||^2.$$

4.9 En outre la fonction

$$\Xi : t \mapsto \Xi(t) = \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i V^{2/n})^{-1}$$

(où V = volume (S^n, G)) est de classe C^∞; nous allons montrer que $\Xi'(0) = 0$ et $\Xi''(0) < 0$, ce qui démontrera bien 4.3. Un calcul banal fournit:

4.10 $$V_0^{n+2/n}\Xi'(0) = -\frac{V_0}{n^2}\Big(\sum_i \lambda_i'\Big) - \frac{2(n+1)}{n^2}\,V'(0),$$

4.11 $$V_0^{2(n+1)/n}\Xi''(0) = -\frac{V_0^2}{n^2}\Big(\sum_i \lambda_i''\Big) + \frac{2V_0^2}{n^3}\Big(\sum_i \lambda_i'^2\Big) + \frac{4V_0}{n^3}\Big(\textstyle\sum_i \lambda_i'\Big)V'(0)$$
$$+ \frac{2(n+2)(n+1)}{n^3}\,V'^2(0) - \frac{2(n+1)}{b^2}\,V_0 V''(0).$$

Or

$$V'(0) = \tfrac{1}{2}\langle \tilde{h}, 1\rangle = 0,$$
$$V''(0) = \tfrac{1}{2}\langle \tilde{k}, 1\rangle - \tfrac{1}{2}||h||^2 + \tfrac{1}{4}||\tilde{h}||^2 = -\tfrac{1}{2}||h||^2,$$

d'après [2], 2.10 et 2.15. D'après 4.10 et 4.11:

$$\Xi'(0) = 0,\ \Xi''(0) = -\frac{2(n+1)V_0^2}{V_0 n^2}\,||h||^2 + \frac{2(n+1)}{2n^2}\,V_0||h||^2$$
$$= -\frac{n+1}{n^2}\,V_0||h||^2 < 0$$

dès que $h \neq 0$.

4.12. Remarque. Bien sûr, 4.3 ne démontre pas que l'assertion 'quelle que soit g structure riemannienne sur S^n: $\lambda_1 V^{2/n} \leqq nV_0^{2/n}$' est fausse; il serait bon de décider ce qu'il en est de cette assertion pour les $n \geqq 3$. On peut aussi se demander si $\sum_i(\lambda_i V^{2/n})^{-1}$ est bornée inférieurement, lorsque g parcourt l'ensemble des structures riemanniennes sur S^n, par un nombre strictement positif. A ce sujet, voir 4.15.

4.13. La démonstration de 1.7 dans [9] est basée de façon essentielle sur les faits suivants: d'une part le groupe conforme de (S^2, g_0) est très gros, en tout cas plus gros que le groupe des isométries $O(3)$, d'autre part toute structure riemannienne g sur S^2 est conforme à g_0. Ceci n'a rien de surprenant, car les $h \in \overset{2}{\bigcirc} S^n$, $\delta h = 0$ et $\tilde{h} = 0$, que nous avons utilisés dans la démonstration de 4.3, sont exactement ceux qui représentent les variations de structures riemanniennes sur S^n qui sont non-conformes à g_0: cf. [3], page 42, pour cette philosophie. Il est donc naturel de demander si l'on aurait

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_i V^{2/n})^{-1} \geqq (n+1)(nV_0^{2/n})^{-1} \tag{4.14}$$

pour toute structure riemannienne g sur S_n conforme à g_0, i.e. de la forme $g = fg_0, f \in C^\infty(S^n; \boldsymbol{R}_+^*)$. Je ne sais si 4.14 est vraie ou fausse; mais la technique de [9] permet de démontrer le résultat partiel:

4.15. Proposition. *Pour toute $g = fg_0$ sur S^n, on a*

$$\sum_i (\lambda_i V^{2/n})^{-1} \geqq k(n),$$

où le scalaire $k(n)$ ne depend que de n et est strictement positif.

Pour distinguer les invariants riemanniens associés à g_0 et g respectivement, nous mettrons g, g_0 en indice. Le lemme de [9], p. 1645, reste valable en dimension quelconque; on peut donc supposer que f vérifie la condition suivante:

$$\langle 1, \varphi \rangle_g = \langle f, \varphi \rangle_{g_0} = 0 \quad \forall \varphi \in V, \tag{4.16}$$

où $W = \{\varphi : \Delta_{g_0}\varphi = n\varphi\}$ est l'espace vectoriel de dimension $n+1$ des premières fonctions propres de (S^n, g_0). Considérons sur W les deux formes quadratiques $\|\cdot\|_{g_0}^2$ et $\|d\cdot\|_g^2$; il existe une base $\{\varphi_i\}$ de W, orthonormée pour $\|\cdot\|_{g_0}^2$ et telle que les φ_i soient orthogonaux deux à deux pour $\|d\cdot\|_g^2$. D'après [8], formules (2) et (6):

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i} \geqq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\|\varphi_i\|_g^2}{\|d\varphi_i\|_g^2}. \tag{4.17}$$

Pour ce qui est des numérateurs, le fait que $\{\varphi_i\}$ soit $\|\cdot\|_{g_0}^2$-orthonormée entraîne que la fonction $\Sigma_i \varphi_i^2$ est constante sur S^n, constante qui vaut $n+1/V_0$ (voir 4.7). On aura donc

$$\sum_i \|\varphi_i\|_g^2 = \sum_i \int_{S^n} \varphi_i^2 v_g = \frac{n+1}{V_0} V. \tag{4.18}$$

D'après Hölder, pour tout i:

$$\|d\varphi_i\|_g^2 = \int_{S^n} |d\varphi|_g^2 v_g$$

$$\leqq \left(\int_{S^n} (|d\varphi|_g^2)^{n/2} v_g\right)^{2/n} \left(\int_{S^n} v_g\right)^{(n-2)/n} = V^{(n-2)/n} \left(\int_{S^n} |d\varphi|_g^n v_g\right)^{2/n}. \tag{4.19}$$

Mais comme

$$|d.\ |_g = f^{-\frac{1}{2}}|d.\ |_{g_0} \text{ et } v_g = f^{n/2}v_{g_0},$$

on a

$$\int_{S^n} |d\varphi|_g^n v_g = \int_{S^n} |d\varphi|_{g_0}^n v_{g_0}.$$

Comme $O(n+1)$ opère transitivement sur les φ de V de même $\|\cdot\|g_0$-norme, c'est que, pour une base orthonormée $\{\varphi_i\}$, le scalaire

$$\int_{S^n} |d\varphi_i|_{g_0}^n v_{g_0}$$

est indépendant de i, soit h sa valeur, qui ne dépend que de n et que le lecteur pourra calculer s'il le désire. De 4.17, 4.18, 4.19 et ce qui précède, on déduit donc

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i} \geqq \frac{\sum_i \|\varphi_i\|_g^2}{h^{2/n}V^{(n-1)/n}} = \frac{(n+1)V}{h^{2/n}V_0\, V^{1-2/n}} = \frac{(n+1)V^{2/n}}{h^{2/n}V_0},$$

d'où la proposition avec

$$k(n) = \frac{n+1}{h^{2/n}V_0}.$$

4.20. Cette majoration n'est pas la meilleure possible, parce que, dans l'inégalité de Hölder utilisée en 4.19, la fonction $|d\varphi|_g$ ne peut jamais être une constante pour une fonction de W.

4.21. Un autre essai de généralisation de 1.7 à des X autres que S^2 consiste cette fois-ci à rester en dimension 2 mais à remplacer S^2 par le tore T^2 de dimension 2. La structure riemannienne g_0 de référence sur T^2 est maintenant celle du tore plat équilatéral, pour lequel la première valeur propre est multiple d'ordre 6; pour ce qui concerne le spectre des tores et le tore équilatéral, voir [6], p. 148 et 236. Définissons T^2 comme le quotient $\boldsymbol{R}^2/\Lambda$, où Λ est le réseau engendré par $(1, 0)$ et $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$; le réseau dual est engendré par $(1, 1/\sqrt{3})$ et $(0, 2/\sqrt{3})$, donc la première valeur propre est $16\,\pi^2/3$ et $V_0 = \sqrt{3}/2$. La généralisation attendue est déjà fausse pour les tores plats:

4.22 Proposition. *Il existe des tores plats (T^2, g) dont les six premières valeurs propres vérifient*

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i} < \frac{6 \text{ aire } (T^2, g)}{8\pi^2/\sqrt{3}}.$$

Il suffit de prendre pour réseau de $\boldsymbol{R}^2$ celui engendré par $(1, 0)$ et

$(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2(1+\varepsilon))$ pour ε assez petit. Alors son dual est engendré par

$$\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}(1+\varepsilon)}\right)$$

et

$$\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}(1+\varepsilon)}\right).$$

Les six premières valeurs propres du tore plat correspondant à ce réseau sont donc

$$\frac{4\pi^2(4+6\varepsilon+3\varepsilon^2)}{3(1+\varepsilon)^2},$$

multiple d'ordre 4 et

$$\frac{4}{3(1+\varepsilon)^2},$$

multiple d'ordre 2. Quant à l'aire de ce tore, c'est $\sqrt{3}/2(1+\varepsilon)$. Un calcul banal fournit, si l'on pose $V = \sqrt{3}/2(1+\varepsilon)$:

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i V} - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi^2} \frac{\varepsilon^3}{4+6\varepsilon+3\varepsilon^2},$$

d'où la proposition en prenant un $\varepsilon < 0$ assez petit.

4.23. La démonstration du 4.3 a montré que, si on appelle $\lambda_1(g), \ldots, \lambda_{n+1}(g)$ les $n+1$ premières valeurs propres d'une structure riemannienne g sur S^n et $V(g)$ son volume, alors la fonction numérique

$$\Xi : g \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} [\lambda_i(g)V(g)^{2/n}]^{-1}$$

est *critique* en g_0, en ce sens que $\Xi'(0) = 0$ pour toute famille analytique réelle G (à vrai dire, le calcul a été fait seulement pour les $h = dG/dt(0)$ tels que $\delta h = 0$ et $\tilde{h} = 0$, mais le cas général va résulter de ce qui suit).

On peut donc se demander quelles sont les variétés riemanniennes (X, g_0) telle que, si $a = \lambda_1(g_0)$ désigne la première valeur propre de (X, g_0) et k son ordre de multiplicité, alors g_0 soit critique pour la fonction Ξ. La réponse est fournie par la:

4.24 Proposition. *Sur une variété compacte X, la structure riemannienne g_0 est critique pour Ξ si et seulement si une base orthonormée $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,k}$ de l'espace propre de la première valeur propre a vérifie les deux conditions*:

$$1. \quad \sum_i \varphi_i^2 = \frac{k}{V_0}, \quad 2. \sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i = \frac{ka}{nV_0},$$

où $n =$ dimension de X *et* $V_0 =$ volume (X, g_0).

Pour voir d'abord que la condition est suffisante, on peut, d'après [5], 3, supposer que $h = dG/dt(0) \in \overset{2}{\bigcirc}X$ est tel que $\delta h = 0$, où il s'agit du δ associé à g_0. La formule 4.10 est simplement ici à remplacer par

4.25 $$V_0^{n+2/2}\Xi'(0) = -\frac{V_0}{a^2}\left(\sum_i \lambda_i'\right) - \frac{2k}{na}V'(0).$$

En remplaçant dans 4.25 $V'(0)$ par $\frac{1}{2}\langle\tilde{h}, 1\rangle$ et à l'aide de la formule 3.12, compte tenu des hypothèses 1 et 2 de la proposition, on trouve bien:

$$\begin{aligned} V_0^{n+2/2}\Xi'(0) &= \frac{V_0}{a^2}\langle h, \sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i\rangle + \tfrac{1}{4}\langle d\tilde{h}, d(\sum_i \varphi_i^2)\rangle - \frac{k}{na}\langle\tilde{h}, 1\rangle \\ &= \frac{V_0}{a^2}\left\langle h, \frac{ka}{nV_0}g\right\rangle - \frac{k}{na}\langle\tilde{h}, 1\rangle \\ &= \frac{k}{na}\left(\langle h, g\rangle - \langle\tilde{h}, 1\rangle\right) = 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons g_0 critique pour Ξ. Remarquons d'abord la décomposition en somme directe orthogonale

4.26 $$\overset{1}{\bigcirc}X = A \oplus B,\ A = \{h : \tilde{h} = 0\},\ B = \{fg_0 : f \in C^\infty(X)\},$$

qui résulte de l'écriture

$$h = \frac{\tilde{h}}{n}g_0 + \left(h - \frac{\tilde{h}}{n}g_0\right).$$

Prenons d'abord des variations correspondant à des h tels que $\tilde{h} = 0$, à cela près quelconques. Comme précédemment on trouve

$$V_0^{(n+2)/2}\Xi'(0) = \frac{V_0}{a^2}\langle h, \sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i\rangle = 0,$$

ceci pour tout h à $\tilde{h} = 0$, ce qui, d'après 4.26, entraîne qu'il existe $s \in C^\infty(X)$ telle que

4.27 $$\sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i = sg_0.$$

Remarquons alors que $\sum_i |d\varphi_i|^2 = ns$ et posons

$$u = \sum_i \varphi_i^2 - \frac{k}{V_0}.$$

on aura

$$\sum_i \langle d(\varphi_i^2), d\tilde{h}\rangle = \langle \Delta u, h\rangle$$

et

$$\Delta u = \sum_i (2\varphi_i\Delta\varphi_i - 2|d\varphi_i|^2) = 2au - 2ns + \frac{2ak}{nV_0},$$

donc

$$s = \frac{a}{n} u - \frac{1}{2n} \Delta u + \frac{ak}{nV_0}.$$

Prenons maintenant h quelconque; avec 3.11, 4.27 et ce qui précède, on obtient:

$$V_0^{n+2/2}\Xi'(0) = \frac{V_0}{a^2} \langle h, \sum_i d\varphi_i \circ d\varphi_i \rangle + \tfrac{1}{4}\langle d(\sum_i \varphi_i^2), d\tilde{h} \rangle - \frac{k}{na} \langle \tilde{h}, 1 \rangle$$
$$= \left\langle \tilde{h}, \frac{V_0}{a^2} s g_0 \right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle h, \frac{V_0}{a^2} \Delta u \right\rangle - \left\langle \tilde{h}, \frac{k}{na} \right\rangle$$
$$= \left\langle \tilde{h}, \frac{V_0}{a^2} s + \frac{V_0}{4a^2} \Delta u - \frac{k}{na} \right\rangle = \frac{V_0}{a^2} \left\langle \tilde{h}, \frac{n-2}{4n} \Delta u + \frac{a}{n} u \right\rangle = 0.$$

Ceci doit avoir lieu pour tout h; comme il existe des h ayant un $\tilde{h}$ imposé quelconque, par exemple $h = \tilde{h}/n\ g_0$, on a donc nécessairement $\Delta u = -4au/(n-2)$, ce qui implique $u = 0$ car Δ n'a pas de valeur propre strictement négative. D'où

$$\sum_i \varphi_i^2 = \frac{k}{V_0}$$

et puis $s = ak/nV_0$.

4.28. Remarque. Les conditions 1 et 2 de la proposition 4.24 expriment exactement que l'application

$$(\varphi_1, \cdots, \varphi_k) : X \to \boldsymbol{R}^k$$

est, au scalaire ka/nV_0 près, une immersion isométrique de (X, g_0) dans la sphère $S(0, \sqrt{k/V_0})$ de rayon $\sqrt{k/V_0}$ de $\boldsymbol{R}^k$. Mais d'après l'exemple 3 de la page 341 de [11], l'image de cette immersion est une sous-variété *minima* de $S(0, \sqrt{k/V_0})$. Ainsi les (X, g_0) à g_0 critique pour Ξ sont les revetements finis des sous-variétés minima des sphères des espaces euclidiens. Il faudrait expliquer et préciser ce phénomène.

5. Première valeur propre des variétés de Blaschke-Green

5.1. *Définition. Une variété riemannienne complète (X, g) est dite de* Blaschke-Green *si pour tout $x \in X$ l'application exponentielle en x, $\exp_x$, est injective sur la boule ouverte $B(0, \pi)$ de T_xX et si l'image par* $\exp_x$ *de la sphère $S(0, \pi)$ de T_xX est un point, $\tilde{x}$, de X.*

5.2. Exemple, la sphère canonique (S^n, g_0). Il résulte facilement de la définition que l'application $\sigma : X \ni x \mapsto \tilde{x} \in X$, dite antipodie, est une isométrie involutive de (X, g), et aussi que X est difféomorphe à S^n; enfin que toutes les géodésiques de (X, g) sont simples, périodiques de longueur 2π. Lorsque $n = 2$, on sait que toute variété de Blaschke-Green est isométrique à (S^2, g_0) (cf. [7]); pour $n > 2$, la question est ouverte, voir cependant dans [13] une version infinitésimale.

5.3. Plus généralement, pour toute variété riemannienne (X, g) munie d'une isométrie involutive σ, on peut introduire

$$C^+ = \{f \in C^\infty(X) : f \circ \sigma = f\}, \; C^- = \{f \in C^\infty(X) : f \circ \sigma = -f\};$$

puis, si

$$V_\lambda = \{f \in C^\infty(X) : \Delta f = \lambda f\} : V_\lambda^+ = C^+ \cap V_\lambda, V_\lambda^- = C^- \cap V_\lambda.$$

On a la somme directe orthogonale

$$V_\lambda = V_\lambda^+ \oplus V_\lambda^-;$$

et on introduit les premières valeurs propres:

$$\lambda_1^+ = \inf\{\lambda > 0 : V_\lambda^+ \neq 0\}, \lambda_1^- = \inf\{\lambda > 0 : V_\lambda^- \neq 0\}.$$

On peut conjecturer que l'on a toujours $\lambda_1^- \leqq \lambda_1^+$, voire $\lambda_1^- < \lambda_1^+$. Dans le cas de (S^n, g_0), il en est bien ainsi, voir par exemple [6], page 160; il en sera donc ainsi pour toute (S^n, g) si g est voisine de g_0. Quoiqu'il en soit de cette conjecture, on a la:

5.4. Proposition. *Soit (X, g) une variété de Blaschke-Green, de dimension n; alors $\lambda_1^- \geqq n$; en outre $\lambda_1^- = n$ entraîne que (X, g) est la sphère canonique (S^n, g_0).*

L'idée est d'utiliser l'inégalité de Wirtinger sur une géodésique fermée de (X, g), puis d'intégrer cette inégalité sur l'ensemble des géodésiques fermées de (X, g), ce qui revient à intégrer sur le fibré unitaire U de (X, g). On munit U de sa mesure canonique v_U, invariante d'après le théorème de Liouville par le flot géodésique $G_t : U \to U$. Soit $x \in U$ et $\gamma_x : t \mapsto \exp(tx)$ la géodésique de condition initiale x; par hypothèse, elle est 2π-périodique, et mieux: $\sigma(\gamma_x(t)) = \gamma_x(t+\pi)$. Soit $f \in C^\infty(X)$ telle que $f \circ \sigma = -f$, à celà près quelconque; alors la restriction de f à γ_x: $f_x : t \mapsto f(\gamma_x(t))$ vérifie $f_x(t+\pi) = -f_x(t)$, en particulier

$$\int_0^\pi f_x(t)\,dt = 0.$$

Donc l'inégalité de Wirtinger entraîne

$$\int_0^\pi f_x'^2(t)\,dt \geqq \int_0^\pi f_x^2(t)\,dt. \tag{5.5}$$

Posons

$$I = \int_{x \in U} (df(x))^2 v_U.$$

Si $p : U \to X$ est la projection canonique, $p^{-1}(m) = U_m = \{y \in T_mX : \|y\| = 1\}$, la formule d'intégration sur les fibres montre que

$$I = \int_{m\in X} \left[\int_{x\in U_m} (df(x))^2\theta\right] v_g,$$

où θ est la mesure canonique de la sphère euclidienne $U_m \subset T_mX$. Mais $x \mapsto (df(x))^2$ est une forme quadratique sur T_mX, donc on a

$$\int_{U_m} (df(x))^2\sigma = \frac{1}{n}(\mathrm{trace}_g(df(\cdot))^2 \text{ volume}\,(S^{n-1}, g_0).$$

Mais $\mathrm{trace}_g\ (d_f(\cdot))^2$ n'est autre que la norme $|df|^2$ de la forme différentielle df de degré 1; si l'on pose $V_0 = \text{volume}\ (S^{n-1}, g_0)$, on aura donc:

5.6 $$I = \frac{V_0}{n}\int_X |df|^2 v_g = \frac{V_0}{n}\,\|df\|^2.$$

Puis, plus simplement, pour

$$J = \int_U (f\circ p)^2 v_U:$$

$$J = \int_{m\in X} f^2(m)\left[\int_{U_m}\sigma\right] v_g = V_0\int_X f^2 v_g = V_0\|f\|^2.$$

Mais comme, tout t: $G_t^* v_U = v_U$ (Liouville), on a pour tout t:

$$\int_{x\in U} (df(G_t(x))^2\ v_U = \int_U (df(x))^2 v_U = I,$$

d'où avec Fubini, si l'on pose

$$\hat{I} = \int_{[0,\pi]\times U} (df(G_t(x)))^2 v_U \otimes dt:$$

$$\hat{I} = \int_0^\pi I\,dt = \pi I;$$

mais avec Fubini en sens inverse:

$$\hat{I} = \int_{x\in U}\left[\int_0^\pi (df(G_t(x)))^2\,dt\right] v_U.$$

Or $df(G_t(x)) = f_x'(t)$, d'où avec 5.5:

5.7 $$\hat{I} = \int_{x\in U}\left[\int_0^\pi f_x'^2\,dt\right] v_U \geqq \int_{x\in U}\left[\int_0^\pi f_x^2(t)\,dt\right] v_U$$

$$= \int_{x\in U}\left[\int_0^\pi f^2(p(G_t(x)))\,dt\right] v_U$$

$$= \int_{[0,\pi]\times U} (f\circ p)^2(G_t(x)) v_U \otimes dt = \hat{J}.$$

On applique encore Liouville à cette dernière intégrale, d'où

$$5.8 \quad \hat{J} = \int_{[0,\pi]\times U} (f \circ p)^2 v_U \otimes dt = J \int_0^{\pi} dt = \pi V_0 ||f||^2.$$

De 5.6, 5.7 et 5.8 on déduit donc $||df||^2 \geqq n\, ||f||^2$; cette inégalité ayant lieu pour toute $f \in C^\infty(X)$ telle que $f \circ \sigma = -f$, on a bien $\lambda_1^- \geqq n$.

Si $\lambda_1^- = n$, c'est qu'il existe f avec $f \circ \sigma = -f$ et $||df||^2 = n||f||^2$; donc l'inégalité 5.5 doit être une égalité pour tout x, ce qui entraîne que, en restriction à chaque géodésique de (X, g), la fonction f est de la forme $a \cos t + b \sin t$; on procède alors exactement comme dans la démonstration du théorème d'Obata: [6], page 180.

BIBLIOGRAPHIE

T. Aubin
[1] Fonctions de Green et valeurs propres du laplacien (preprint, Université de Lille).

M. Berger
[2] Quelques formules de variation pour une structure riemannienne, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3(1970) 285–294.

M. Berger
[3] Du côté de chez Pu, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 5 (1972) 1–44.

M. Berger
[4] A l'ombre de Loewner, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 5 (1972) 241–260.

M. Berger, D. Ebin
[5] Some decompositions of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold, J. of Diff. Geometry 3 (1969) 379–392

M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet
[6] Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Mathematics, nº 194, Springer.

L. W. Green
[7] Auf Wiedersehenflächen, Ann. of Math. 78 (1963) 289–299.

J. Hersch
[8] Caractérisation variationnelle d'une somme de valeurs propres consécutives, C.R.A.S. 252 (1961) 1714–1716.

J. Hersch
[9] Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes, C.R.A.S. 270 (1970) 1645–1648.

T. Kato
[10] Perturbation theory for linear operators, Springer.

S. Kobayashi, K. Nomizu
[11] Foundations of Differential Geometry, volume II, Interscience.

A. Lichnerowicz
[12] Propagateurs et commutateurs en relativité générale, Publications Mathématiques I.H.E.S., nº 10.

R. Michel
[13] Sur certains tenseurs symétriques des projectifs réels, J. de Math. Pures et Appliquées 51 (1972) 273–293.

L. PAYNE
[14] Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, SIAM Review 9 (1967) 453–488.

(Oblatum: 24-VII-1972)

11 bis Avenue de Suffren
75007, Paris
France