CONSTANTIN BĂNICĂ

# Une caractérisation de la dimension d'un faisceau analitique cohérent

*Compositio Mathematica*, tome 25, nº 1 (1972), p. 101-108

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__25_1_101_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 25, Fasc. 1, 1972, pag. 101-108
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

# UNE CARACTERISATION DE LA DIMENSION D'UN FAISCEAU ANALITIQUE COHERENT

de

Constantin Bănică [1]

On donne quelques résultats concernant la profondeur et la dimension d'un faisceau cohérent sur un espace de Stein. On réformule ceux-ci pour des espaces complexes arbitraires en utilisant quelques faisceaux introduits dans [2].

## I.

Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace complexe et Coh $X$ la catégorie des faisceaux analytiques cohérents sur $X$. Si $\mathcal{F} \in \operatorname{Coh} X$ on note

$$\operatorname{prof} \mathcal{F} = \inf_{x \in X}(\operatorname{prof}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x)$$

et

$$\dim \mathcal{F} = \sup_{x \in X}(\dim_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x) = \dim \operatorname{Supp} \mathcal{F}.$$

On a donc $\operatorname{prof} \mathcal{F} \leqq \dim \mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \neq 0$). Dans [1], [3], [4], [7], [12] on a démontré la caractérisation suivante de la profondeur:

THÉORÈME 1. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \operatorname{Coh} X$, $N \geqq 0$ un entier, alors on a*:

(a) $\operatorname{prof}(\mathcal{F}) \geqq N+1$ *si et seulement si* $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ *pour* $q \leqq N$;
(b) *il existe un ensemble fini* $A \subset X$ *tel que* $\operatorname{prof}(\mathcal{F}/X-A) \geqq N+1$ *si et seulement si les espaces vectoriels complexes* $H_c^q(X, \mathcal{F})$ *ont une dimension finie pour* $q \leqq N$;
(c) *il existe un ensemble discret* $A \subset X$ *tel que* $\operatorname{prof}(\mathcal{F}/X-A) \geqq N+1$ *si et seulement si les espaces vectoriels complexes* $H_c^q(X, \mathcal{F})$ *ont une dimension au plus dénombrable pour* $q \leqq N$.

*Dans cette Note on démontre la caractérisation suivante de la dimension*:

THÉORÈME 2. *Soients $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \operatorname{Coh} X$ et $N \geqq 0$ un entier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

[1] L'auteur désire exprimer sa gratitude à la Fondation Alexander von Humboldt, dont il a été boursier pendant l'annee universitaire 1970–1971.

(i) $\dim \mathscr{F} \leqq N$.
(ii) $H_c^q(X, \mathscr{F}) = 0$ *pour* $q > N$.
(iii) *les espaces vectoriels complexes* $H_c^q(X, \mathscr{F})$ *ont une dimension finie pour* $q > N$.
(iv) *les espaces vectoriels complexes* $H_c^q(X, \mathscr{F})$ *ont une dimension au plus dénombrable pour* $q > N$.

REMARQUE. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est connue [9], [12]: ici on donne une nouvelle démonstration utilisant le théorème de dualité de [3] et des considérations d'algèbre dans les fibres du faisceau structural. Plus précisément, on utilise le fait suivant [6] (pg. 30–33, th. 2.2 et pr. 2.9): "Soient $A$ un anneau local noethérien, $M$ et $N$ deux $A$-modules, $q \geqq 0$ un entier, alors $\mathrm{Ext}_A^i\ (N, M) = 0$ pour $i < q$ si et seulement si $\mathrm{prof}_{A_\mathfrak{p}}$ $M_\mathfrak{p} \geqq q$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, N$".

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Il suffit de prouver (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Soit $(V_r)_{r \geqq 1}$ un recouvrement de $X$ par des ouverts de Stein relativement compacts tel que $V_r \subset V_{r+1}$ et que les applications $\Gamma(V_{r+1}, \mathcal{O}) \to \Gamma(V_r, \mathcal{O})$ soient denses. Il en résulte alors que les applications $H_c^q(V_r, \mathscr{F}) \to H_c^q(X, \mathscr{F})$ sont injectives pour tout entier $q$. Il suffit alors de démontrer l'implication pour chaque $V_r$ donc, utilisant des immersions dans des espaces numériques, on peut supposer $X$ variété de Stein. Alors chaque $H_c^q(X, \mathscr{F})$ est isomorphe au dual topologique d'espace de Fréchet $\mathrm{Ext}_\mathcal{O}^{n-q}(X, \mathscr{F}, \omega)$, où $n = \dim X$ et $\omega$ est le faisceau des germes de formes différentielles du type $(n, 0)$ à coefficients analytiques. Comme $\mathrm{Ext}_\mathcal{O}^{n-q}(X; \mathscr{F}, \omega) = \Gamma(X, \mathscr{E}xt_\mathcal{O}^{n-q}(\mathscr{F}, \omega))$, il reste à prouver que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x) = 0$ pour tout $x \in X$ et tout $q > N$. Utilisant le fait d'algèbre rappelé plus haut on doit démontrer que pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, \mathscr{F}_x$, on a $\mathrm{prof}_{(\mathcal{O}_x)\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_x)\mathfrak{p} \geqq n-N$. On a $\dim_{\mathcal{O}_x} \mathscr{F}_x \leqq N$ donc $\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} \leqq N$ et la conclusion résulte du fait que

$$\mathrm{prof}_{(\mathcal{O}_x)\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_x)\mathfrak{p} = \dim(\mathcal{O}_x)\mathfrak{p} = \dim \mathcal{O}_x - \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = n - \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Comme pour la démonstration précédente on peut supposer $X$ variété de Stein. Il en résulte alors que les duals topologiques des espaces de Fréchet $\mathrm{Ext}_\mathcal{O}^{n-q}(X; \mathscr{F}, \omega) = \Gamma(X, \mathscr{E}xt_\mathcal{O}^{n-q}(\mathscr{F}, \omega))$ ont une dimension au plus dénombrable pour $q > N$. En vertu du [3], lemme 2.10, il existe un ensemble discret $A \subset X$ tel que $\mathscr{E}xt_\mathcal{O}^{n-q}(\mathscr{F}, \omega)/X - A = 0$ pour $q > N$. Soit $x \notin A$; on a $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x) = 0$ pour $q > N$. En appliquant de nouveau le fait d'algèbre rappelé, il en résulte donc que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, \mathscr{F}_x$, $\mathrm{prof}\ (\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p} \geqq n - N$ et donc

$$\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = \dim \mathcal{O}_x - \dim\ (\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p} = n - \mathrm{prof}(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p} \leqq N.$$

Comme

$$\dim_{\mathcal{O}_x}\mathcal{F}_x = \sup_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Supp}\mathcal{F}_x}\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p}, \text{ on obtient } \dim_{\mathcal{O}_x}\mathcal{F}_x \leqq N.$$

Ainsi il est démontré que $\dim(\mathcal{F}/X-A) \leqq N$ et comme $A$ est discret et $N \geqq 0$ il en résulte $\dim \mathcal{F} \leqq N$.

REMARQUE. On peut appliquer aussi le théorème de dualité locale pour les anneaux reguliers [6], pg. 64, et la caractérisation de la dimension de Krull donnée dans [6], pg. 65.

Les théorèmes 1 et 2 montrent que la cohomologie à support compact pour les faisceaux analytiques cohérents sur les espaces de Stein est triviale hors de l'intervalle [prof, dim]. On a les deux corollaires suivants pour les extrémités prof et dim.

COROLLAIRE 1. *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *un espace de Stein et* $\mathcal{F} \in \operatorname{Coh} X$. *Alors* $H_c^{\operatorname{prof}\mathcal{F}}(X, \mathcal{F})$ *a une dimension finie (resp. a une dimension au plus dénombrable) si et seulement si l'ensemble* $\{x/\operatorname{prof}_{\mathcal{O}_x}\mathcal{F}_x = \operatorname{prof}\mathcal{F}\}$ *est fini (resp. discret).*

*La démonstration résulte du théoreme* 1.

COROLLAIRE 2. *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *un espace de Stein et* $\mathcal{F} \in \operatorname{Coh} X$. *Alors* $H_c^{\dim\mathcal{F}}(X, \mathcal{F})$ *a une dimension au plus dénombrable si et seulement si* $\dim \mathcal{F} = 0$ *(donc* $H_c^{\dim\mathcal{F}}(X, \mathcal{F})$ *est en général très gros).*

DÉMONSTRATION. Si $\dim \mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F}$ a un support discret et $H_c^{\dim\mathcal{F}}(X, \mathcal{F}) = \Gamma_c(X, \mathcal{F})$ a donc une dimension au plus dénombrable. Si $\dim \mathcal{F} \geqq 1$ alors on applique le théorème 2 pour $N = \dim \mathcal{F} - 1$.

REMARQUE. On peut construire des faisceaux $\mathcal{F}$ (du type $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$) tels que $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $\operatorname{prof}\mathcal{F} < q < \dim \mathcal{F}$. J'ignore des conditions telles que, pour chaque $q \in [\operatorname{prof}\mathcal{F}, \dim\mathcal{F}]$, $H_c^q(X, \mathcal{F}) \neq 0$. Rappelons qu'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{F} \neq 0$ est de Cohen-Macaulay si $\operatorname{prof}\mathcal{F} = \dim \mathcal{F}$. Il en résulte alors que pour chaque $x \in \operatorname{Supp}\mathcal{F}$, $\operatorname{prof}_{\mathcal{O}_x}\mathcal{F}_x = \dim_{\mathcal{O}_x}\mathcal{F}_x$, donc $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module de Cohen-Macaulay. Si $X$ est connexe alors l'affirmation inverse est aussi vraie: en effet, pour chaque entier $q \geqq 0$, l'ensemble $\{x; \operatorname{prof}\mathcal{F}_x = \dim \mathcal{F}_x\}$ est ouvert.

COROLLAIRE 3. *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *un espace de Stein et* $\mathcal{F} \neq 0$ *un faisceau analytique cohérent. On a alors:*

(a) $\mathcal{F}$ *est de Cohen-Macaulay si et seulement si il existe un entier* $N \geqq 0$ *tel que* $H_c^q(X, \mathcal{F}) = 0$ *pour* $q \neq N$.

(b) *il existe un ensemble fini* $A \subset X$ *tel que* $\mathcal{F}/X-A$ *est de Cohen-Macaulay si est seulement si il existe un entier* $N \geqq 0$ *tel que les espaces vectoriels complexes* $H_c^q(X, \mathcal{F})$ *ont une dimension finie pour* $q \neq N$.

(c) *une affirmation analogue quand on remplace l'ensemble fini $A$ par un ensemble discret.*

On applique les théorèmes 1 et 2. Le corollaire 3 donne en particulier une caractérisation pour les espaces parfaits (donc les fibres du faisceau structural sont de Cohen-Macaulay) et de Stein. Démontrons encore deux corollaires concernant la dimension projective et le grade. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace complexe et $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$. On note $\mathrm{dp}\mathcal{F} = \sup_{x \in X} \mathrm{dp}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$ et $\mathrm{grad}\, \mathcal{F} = \inf_{x \in X} \mathrm{grad}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$, où $\mathrm{grad}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x) =$ le plus petit entier $q \geqq 0$ tel que $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x) \neq 0$ [10]. Il en résulte que $\mathrm{grad}\, \mathcal{F} =$ le plus petit entier $q \geqq 0$ tel que $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}) \neq 0$ (pour $\mathcal{F} = 0$ on considère $\mathrm{grad}\, F = \infty$).

Corollaire 4. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$ tel que $\mathrm{d}p\mathcal{F} < \infty$ et $N \geqq 0$ un entier. Si $\mathrm{dp}\mathcal{F} \leqq N$ alors $H^q_c(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q < \mathrm{prof}\,(\mathcal{O}) - N$; si en plus $\mathrm{prof}\, \mathcal{O} = \mathrm{prof}\, \mathcal{O}_x$ pour tout $x \in X$ la réciproque est aussi vraie.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathrm{Supp}\, \mathcal{F}$ on a $\mathrm{dp}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x + \mathrm{prof}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x = \mathrm{prof}\, \mathcal{O}_x$ [10], pg. 10, pr. 6. Alors $\mathrm{dp}\mathcal{F} \leqq N$ implique $\mathrm{prof}(\mathcal{F}) \geqq \mathrm{prof}(\mathcal{O}) - N$; si $\mathrm{prof}\, \mathcal{O} = \mathrm{prof}\, \mathcal{O}_x$ pour tout $x \in X$ l'inverse est aussi vrai. On applique alors le théorème 1.

Corollaire 5. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$ et $N \geqq 0$ un entier. Si $\mathrm{grad}\, \mathcal{F} \geqq N+1$ alors $H^q_c(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geqq \dim X - n$; si en plus $(X, \mathcal{O})$ est parfait et connexe la réciproque est aussi vraie.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Supp}\, \mathcal{F}$; on a $\mathrm{grad}\, \mathcal{F}_x + \dim \mathcal{F}_x \leqq \dim \mathcal{O}_x$ et si $\mathcal{O}_x$ est de Cohen-Macaulay on a l'égalité [10], lemme 4, pg. 21. Si $\mathrm{grad}\, \mathcal{F} \geqq N+1$ on obtient donc $\dim \mathcal{F} \leqq \dim X - N - 1$ et on applique le théorème 2 (pour l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) on peut supposer $N$ entier arbitraire). Si $X$ est connexe et parfait et $H^q_c(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geqq \dim X - N$, il en résulte que $\dim \mathcal{F} \leqq \dim X - N - 1$ et on déduit alors que $\mathrm{grad}(\mathcal{F}) = \inf_{x \in X} \mathrm{grad}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x) \geqq N+1$. Dans les corollaires 4 et 5 on peut aussi considérer le cas où intervient un ensemble fini ou discret (comme pour le corollaire 3).

## II.

On sait que les propriétés des algèbres et des modules de Stein déterminent les propriétés des espaces de Stein et des faisceaux analytiques cohérents [5]. On interprète ici ce fait pour dim, prof, grad $\cdots$

Proposition 1. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}\, X$, $A = \Gamma(X, \mathcal{O})$ et $F = \Gamma(X, \mathcal{F})$, $G = \Gamma(X, \mathcal{G})$. Alors on a un isomorphisme canonique:*

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Ext}^q_A(F, G) \textit{ pour } q \textit{ entier}.$$

*La démonstration utilise les deux lemmes suivants:*

LEMMA 1. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein, $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$ et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-Module. Alors l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma(X,\mathcal{O})}(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G}))$$

*est un isomorphisme.*

*La démonstration résulte immédiatement du fait que pour tout $x \in X$, l'application canonique $\Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(X,\mathcal{O})} \mathcal{O}_x \to \mathcal{F}_x$ est un isomorphisme (conséquence des théorèmes A et B). Dans* [5], pg. 383, *ce fait est prouvé pour $\mathcal{G} \in$ Coh $X$ mais la démonstration ne l'utilise pas.*

LEMME 2. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein et $\mathcal{J}$ un $\mathcal{O}$-Module injectif. Alors $\Gamma(X, \mathcal{J})$ est un $\Gamma(X, \mathcal{O})$-module injectif.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\Gamma(X, \mathcal{O})$ et pour tout $\Gamma(X, \mathcal{O})$-morphisme $\varphi\colon \mathfrak{a} \to \Gamma(X, \mathcal{J})$, il existe un $\Gamma(X, \mathcal{O})$-morphisme $\psi : \Gamma(X, \mathcal{O}) \to \Gamma(X, \mathcal{J})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \Gamma(X, \mathcal{O}) \arrow[dl, "\psi"] \\ & \Gamma(X, \mathcal{J}) & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Soit $\mathcal{A} = \mathfrak{a}\mathcal{O}$ le faisceau d'idéaux engendré par $\mathfrak{a}$. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ et un $\Gamma(X, \mathcal{O})$-module plat (conséquence des théorèmes A et B), donc $\mathcal{A}_x = \mathfrak{a}\mathcal{O}_x \cong \mathcal{O}_x \otimes_{\Gamma(X,\mathcal{O})} \mathfrak{a}$. Il en résulte alors que $\varphi$ donne un morphisme $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{J}$ donc il existe $\psi : \mathcal{O} \to \mathcal{J}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathcal{O} \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathcal{J} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Le morphisme $\psi = \Gamma(X, \psi)$ répond à la question.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit $\mathcal{J}^{\boldsymbol{\cdot}}$ une résolution injective pour $\mathcal{G}$. $\mathrm{Ext}^{\boldsymbol{\cdot}}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ sont les groupes d'homologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{J}^{\boldsymbol{\cdot}})$. Comme $\mathcal{G}$ est cohérent, en vertu du théorème B, $\Gamma(X, \mathcal{J}^{\boldsymbol{\cdot}})$ est une résolution pour $\Gamma(X, \mathcal{G})$ et conformément au lemme précédent même injective. Il en résulte que $\mathrm{Ext}^{\boldsymbol{\cdot}}_A(F, G)$ sont les groupes d'homologie du complexe $\mathrm{Hom}_A(F, \Gamma(X, \mathcal{J}^{\boldsymbol{\cdot}}))$. La démonstration s'achève en appliquant le lemme 1. On rappelle que si $(X, \mathcal{O})$ est un espace de Stein, l'algèbre $\Gamma(X, \mathcal{O})$ s'appelle de Stein; un $A$-module $F$ s'appelle de Stein s'il existe un $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$ tel que $F = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

COROLLAIRE 6. *Soient $A$ une algèbre de Stein et $F$, $G$ deux $A$-modules de Stein. Alors, pour tout entier $q$,* $\mathrm{Ext}^q_A(F, G)$ *est un module de Stein.*

DÉMONSTRATION. Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}\, X$ tels que $A = \Gamma(X, \mathcal{O})$, $F = \Gamma(X, \mathcal{F})$ et $G = \Gamma(X, \mathcal{G})$. On a $\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et on applique la proposition.

Dans [5], pg. 402, le résultat du corollaire est prouvé dans l'hypothèse supplémentaire $\dim A < \infty$ et $F$ de type fini absolu, en travaillant avec des résolutions projectives.

COROLLAIRE 7. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein,* $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$ *et $N \geqq 0$ un entier. Alors* $\mathrm{prof}\, \mathcal{F} \geqq N+1$ *si et seulement si* $\mathrm{Ext}^q_A(\Gamma(X, \mathcal{G}), \Gamma(X, \mathcal{F})) = 0$ *pour $q \geqq N$ et pour tout* $\mathcal{G} \in \mathrm{Coh}\, X$ *tel que Supp $\Gamma(X, \mathcal{G})$ soit fini.*

*Comme* Supp $\Gamma(X, \mathcal{G})$ (*in* Spec $(\Gamma(X, \mathcal{O}))$) *est fini si et seulement si* Supp $\mathcal{G}$ *est finie, la conclusion résulte en passant dans les fibres du faisceau structural et en utilisant la proposition* 1.

COROLLAIRE 8. *Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace de Stein et* $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$. *Alors*

$$\mathrm{grad}_{\mathcal{O}}\, \mathcal{F} = \mathrm{grad}_{\Gamma(X,\mathcal{O})}\, \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

$\mathrm{grad}_{\Gamma(X,\mathcal{O})}\Gamma(X, \mathcal{F})$ *est le plus petit entier $q \geqq 0$ tel que* $\mathrm{Ext}^q_{\Gamma(X,\mathcal{O})}(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{O})) \neq 0$ *et on applique la proposition.*

## III.

On peut reformuler les résultats du I pour des espaces complexes arbitraires, en utilisant quelques faisceaux introduits dans [2].

Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace complexe et $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}\, X$. Pour chaque ouvert de Stein $U$, relativement compact, on a une immersion fermée $U \to C^n$ (où l'entier $n$ dépend de $U$) et donc $H^q_c(U, \mathcal{F}) \cong H^q_c(C^n, \mathcal{F}^*)$, où $\mathcal{F}^*$ est l'image de $\mathcal{F}$, est isomorphe au dual topologique de l'espace de Fréchet $\mathrm{Ext}^{n-q}_{\mathcal{O}_{C^n}}(C^n; \mathcal{F}^*, \omega_{C^n})$. On regarde sur $H^q_c(U, \mathcal{F})$ la topologie de dual et l'association $U \to (H^q_c(U, \mathcal{F}))'$ donne un préfaisceau et le faisceau associé sera noté $\mathcal{D}^q(\mathcal{F})$ [2]. On démontre que $\mathcal{D}^q(\mathcal{F})$ est cohérent et $\Gamma(U, \mathcal{D}^q(\mathcal{F})) = H^q_c(U, \mathcal{F})'$, pour tout ouvert de Stein. Il en résulte alors que les théorèmes 1 et 2 disent que $\mathcal{D}^q(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \notin [\mathrm{prof}\, \mathcal{F}, \dim \mathcal{F}]$ et $\mathcal{D}^{\mathrm{prof}(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) \neq 0$, $\mathcal{D}^{\dim \mathcal{F}}(\mathcal{F}) \neq 0$ (et aussi donnent quelques informations concernant Supp $\mathcal{D}^q(\mathcal{F})$ pour $q = \mathrm{prof}\,(\mathcal{F}), \dim\,(\mathcal{F})$).

Le corollaire 3(a) peut s'exprimer ainsi: $\mathcal{F}$ est de Cohen-Macaulay si et seulement si il existe un entier $N$ tel que $\mathscr{D}^q(\mathscr{F}) = 0$ pour $q \neq N$ (et affirmations analogues pour (b) et (c)). Si $(X, \mathcal{O})$ est parfait et $n = \dim X$, $\mathscr{D}^q(\mathcal{O}) = 0$ pour $q \neq n$ (et inverse) et $\mathscr{D}^n(\mathcal{O})$ jouera un rôle particulier: on peut montrer que $\mathscr{D}^n(\mathcal{O})$ est un faisceau inversible si et seulement si les anneaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont de Gorenstein, etc. $\cdots$

Démonstrons encore:

Proposition 2. *Soient* $(X, \mathcal{O})$ *un espace complexe,* $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}\, X$ *et* $\mathscr{D}^q(\mathscr{F})$ *les faisceaux analytiques cohérents définis dans* [2]. *Alors* $\dim \mathscr{D}^q(\mathscr{F}) \leqq q$ *pour tout* $q$ *et* $\dim \mathscr{D}^q(\mathscr{F}) = q$ *pour* $q = \dim \mathscr{F}$.

Démonstration. Le problème est local, on peut supposer que $X$ est un espace de Stein tel qu'il existe une immersion fermée $i : X \to C^n$. Si $\mathscr{F}^* = i_*(\mathscr{F})$ on a $\dim \mathscr{F} = \dim \mathscr{F}^*$, $i_*(\mathscr{D}^q(\mathscr{F})) = \mathscr{D}^q(\mathscr{F}^*)$ et donc aussi $\dim \mathscr{D}^q(\mathscr{F}) = \dim \mathscr{D}^q(\mathscr{F}^*)$. On peut donc supposer que $X$ est une variété de Stein et alors $\mathscr{D}^q(\mathscr{F}) = \mathscr{E}xt_{\mathcal{O}}^{n-q}(F, \omega)$ $(n = \dim X)$. Soit $x \in X$, on doit démontrer que $\dim \mathscr{D}^q(\mathscr{F})_x = \dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(F_x, \mathcal{O}_x) \leqq q$ et si pour $x$, $\dim \mathscr{F}_x = \dim \mathscr{F}$, alors

$$\dim \mathscr{D}^{\dim \mathscr{F}}(\mathscr{F})_x = \dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathscr{F}}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x) = \dim \mathscr{F}.$$

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\,(\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x))$, on a donc $\mathrm{Ext}_{(\mathcal{O}_x)\mathfrak{p}}^{n-q}((\mathscr{F}_x)_\mathfrak{p}, (\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p}) = (\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-q}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x))_\mathfrak{p} \neq 0$. Comme $(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p}$ est régulier (et donc sa dimension injective est finie et égale à celle de Krull) il en résulte alors que $\dim(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p} \leqq n-q$, donc $\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = n - \dim(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p} \leqq q$, donc la première affirmation est prouvée. Il reste à montrer que

$$\dim(\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathscr{F}}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x)) \geqq \dim \mathscr{F}_x = \dim \mathscr{F}.$$

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathscr{F}_x)$ tel que $\dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = \dim \mathscr{F}_x$; il en résulte alors que $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_x)_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p}\}$. L'anneau $(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p}$ est régulier et

$$\mathrm{prof}\,(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p} = \dim(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p} = n - \dim \mathcal{O}_x/\mathfrak{p} = n - \dim \mathscr{F}$$

et donc

$$\mathrm{Ext}_{(\mathcal{O}_x)\mathfrak{p}}^{n-\dim \mathscr{F}}((\mathscr{F}_x)_\mathfrak{p}, (\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p}) = (\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathscr{F}}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x))_\mathfrak{p} \neq 0$$

(ici, le fait que $(\mathscr{F}_x)_\mathfrak{p}$ a le support réduit au seul idéal maximal de $(\mathcal{O}_x)_\mathfrak{p}$ est essentiel). Donc $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_x}^{n-\dim \mathscr{F}}(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x))$ et la démonstration est achevée.

Remarques. 1. La proposition est l'analogue d'un fait d'algèbre [6], pg. 65.

2. On peut maintenant préciser le corollaire 2 en disant que $H_c^{\dim \mathscr{F}}(X, \mathscr{F})$ est isomorphe au dual topologique d'un module de Stein de dimension $\dim \mathscr{F}$.

3. Le référent m'a signalé que le théorème de dualité annoncé dans [2] donne une démonstration plus directe des théorèmes 1 et 2, sans considérations d'algèbre dans les fibres du faisceau structural.

## BIBLIOGRAPHIE

A. ANDREOTTI ET H. GRAUERT

[1] Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France 90, 193–259 (1962).

A. ANDREOTTI AND A. KAS

[2] Serre duality on complex analytic spaces. Rend. Acc. Naz. Lincei. (Avril 1971).

C. BĂNICĂ ET O. STĂNĂŞILĂ

[3] Sur la profondeur d'un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein. Séminaire d'espaces analytiques. Bucarest sept. 1969 et C. R. Acad. Sc. Paris 269, 636–639 (1969).

[4] Some results on the extension of analytic entities defined out of a compact. Annali della Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. XXV, Fasc. II, (1971).

O. FORSTER

[5] Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln. Math. Z. 97, 376–405 (1967).

A. GROTHENDIECK

[6] Cohomologie locale des faiseaux cohérents (SGA2), North-Holland Publishing Company-Amsterdam, (1968).

R. HARVEY

[7] The theorie of hyperfunctions on totally real subsets of a complex manifold with applications to extension problem. Amer. Journal of Math. XCI, 4, October (1969).

M. JURCHESCU

[8] On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module. Bull. Soc. Math. France 93, 129–153 (1965).

H. J. REIFFEN

[9] Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompakten Trägern. Math. Ann. 164 (1966), 272–279.

P. SAMUEL

[10] Séminaire d'algèbre commutative 1966/1967.

J. P. SERRE

[11] Algèbre locale, Multiplicités. Lecture Notes in Math., 11, Springer-Berlin (1965).

Y. T. SIU

[12] Analytic sheaf cohomology with compact supports. Comp. Math. 21 (1969), 52–58.

(Oblatum 07-V-1971)

Mathematisches Institut der
Universität Regensburg
et
Institut de Mathématiques de l'Académie
R.S.R. Bucarest