COMPOSITIO MATHEMATICA

HERBERT FLEISCHNER

Die Struktur der automorphismen spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender graphen

Compositio Mathematica, tome 23, nº 4 (1971), p. 435-444

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_4_435_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 23, Fasc. 4, 1971, pag. 435–444
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

DIE STRUKTUR DER AUTOMORPHISMEN SPEZIELLER, ENDLICHER, EBENER, DREIFACH-KNOTENZUSAMMENHÄNGENDER GRAPHEN

von

Herbert Fleischner

Die in [3] und [4] unter Hinweis auf Arbeiten von H. Whitney angeführte Tatsache, daß spezielle, endliche, ebene, dreifach-knotenzusammenhängende Graphen auf der Kugel (und bei Vorgabe eines beliebigen Landes als 'äußeres Land' somit auch in der Ebene; siehe [2]) in eindeutiger Weise darstellbar sind, führte in [1] zur Definition des 0^+– bzw. 0^--Isomorphismus (was unter 'eindeutig' zu verstehen ist, erkennt man aus dem Beweis von Satz 7 in [1]). Diese Definition lautet:

Sind $(X_i, R_i)(i = 1, 2)$ Realisierungen der (abstrakten) ebenen Graphen X_i auf der Kugel (in der Ebene), und gibt es einen Isomorphismus I von X_1 auf X_2, wo für $p \in V(X_1)$, $q \in V(X_2)$ mit $I(p) = q$ die zu p inzidenten Kanten in die zu q inzidenten Kanten derart übergehen, sodaß die zyklische Anordnung der Kanten und der Durchlaufungssinn erhalten bleiben (und zwar gleichzeitig für alle $p \in V(X_1)$), so nennen wir I einen 0^+-Isomorphismus. Wird der Durchlaufungssinn umgekehrt, so sprechen wir von einem 0^--Isomorphismus.

Es wurde dadurch die geometrische Vorstellung der Realisierung durch eine Ordnungsstruktur ersetzt und in [1] gezeigt, daß zwei spezielle, endliche, ebene, dreifach-knotenzusammenhängende isomorphe Graphen notwendigerweise 0^+– oder 0^--isomorph sind. Auf die Automorphismengruppe $G(X)$ des Graphen X angewandt erhalten wir also

SATZ 1: *Ist X ein spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender Graph, so ist jeder Automorphismus* $\alpha \in G(X)$ *ein* 0^+*-Automorphismus oder ein* 0^-*-Automorphismus.*

SATZ 2: *Sei X ein Graph mit den Voraussetzungen von Satz* 1. *Ist die Menge aller* 0^-*-Automorphismen* $G^-(X) \neq \emptyset$, *so besitzt* $G(X)$ *einen Normalteiler vom Index* 2, *nämlich die Menge aller* 0^+*-Automorphismen* $G^+(X)$.

BEWEIS: Es gilt $G^+(X) \neq \emptyset$, da die identische Abbildung ι in $G^+(X)$ liegt. Sind $\alpha, \beta \in G^+(X)$, so gilt auch $\alpha\beta \in G^+(X)$. Da $G(X)$, also auch

$G^+(X)$ endlich ist, so ist dies hinreichend dafür, daß $G^+(X)$ Untergruppe von $G(X)$ ist. Da für $\alpha \in G^+(X)$, $\beta, \gamma \in G^-(X)$ folgt $\alpha\beta \in G^-(X)$, $\beta\gamma \in G^+(X)$, so gilt card $G^+(X) =$ card $G^-(X)$. Trivialerweise sind die Gleichungen $G(X) = G^+(X) \cup G^-(X)$ und $G^+(X) \cap G^-(X) = \emptyset$ erfüllt. Somit ist $G^+(X)$ tatsächlich Normalteiler vom Index 2.

q.e.d.

Bekanntlich kann ein Automorphismus α als das Produkt einer Permutation der Elemente von $V(X)$ mit einer Permutation der Elemente von $E(X)$ geschrieben werden. Schreiben wir diese Permutationen als Produkt elementfremder Zyklen, so ergeben die folgenden Sätze eine Beschreibung der Struktur der Automorphismen der betrachteten Graphen.

SATZ 3: *Ist X ein spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender Graph, so gibt es zu jedem nichttrivialen $\alpha \in G^+(X)$ höchtens zwei Fixknoten, und alle anderen Knoten von X liegen in Zyklen gleicher Länge.*

BEWEIS: Es sei α ein nichttriviales Element aus $G^+(X)$. Sind nicht alle Knotenzyklen gleich lang, so gibt es wegen des Zusammenhangs von X zwei benachbarte Knoten, die in Zyklen verschiedener Länge liegen. Es sei also $[a_0, b_0] \in E(X)$, a_0, b_0 liegen in den Zyklen $(a_0, \cdots, a_{n-1})$, $(b_0, \cdots, b_{m-1})$, wobei $n > m$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß $[a_i, b_j] \in E(X)$, falls

$$i \equiv j \mod \mathrm{d}$$

gilt, wobei d der größte gemeinsame Teiler von n und m ist (unter a_k verstehen wir $\alpha^k a_0$). Wir betrachten folgende Fälle:

1) Ist $m/d > 2$, so ist auch $n/d > 2$, und die Knoten a_0, a_d, a_{2d}, b_0, b_d, b_{2d} spannen in X einen $K_{3,3}$ auf, im Widerspruch zur Voraussetzung, X sei eben.

2) Ist $m/d = 2$, so betrachten wir die Knoten a_{kd} für $0 \leqq k < n/d$ und b_0, b_d. Es sind b_0 und b_d mit allen a_{kd} verbunden, und $n/d \geqq 3$. Da der größte gemeinsame Teiler von m/d und n/d eins ist, ist n/d ungerade. Wendet man also $\alpha^n = (\alpha^d)^{n/d}$ auf b_0 an, so erhält man b_d und $\alpha^n b_d = b_0$. Wir suchen nun ein Viereck K mit den Eckpunkten b_0, a_{kd}, a_{ld}, b_d, das kein anderes a_{id} im Inneren enthält. Durch α^n wird K auf sich abgebildet, denn α^n vertauscht b_0 mit b_d und hält alle a_i fest. Da K im Inneren kein a_{id} enthält, aber mindestens eines außerhalb liegt (wegen $n/d \geqq 3$), bildet α^n das Innere von K auf sich ab. Dann ist aber α^n im Widerspruch zur Voraussetzung nicht in $G^+(X)$.

3) Bleibt also der Fall $m/d = 1$ zu betrachten. In diesem Fall ist m ein Teiler von n, und die Knoten a_{im} sind zu b_0 benachbart. Umlaufen wir b_0 im positiven Drehsinn, so folge a_{km} auf a_0. Dann gilt $(k, n/m) = 1$.

Ist c irgendein Knoten, der mit b_0 verbunden ist, so sind die $\alpha^{im}c$ für $0 \leqq i < n/m$ paarweise verschieden. Es liege ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.)$[b_0, c]$ zwischen $[b_0, a_0]$ und $[b_0, a_{km}]$. Ist $\alpha^{im}c = c$, so ist c mit b_0 auch durch eine Kante verbunden, die zwischen $[b_0, a_{im}]$ und $[b_0, a_{(i+k)m}]$ liegt (im positiven Drehsinn). Da X keine Mehrfachkanten enthält, ist dies nur möglich, falls $i \equiv 0 \bmod (n/m)$ ist. Der Automorphismus α^n bildet b_0 und a_0 in sich ab. Aus $[b_0, a_0] \in E(X)$ und $\alpha^n \in G^+(X)$ schließt man leicht, daß α^n die Einheit ι von $G(X)$ ist. Somit ist $\alpha^n c = c$, und c liegt wie a_0 in einem Zyklus von α^m, der die Länge n/m hat.

Wir zeigen nun, daß es außer b_0 höchstens noch einen Knoten von X gibt, der von α^m in sich abgebildet wird. Zunächst setzen wir voraus, daß alle Knoten von X mit der Distanz $t \geqq 1$ von b_0 in einem Zyklus von α^m der Länge n/m liegen. Es sei x ein Knoten mit der Distanz $t+1$ von b_0, y der Nachbar von x auf einem kürzesten Weg W von x zu b_0, und L sei das Stück dieses Weges von y zu b_0. Es ist leicht zu sehen, daß $\alpha^{km}L \cap L = b_0$, also auch $\alpha^{im}L \cap L = b_0$ für $i \not\equiv 0 \bmod n/m$. Es sei l die kleinste natürliche Zahl mit $\alpha^{lkm}x = x$. Für $l = 1$ gilt offensichtlich sogar $\alpha^m x = x$, da $(k, n/m) = 1$ ist. Für $1 < l < n/m$ bilden W und $\alpha^{lkm}W$ einen Kreis, der $\alpha^{km}y$ im Inneren enthält, nicht aber $\alpha^{(l+1)km}y$. Nun liegen aber diese Knoten auf dem durch $\alpha^{km}W$ und $\alpha^{(l+1)km}W$ gebildeten Kreis, der aber andererseits mit W und $\alpha^{lkm}W$ nur den Knoten b_0 gemeinsam hat, im Widerspruch zur Ebenheit von X. Der Knoten x liegt also in einem Zyklus von α^m der Länge n/m oder es gilt $\alpha^m x = x$.

Gibt es keinen Knoten z der Distanz $t+1$ von b_0 mit $\alpha^m z = z$, so setzen wir das Verfahren fort, bis entweder alle Knoten von X erfaßt sind, oder einmal ein Knoten w der Distanz r auftritt mit $\alpha^m w = w$. Im ersten Fall ist b_0 der einzige Knoten, der in einem Zyklus von α^m liegt, der nicht die Länge n/m hat, also der einzige Knoten, der von α^m festgehalten wird. Da α^m die Knoten $b_0, \cdots, b_{m-1}$ festhält, ist dies nur für $m = 1$ möglich. Im anderen Fall sei W ein kürzester Weg von b_0 zu w. Es ist leicht zu sehen, daß jeder Knoten von X für ein gewisses i auf oder in einem von $\alpha^{ikm}W$ und $\alpha^{(i+1)km}W$ gebildeten Kreis liegt, und also jeder Knoten, der von b_0 und w verschieden ist, in einem Zyklus von α^m der Mindestlänge n/m liegt. Wegen $\alpha^n = \iota$ ist die Länge dieser Zyklen genau n/m. Da $n/m > 1$ ist, hält α^m nur b_0 und w fix, das heißt $m \leqq 2$. Für $m = 1$ erhalten wir die Aussage über die Fixpunkte, und es ist nichts mehr zu zeigen.

Für ungerades $n/2$ könnten in α außer Zyklen der Länge n noch solche der Länge $n/2$ und 2 vorkommen. Kommen Zyklen der Länge $n/2$ vor, so folgt wie vorhin $n/2 \leqq 2$, also $n = 2$, und somit $m = 1$. Haben alle Zyklen von α Länge $n > 2$ außer möglicherweise einem der Länge 2, so gehen wir wie bei geradem $n/2$ vor, wo ebenfalls alle Zyklen von α die Länge n haben bis auf möglicherweise einen Zyklus der Länge 2 für $m = 2$. Aus dem obigen ist leicht zu sehen, daß dann die von $w = b_1$ zu $a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}$ führenden Kanten im entgegengesetzten Drehsinn aufeinanderfolgen wie die von b_0 zu $a_0, a_2, \cdots, a_{n-2}$ führenden Kanten, im Widerspruch zur Annahme $\alpha \in G^+(X)$. q.e.d.

Zu einem gegebenen nichttrivialen $\alpha \in G^+(X)$, der einen Zyklus der Länge n enthält, bilden wir nun einen Teilgraphen $X_0 \subset X$ mit folgenden Eigenschaften (X erfüllt die Voraussetzungen von Satz 3):

1) $x_0 \in V(X_0) \rightarrow x_0, \cdots, x_{n-1}$ sind paarweise verschieden.

2) X_0 ist zusammenhängend.

3) $X_i \cap X_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, $i, j \in \{0, \cdots, n-1\}$; X_i ist durch die Definitionsgleichung $X_i : = \alpha^i X_0$ gegeben.

4) card $V(X_0)$ maximal, card $E(X_0)$ maximal.

Ein solcher Teilgraph X_0 existiert, da bei gegebenem $\alpha \in G^+(X)$ bis auf höchstens zwei Knoten jeder Knoten $x \in V(X)$ in genau einem Zyklus der Länge n liegt. Aus Satz 3 erhalten wir die Gleichung

$$V(X) - \bigcup_{i=0}^{n-1} V(X_i) = \emptyset \vee \{F_1\} \vee \{F_1, F_2\}, \tag{1}$$

wobei $\alpha^i F_j = F_j$ für alle $i = 0, \cdots, n-1, j = 1, 2$ gilt.
Zu einer entsprechenden Einteilung der Kanten von X gilt

Satz 4: *Enthält $\alpha \in G^+(X)$ einen Zyklus der Länge $n > 2$ (die Elemente des Zyklus seien Knoten), so gilt die Gleichung*

$$\begin{aligned} E(X) - \bigcup_{i=0}^{n-1} E(X_i) - \bigcup_{i=0}^{n-1} E_{it} \\ = \emptyset \vee \{\alpha^i[F_1, x_{0k}]\} \vee (\{\alpha^i[F_1, x_{0k}]\} \cup \{\alpha^i[F_2, y_{0l}]\}), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $i = 0, \cdots, n-1$; die x_{0k} bzw. y_{0l} sind Knoten von X_0, k, l durchlaufen eine gewisse Indexmenge. Die Elemente in den Mengen auf der rechten Seite der Gleichung sind paarweise verschieden. E_{it} enthält alle X_{it} und $X_{(i+1)t}$ verbindenden Kanten, und t erzeugt die Restklassen mod n.

Beweis: Wir bilden

$$E_0 : = E(X) - \bigcup_{i=0}^{n-1} E(X_i);$$

trivialerweise gilt $E_0 \neq \emptyset$.

Sei $[x, y] \in E_0$, Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Genau einer der beiden Endpunkte, etwa x, ist Fixknoten bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha : = \{\alpha^i / i = 0, \cdots, n-1\}$. Also ist $x = F, y \in X_r$. Da $\alpha^i E_0 = E_0$ gilt, so gilt auch $\alpha^{n-r}[F, y] \in E_0$, also $y_{n-r} = x_{0k} \in V(X_0)$. x_{0k} liegt in genau einem Zyklus der Länge n, also sind die Kanten $\alpha^i[F, x_{0k}]$, $i = 0, \cdots, n-1$, paarweise verschieden.

b) Beide Knoten x, y sind Fixknoten bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha$. Dieser Fall ist unmöglich, da entweder Mehrfachkanten auftreten müßten, oder $\alpha = \iota$ gelten müßte.

c) Beide Knoten x, y sind keine Fixknoten bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha \to x = u_r \in X_r$, $y = v_p \in X_p \to [u_0, v_{p-r}] \in E_0$; wir setzen $p-r = k$, und betrachten $\{\alpha^i[u_0, v_k]/i = 0, \cdots, n-1\}$. Angenommen $[u_i, v_{k+i}] = [u_j, v_{k+j}]$, $i \neq j$. Dann gilt $[u_0, v_k] = [u_{j-i}, v_{k+j-i}]$; wir setzen $j-i = s$. Aus $X_a \cap X_b = \emptyset$ für $a \neq b$ folgt $u_0 = v_{k+s}$, $v_k = u_s$, also $u_0 = u_{2s}$. Da o.B.d.A. $j > i$ und $0 < s < n$, ergibt sich $2s = n$, also $s = n/2$. Aus $v_k = u_s$ folgt $X_k \cap X_s \neq \emptyset$, also $k = s$ und somit $u = v$. Das heißt, nur für den Fall $e_0 = [x_0, x_{n/2}] \in E_0$ ist es möglich, daß die e_i $(i = 0, \cdots, n-1)$ nicht paarweise verschieden sind.

Es muß aber außer Kanten der Art $[x_0, x_{n/2}]$ in E_0 noch weitere Kanten geben, etwa $[y_0, z_t]$, $t \neq n/2$, o.B.d.A. $t < n/2$, da wir sonst

$$X_{i,n/2} := X_i \cup X_{i+n/2} \cup E_{i,n/2}$$

($E_{i,n/2}$ enthält genau die X_i und $X_{i+n/2}$ verbindenden Kanten) bilden könnten; wegen $n/2 \in N$, $n \geqq 3$, ergibt sich dann $n \geqq 4$, also erhalten wir mindestens zwei $X_{i,n/2}$, und alle weiteren Kanten inzidieren zu eventuell existierenden Fixknoten. Da $X_{i,n/2} \cap X_{j,n/2} = \emptyset$ für $i \neq j$, wäre dann X im Widerspruch zur Voraussetzung höchstens zweifachknotenzusammenhängend. Wegen $t \neq n/2$ sind die $[y_i, z_{t+i}]$, $i = 0, \cdots, n-1$, paarweise verschieden.

Wir betrachten die Kantenmenge

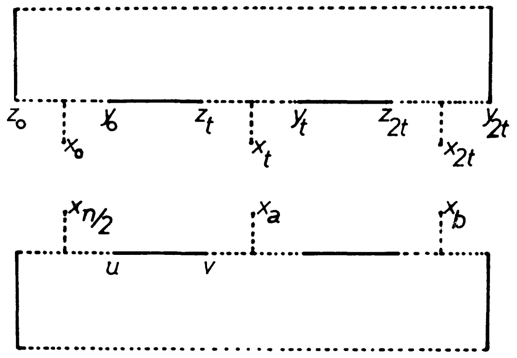
$$E := \{[y_{\lambda t}, z_{(\lambda+1)t}]/\lambda = 0, \cdots, n-1\}$$

und zeigen indirekt, daß die Elemente von E paarweise verschieden sind, daß also t erzeugendes Element der Restklassen mod n ist.

Sei $\lambda_0 \in N$ minimal mit $(\lambda_0+1)t \equiv 0 \bmod n$. Aus der Annahme $t < n/2$ folgt $\lambda_0 \geqq 2$. Wir bilden den Teilgraphen

$$X_0(\lambda_0, t) := \bigcup_{k=0}^{\lambda_0} (X_{kt} \cup [y_{kt}, z_{(k+1)t}]).$$

Man überlegt sich leicht, daß keine Kanten der Art $[u_0, v_{rt}]$ mit $2 \leqq r < \lambda_0$ auftreten können, da $\alpha \in G^+(X)$, und daher sowohl $[u_0, v_{rt}]$ als auch $[u_t, v_{(r+1)t}]$ gleichzeitig im Inneren oder im Äußeren von $X_0(\lambda_0, t)$ liegen müßten. Insbesondere gilt also $X_{n/2} \not\subset X_0(\lambda_0, t)$. Wir bilden analog wie oben $X_{n/2}(\lambda_0, t)$ dem $X_{n/2}$, $X_{n/2+t}$, u.s.f., angehören.



SKIZZE 1

Sei W_i ein minimaler Teilgraph von X_i, der x_i, y_i, z_i enthält. Wir betrachten dazu Skizze 1: Da $\lambda_0 \geqq 2$, muß $x_a = x_{n/2+t}$, $x_b = x_{n/2+2t}$ sein, da wir sonst in Widerspruch zur Ebenheit von X gelangen. Da $\alpha^{n/2} \in G^+(X)$, ergibt sich $u = z_{n/2}$, $v = y_{\lambda_0 t+n/2}$. Wegen $X_i \cap X_j = \phi$ für $i \neq j$ und wegen $y_{\lambda_0 t+n/2} \in X_{n/2+t}$ ergäbe sich $(\lambda_0 - 1)t \equiv 0 \mod n$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $\lambda_0 \geqq 2$. Also gibt es unter der Annahme, daß t kein erzeugendes Element der Restklassen mod n ist, keine Kante $[x_0, x_{n/2}]$. Völlig analog weist man nach, daß keine Kante $[p_0, q_f]$ mit $f \neq \mu t$, $0 \leqq \mu \leqq \lambda_0$ existieren kann. Da es aber höchstens zwei Fixpunkte bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha$ gibt, wäre X höchstens zweifachknotenzusammenhängend. Also ist t notwendigerweise erzeugendes Element der Restklassen mod n, somit die Kanten von E paarweise verschieden.

Bilden wir $X(E,t) = \bigcup_{k=0}^{n-1} X_{kt} \cup E$, so erkennt man wie oben, daß wegen der Ebenheit von X keine Kante $[p_0, q_f]$ mit $f \neq \pm t$, also auch keine Kante $[x_0, x_{n/2}]$, auftreten kann. Bilden wir E_{it} als die Menge aller X_{it} und $X_{(i+1)t}$ verbindenden Kanten, so ist E_{it} wegen des Dreifach-Knotenzusammenhanges von X nicht leer, und jede Kante von E_0, die keinen Fixpunkt als Endpunkt enthält, ist in genau einem E_{it} enthalten. Somit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Daß ein $\alpha \in G^+(X)$ mit einem Knotenzyklus der Länge 2 Fixkanten enthalten kann, ist leicht einzusehen. Wir werden in einer auf dieser Arbeit aufbauenden Publikation zeigen, daß für einen die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllenden Graphen X und für nichttriviales $\alpha \in G^+(X)$ die folgende Formel gilt:

$$F_V(\alpha) + F_E(\alpha) + F_L(\alpha) = 2, \tag{3}$$

wobei $F_V(\alpha)$ bzw. $F_E(\alpha)$ bzw. $F_L(\alpha)$ die Anzahl der bei Anwendung von α in sich übergehenden Knoten bzw. Kanten bzw. Länder von X sind. Auf

Grund der drei Formeln (1), (2), (3) gilt für ein beliebiges nichttriviales $\alpha \in G^+(X)$ ein

Erster Struktursatz über die Automorphismen spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender Graphen:

Jeder nichttriviale Automorphismus $\alpha \in G^+(X)$ der Ordnung n ist darstellbar als das Produkt von paarweise elementfremden Knoten- und Kantenzyklen, die alle die Länge n haben (Fixknoten bzw. Fixkanten werden in der Produktdarstellung nicht angeschrieben). Ist $n > 2$, so gibt es keine Fixkanten bezüglich α und daher auch bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha$, und es treten höchstens zwei Fixknoten bezüglich α bzw. bezüglich $\mathfrak{z}_\alpha$ auf. Für $n = 2$ können höchstens zwei Fixkanten und höchstens zwei Fixknoten bezüglich α auftreten, und es gilt $F_V(\alpha)+F_E(\alpha) \leqq 2$.

Wir betrachten jetzt 0^--Automorphismen von Graphen, die die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllen, und beweisen

SATZ 5: *Ist $\beta \in G^-(X)$ und gilt $\beta x = x$ für ein gewisses $x \in V(X)$ oder $\beta e = e$ für ein gewisses $e \in E(X)$, so folgt $\beta^2 = \iota$.*

BEWEIS: Sei $\beta x = x$, $x \in V(X)$. Wir schreiben die zu x inzidenten Kanten $e_1, \cdots, e_{g(x)}$ ($g(x) \geqq 3$ wegen des vorausgesetzten Dreifach-Knotenzusammenhanges) dem positiven Drehsinn entsprechend in einem Tupel der Länge $g(x)$

$$0^+(x) = (e_1, e_2, \cdots, e_{g(x)}).$$

Bei Anwendung von β geht die Menge $\{e_1, \cdots, e_{g(x)}\}$ in sich über. Allerdings lautet dann die Anordnung der Kanten im positiven Drehsinn in x

$$0^-(x) = (e_k, e_{k-1}, \cdots, e_2, e_1 \cdots),$$

wobei $\beta e_1 = e_k$, $1 \leqq k \leqq g(x)$, gilt. Indem wir $0^+(x)$ und $0^-(x)$ in einer $2 \times g(x)$ – Matrix schreiben, erkennen wir, in welche Kanten $e_2, \cdots, e_{g(x)}$ abgebildet werden. Insbesondere gilt also $\beta e_k = e_1$, d.h. $\beta^2 e_1 = e_1$. Weiters gilt $\beta^2 x = x$ und $\beta^2 \in G^+(X)$. β^2 läßt also zwei Knoten und eine sie verbindende Kante fest, was nach [3] $\beta^2 = \iota$ bedeutet.

Sei $\beta e = e$, $e \in E(X)$, $e = [x, y]$. Gilt $\beta x = x$, so sind wir nach dem eben Gezeigten bereits fertig. Wir können also $\beta x = y$ annehmen. Da $\beta e = e$, so ist $\beta y = x$ erfüllt. Somit gilt für $\beta^2 \in G^+(X)$ $\beta^2 x = x$, $\beta^2 y = y$, $\beta^2 e = e$. Nach [3] erhalten wir also auch hier $\beta^2 = \iota$. q.e.d.

Als Folgerung von Satz 5 ergibt sich

SATZ 6: *Ist $\beta \in G^-(X)$ und gilt $\beta^2 \neq \iota$, so gilt*

$$F_V(\beta) = F_E(\beta) = F_L(\beta) = 0,$$

was mit der Gleichung

$$F_V(\beta)+F_E(\beta)+F_L(\beta) = 0 \tag{4}$$

äquivalent ist.

BEWEIS: Die Aquivalenz folgt aus der Tatsache, daß die einzelnen Summanden in (4) stets $\geqq 0$ sind. Aus Satz 5 folgt unmittelbar $F_V(\beta) = F_E(\beta) = 0$. Daß dann auch $F_L(\beta) = 0$ sein muß, ist klar. Denn in einem Land, das nach Anwendung eines 0^--Automorphismus in sich selbst übergeht, gehen entweder zwei Knoten oder zwei Kanten oder ein Knoten und eine Kante in sich selbst über. q.e.d.

Sei nun $\beta \in G^-(X)$ und $\beta^2 \neq \iota$. Ist n die Ordnung von β, so ist klarerweise $n = 2k$, $k \in N$, da $\iota \in G^+(X)$. Da $\beta^2 \in G^+(X)$, $\beta^2 \neq \iota$, so ist β^2 Produkt von elementfremden Kanten- und Knotenzyklen der gleichen Länge $k \geqq 2$ und es gilt $F_V(\beta^2)+F_E(\beta^2)+F_L(\beta^2) = 2$.

Ein Zyklus der Länge k von β^2 entsteht aus einem Zyklus der Länge $2k$ von β oder k (falls $k \equiv 1 \bmod 2$), die Fixknoten bzw. Fixkanten von β^2 aus Zyklen der Länge 2 von β.

In der bereits oben angekündigten folgenden Publikation werden wir zeigen, daß für einen 0^--Automorphismus der Ordnung 2 gilt:

$$F_V(\beta)+F_E(\beta) \geqq 3, \tag{5}$$

oder es ist (4) erfüllt.
Zusammenfassend erhalten wir also folgende Sätze:

Zweiter Struktursatz über die Automorphismen spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender Graphen:

Jeder Automorphismus $\beta \in G^-(X)$ ist von der Ordnung $n = 2k$, $k \in N$, und läßt sich folgendermaßen darstellen:

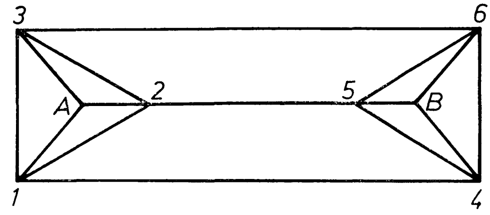
1) Ist $k = 1$, so ist β Produkt von paarweise elementfremden Kanten- und Knotenzyklen der Länge 2, und für die bezüglich β invarianten Kanten und Knoten gilt die Ungleichung $F_V(\beta)+F_E(\beta) \geqq 3$, oder (4).

2) Ist $k = 2$, so ist β Produkt von paarweise elementfremden Kanten- und Knotenzyklen der Länge 4 und höchstens einem Knotenzyklus der Länge 2 oder (exklusive) höchstens einem Kantenzyklus der Länge 2. Fixknoten oder Fixkanten bezüglich β gibt es nicht.

3) Ist $k > 3$, $k \equiv 0 \bmod 2$, so ist β Produkt von paarweise elementfremden Kanten- und Knotenzyklen der Länge $n = 2k$ und höchstens einem Knotenzyklus der Länge 2. Fixknoten oder Fixkanten bezüglich β gibt es nicht.

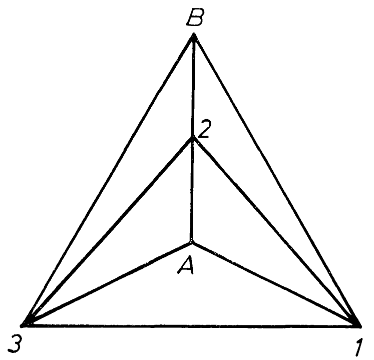
4) Ist $k \geqq 3$, $k \equiv 1 \bmod 2$, so ist β Produkt von paarweise elementfremden Kanten- und Knotenzyklen der Länge $n = 2k$ oder bzw. und

k und höchstens einem Knotenzyklus der Länge 2. Fixknoten oder Fixkanten bezüglich β gibt es nicht.



SKIZZE 2

Beispiele dafür, daß sowohl Produkte der Länge n als auch der Länge $n/2$ auftreten können, sind in Skizze 2 und Skizze 3 zu finden. In Skizze 2 ist $\beta \in G^-(X)$ durch die Übergänge $A \to B$, [A, 1] $\to$ [B, 5] hinreichend charakterisiert. In der Produktdarstellung von β treten die Knotenzyklen (A, B), (1, 5, 3, 4, 2, 6) und der Kantenzyklus ([1, 4], [5, 2], [3, 6]) auf. Die Ordnung von β ist 6. In Skizze 3 finden wir ein $\beta \in G^-(X)$ der Ordnung 6 durch die Übergänge $A \to B$ und [A, 1] $\to$ [B, 2]. In der Produktdarstellung von β treten nur die Knotenzyklen (1, 2, 3) und (A, B) auf, d.h. Knotenzyklen der Länge n müssen im Fall 4) nicht unbedingt in der Produktdarstellung von β auftreten.



SKIZZE 3

Will man feststellen, ob ein gegebener Automorphismus $G^+(X)$ oder $G^-(X)$ angehört, so ermöglichen die Gleichungen (3), (4), (5) eine eindeutige Antwort. Es gilt also der

Unterscheidungssatz für Automorphismen spezieller, endlicher, ebener, dreifach-knotenzusammenhängender Graphen: Sei $\gamma \neq \iota$

$\gamma \in G(X)$ gehört genau dann $G^+(X)$ an, wenn

$$F_V(\gamma) + F_E(\gamma) + F_L(\gamma) = 2.$$

$\gamma \in G(X)$ gehört genau dann $G^-(X)$ an, wenn

$$F_V(\gamma)+F_E(\gamma)+F_L(\gamma) = 0,$$

falls γ die Ordnung $n \geqq 4$ hat, bzw.

$$F_V(\gamma)+F_E(\gamma)+F_L(\gamma) \geqq 3, \text{ oder } = 0,$$

falls γ die Ordnung $n = 2$ hat.

Insbesondere gehört jeder Automorphismus ungerader Ordnung notwendigerweise $G^+(X)$ an.

Abschließend möchte ich meinen herzlichsten Dank meinem Kollegen Wilfried Imrich aussprechen, der mir den Beweis von Satz 3 in der vorliegende Form zur Verfügung stellte. Zu diesem Beweis wurde er durch einen von mir stammenden (jedoch umständlicher und daher breiter ausgeführten) Beweis angeregt. Weitere Ratschläge von ihm beschleunigten den Abschluß dieser Arbeit.

LITERATUR

H. Fleischner

[1] Über endliche, ebene Eulersche und paare kubische Graphen (Monatsh. f. Math. 74, 410–420 (1970)).

G. Hotz

[2] Einbettung von Streckenkomplexen in die Ebene (Mathem. Ann. 167 (1966), 214–223).

F. Harary und W. Tutte

[3] On the Order of the Group of a Planar Map (J. Comb. Theory 1 (1966), 394–395).

L. Weinberg

[4] On the Maximum Order of the Automorphism Group of a Planar TriplyConnected Graph (J. SIAM, 14, No 4, (1966), 729–738).

L. Weinberg

[5] A Simple and Efficient Algorithm for Determining Isomorphism of PlanarTriply Connected Graphs (IEEE Trans. C.T. CT–13 (1966), 142–148).

(Oblatum 17–VII–1970)

Department of Mathematics,
State University of New York at Binghamton,
Harpur College,
Binghamton, New York 13901,
U.S.A.