COMPOSITIO MATHEMATICA

E. M. J. BERTIN

Limites projectives et approximation. Théorie élémentaire

Compositio Mathematica, tome 23, nº 3 (1971), p. 357-378

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_3_357_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 23, Fasc. 3, 1971, pag. 357–378
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

LIMITES PROJECTIVES ET APPROXIMATION THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

par

E. M. J. Bertin

Sommaire. On introduit les notions d'une catégorie avec approximation et d'une limite projective dans une telle catégorie. A l'aide de ces notions, on peut donner une description formelle des procédés d'approximation numérique.

0. Introduction

Assez de problèmes de l'analyse numérique s'adaptent au cadre suivant. Soit $\bar{C}'$ une catégorie, telle que chaque objet de $\bar{C}'$ soit un ensemble Ω muni d'une certaine structure T. Si l'on veut énoncer un théorème P de T, on remplace l'ensemble Ω par un ensemble plus simple Ω_i et la structure T par une structure plus simple T_i, telle que les axiomes de T_i sont à peu près des théorèmes de T. On énonce ensuite le théorème P_i de T_i, correspondant à P, et l'on vérifie si P_i et P se ressemblent assez. Si P_i est trop différent de P, on reprend le procédé pour une approximation plus fine Ω_j et T_j de Ω et T.

Si T est, par exemple, la mesure de Lebesgue μ sur $\Omega = [0, 1]$, l'espace Ω_i sera un treillis discret et T_i sera une mesure discrète μ_i sur Ω_i. Soient f une fonction continue sur Ω, P le théorème $\int f d\mu = \alpha$ et f_i la restriction de f à Ω_i. Le théorème $P_i : \int f_i d\mu_i = \alpha_i$ sera accepté, si $|\alpha_i - \alpha| < \varepsilon$, pour un certain nombre $\varepsilon > 0$.

Cherchons une formalisation de ce procédé naïf. D'abord, il semble utile à supposer que les espaces structurés (Ω_i, T_i) sont des objets de la catégorie donnée $\bar{C}'$. A cette fin, une modification initiale de $\bar{C}'$ sera parfois nécessaire. Par exemple, pour l'étude de l'approximation des espaces harmoniques, on a besoin de la catégorie $\overline{ETM'}$, plus large que celle des espaces topologiques et introduite dans le paragraphe 3.

Si l'objet (Ω_i, T_i) est une approximation de l'objet (Ω, T), chaque point x de Ω est approché par un ou par plusieurs points y de Ω_i. Un cadre naturel pour la notion 'Ω_i approche Ω' est donc donné par une correspondance $\phi_i : \Omega \to \Omega_i$, telle que $\phi_i x$ soit non vide pour chaque $x \in \Omega$ et telle que $y \in \phi_i x$ soit équivalent à 'y approche x'. D'autre part, on peut toujours interpréter une telle correspondance comme la spécification d'une notion d'approximation. Il est assez naturel de supposer que ces correspondances se comportent bien par rapport à la structure donnée, c'est-à-dire qu'elles soient des morphismes dans une catégorie $\bar{C}$, plus large que $\bar{C}'$. La notion $\phi \subset \psi$ ayant un sens naturel, les ensembles de morphismes de $\bar{C}$ sont munis d'une relation d'ordre, telle que chaque morphisme de $\bar{C}'$ soit un morphisme minimal de $\bar{C}$. Un tel couple $(\bar{C}, \bar{C}')$ sera appelé une catégorie avec approximation.

Soit $\bar{C}'$ la catégorie des ensembles. La notion d'approximation définie ci-dessus est assez pauvre. Plus importante est la notion de procédé d'approximation de plus en plus précise, donnant lieu à l'introduction d'un ensemble préordonné d'indices I et d'une famille d'ensembles $(\Omega_i)_{i \in I}$, tels que $i \leqq j$ soit équivalent à 'Ω_j est une meilleure approximation de Ω que Ω_i'. Cette dernière notion pourrait se traduire par 'Ω_i est une approximation de Ω_j au moyen d'une correspondance ϕ_{ij} et Ω_j est une approximation de Ω au moyen de ϕ_j, telle que $\phi_i = \phi_{ij}\phi_j$'.

L'espace Ω_i sera souvent une partie de Ω et $\phi_i x = x$ pour $x \in \Omega_i$, donc $\phi_{ik} = \phi_{ij}\phi_{jk}$ pour $i \leqq j \leqq k$ et la famille (Ω_i, ϕ_{ij}) est un système projectif dans la catégorie $\bar{C}$.

D'un procédé d'approximation de plus en plus précise, on désire que chaque point $x \in \Omega$ est déterminé d'une façon unique par ses approximations $x_i \in \phi_i x$, $i \in I$. D'autre part, les procédés d'approximation usuels possèdent la propriété: si $x_j \in \Omega_j$ est une très bonne approximation de $x \in \Omega$ et si x_i est une approximation de x dans Ω_i, x_i est aussi une approximation de x_j, donc (*) $x_i \in \phi_{ij} p$, pour tout $(x_i) \in \prod \phi_i x, p \in \phi_{jk} x_k$, j assez grand et $k \geqq j$.

Pour chaque (x_i), $(y_i) \in \prod \phi_i x$, on a $x_i \in \phi_{ij} y_j$ pour j assez grand et cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des familles (x_i) qui obéissent à (*). D'autre part, si Ω est déterminé uniquement par ses approximations et x et y sont deux points distincts de Ω, les familles $(x_i) \in \prod \phi_i x$ et $(y_i) \in \prod \phi_i y$ ne sont pas équivalentes. Enfin, si l'on suppose Ω maximal, Ω est isomorphe à l'ensemble des classes d'équivalence des familles (x_i) qui obéissent à (*). Cet ensemble sera désigné par $\varprojlim \Omega_i$. Si chaque ϕ_{ij} est une application, $\varprojlim \Omega_i$ est en effet la limite projective du système projectif d'ensembles (Ω_i, ϕ_{ij}).

Dans le paragraphe 2, on démontre que $\varprojlim \Omega_i$ est isomorphe à la collection des ensembles minimaux de la forme $A = \prod A_i$, où $A_i \subset \Omega_i$ et $A_i \supset \phi_{ij} A_j$ pour $j \geqq i$. Utilisant ce résultat, la limite projective d'un système projectif, dans une catégorie avec approximation $(\bar{C}, \bar{C}')$ arbitraire, est définie dans le paragraphe 1 comme la solution d'un certain problème d'application universelle.

Dans les paragraphes suivants, on étudie quelques catégories avec approximation fondamentales. Dans une publication ultérieure, nous examinerons la notion d'un système projectif d'applications et ses généralisations. L'importance de cette notion réside dans le fait que les approximations f_i d'une fonction $f : \Omega \to \Omega'$ satisfont souvent à une relation du type $f_i\phi_{ij} \subset \phi'_{ij}f_j$, pour $i \leqq j$.

Soient I et J deux ensembles d'indices tels que $J \subset I$ et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On écrira souvent $(\varphi_i) \in \prod A_i$, au lieu de '$\varphi$ est une application de I dans $\bigcup_{i\in I} A_i$, telle que $\varphi_i = \varphi(i) \in A_i$ pour chaque i'. Par un abus de notation, la restriction de φ à J sera souvent désignée par $(\varphi_i)_{i\in J}$.

1. Limites projectives

Pour les notions élémentaires de la théorie des catégories voir [4].

DÉFINITION 1. Soit $\bar{C}$ une catégorie, dont les objets sont désignés par $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \cdots$. On dit que $\bar{C}$ est une *catégorie ordonnée*, si chaque ensemble Hom (Ω_1, Ω_2) est muni d'une relation d'ordre $\subset$, vérifiant la propriété

(A1): $\phi\eta \subset \psi\eta$ et $\chi\phi \subset \chi\psi$, pour chaque $\phi, \psi \in$ Hom (Ω_2, Ω_3), $\eta \in$ Hom (Ω_1, Ω_2) et $\chi \in$ Hom (Ω_3, Ω_4), tels que $\phi \subset \psi$.
On dit qu'une catégorie ordonnée $\bar{C}$ est *complète* (*σ-complète*), si elle vérifie la relation

(A2): Toute famille (dénombrable) non vide et bornée supérieurement $(\phi_\alpha) \subset$ Hom (Ω_2, Ω_3) possède une enveloppe supérieure $\bigcup_\alpha \phi_\alpha$, telle que $\chi \bigcup_\alpha \phi_\alpha = \bigcup_\alpha (\chi\phi_\alpha)$ et $(\bigcup_\alpha \phi_\alpha)\eta = \bigcup_\alpha (\phi_\alpha\eta)$, pour chaque $\eta \in$ Hom (Ω_1, Ω_2) et $\chi \in$ Hom (Ω_3, Ω_4).

L'axiome (A2) est plus fort que l'axiome (A1).

DÉFINITION 2. Soit $\bar{C}'$ une sous-catégorie d'une catégorie ordonnée $\bar{C}$, dont les ensembles de morphismes sont désignés par Homs (Ω_1, Ω_2) et telle que chaque objet de $\bar{C}$ soit un objet de $\bar{C}'$. On dit que $\bar{C}$ est une *catégorie avec approximation*, ou une *a-catégorie*, par rapport à $\subset$ et $\bar{C}'$, si l'on a:

(A3): Pour qu'un morphisme $g \in$ Hom (Ω_2, Ω_3) soit un élément de Homs (Ω_2, Ω_3), il faut et il suffit que gf soit un élément minimal de Hom (Ω_1, Ω_3) pour chaque $f \in$ Homs (Ω_1, Ω_2).

On appelle *morphisme strict de Ω_1 dans Ω_2* chaque morphisme $g \in$ Homs (Ω_1, Ω_2).

Toute catégorie $\bar{C}$ est une a-catégorie complète par rapport à la relation d'égalité et $\bar{C}$.

EXEMPLE 3. Soit $\overline{Ec}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles et dont chaque Hom (Ω_1, Ω_2) est l'ensemble des correspondances ϕ :

$\Omega_1 \to \Omega_2$, telles que $\phi x \neq \emptyset$ pour chaque $x \in \Omega_1$. Soit $\overline{Ef}$ la catégorie avec les mêmes objets et les applications comme morphismes. Posant $\phi \subset \psi$ si $\phi x \subset \psi x$ pour chaque x, $\overline{Ec}$ est une a-catégorie complète par rapport à $\subset$ et $\overline{Ef}$. En outre, chaque correspondance minimale est une application et chaque monomorphisme de $\overline{Ef}$ est un monomorphisme de $\overline{Ec}$.

DÉFINITION 4. Soient $\bar{C}$ une catégorie et $\bar{D}$ une catégorie ordonnée. Un *a-foncteur contravariant* $\mathscr{F}$ de $\bar{C}$ dans $\bar{D}$ est constitué par la donnée d'un objet $\mathscr{F}(\Omega) \in \bar{D}$ pour chaque $\Omega \in \bar{C}$ et d'un morphisme $\mathscr{F}(\phi) \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{F}(\Omega_2), \mathscr{F}(\Omega_1))$, pour chaque $\phi \in \mathrm{Hom}\,(\Omega_1, \Omega_2)$, telle que $\mathscr{F}(e)$ soit l'identité si e est l'identité dans $\mathrm{Hom}\,(\Omega, \Omega)$ et $\mathscr{F}(\phi)\mathscr{F}(\psi) \subset \mathscr{F}(\psi\phi)$, si $\phi \in \mathrm{Hom}\,(\Omega_1, \Omega_2)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}\,(\Omega_2, \Omega_3)$. Par contre, si $\mathscr{F}(\phi) \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{F}(\Omega_1), \mathscr{F}(\Omega_2))$ et $\mathscr{F}(\psi)\mathscr{F}(\phi) \subset \mathscr{F}(\psi\phi)$, on dit que $\mathscr{F}$ est un *a-foncteur covariant*. Si $\bar{C}$ est une catégorie ordonnée, on appelle a-foncteur *isotone* chaque a-foncteur $\mathscr{F}$, tel que $\mathscr{F}(\phi) \subset \mathscr{F}(\psi)$ si $\phi \subset \psi$.

Soient $\bar{C}$ une catégorie ordonnée, I un ensemble non vide préordonné et $\bar{I}$ la catégorie associée à I en convenant que, pour deux éléments $i, j \in I$, $\mathrm{Hom}\,(i,j)$ se réduit à un élément, désigné par (i,j), si $i \leqq j$ et est vide dans le cas contraire.

DÉFINITION 5. Un *système projectif* de base I à valeurs dans $\bar{C}$ est un a-foncteur contravariant $\mathscr{F}$ de $\bar{I}$ dans $\bar{C}$. On dit que le système est *conservatif*, si $\mathscr{F}$ est un foncteur contravariant.

Le foncteur $\mathscr{F}$ définit donc, pour chaque indice $i \in I$, un objet $\Omega_i = \mathscr{F}(i)$ de $\bar{C}$ et, pour chaque $j \geqq i$, un morphisme $\mathscr{F}(i,j)$ de $\mathrm{Hom}\,(\Omega_j, \Omega_i)$, de telle sorte que:

(1) $i \leqq j \leqq k \Rightarrow \mathscr{F}(i,j)\mathscr{F}(j,k) \subset \mathscr{F}(i,k)$, avec égalité dans le cas conservatif.

(2) $\mathscr{F}(i,i)$ est l'élement unité e_i de $\mathrm{Hom}\,(\Omega_i, \Omega_i)$.

Etant donné un système projectif $\mathscr{F}$ de base I à valeurs dans $\bar{C}$, on écrira souvent Ω_i au lieu de $\mathscr{F}(i)$, ϕ_{ij} au lieu de $\mathscr{F}(i,j)$ et $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ au lieu de $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{G}$ est un a-foncteur covariant isotone de $\bar{C}$ dans une catégorie ordonnée $\bar{D}$, $\mathscr{G}\mathscr{F}$ est un système projectif de base I, à valeurs dans $\bar{D}$. Un *système projectif d'ensembles* sera un système projectif à valeurs dans $\overline{Ec}$. Cette dernière notion est une généralisation évidente des systèmes projectifs d'ensembles dans le sens classique, où chaque ϕ_{ij} est une application (voir [2]).

DÉFINITION 6. Soient (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif de base I à valeurs dans une catégorie ordonnée $\bar{C}$ et Ω un objet de $\bar{C}$. On désigne par $FI(\Omega, (\Omega_i))$ (ou $FI(\Omega)$) l'ensemble des *familles invariantes* (ϕ_i), où $(\phi_i) \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}\,(\Omega, \Omega_i)$ et

(3) $i \leqq j \Rightarrow \phi_{ij}\phi_j \subset \phi_i$, pour chaque $i, j \in I$
ordonné par l'ordre produit dans $\prod_i \mathrm{Hom}\,(\Omega, \Omega_i)$.

DÉFINITION 7. Soit $\mathscr{F} = (\Omega_i, \phi_{ij})$ un système projectif de base I à valeurs dans une a-catégorie $\bar{C}$. Pour chaque $\Omega \in \bar{C}$, on désigne par $FIM(\Omega, (\Omega_i))$ (ou $FIM(\Omega)$) l'ensemble des familles $(\eta_i) \in FI(\Omega)$, telles que $(\eta_i g)$ est un élément minimal de $FI(\Omega', (\Omega_i))$, pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$ et $g \in \mathrm{Homs}\,(\Omega', \Omega)$. On dit qu'un couple $(\Omega, (\phi_i))$, où $(\phi_i) \in FI(\Omega)$ et $\Omega \in \bar{C}$, est une *limite projective* de $\mathscr{F}$ dans $\bar{C}$, par rapport à $\subset$ et C', s'il vérifie la relation

(P1): Pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$, l'application $g \mapsto (\phi_i g)$ est une bijection de $\mathrm{Homs}\,(\Omega', \Omega)$ sur $FIM(\Omega')$.

Si $\subset$ est la relation d'égalité et $\bar{C}' = \bar{C}$, on retrouve la définition usuelle d'une limite projective dans une catégorie $\bar{C}$ (voir [5]). L'application $g \mapsto (\phi_i g)$ est une application isotone de $\mathrm{Hom}\,(\Omega', \Omega)$ dans $FI(\Omega')$. En vertu de (P1), on a $(\phi_i) \in FIM(\Omega)$.

PROPOSITION 8. *Si $(\Omega, (\phi_i))$ et $(\Omega', (\phi_i'))$ sont deux limites projectives de (Ω_i, ϕ_{ij}) par rapport à $\subset$ et $\bar{C}'$, il existe un isomorphisme et un seul $f \in \mathrm{Homs}\,(\Omega, \Omega')$, tel que $\phi_i = \phi_i' f$ pour chaque i.*

En effet, d'après (P1) il existe un morphisme $f \in \mathrm{Homs}\,(\Omega, \Omega')$ et un seul, tel que $\phi_i = \phi_i' f$ et un morphisme $g \in \mathrm{Homs}\,(\Omega', \Omega)$, tel que $\phi_i' = \phi_i g$ pour chaque i. L'assertion résulte maintenant des relations $\phi_i gf = \phi_i' f = \phi_i$, $\phi_i' fg = \phi_i g = \phi_i'$ et (P1).

On usurpe donc le droit d'écrire $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim_{i \in I} (\Omega_i, \phi_{ij})$ ou $\Omega = \varprojlim \Omega_i$.

Les résultats 9–12 subsistent si l'on suppose que $\bar{C}$ soit une a-catégorie σ-complète et que I possède une partie cofinale dénombrable.

LEMME 9. *Soient $(\Omega_i, \phi_{i,j})$ un système projectif de base I à valeurs dans une a-catégorie complète $\bar{C}$, J une partie cofinale de I, $\Omega' \in \bar{C}$ et $(\eta_i) \in FIM(\Omega')$. Alors,*

$$\eta_i = \bigcup_{\substack{j \geqslant i \\ j \in I}} \phi_{ij}\eta_j$$

pour chaque $i \in I$.

En effet, posant

$$\tilde{\eta}_i = \bigcup_{\substack{j \geqslant i \\ j \in J}} \phi_{ij}\eta_j$$

pour chaque i, on a $(\tilde{\eta}_i) \subset (\eta_i)$ et $(\tilde{\eta}_i) \in FI(\Omega')$, donc $(\tilde{\eta}_i) = (\eta_i)$ (déf. 7).

PROPOSITION 10. *Soit (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif de base I à valeurs dans une a-catégorie complète $\bar{C}$ et soit J une partie cofinale de I. Pour que ce système possède une limite projective $(\Omega, (\phi_i)_{i\in I})$, il faut et il suffit que le systeme projectif $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j\in J}$ possède une limite projective et alors $(\Omega, (\phi_i)_{i\in J}) = \varprojlim_{i\in J} (\Omega_i, \phi_{ij})$.*

Il suffit à prouver que la restriction $(\eta_i)_{i\in I} \mapsto (\eta_i)_{i\in J}$ soit une bijection de $FIM_I(\Omega') = FIM(\Omega', (\Omega_i)_{i\in I})$ sur $FIM_J(\Omega') = FIM(\Omega', (\Omega_i)_{i\in J})$, pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$.

Soient $(\eta_i) \in FIM_I(\Omega')$, $\Omega'' \in \bar{C}$, $g \in \mathrm{Homs}\,(\Omega'', \Omega')$ et $(\chi_i) \in FI_J(\Omega'')$, tels que $(\chi_i) \subset (\eta_i g)_{i\in J}$. Posant

$$\chi_i' = \bigcup_{\substack{j\geqslant i\\ j\in J}} \phi_{ij}\chi_j$$

pour chaque $i\in I$, on a $\chi_i' \subset \chi_i$ pour chaque $i \in J$, $(\chi_i') \in FI_I(\Omega'')$ et $(\chi'_i) \subset (\eta_i g)$, donc $(\chi_i)_{i\in J} = (\eta_i g)_{i\in J}$. Soit, d'autre part, $(\eta_i) \in FIM_J(\Omega')$ et posons

$$\eta_i' = \bigcup_{\substack{j\geqslant i\\ j\in J}} \phi_{ij}\eta_j$$

pour chaque $i\in I$. On a $\eta_i' = \eta_i$ pour chaque $i \in J$ et $(\eta_i') \in FIM_I(\Omega')$, parce que les relations $(\chi_i')_{i\in I} \subset (\eta_i' g)_{i\in I}$ et $(\chi_i') \in FI_I(\Omega'')$ entraînent $(\chi_i')_{i\in J} = (\eta_i' g)_{i\in J}$ et

$$\eta_i' g = \bigcup_{\substack{j\geqslant i\\ j\in J}} \phi_{ij}\eta_j' g = \bigcup \phi_{ij}\chi_j' \subset \chi_i' \subset \eta_i' g,$$

pour tout $i\in I$.

THÉORÈME 11. *Soient I filtrant à droite, (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif conservatif de base I à valeurs dans une a-categorie complète $\bar{C}$ et $\Omega' \in \bar{C}$. On a $\eta_i = \phi_{ij}\eta_j$ pour chaque $(\eta_i) \in FIM(\Omega')$ et $i \leqq j$.*

En effet, posant $J = \{k \geqq j\}$, on a

$$\eta_i = \bigcup_{\substack{k\in J\\ k\geqslant i}} \phi_{ik}\eta_k$$

(lemme 9), donc $\eta_i = \bigcup_{k\geqq j} \phi_{ij}\phi_{jk}\eta_k \subset \phi_{ij}\eta_j \subset \eta_i$, pour tout $i\in I$.

En particulier, $\phi_i = \phi_{ij}\phi_j$ pour chaque $j \geqq i$, dans le cas conservatif.

PROPOSITION 12. *Si I est filtrant à droite, $\bar{C}$ est complet, $\Omega_i = \Omega$ et ϕ_{ij} est le morphisme unité pour chaque i et j, alors $\Omega = \varprojlim \Omega_i$.*

D'après le lemme 9 et la définition 2 on a $\eta_i = \eta_j \in \mathrm{Homs}\,(\Omega', \Omega)$ pour chaque $i, j \in I$, $(\eta_i) \in FIM(\Omega')$ et $\Omega' \in \bar{C}$.

Mentionnons encore le résultat suivant:

Proposition 13. *Soit I muni de l'ordre trivial. Pour qu'un couple* $(\Omega, (\phi_i))$ *soit limite projective de* (Ω_i, ϕ_{ij}), *il faut et il suffit que* $(\Omega, (\phi_i))$ *soit le produit direct des* Ω_i *dans la catégorie* $\bar{C}'$. *En particulier,* $\phi_i \in$ Homs (Ω, Ω_i).

Souvent, il existe un foncteur assez agréable de $\bar{C}$ dans $\overline{Ec}$. Cette situation est généralisée par les résultats suivants.

Définition 14. Soient $\bar{C}$ et $\bar{D}$ deux catégories avec approximation. On appelle *foncteur fidèle* tout foncteur covariant isotone $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$, $\phi \mapsto \hat{\phi}$ de $\bar{C}$ dans $\bar{D}$, tel que:

(4) $\hat{g} \in$ Homs $(\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2)$ pour chaque $g \in$ Homs (Ω_1, Ω_2).

(5) $\hat{\phi} \subset \hat{\psi}$ entraîne $\phi \subset \psi$.

(6) $(\hat{\eta}_i) \in FIM(\hat{\Omega}, (\hat{\Omega}_i))$, pour chaque système projectif (Ω_i, ϕ_{ij}), $\Omega \in \bar{C}$ et $(\eta_i) \in FIM(\Omega, (\Omega_i))$.

On a aussi $(\eta_i) \in FIM(\Omega)$, si $(\hat{\eta}_i) \in FIM(\hat{\Omega})$.

Définition 15. On dit qu'une *a*-catégorie compléte $\bar{C}$ est *riche* si, pour chaque $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \bar{C}$, $\phi \in$ Hom (Ω_1, Ω_2), $g \in$ Homs (Ω_2, Ω_3) et $\psi \in$ Hom (Ω_1, Ω_3), tels que $\psi \subset g\phi$, il existe un morphisme (donc aussi *un plus grand morphisme*) $\phi' \in$ Hom (Ω_1, Ω_2), tel que $\phi' \subset \phi$ et $\psi \supset g\phi'$. On dit qu'une *a*-catégorie $\bar{C}$ est *prériche*, s'il existe un foncteur fidèle de $\bar{C}$ dans une *a*-catégorie riche.

La catégorie avec approximation $\overline{Ec}$ est riche.

Proposition 16. *Soient* $\bar{C}$ *une a-catégorie prériche, I filtrant à droite et* (Ω_i, ϕ_{ij}) *un système projectif a valeurs dans* $\bar{C}$, *tel que chaque* ϕ_{ij} *soit un morphisme strict. Pour qu'un couple* $(\Omega, (\phi_i))$ *soit limite projective de* (Ω_i, ϕ_{ij}), *il faut et il suffit qu'il soit limite projective de ce système dans la catégorie* $\bar{C}'$. *En particulier,* $\phi_i \in$ Homs (Ω, Ω_i) *pour chaque i.*

Soit $i \in I$. Il suffit à prouver que $f_i \in$ Homs (Ω', Ω_i), pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$ et $(f_i) \in FIM(\Omega')$. Soient $\Omega'' \in \bar{C}$, $g \in$ Homs (Ω'', Ω') et $\chi \subset f_i g$, donc $\hat{\chi} \subset \hat{f}_i \hat{g}$. Pour chaque $j \geqq i$, il existe un plus grand morphisme $\tilde{\chi}_j \subset \hat{f}_j \hat{g}$ (théor. 11, déf. 15), tel que $\hat{\phi}_{ij} \tilde{\chi}_j \subset \hat{\chi}$. Posant $\tilde{\chi}_j = \hat{f}_j \hat{g}$ si $j \ngeqq i$, la famille $(\tilde{\chi}_j)_{j \in I}$ est invariante et $(\hat{f}_j \hat{g})$ est minimale, donc $\hat{\chi} = \hat{f}_i \hat{g}$ et $\chi = f_i g$.

Définition 17. Soient I un ensemble préordonné non vide, $\bar{C}$ une *a*-catégorie et (Ω_i, ϕ_{ij}), (Ω', ϕ'_{ij}) deux systèmes projectifs de base I. On appelle *système projectif d'applications* de (Ω_i, ϕ_{ij}) dans (Ω', ϕ_{ij}) chaque famille $(f_i) \in \prod_i$ Homs (Ω_i, Ω'_i), telle que:

(7) $\phi'_{ij} f_j = f_i \phi_{ij}$ pour chaque $i \leqq j$.

On désigne par pro $\bar{C}_I$ la catégorie, dont les objets sont les systèmes projectifs de base I à valeurs dans $\bar{C}$ et dont les morphismes sont les systèmes projectifs d'applications. Jetant une partie cofinale de I, on désigne par I_J le foncteur covariant $(\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j\in I} \mapsto (\Omega_i, \phi_{ij})_{i,j\in J}$ et $(f_i)_{i\in I} \mapsto (f_i)_{i\in J}$ de pro $\bar{C}_I$ dans pro $\bar{C}_J$.

THÉORÈME 18. *Soit $\bar{C}$ une a-catégorie prériche et soit (f_i) un systéme projectif d'applications de (Ω_i, ϕ_{ij}) dans (Ω'_i, ϕ'_{ij}). Si $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim (\Omega_i, \phi_{ij})$ et $(\Omega', (\phi'_i)) = \varprojlim (\Omega', \phi'_{ij})$ existent, il existe un morphisme $f \in$ Homs (Ω, Ω') et un seul, désigné par $\varprojlim f_i$, tel que $f_i\phi_i = \phi'_i f$ pour chaque i.*

Il faut prouver la relation $(f_i\phi_i) \in FIM(\Omega, (\Omega'_i))$. Soient encore $\Omega_i \mapsto \hat{\Omega}_i$ le foncteur fidèle, $\Omega'' \in C$, $g \in$ Homs (Ω'', Ω), $(\chi_i) \in FI(\Omega'', (\Omega'_i))$ et $(\chi_i) \subset (f_i\phi_i g)$. On a $\hat{\chi}_i \subset \hat{f}_i\hat{\phi}_i\hat{g}$, donc pour chaque i il existe un plus grand morphisme $\eta_i \in$ Hom $(\hat{\Omega}'', \hat{\Omega}'_i)$, tel que $\hat{\chi}_i \supset \hat{f}_i\eta_i$ et $\eta_i \subset \hat{\phi}_i\hat{g}$. En vertu de (7), on a $(\eta_i) \in FI(\hat{\Omega}'', (\hat{\Omega}'_i))$, tandis que $(\hat{\phi}_i\hat{g}) \in FIM(\hat{\Omega}'', (\hat{\Omega}'_i))$, donc $\eta_i = \hat{\phi}_i\hat{g}$, $\hat{\chi}_i = \hat{f}_i\hat{\phi}_i\hat{g}$ et $\chi_i = f_i\phi_i g$ pour tout $i \in I$.

Si chaque système projectif à valeurs dans $\bar{C}$ possède une limite projective, on déduit de ce théorème l'existence d'un foncteur covariant $L_I = \varprojlim_{i\in I}$ de pro $\bar{C}_I$ dans $\bar{C}'$. En outre, $L_I = L_J I_J$ pour chaque partie cofinale J de I, si $\bar{C}$ est une a-catégorie complète.

Soient $\bar{C}$ une a-catégorie prériche, Ω et Ω' deux objets de $\bar{C}$ et $f \in$ Homs (Ω, Ω'), tel que $\hat{f}$ soit un monomorphisme dans la catégorie riche D, associée à $\bar{C}$ par le foncteur $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$. On dit que le couple (Ω, f) (ou Ω) est un *sous-espace* de Ω' si, pour chaque $\Omega'' \in \bar{C}$ et $\tilde{\psi} \in$ Homs $(\hat{\Omega}'', \hat{\Omega})$ tel que $\hat{f}\tilde{\psi} \in$ Hom $(\Omega'', \Omega')^\wedge$, il existe $\psi \in$ Hom (Ω'', Ω), tel que $\hat{\psi} = \tilde{\psi}$. On dit que (Ω, f) est un sous-espace *strict* de Ω', si cette relation est vérifiée pour chaque $\tilde{\psi} \in$ Hom $(\hat{\Omega}'', \hat{\Omega})$.

DÉFINITION 19. Soit (Ω'_i, ϕ'_{ij}) un système projectif à valeurs dans une a-catégorie prériche $\bar{C}$. On appelle *systeme projectif de sous-espaces* de (Ω'_i, ϕ'_{ij}) toute famille $((\Omega_i, f_i))$, telle que chaque (Ω_i, f_i) soit un sous-espace strict de Ω'_i et telle que (f_i) soit un système projectif d'applications d'un système projectif (Ω_i, ϕ_{ij}) dans (Ω'_i, ϕ'_{ij}).

Les morphismes ϕ_{ij} de cette définition sont uniquement déterminés, parce que chaque f_i est un monomorphisme dans $\bar{C}$.

PROPOSITION 20. *Soit (Ω_i, f_i) un système projectif de sous-espaces de (Ω'_i, ϕ'_{ij}). Supposons que chaque monomorphisme de $\bar{D}'$ soit un monomorphisme de $\bar{D}$. Si les limites projectives dans $\bar{C}$ et $\bar{D}$ existent et si le foncteur fidèle $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$ conserve les limites projectives, alors $(\varprojlim \Omega_i, \varprojlim f_i)$ est un sous-espace de $\varprojlim \Omega'_i$.*

D'après le théorème 18, $f = \varprojlim f_i$ existe. On a $\hat{f} = \varprojlim \hat{f}_i$ et c'est un monomorphisme dans $\bar{D}'$, parce que $\hat{f}g = \hat{f}h$ entraîne $\hat{\phi}_i'\hat{f}g = \hat{f}_i\hat{\phi}_i g = \hat{f}_i\hat{\phi}_i h$ et chaque $\hat{f}_i$ est un monomorphisme, donc $\hat{\phi}_i g = \hat{\phi}_i h$ et $g = h$. Soit $\tilde{\psi} \in \text{Homs}(\hat{\Omega}'', \varprojlim \hat{\Omega}_i)$, tel que $\hat{f}\tilde{\psi} \in \text{Hom}(\Omega'', \varprojlim \Omega_i')^\wedge$. Pour tout $i \in I$ on a $\hat{\phi}_i'\hat{f}\tilde{\psi} = \hat{f}_i\hat{\phi}_i\tilde{\psi} \in \text{Hom}(\Omega'', \Omega_i')^\wedge$, donc $\hat{\phi}_i\tilde{\psi} = \hat{\psi}_i$ pour un $\psi_i \in \text{Hom}(\Omega'', \Omega_i)$. La famille (ψ_i) est un élément de $FIM(\Omega'', (\Omega_i))$, donc $(\psi_i) = (\phi_i\psi)$ pour un $\psi \in \text{Homs}(\Omega'', \varprojlim \Omega_i)$ et $\hat{\psi} = \tilde{\psi}$.

Une condition suffisante pour le dernier critère de cette proposition est donnée par les résultats suivants. En effet, il suffit que les limites projectives existent dans $\bar{D}$ et que les objets initiaux existent dans $\bar{C}$.

Definition 21. Soient $\bar{C}$ une a-catégorie prériche, $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\bar{C}$, $\tilde{\Omega} \in \bar{D}$ et $(\tilde{\phi}_i) \in \prod \text{Hom}(\tilde{\Omega}, \hat{\Omega}_i)$. On dit qu'un couple $(\Omega, (\phi_i))$, où $\Omega \in \bar{C}$ et $\phi_i \in \text{Hom}(\Omega, \Omega_i)$, est un *objet initial* pour (Ω_i) et $(\tilde{\phi}_i)$, associé à $\tilde{\Omega}$, si les relations suivantes sont vérifiées:

(8) $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega}$ et $\hat{\phi}_i = \tilde{\phi}_i$ pour chaque i.

(9) Pour chaque $\Omega' \in \bar{C}$ et $\tilde{g} \in \text{Homs}(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$, tel que $\hat{\phi}_i\tilde{g} \in \text{Hom}(\Omega', \Omega_i)^\wedge$ pour tout $i \in I$, il existe $g \in \text{Homs}(\Omega', \Omega)$ tel que $\hat{g} = \tilde{g}$.

Un sous-espace (Ω, f) d'un objet Ω' est un objet initial pour Ω' et $\hat{f}$.

Proposition 22. *Soient (Ω_i, ϕ_{ij}) un systeme projectif à valeurs dans une categorie prériche $\bar{C}$, $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\phi}_i))$ une limite projective de $(\hat{\Omega}_i, \hat{\phi}_{ij})$ et supposons qu'il existe un objet initial $(\Omega, (\phi_i))$ pour (Ω_i) et $(\tilde{\phi}_i)$, associé à $\tilde{\Omega}$. Alors, $(\Omega, (\phi_i))$ est limite projective de (Ω_i, ϕ_{ij}).*

Démonstration immédiate.

Définition 23. Soit (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif conservatif à valeurs dans une a-catégorie $\bar{C}$. On dit que (Ω_i, ϕ_{ij}) est *strictement monotone*, par rapport à (ψ_{ij}), si l'ensemble I des indices est filtrant à droite et s'il existe, pour chaque $i \leqq j$, un morphisme $\psi_{ij} \in \text{Homs}(\Omega_i, \Omega_j)$, tel que $\phi_{ij}\psi_{ij} = e_i$ et $\psi_{jk}\psi_{ij} = \psi_{ik}$ pour $i \leqq j \leqq k$.

Proposition 24. *Soient (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif strictement monotone et $(\Omega, (\phi_i))$ sa limite projective. Pour chaque i, il existe un morphisme $\psi_i \in$ Homs (Ω_i, Ω) et un seul, tel que $\phi_j\psi_i = \psi_{ij}$ pour $j \geqq i$.*

En effet, posons, pour chaque j, $\eta_j = \phi_{jk}\psi_{ik}$ pour un indice $k \geqq i, j$. Le morphisme η_j ne dépend pas de k et $(\eta_j) \in FIM(\Omega_i)$, parce que $\eta_j = \psi_{ij}$ pour $j \geqq i$. Il existe donc un $\psi_i \in \text{Homs}(\Omega_i, \Omega)$ et un seul, tel que $\eta_j = \phi_j\psi_i$ pour chaque j.

2. Systèmes projectifs d'ensembles

Pour toute correspondance ϕ d'un ensemble Ω dans un ensemble Ω' et chaque partie A de Ω', on désigne par $\phi^{-1}A$ l'ensemble des $x \in \Omega$, tels que $A \cap \phi x \neq \emptyset$, et l'on désigne par $\bar{\phi}^{-1}A$ l'ensemble des $x \in \Omega$, tels que $\phi x \subset A$.

DÉFINITION 1. Soit (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif d'ensembles dans la catégorie avec approximation $\overline{Ec}$. On désigne par $PI(\Omega_i, \phi_{ij})$ (ou par PI) la collection des ensembles non vides $A = \prod_i A_i$, $A_i \subset \Omega_i$, tels que $\phi_{ij}A_j \subset A_i$, pour chaque i, j, $i \leqq j$, ordonnée par la relation d'inclusion. Soit $PIM(\Omega_i, \phi_{ij})$ (ou PIM) l'ensemble des éléments minimaux de PI.

THÉORÈME 2. *Soit (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif d'ensembles. Alors, $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim (\Omega_i, \phi_{ij})$ existe, $\Omega = PIM$ à un isomorphisme près et, pour tout $A = \prod A_i \in PIM$, on a $\phi_i A = A_i$. Dans le cas conservatif, on a $\phi_{ij}A_j = A_i$ pour $i \leqq j$.*

La famille $(\phi_i : A \mapsto A_i)$ est évidemment un élément de $FI(PIM)$. Pour toute application g d'un ensemble Ω' dans PIM et $j \geqq i$, on a $\phi_{ij}\phi_j g \subset \phi_i g$ et les relations $x \in \Omega'$, $(\chi_i) \in FI(\Omega')$, $(\chi_i) \subset (\phi_i g)$ entraînent $\prod \chi_i(x) \in PI$, $g(x) = \prod \phi_i g(x)$ et $\prod \chi_i(x) \subset g(x)$, donc $\chi_i = \phi_i g$ pour chaque i et $(\phi_i g) \in FIM(\Omega')$. L'application $g \mapsto (\phi_i g)$ est évidemment injective. Si $(g_i) \in FIM(\Omega')$ et $x \in \Omega'$, on a $A = \prod g_i(x) \in PIM$ et $\phi_i A = g_i(x)$ pour chaque i.

Dans la catégorie Ef, $\varprojlim \Omega_i$ est la limite projective des ensembles Ω_i, pour la famille d'applications (ϕ_{ij}), dans le sens usuel (proposition 16). Nous n'examinerons pas les critères sous lesquels la construction du théorème 2 donne un bleu pour les limites projectives dans une a-catégorie arbitraire.

DÉFINITION 3. Soit (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif d'ensembles. Pour chaque indice i et toute famille $\hat{x} = (x_i) \in \prod_i \Omega_i$, on désigne par $G_2(\hat{x}, i)$ l'ensemble des indices $j_0 \geqq i$, tels que les relations $j \geqq j_0$ et $p \in \phi_{j_0 j} x_j$ entraînent $x_i \in \phi_{ij_0} p$. On désigne par $\hat{\Omega}$ l'ensemble des familles $\hat{x}$, telles que $G_2(\hat{x}, i) \neq \emptyset$ pour chaque indice i.

On utilisera souvent la notation x_i pour la coordonnée d'indice i d'un élément $\hat{x} \in \prod \Omega_i$. On a $j \in G_2(\hat{x}, i)$, si $k \in G_2(\hat{x}, i)$ et $j \geqq k$. La relation $j \in G_2(\hat{x}, i)$ entraîne en particulier $x_i \in \phi_{ij} x_j$. Nous n'introduirons pas les ensembles $G_s(\hat{x}, i)$, pour $s \neq 2$.

DÉFINITION 4. Soient (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif d'ensembles, $\hat{x}, \hat{y} \in \prod \Omega_i$ et $i \in I$. On désigne par $K(\hat{x}, \hat{y}, i)$ l'ensemble des indices $j_0 \geqq i$, tels que $j \geqq j_0$ entraîne $x_i \in \phi_{ij} y_j$. Soit $R\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ la relation

(4) $\hat{x}, \hat{y} \in \prod \Omega_i$ et $i \in I \Rightarrow K(\hat{x}, \hat{y}, i) \neq \emptyset$.

La relation R est une relation d'équivalence dans $\hat{\Omega}$ et même:

Lemme 5. *$\hat{x} \in \prod \Omega_i, \hat{y} \in \hat{\Omega}, R\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle \Rightarrow \hat{x} \in \hat{\Omega}, R\langle \hat{y}, \hat{x}\rangle$ et $G_2(\hat{y}, i) \subset K(\hat{y}, \hat{x}, i)$ pour chaque i.*

En effet, choisissons $i \in I$, $j_1 \in K(\hat{x}, \hat{y}, i)$ et $j_0 \in G_2(\hat{y}, j_1)$. Pour chaque $j \geqq j_0$, $p \in \phi_{j_0 j} x_j$ et $k \in K(\hat{x}, \hat{y}, j)$ on a $p \in \phi_{j_0 k} y_k$, $y_{j_1} \in \phi_{j_1 j_0} p$ et $x_i \in \phi_{i j_0} p$, donc $\hat{x} \in \hat{\Omega}$. Pour tout $j_0 \in G_2(\hat{y}, i)$, $j \geqq j_0$ et $k \in K(\hat{x}, \hat{y}, j)$, on a $x_j \in \phi_{jk} y_k$ et $y_i \in \phi_{ij} x_j$, donc $j_0 \in K(\hat{y}, \hat{x}, i)$ et $R\langle \hat{y}, \hat{x}\rangle$.

Lemme 6. *Les relations $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{\Omega}$, $i \in I$, $x_i = y_i$ et $R\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$ entraînent $G_2(\hat{x}, i) = G_2(\hat{y}, i)$.*

Démonstration immédiate.

Chaque classe d'équivalence de $\hat{\Omega}$ selon R est une partie de $\prod \Omega_i$:

Théorème 7. *Soit (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif d'ensembles, alors $\varprojlim \Omega_i = \hat{\Omega}/R$, à un isomorphisme près.*

En effet, soit $x \in \hat{\Omega}/R$, soit $\hat{x} = (x_\iota)$ un représentant de x et posons $B_i = \bigcup_{j \geqslant i} \phi_{ij} x_j$ pour chaque indice i; l'ensemble $y = \prod B_i$ est un élément de PI.

Pour chaque i et $\hat{u} \in x$, on a $u_i \in \phi_{ij} x_j$ pour j assez grand, donc $u_i \in B_i$ et $x \subset y$. D'autre part, $\hat{v} \in y$ entraîne $R\langle \hat{v}, \hat{x}\rangle$ en vertu de la remarque qui précède la définition 4, donc $\hat{v} \in x$ (lemme 5), $x = y$ et $x \in PI$. Supposons que $z = \prod C_i$ soit un élément de PI, contenu dans x. Parce que z est non vide, il existe une famille $\hat{z} \in z$. Si y_i est un élément de B_i, on a $y_i \in \phi_{ij} x_j$ pour j assez grand et $x_j \in \phi_{jk} z_k$ pour k assez grand (définition 4), donc $y_i \in \phi_{ik} z_k$, $y_i \in C_i$, $x = z$ et $x \in PIM$.

D'autre part, supposons $x = \prod A_i \in PIM$, $\hat{x} = (x_i) \in x$, $i \in I$ et $G_2(\hat{x}, i) = \emptyset$. Alors, pour chaque $j \geqq i$, l'ensemble $C_j = A_j \cap \complement \phi_{ij}^{-1} x_i$ est non vide. Posant $C_j = A_j$ si $j \ngeqq i$, l'ensemble $z = \prod C_j$ est invariant, $z \subset x$ et $z \neq x$, ce qui est absurde.

Le lemme 6 montre:

Corollaire 8. *Pour tout $x \in \hat{\Omega}/R$, $i \in I$ et $x_i \in \phi_i x$, on peut définir un ensemble d'indices $\tilde{G}_2(x, x_i, i) = G_2(\hat{x}, i)$, $\hat{x}$ un représentant convenable de x dans $\hat{\Omega}$. Pour chaque $j \in \tilde{G}_2(x, x_i, i)$ et $x_j \in \phi_j x$, on a $x_i \in \phi_{ij} x_j$.*

Corollaire 9. *Si ψ est l'application canonique de $\hat{\Omega}$ sur $\hat{\Omega}/R$ et $x \in \hat{\Omega}/R$, on a $\psi^{-1} x = \prod \phi_i x$.*

Lemme 10. *$\phi_i \phi_i^{-1} x \subset \bigcup_{j \geqslant i} \phi_{ij} \phi_{ij}{}^{-1} x$, pour chaque $x \in \Omega_i$, si I est filtrant à droite.*

En effet, soit $p \in \phi_i \phi_i^{-1} x$, donc $p \in \phi_i y$ et $x \in \phi_i y$ pour un point $y \in \hat{\Omega}/R$. Pour chaque $\hat{y} \in \psi^{-1} y$ et $j \in \tilde{G}_2(y, p, i) \cap \tilde{G}_2(y, x, i)$, on a $x \in \phi_{ij} y_j$ et $p \in \phi_{ij} y_j$, donc $p \in \phi_{ij} \phi_{ij}{}^{-1} x$.

Chaque système projectif d'applications dans $\overline{Ec}$ possède une limite projective (théorème 1.18). Chaque partie Ω d'un ensemble Ω' forme, avec l'injection canonique, un sous-espace strict de Ω'. Pour qu'une famille de parties (Ω_i) d'un système projectif (Ω'_i, ϕ'_{ij}) forme un système projectif de sous-espaces, il faut et il suffit que $\phi_{ij}\Omega_j \subset \Omega_i$ pour chaque $j \geqq i$. Dans ce cas, $\varprojlim \Omega_i$ est un sous-espace de $\varprojlim \Omega'_i$ (proposition 1.20). Mentionnons encore le résultat suivant:

PROPOSITION 11. *Soit S un ensemble fini et soit, pour chaque $s \in S$, $\Omega^s_i, \phi^s_{ij})$ un système projectif d'ensembles de base I, I étant filtrant à droite. Posant $\Omega_i = \prod_s \Omega^s_i$, $\phi_{ij} = \prod_s \phi^s_{ij}$, $(\Omega^s, (\phi^s_i)) = \varprojlim (\Omega^s_i, \phi^s_{ij})$, $\Omega = \prod \Omega^s$ et $\phi_i = \prod_s \phi^s_i$, on vérifie aisément que la famille (Ω_i, ϕ_{ij}) est un système projectif d'ensembles et $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim (\Omega_i, \phi_{ij})$ à un isomorphisme près. Si, pour chaque s, (g^s_i) est un système projectif d'applications de $(\Omega^s_i, \phi^s_{ij})$ dans un système projectif $(\Omega'^s_i, \phi^s_{ij})$ et $g_i = \prod_s g^s_i$, (g_i) est un système projectif d'applications et $\varprojlim g_i = \prod_s \varprojlim g^s_i$.*

Dans $\overline{Ec}$, chaque élément minimal de $FI(\Omega)$ est un élément de $FIM(\Omega)$. Soit $\bar{C}$ une a-catégorie, dont les objets sont des ensembles, munis d'une certaine structure, dont chaque Hom (Ω_1, Ω_2) est un ensemble de correspondances de Ω_1 dans Ω_2, telles que $\phi x \neq \emptyset$ pour $x \in \Omega_1$, et dont chaque Homs (Ω_1, Ω_2) est un ensemble de fonctions de Ω_1 dans Ω_2, avec les règles de composition usuelles. Le théorème 2 donne alors le résultat utile suivant:

PROPOSITION 12. *Soit $\Omega \mapsto \hat{\Omega}$ le foncteur évident de $\bar{C}$ dans $\overline{Ec}$. C'est un foncteur fidele, si pour tout ensemble Ω et $x \in \Omega$, il existe un objet $\Omega_1 \in \bar{C}$, tel que $\hat{\Omega}_1 = \{x\}$, et $g \in \mathrm{Hom}_{\bar{C}} (\Omega_1, \Omega')$ pour chaque $g \in \mathrm{Hom}_{\overline{Ec}} (\{x\}, \hat{\Omega}')$ et $\Omega' \in \bar{C}$.*

Sous ces conditions on a même:

THÉORÈME 13. *Soient (Ω_i, ϕ_{ij}) un système projectif à valeurs dans $\bar{C}$, et $(\tilde{\Omega}, (\tilde{\phi}_i)) = \varprojlim_{\overline{Ec}}(\hat{\Omega}_i, \hat{\phi}_{ij})$. Pour que $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim_{\bar{C}} (\Omega_i, \phi_{ij})$ existe, il faut et il suffit que $(\Omega, (\phi_i))$ soit un objet initial, pour les familles (Ω_i) et $(\tilde{\phi}_i)$, associé à $\tilde{\Omega}$.*

La proposition 1.22 montre que la condition est suffisante. D'autre part, le théorème 2 et la proposition 12 prouvent $\hat{\Omega} = \tilde{\Omega}$ et $\hat{\phi}_i = \tilde{\phi}_i$ pour chaque i. Dans les notations de la définition 1.21, on a ensuite $\hat{\phi}_i\tilde{g} = \hat{\chi}_i$ pour un $\chi_i \in \mathrm{Hom}\,(\Omega', \Omega_i)$, $(\chi_i) \in FI(\Omega')$ et $(\hat{\phi}_i) \in FIM(\hat{\Omega}')$, donc $(\chi_i) \in FIM(\Omega')$, $\chi_i = \phi_i g$ pour un $g \in \mathrm{Homs}\,(\Omega', \Omega)$, $\hat{\chi}_i = \hat{\phi}_i\hat{g} = \hat{\phi}_i\tilde{g}$ et $\hat{g} = \tilde{g}$.

3. Systèmes projectifs d'espaces v_D

Les ensembles discrets qu'on rencontre en analyse numérique possèdent souvent une structure topologique généralisée:

DÉFINITION 1. On appelle *topologie* v_D sur un ensemble Ω la structure déterminée par une application $\alpha : A \mapsto A^\alpha$ de $\mathfrak{P}(\Omega)$ dans lui-même, telle que:

(α1) $\emptyset^\alpha = \emptyset$.

(α2) $A^\alpha \supset A$ pour tout $A \subset \Omega$.

(α3) $(A \cup B)^\alpha = A^\alpha \cup B^\alpha$, pour tout $A, B \subset \Omega$.

On appellera *espace* v_D l'ensemble Ω muni de cette structure; l'ensemble A^α sera appelé la *semi-adhérence* de A, l'ensemble $A^\iota = \complement((\complement A)^\alpha)$ le *semi-intérieur* de A. On appelle *semi-voisinage* d'un point x tout ensemble V tel que $x \in V^\iota$.

Désormais, l'application $A \mapsto A^\alpha$ dans $\mathfrak{P}(\Omega)$ et la topologie v_D correspondante seront désignées par la même lettre α. Pour $x \in \Omega$, on écrira x^α au lieu de $\{x\}^\alpha$. On dit qu'une partie A de Ω est *semi-fermée* (*semi-ouverte*), s'il existe une partie B de Ω, telle que $A = B^\alpha$ ($A = B^\iota$). Toute topologie v_D sur Ω est uniquement déterminée par les filtres $\mathfrak{V}(x)$ des semi-voisinages des points $x \in \Omega$. Les ensembles semi-ouverts forment la base d'une topologie $\beta = \beta(\alpha)$ sur Ω, qu'on appelle la *topologie associée* de α. Sauf mention du contraire, toutes les notions topologiques auront rapport à cette topologie.

DÉFINITION 2. Soit ϕ une correspondance d'un espace $v_D(\Omega, \alpha)$.dans un espace $v_D(\Omega', \alpha')$. On dit que ϕ est *m-continue* (*continue*) dans Ω si $\phi(A^\alpha) \subset (\phi A)^{\alpha'}$ ($\varphi(A^\beta) \subset (\varphi A)^{\beta'}$), pour tout $A \subset \Omega$. On dit que ϕ est *f-continue* dans Ω, si ϕ est continue et m-continue dans Ω. Si $\Omega = \Omega'$, on dit que α est plus *mince* que α', et l'on écrit $\alpha \succ \alpha'$, si l'application identique de (Ω, α) sur (Ω', α') est m-continue. Si cette application est f-continue, on dit que α est plus *fine* que α' et l'on écrit $\alpha \geqq \alpha'$. Désignons enfin par $\overline{ETM}$ la catégorie avec approximation, dont les objets sont les espaces v_D, les morphismes les correspondances m-continues et les morphismes stricts les applications m-continues.

Le foncteur $(\Omega, \alpha) \mapsto \Omega$ de $\overline{ETM}$ dans $\overline{Ec}$ est fidèle (proposition 2.12), donc $\overline{ETM}$ est une a-catégorie prériche, mais on voit aisément (à l'aide de l'ensemble $\{0, 1\}$) qu'elle n'est pas riche.

Soit $(\Omega_i, \alpha_i, \phi_{ij})$ un système projectif à valeurs dans $\overline{ETM}$. Pour que $\varprojlim (\Omega_i, \alpha_i, \phi_{ij})$ existe, il faut et il suffit qu'il existe un objet initial $(\Omega, \alpha, (\phi_i))$ dans $\overline{ETM}$, pour les familles (Ω_i, α_i) et (ϕ_i), associé à $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim_{\overline{Ec}} (\Omega_i, \phi_{ij})$, et alors $(\Omega, \alpha, (\phi_i)) = \varprojlim (\Omega_i, \alpha_i, \phi_{ij})$ (théorème 2.13). L'existence de cet objet initial est une conséquence du théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soient* $(\Omega_i, \alpha_i)_{i \in I}$ *une famille d'espaces* v_D, Ω *un ensemble et, pour chaque* i, ϕ_i *une correspondance de* Ω *dans* Ω_i. *Il existe sur* Ω *une topologie* v_D α *et une seule telle que, pour chaque espace* v_D (Ω', α') *et toute application* $g : \Omega' \to \Omega$, *pour que* g *soit m-continue, il faut et il suffit que chaque* $\phi_i g$ *soit m-continue. En outre,* α *est la topologie* v_D *la moins mince sur* Ω *rendant m-continue chaque* ϕ_i. *Si chaque* $\phi_i g$ *est f-continue,* g *est f-continue. Si chaque* α_i *est une topologie,* α *est une topologie.*

En effet, la topologie v_D α définie par

$$A^\alpha = \bigcap_{\substack{A_1 \cup \,..\, \cup A_k \supset A \\ i_1, \ldots, i_k \in I}} \bigcup_{s=1}^{k} \bar{\phi}_{i_s}^{-1}((\phi_{i_s} A_s)^{\alpha_{i_s}})$$

répond à toutes les conditions (voir [1]).

On appelle α la topologie v_D *m-initiale* sur Ω pour la famille (ϕ_i). La topologie associée β de α est moins fine que la topologie initiale $\hat{\beta}$ des topologies associées β_i.

COROLLAIRE 4. *Les relations suivantes sont équivalentes.*

(1) *La topologie* v_D *m-initiale* α *est f-initiale, c'est-à-dire* g *est f-continue, si et seulement si chaque* $\phi_i g$ *est f-continue.*

(2) β *et* $\hat{\beta}$ *coïncident.*

(3) *Les correspondances* ϕ_i *sont f-continues.*

THÉORÈME 5. *Soit* I *filtrant à droite. La topologie* v_D α *de la limite projective* $(\Omega, \alpha, (\phi_i))$ *d'un système projectif* $(\Omega_i, \alpha_i, \phi_{ij})$ *est donnée par*

(4) $\psi^{-1}(A^\alpha) = \hat{\Omega} \cap \prod_i (\phi_i A)^{\alpha_i}$, $A \subset \Omega$,

où ψ *est l'application canonique de* $\hat{\Omega}$ *sur* $\varprojlim \Omega_i$.

En effet, soient $\hat{x} \in \psi^{-1} A^\alpha$ et $x = \psi \hat{x}$. Parce que chaque ϕ_i est m-continue, on a $\phi_i x \subset (\phi_i A)^{\alpha_i}$ et $\hat{x} \in \prod \phi_i x \subset \hat{\Omega} \cap \prod (\phi_i A)^{\alpha_i}$. Réciproquement, supposons $i_1, \cdots, i_k \in I$, $A_1 \cup \cdots \cup A_k \supset A$ et $(x_i) = \hat{x}$, $\hat{x} \in \hat{\Omega} \cap \prod (\phi_i A)^{\alpha_i}$. Il faut prouver la relation $x = \psi \hat{x} \in \bigcup_{s=1}^{k} \bar{\phi}_{i_s}^{-1}((\phi_{i_s} A_s)^{\alpha_{i_s}})$ (théorème 3). Soit $j \in \bigcap_s G_2(\hat{x}, i_s)$; on a $x_j \in (\phi_j A)^{\alpha_j}$, donc $x_j \in (\phi_j A_l)^{\alpha_j}$ pour un $l \in [1, k]$ et $\phi_{i_l} x \subset \phi_{i_l j} x_j \subset (\phi_{i_l} A_l))^{\alpha_{i_l}}$.

COROLLAIRE 6. *Soit* I *filtrant à droite. Pour tout* $x \in \Omega$ *et* $\hat{x} \in \psi^{-1} x$, *les ensembles* $\phi_j^{-1} V$, *où* V *parcourt un système fondamental de semi-voisinages de* x_j *dans* (Ω_j, α_j), *forment un systeme fondamental de semi-voisinages de* x *dans* (Ω, α).

La relation (4) prouve en outre que α est la topologie v_D *quotient*

$A \mapsto \psi((\psi^{-1}A)^{\hat{\alpha}})$ de la topologie v_D $\hat{\alpha}$ *induite* sur $\hat{\Omega}$ par la topologie v_D *produit* des α_i (voir [1]).

Soit (f_i) un système projectif d'applications dans $\overline{ETM}$. Le théorème 1.18 montre que $f = \varprojlim f_i$ existe dans $\overline{ETM}$ et $f = \varprojlim_{\overline{Ec}} f_i$. Soient (Ω', α') un objet de $\overline{ETM}$, Ω une partie de Ω', f l'injection canonique et α une topologie v_D sur Ω. Pour que (Ω, α, f) soit un sous-espace de (Ω', α'), il faut et il suffit que $A^\alpha = A^{\alpha'} \cap \Omega$ pour chaque $A \subset \Omega$. Chaque sous-espace est un sous-espace strict et α est la topologie v_D induite, par α', c'est-à-dire la topologie v_D initiale pour (Ω', α') et f, associée à Ω. Si (Ω_i, ϕ_{ij}) est un système projectif de sous-espaces, par rapport à $\overline{Ec}$, d'un système projectif $(\Omega_i', \alpha_i', \phi_{ij}')$ et si chaque α_i est la topologie v_D induite par α_i', alors $(\Omega_i, \alpha_i, \phi_{ij})$ est un système projectif de sous-espaces de $(\Omega_i', \alpha_i', \phi_{ij}')$ par rapport à $\overline{ETM}$ et les conditions de la proposition 1.20 sont vérifiées. Remarquons enfin qu'on peut énoncer un analogue de la proposition 2.11, introduisant d'une façon évidente les topologies v_D produit.

PROPOSITION 7. *Soient $(\Omega_i, \beta_i, \phi_{ij})$ un système projectif strictement monotone d'espaces topologiques par rapport à une famille (ψ_{ij}), et $(\Omega, \beta, (\phi_i)) = \varprojlim (\Omega_i, \beta_i, \phi_{ij})$.*
Alors, $\psi_i(A^{\beta_i}) = (\psi_i A)^\beta \cap \psi_i \Omega_i$ pour chaque i et $A \subset \Omega_i$.

Démonstration évidente.

4. Systèmes projectifs d'espaces mesurables

Soient $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ deux espaces mesurables. Une correspondance $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ est dite *mesurable* si l'on a $\phi^{-1}A \in \mathscr{A}_1$ pour tout $A \in \alpha_2$. Voir [6], pour une autre définition des correspondances mesurables.

DÉFINITION 1. On désigne par $\overline{EM}$ la catégorie avec approximation, dont les objets sont les espaces mesurables, dont chaque Hom (Ω_1, Ω_2) est l'ensemble des correspondances mesurables de Ω_1 dans Ω_2 et dont chaque Homs (Ω_1, Ω_2) est l'ensemble des applications mesurables de Ω_1 dans Ω_2.

La catégorie ordonnée $\overline{EM}$ est σ-complète et le foncteur $(\Omega, \mathscr{A}) \mapsto \Omega$ de $\overline{EM}$ dans $\overline{Ec}$ est fidèle, donc $\overline{EM}$ est prériche. Soient $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \phi_{ij})$ un système projectif à valeurs dans $\overline{EM}$ et $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim_{\overline{Ec}}(\Omega_i, \phi_{ij})$. Pour qu'il existe une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω, telle que $(\Omega, \mathscr{A}, (\phi_i)) = \varprojlim_{\overline{EM}}(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \phi_{ij})$, il faut et il suffit que $(\Omega, \mathscr{A})$ soit un objet initial pour $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ et (ϕ_i), associé à Ω (théorème 2.13). Cet objet initial existe:

Théorème 2. *Soient $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables, Ω un ensemble et, pour chaque i, ϕ_i une correspondance de Ω dans Ω_i. Il existe une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω et une seule telle que, pour chaque espace mesurable $(\Omega', \mathscr{A}')$ et chaque application $g : \Omega' \to \Omega$, pour que g soit mesurable, il faut et il suffit que chaque $\phi_i g$ soit mesurable. En particulier, $\mathscr{A}$ est la tribu la plus petite pour laquelle toutes les ϕ_i sont mesurables.*

C'est en effet la tribu engendrée par les ensembles $\phi_i^{-1}A$, $i \in I$, $A \in \mathscr{A}_i$.

Soit J une partie cofinale de I. La catégorie $\overline{EM}$ n'est pas complète, mais les assertions des propositions 1.9–1.12 résultent maintenant du théorème 2.13 et du fait que la tribu initiale du théorème 2 est invariante sous le foncteur I_J du paragraphe 1.

La limite projective f d'un système projectif d'applications (f_i) existe et $f = \varprojlim_{\overline{Ec}} f_i$. Tout sous-espace (Ω, α) de (Ω', α') est un sous-espace strict, donc $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \phi_{ij})$ est un système projectif de sous-espaces de $(\Omega_i', \mathscr{A}_i', \phi_{ij}')$ si et seulement si (Ω_i, φ_{ij}) est un système projectif de sous-espaces de (Ω_i', ϕ_{ij}') et chaque $\mathscr{A}_i$ est la tribu induite par $\mathscr{A}_i'$; dans ce cas $\varprojlim (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ est un sous-espace de $\varprojlim (\Omega_i', \mathscr{A}_i')$. Enfin, la proposition 2.11 possède un analogue pour la catégorie $\overline{EM}$.

Supposons que chaque $\mathscr{A}_i$ soit la tribu borélienne d'un espace topologique (Ω_i, β_i). Les résultats suivants montrent que, sous certaines conditions, $\varprojlim \mathscr{A}_i$ est la tribu borélienne de $\varprojlim (\Omega_i, \beta_i)$. Cette assertion n'est pas évidente. En effet:

Exemple 3. Soient $\Omega = [0, 1]$, muni de la topologie habituelle, et $\Omega' = [0, 1]$ muni de la topologie, dont les ensembles ouverts non vides sont les ouverts 0 de Ω tels que $1 \in 0$. Soit B une partie non-borélienne de Ω et posons $\phi x = 1$ si $x \notin B$, $\phi x = [0, 1)$ si $x \in B$. La correspondance ϕ est continue, $[0, 1)$ est borélien dans Ω', mais $\phi^{-1}[0, 1) = B$ est non-borélien dans Ω.

Proposition 4. *Soient $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables, Ω un ensemble et, pour chaque i, f_i une application de Ω_i dans Ω. Il existe sur Ω une tribu finale $\mathscr{A}$ pour les familles (f_i) et $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, c'est-à-dire pour chaque correspondance g de Ω dans un espace mesurable $(\Omega', \mathscr{A}')$, g est mesurable si et seulement si chaque gf_i est mesurable. $\mathscr{A}$ est la plus grande des tribus pour lesquelles toutes les f_i sont mesurables.*

En effet, les éléments de $\mathscr{A}$ sont les parties A de Ω, telles que $f_i^{-1}A \in \mathscr{A}_i$ pour chaque i. C'est donc la tribu finale dans le sens usuel.

Soit $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \phi_{ij})$ un système projectif de base I à valeurs dans $\overline{EM}$. Désignons par $\hat{\Omega}_0$ l'ensemble $\prod_i \Omega_i$, par $\mathscr{A}_0$ la tribu produit des $\mathscr{A}_i$, par $\mathscr{A}$ la tribu induite par $\mathscr{A}_0$ sur $\hat{\Omega}$, par $\mathscr{A}'$ la tribu quotient de $\mathscr{A}$ par la relation d'équivalence R du paragraphe 2 et par $(\Omega, \mathscr{A}, (\phi_i))$ la limite projective dans $\overline{EM}$ du système projectif. Soit p_i la projection de $\hat{\Omega}_0$ sur Ω_i et supposons désormais que I possède une partie cofinale dénombrable J.

LEMME 5. *Soient $i \in I$, B une partie mesurable de $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $A = p_i^{-1}B$ et C la saturée de $A \cap \hat{\Omega}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{\Omega}$, tels que $R\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle$ pour un point $\hat{y} \in A \cap \hat{\Omega}$. Alors, l'ensemble C est mesurable par rapport à $\mathscr{A}$. Si I est filtrant à droite, l'assertion reste vraie pour une intersection finie $A = \bigcap^s p_{i_s}^{-1} B_s$.*

L'ensemble A est mesurable dans $(\hat{\Omega}_0, \mathscr{A}_0)$, donc $A \cap \hat{\Omega}$ est mesurable dans $(\hat{\Omega}, \mathscr{A})$. Supposons $\hat{x} \in C$, $\hat{y} \in A$, $R\langle \hat{y}, \hat{x}\rangle$ et $j \in K(\hat{y}, \hat{x}, i)$. L'ensemble $D = \prod D_k$, où $D_j = \phi_{ij}^{-1}B$ et $D_k = \Omega_k$ si $k \neq j$, est mesurable dans $(\hat{\Omega}_0, \mathscr{A}_0)$. On a $\hat{x} \in D \cap \hat{\Omega} \subset C$ (lemme 2.5) et C est contenu dans la réunion dénombrable des ensembles D, j parcourant J.

PROPOSITION 6. $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$.

Supposons $i \in I$ et $A \in \mathscr{A}_i$. L'ensemble $(\phi_i \psi)^{-1}A$ est la saturée de l'ensemble $p_i^{-1}A \cap \hat{\Omega}$, donc mesurable dans $(\hat{\Omega}, \mathscr{A})$ (lemme 5). Les correspondances $\phi_i\psi : (\hat{\Omega}, \mathscr{A}) \to (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ sont donc mesurables, ainsi que l'application $\psi : (\hat{\Omega}, \mathscr{A}) \to (\Omega, \mathscr{A})$ (théorème 2). Il en résulte $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$ (proposition 4).

Supposons maintenant que chaque Ω_i soit muni d'une topologie à base dénombrable β_i, que chaque $\mathscr{A}_i$ soit la tribu borélienne de l'espace (Ω_i, β_i), et que chaque ϕ_{ij} soit continue. Désignons par $\hat{\beta}_0$ la topologie produit des β_i et par $\hat{\beta}$ la topologie induite par $\hat{\beta}_0$ sur $\hat{\Omega}$. Soit $\mathscr{B}$ la tribu borélienne de l'espace topologique à base dénombrable $(\Omega, \beta) = \varprojlim_{\overline{ETM}}(\Omega_i, \beta_i)$. $\mathscr{B}$ est engendrée par les ensembles $\phi_i^{-1}V$, V ouvert dans Ω_i, donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$. $\mathscr{A}$, β et $\mathscr{B}$ ne changent pas, si l'on se restreint au système $(\Omega_i, \beta_i, \phi_{ij})_{i,j \in J}$ (proposition 1.10).

THÉORÈME 7. *Supposons que I soit filtrant à droite et possède une partie cofinale dénombrable. Soit $(\Omega_i, \beta_i, \phi_{ij})$ un systeme projectif dans $\overline{ETM}$ d'espaces polonais, tel que $\phi_{ij}x$ soit fermé pour tout $x \in \Omega_j$ et $i \leqq j$ et tel que (Ω, β) soit un espace accessible (espace T_1). Alors, $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.*

En vertu de la remarque précédente, on se ramène au cas où I est dénombrable. Il suffit à prouver l'inclusion $\mathscr{A}' \subset \mathscr{B}$. I étant dénombrable, $(\hat{\Omega}_0, \hat{\beta}_0)$ est un espace polonais (voir [2]). Soit, pour chaque i, $\mathfrak{B}_i$ une base dénombrable d'ensembles ouverts de (Ω_i, β_i) et soit pour chaque $i, j_0, j \in I$, tels que $i \leqq j_0 \leqq j$, et $V \in \mathfrak{B}_i$, $H(i, j_0, j, V)$ l'ensemble des $\hat{x} = (x_i) \in \hat{\Omega}_0$ tels que $x_i \in V$ et $x_j \in \phi_{j_0 j}^{-1} \complement \phi_{ij}^{-1} V$. L'ensemble $H(i, j_0, j, V)$ est borélien dans $(\hat{\Omega}_0, \hat{\beta}_0)$ (théorème 2). Parce que chaque ensemble

$\phi_{ij_0}p, p \in \Omega_{j_0}$, est fermé, on a $\complement\hat{\Omega} = \bigcup_i \bigcap_{j_0 \geqq i} \bigcup_{j \geqslant j_0} \bigcup_{V \in \mathfrak{B}_i} H(i, j_0, j, V)$, donc $\hat{\Omega}$ est borélien dans $(\hat{\Omega}_0, \hat{\beta}_0)$. La tribu borélienne $\hat{\mathscr{B}}$ de $(\hat{\Omega}, \hat{\beta})$ est donc la collection des parties A de $\hat{\Omega}$, telles que A soit élément de la tribu borélienne $\hat{\mathscr{B}}_0$ de $(\hat{\Omega}_0, \hat{\beta}_0)$. $(\hat{\Omega}_0, \hat{\beta}_0)$ étant dénombrable, on a $\hat{\mathscr{B}}_0 \subset \hat{\mathscr{A}}_0$ donc $\hat{\mathscr{B}}_0 = \hat{\mathscr{A}}_0$ et $\hat{\mathscr{B}} = \hat{\mathscr{A}}$ (théorème 2). Parce que $\hat{\Omega}$ est analytique dans $(\hat{\Omega}_0, \hat{\mathscr{B}}_0)$, $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{A}})$ est un espace de Blackwell ([7], T 3.16). Pour chaque i et $V_i \in \mathfrak{B}_i$, l'ensemble $p_i^{-1}V_i$ est ouvert dans $(\hat{\Omega}_0, \hat{\beta}_0)$ et l'on prouve aisément que la saturée d'une intersection finie de ces ensembles est encore ouverte dans $(\hat{\Omega}, \hat{\beta})$. Soient $\mathscr{C}_1$ la tribu sur $\hat{\Omega}$ engendrée par ces ensembles saturés et $\mathscr{C}$ la tribu des ensembles $\hat{\mathscr{A}}$-mesurables et saturés. On a $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C} \subset \hat{\mathscr{A}}$ et $\mathscr{C}_1$ est séparable. Si $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont deux points de $\hat{\Omega}$, tels que $\hat{x}$ et $\hat{y} \in A$ ou $\hat{x}$ et $\hat{y} \in \complement A$ pour chaque $A \in \mathscr{C}_1$, on a $R\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$. En effet, si $\hat{x}$ et $\hat{y}$ ne sont pas équivalents, il existe un voisinage ouvert 0 de $\psi\hat{x}$ dans (Ω, β), ne rencontrant pas $\psi\hat{y}$ et tel que l'on ait $\hat{x} \in \psi^{-1}0 \in \mathscr{C}_1$. Il en résulte $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_1$ ([7], T 3.17). Soit enfin A une partie $\mathscr{A}'$-mesurable de Ω; $\psi^{-1}A$ est $\hat{\mathscr{A}}$-mesurable et saturé, donc $\psi^{-1}A \in \mathscr{C}_1$. La collection des ensembles $\mathscr{C}_1$-mesurables, dont l'image est borélien, est une sous-tribu de $\mathscr{C}_1$ qui contient une base de $\mathscr{C}_1$, parce que β est la topologie quotient de $\hat{\beta}$. On a donc $A = \psi\psi^{-1}A \in \mathscr{B}$, $\mathscr{A}' \subset \mathscr{B}$ et $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

5. Systèmes projectifs d'espaces probabilisés

Nous nous bornerons à un cas relativement simple. Voir [3] and [9] pour une étude plus détaillée du cas classique.

Soient (Ω_1, β_1) et (Ω_2, β_2) deux espaces topologiques, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ leurs tribus boréliennes, μ_1 et μ_2 deux lois de probabilité sur $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et soit ϕ une correspondance continue de Ω_1 dans Ω_2. On dit que ϕ *conserve la mesure*, si $\mu_2 0 \leqq \mu_1(\phi^{-1}0)$, pour toute partie ouverte 0 de Ω_2 telle que $\varphi^{-1}0$ soit non vide.

Proposition 1. *Soient* (Ω_2, β_2) *un espace métrisable et* ϕ *une application continue, surjective et conservant la mesure. Supposons que* μ_2 *soit régulière par rapport aux parties ouvertes, c'est-à-dire, pour chaque* $A \in \mathscr{B}_2$ *et* $\varepsilon > 0$ *il existe un voisinage ouvert* 0 *de* A, *tel que* $\mu_2 A \geqq \mu_2 0 - \varepsilon$. *Dans ce cas, on a* $\mu_2 A = \mu_1(\phi^{-1}A)$ *pour chaque* $A \in \mathscr{B}_2$.

En effet, si A est fermé, on a $\mu_1(\phi^{-1}A) \leqq \mu_2 A$ et l'égalité résulte du fait que A est un G_δ. Pour $A \in \mathscr{B}_2$ quelconque, on a $\mu_2 A = \lim \mu_2(0_n) = \lim \mu_1(\phi^{-1}0_n) \geqq \mu_1(\phi^{-1}A)$, pour une suite convenable (0_n) d'ensembles ouverts.

Définition 2. On désigne par $\overline{EP}$ la catégorie avec approximation, dont les objets sont les espaces topologiques (Ω, β), muni d'une loi de probabilité μ sur la tribu borélienne $\mathscr{B}$, régulière par rapport aux parties ouvertes, et dont les morphismes (stricts) sont les correspondances (les applications) continues, conservant la mesure.

La catégorie ordonnée $\overline{EP}$ est complète, le foncteur $(\Omega, \beta, \mu) \mapsto \Omega$ de $\overline{EP}$ dans $\overline{Ec}$ est fidèle et l'étude des limites projectives dans $\overline{EP}$ se ramène à celle des objets initiaux (théorème 2.13, proposition 2.12).

Soit $(\Omega_i, \beta_i, \mu_i, \phi_{ij})$ un système projectif à valeurs dan $\overline{EP}$ et supposons qu'il existe une limite projective $(\Omega, \beta, \mu, (\phi_i))$, donc $(\Omega, (\phi_i)) = \varprojlim_{Ec} (\Omega_i, \phi_{ij})$.

PROPOSITION 3. $(\Omega, \beta, (\phi_i)) = \varprojlim_{\overline{ETM}} (\Omega_i, \beta_i, \phi_{ij})$.

Posant $\beta' = \varprojlim_{\overline{ETM}} \beta_i$ et $\mathscr{B}'$ la tribu borélienne de β', on a $\beta' \leqq \beta$, donc $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$. Soit μ' la restriction de μ à $\mathscr{B}'$. Chaque morphisme $\phi_i : (\Omega, \beta', \mu') \to (\Omega_i, \beta_i, \mu_i)$ conserve la mesure, donc l'application identique de (Ω, β') dans (Ω, β) est continue et $\beta' \geqq \beta$.

THÉORÈME 4. *Soit* $(\Omega_i, \beta_i, \mu_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ *un système projectif à valeurs dans* $\overline{EP}$, *tel que les relations suivantes soient vérifiées*:

(1) $(\Omega_i, \beta_i, \phi_{ij})$ *est strictement monotone dans* $\overline{ETM}$, *par rapport à une famille* (ψ_{ij}).

(2) *I possède une partie cofinale dénombrable J.*

(3) $(\Omega, \beta) = \varprojlim_{\overline{ETM}} (\Omega_i, \beta_i)$ *est compact.*

(4) *Pour chaque* $i \in I$, $\varepsilon > 0$ *et toute partie ouverte* 0 *de* Ω_i, *il existe un indice j et une partie ouverte V de* $\phi_{ij}^{-1}0$, *telles que* $\mu_j V \geqq \mu_j(\phi_{ij}^{-1}0) - \varepsilon$ *et* $(\phi_j^{-1} V)^{\beta} \subset \phi_i^{-1}0$.

Alors, il existe une loi de probabilité μ, *telle que* $(\Omega, \beta, \mu, (\phi_i)) = \varprojlim_{\overline{EP}}(\Omega_i, \beta_i, \mu_i, \phi_{ij})$.

Remarquons d'abord qu'on a $\phi_i = \phi_{ij}\phi_j$ pour $i \leqq j$ (définition 1.23). Désignons par $\mathscr{U}_i(\mathscr{U})$ l'ensemble des parties ouvertes de (Ω_i, β_i) (de (Ω, β)) et par $\mathscr{E}$ le pavage de Ω des ensembles de la forme $0 = \bigcap_{s \in K} \phi_i^{-1} 0_s$, K fini, $i \in I$, $(0_s)_{s \in K} \subset \mathscr{U}_i$. $\mathscr{E}$ est stable pour les réunions et les intersections finies. On a $0 = \bigcup_{j \geqslant i} \phi_j^{-1} \bigcap_{s \in K} \phi_{ij}^{-1} 0_s$, $\bigcap_{s \in K} \phi_{ij}^{-1} 0_s = \psi_j^{-1} 0$ pour $j \geqq i$ et $\mu_k(\psi_k^{-1} 0) \geqq \mu_j(\psi_j^{-1} 0)$ pour $k \geqq j \geqq i$. Posant $\tau(0) = \sup_{j \geqslant i} \mu_j(\psi_j^{-1} 0)$ on a $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(\Omega) = 1$, $\tau(A) \leqq \tau(B)$ pour $A \subset B$ et $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$ pour $A \cap B = \emptyset$.

Posons, pour toute partie A de Ω:

$$\mu^*(A) = \inf \{\textstyle\sum_n \tau(0)_n : (0_n)_{n \in N} \subset \mathscr{E}, \bigcup 0_n \supset A\}.$$

La fonction μ^* est une mesure extérieure sur Ω et la restriction μ de μ^* à la tribu des ensembles μ^*-mesurables est une mesure (voir [8]).

Les conditions (3) et (4) entraînent $\mu^*(0) = \tau(0)$ pour tout $0 \in \mathscr{E}$. En effet, posons
$0 = \bigcup_{j \geqslant i} \phi_j^{-1}\psi_j^{-1}0$, $(0_n) \subset \mathscr{E}$, $\bigcup 0_n \supset 0$, $0_n = \bigcup_{j \geqslant i_n} \phi_j^{-1}\psi_j^{-1}0_n$, $\varepsilon > 0$, $\tau(0) \leqq \mu_j(\psi_j^{-1}0)+\varepsilon$, $k \geqq j$, $V \in \mathscr{U}_k$, $(\phi_k^{-1}V)^\beta \subset 0$, $\mu_k(V) \geqq \mu_k(\phi_{jk}^{-1}\psi_j^{-1}0)-\varepsilon$, $\bigcup_1^N 0_n \supset (\phi_k^{-1}V)^\beta$ et $l \geqq k, i_1, \cdots, i_N$. On a $\sum_n \tau(0_n) \geqq \sum_1^N \mu_l(\psi_l^{-1}0_n) \geqq \mu_l(\phi_{kl}^{-1}V) \geqq \mu_j(\psi_j^{-1}0)-\varepsilon \geqq \tau(0)-2\varepsilon$, donc $\mu^*(0) \geqq \tau(0) \geqq \mu^*(0)$. En particulier, $\mu(\Omega) = 1$.

Chaque $0 \in \mathscr{E}$ est mesurable. Il suffit à prouver la relation $\mu^*(A) \geqq \mu^*(A \cap 0)+\mu^*(A-0)$, pour chaque $A \subset \Omega$. Soient $(0_n) \subset \mathscr{E}$, $\bigcup 0_n \supset A$, $0'_n = 0_n \cap 0$, $n \in N$, et $\varepsilon > 0$. Il existe un indice i tel que $\mu_i(\psi_i^{-1}0'_n) \geqq \tau(0'_n)-\varepsilon\ 2^{-n}$ et il existe un indice $j \geqq i$ et un ensemble ouvert $V \subset \phi_{ij}^{-1}\psi_i^{-1}0'_n$, tel que $(\phi_j^{-1}V)^\beta \subset 0'_n$ et $\mu_j V \geqq \mu_j(\phi_{ij}^{-1}\psi_i^{-1}0'_n)-\varepsilon\ 2^{-n}$. En outre, il existe $k \geqq j$ et $W \in \mathscr{U}_k$ tel que $\complement(\phi_j^{-1}V)^\beta \supset \phi_k^{-1}W \supset \complement 0'_n$. Posant $0''_n = \phi_k^{-1}W \cap 0_n$, on a $\tau(0''_n)+\tau(0'_n) \leqq \tau(0''_n)+\mu_i(\psi_i^{-1}0'_n)+\varepsilon\ 2^{-n} \leqq \tau(0''_n)+\tau(\phi_j^{-1}V)+\varepsilon\ 2^{1-n} \leqq \tau(0_n)+\varepsilon\ 2^{1-n}$, tandis que $\bigcup 0'_n \supset 0 \cap A$ et $\bigcup 0''_n \supset A-0$.

En vertu de la condition (2), chaque $0 \in \mathscr{U}$ est mesurable, Soit désormais μ la restriction de μ^* à la tribu borélienne de (Ω, β). Chaque ϕ_i est un morphisme dans $\overline{EP}$ et μ est une mesure régulière. Soient $(\Omega', \beta', \mu') \in \overline{EP}$ et f une application de Ω' dans Ω, telle que chaque $\phi_i f$ soit un morphisme. En particulier, f est continue. Pour chaque $0 \in \mathscr{U}$ on a $0 = \bigcup_{i \in J} \phi_i^{-1}0_i$, et $\mu(0) = \sup_i \mu(0_i)$, $0_i \in \mathscr{U}_i$ convenable, donc $\mu'(f^{-1}0) = \mu'(\bigcup_i (f^{-1}\phi_i^{-1}0_i)) \geqq \sup_i \mu_i(0_i)$ et (Ω, β, μ) est la limite projective de $(\Omega_i, \beta_i, \mu_i)$.

Dans [1] se trouvent des conditions suffisantes pour la relation (3). Si chaque ϕ_{ij} est une application, la relation (4) est vérifiée si chaque (Ω_i, β_i) est métrisable et si (1) et (3) sont vérifiées. En effet, chaque (Ω_i, β_i) est alors compact et l'assertion résulte de la proposition 1.

THÉORÈME 5. *Soient, dans les notations du théorème* 4, f *une fonction continue réelle dans* Ω *et* $f_i = f\psi_i$, *alors* $\int f_i\, d\mu_i$ *converge vers* $\int f\, d\mu$, *selon le filtre des sections de* I.

Soient $M = \max |f(x)|$, $\varepsilon > 0$ et $0_1, \cdots, 0_N \in \mathscr{E}$, tels que $\bigcup_1^N 0_s \supset \Omega$ et $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ pour $x, y \in 0_n$, $n \leqq N$. Supposons qu'il existe $0'_1, \cdots, 0'_n \in \mathscr{E}$ tels que $0'_s \subset 0_s$ pour $s \leqq n$, $\bigcup_1^n 0'_s = \bigcup_1^n 0_s$ et $\mu(0'_n \cap \bigcup_{s<n} 0'_s) \leqq \varepsilon/N$. Posant $0 = \bigcup_1^n 0'_s$, il existe deux indices i, j et $V \in \mathscr{U}_j$ tels que $\phi_i^{-1}\psi_i^{-1}0 \subset 0$, $\mu_i(\psi_i^{-1}0) \geqq \mu(0)-\varepsilon/2N$, $i \leqq j$, $V \subset \phi_{ij}^{-1}0$, $(\phi_j^{-1}V)^\beta \subset \phi_i^{-1}\psi_i^{-1}0$ et $\mu_j V \geqq \mu_j(\phi_{ij}^{-1}\psi_i^{-1}0)-\varepsilon/2N$. L'ensemble $\complement\phi_j^{-1}V$ étant compact, il existe $k \geqq j$ et $W \in \mathscr{U}_k$ tels que $\complement(\phi_j^{-1}V)^\beta \supset \phi_k^{-1}W \supset \complement 0$. Posant $0'_{n+1} = 0_{n+1} \cap \phi_k^{-1}W$, on a $0'_{n+1} \in \mathscr{E}$, $0'_{n+1} \subset 0_{n+1}$, $\bigcup_1^{n+1} 0'_s = \bigcup_1^{n+1} 0_s$ et $\mu(0 \cap 0'_{n+1}) \leqq \mu(0 \cap \phi_k^{-1}W) \leqq \varepsilon/N$. De telle sorte, on se ramène au cas où $\mu(0_n \cap \bigcup_{s<n} 0_s) < \varepsilon/N$ pour chaque $n \leqq N$.

Pour chaque i assez grand, on a $\phi_i^{-1}\psi_i^{-1}0_n \subset 0_n$ et $\mu_i(\psi_i^{-1}0_n) \geqq \mu(0_n)-\varepsilon/N$, donc $R = |\int f\,d\mu - \int f_i\,d\mu_i| \leqq \sum |\int_{0_n} f d\mu - \int_{\psi_i-0_n} f_i\,d\mu_i| + 2\in M$. On peut supposer $\mu(0_n) > 0$ et $\psi_i^{-1}0_n \neq \emptyset$. Choisissant $x_n \in \psi_i^{-1}0_n$, on a $R \leqq \sum |\int_{0_n} f(\psi_i x_n) d\mu - \int_{\psi_i^{-1}0_n} f_i(x_n) d\mu_i| + 0(\varepsilon) = 0(\varepsilon)$.

6. Exemples

1. Soient $I = \mathbb{N}$, Ω_i' l'ensemble des nombres $n2^{-i}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\phi_{ii}'x = x$, $\phi_{i,i+1}'x = k2^{-i}$ si $x = k2^{-i}$, $\phi_{i,i+1}'x = \{k2^{-i}, (k+1)2^{-i}\}$ si $x = (2k+1)2^{-i-1}$ et $\phi_{i,i+j}' = \phi_{i,i+1}'\phi_{i+1,i+j}'$ pour chaque $j \geqq 1$.

La famille (Ω_i', ϕ_{ij}') est un système projectif à valeurs dans $\overline{Ec}$, strictement monotone par rapport aux injections naturelles ψ_{ij}. $\Omega' = \varprojlim \Omega_i'$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\psi_i : \Omega_i' \to \Omega'$ coincide avec l'injection naturelle de Ω_i' dans $\mathbb{R}$ et $\phi_i'x = x$ si $x \in \Omega_i'$, $\phi_i'x = \{k2^{-i}, (k+1)2^{-i}\}$ si $x \in (k2^{-i}, (k+1)2^{-i})$. Chaque famille $(x_i) \in \psi^{-1}\,x$ est une suite de Cauchy, telle que $x_i \to x$ et $|x_i - x| < 2^{-i}$.

2. Soient, dans les notations de l'exemple précédent, $\Omega_i = \Omega_i' \cap [0, 1]$ et ϕ_{ij} la restriction de ϕ_{ij}' à Ω_j. La famille (Ω_i) est un système projectif de sous-espaces de (Ω_i', ϕ_{ij}') et $\varprojlim \Omega_i$ est isomorphe à $[0, 1]$.

3. Soit β_i' (β_i) la topologie discrète dans Ω_i' (Ω_i). La famille $(\Omega_i', \beta_i', \phi_{ij}')$ est un système projectif strictement monotone dans $\overline{ETM}$ et $\varprojlim (\Omega_i', \beta_i', \phi_{ij}')$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, muni de la topologie habituelle. La famille (Ω_i, β_i) est un système projectif de sous-espaces et $\varprojlim (\Omega_i, \beta_i)$ est isomorphe à $[0, 1]$ dans $\overline{ETM}$.

$\mathbb{R}$ étant connexe, un tel résultat est impossible, si les ϕ_{ij}' sont des applications. On obtient les mêmes limites projectives, si l'on munit les Ω_i' de la topologie v_D déterminée par $\{k2^{-i}\}^{\alpha'_i} = \{(k-1)2^{-i}, k2^{-i}, (k+1)2^{-i}\}$, $A^{\alpha'_i} = \bigcup_{x \in A} x^{\alpha'_i}$. et les Ω_i de la topologie v_D $A \mapsto A^{\alpha_i} = A^{\alpha'_i} \cap \Omega_i$.

4. Munissons chaque (Ω_i, β_i) de la tribu borélienne $\mathscr{B}_i$. La famille $(\Omega_i, \mathscr{B}_i, \phi_{ij})$ est un système projectif dans $\overline{EM}$ et $\mathscr{B} = \varprojlim \mathscr{B}_i$ est la tribu borélienne de $[0, 1]$ (théorème 4.7).

5. Soit maintenant μ_i la loi de probabilité sur Ω_i déterminée par $\mu_i(k2^{-i}) = 2^{-i}$ si $0 < k < 2^i$ et $\mu_i(0) = \mu_i(1) = 2^{-i-1}$. La famille $(\Omega_i, \beta_i, \mu_i, \phi_{ij})$ est un système projectif dans $\overline{EP}$ et vérifie les conditions du théorème 5.4, donc $\mu = \varprojlim \mu_i$ existe. Parce que $\tau(\phi_i^{-1}0)$, $0 \in \mathscr{U}_i$, est la longueur de $\phi_i^{-1}0$, μ coïncide sur $\mathscr{B}$ avec la mesure de Lebesgue. La convergence de la formule du trapèze répétée résulte du théorème 5.5.

Il faut remarquer que la définition 5.2 est encore trop restreinte pour aborder le cas de la quadrature de Gauss.

6. Soit C_i l'ensemble des fonctions continues réelles sur (Ω_i, β_i). On peut identifier C_i à un espace de fonctions linéaires par morceaux sur $\Omega = [0, 1]$. Pour chaque $j \geqq i$, il existe une injection canonique η_{ij} de C_i dans C_j. L'espace C des fonctions continues réelles sur Ω est la limite inductive du système inductif (C_ι, η_{ij}), dans la catégorie des espaces de Banach avec les contractions linéaires comme morphismes.

7. Soit (d_i) une suite de nombres, telle que $d_i \downarrow 0$ et soit $(B_i, \beta_i) = (B, \beta)$ un espace de Banach. Soit, pour chaque $x \in B_j$ et $i \leqq j$, $\phi_{ij}x$ l'ensemble des points $y \in B_i$ tels que $||y-x|| \leqq d_i - d_j$. La famille $(B_i, \beta_i, \phi_{ij})$ est un système projectif conservatif dans $\overline{ETM}$, $\varprojlim (B_i, \beta_i, \phi_{ij})$ est isomorphe à (B, β) et, pour tout $x \in B$, $\phi_i x$ est l'ensemble des points $y \in B$, tels que $||x-y|| < d_i$ si $d_j > 0$ pour chaque $j \geqq i$, sinon, l'ensemble des $y \in B$ tels que $||x-y|| \leqq d_i$.

Pour une application moins triviale, dans le domaine de l'approximation des fonctions harmoniques, voir [1].

BIBLIOGRAPHIE

E. M. J. Bertin
[1] L'approximation des espaces harmoniques. Thèse, Utrecht 1969.

N. Bourbaki
[2] Eléments de mathématique. Hermann, Paris.

J. R. Chokski
[3] Inverse limits of measure spaces. Proc. London Math. Soc., III Ser 8, 321–342 (1958).

P. Freyd
[4] Abelian categories. Harper Row, New-York 1964.

A. Grothendieck
[5] Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. **9**, 119–221 (1957).

M. Q. Jacobs
[6] On the approximation of integrals of multivalued functions. SIAM J. Control **7**, 158–176 (1969).

P. A. Meyer
[7] Probabilités et potentiel. Hermann, Paris 1966.

M. E. Munroe
[8] Introduction to measure and integration. Addison-Wesley, Reading 1959.

C. L. Scheffer
[9] Limits of directed projective systems of probability spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **13**, 60–80 (1969).

(Oblatum 22–VI–70)

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit Utrecht
Universiteitscentrum DE UITHOF,
Budapestlaan,
UTRECHT, The Netherlands