F. COMBES

Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche

Compositio Mathematica, tome 23, nº 1 (1971), p. 49-77

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_1_49_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 23, Fasc. 1, 1971, pag. 49–77
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

POIDS ASSOCIE A UNE ALGEBRE HILBERTIENNE A GAUCHE

par

F. Combes

1. Introduction et notations

Si φ est une trace normale, semi-finie, fidèle sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{Q}$, l'ensemble des $x \in \mathscr{Q}$ tels que $\varphi(x^*x) < +\infty$ est un idéal bilatère $\mathfrak{N}_\varphi$ de $\mathscr{Q}$ et $\mathfrak{N}_\varphi$ muni du produit scalaire $(x|y) = \varphi(y^*x)$ est une algèbre hilbertienne achevée. Réciproquement si $\mathfrak{A}$ est une algèbre hilbertienne achevée tout opérateur de multiplication à gauche: $\alpha \mapsto \xi\alpha$ par un élément ξ de $\mathfrak{A}$, est prolongeable en un opérateur continu $\pi(\xi)$ sur le complété H de $\mathfrak{A}$ et les opérateurs $\pi(\xi)$ engendrent une algèbre de von Neumann M sur H; l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{A}$ définit canoniquement une trace normale, semi-finie, fidèle sur M ([5], ch. I, § 6).

J. Dixmier a le premier généralisé la notion d'algèbre hilbertienne en introduisant les algèbres quasi-unitaires [7]. Récemment M. Tomita et M. Takesaki ont introduit et étudié une notion d'algèbre hilbertienne à gauche ([15], [13]). Dans cet article, nous établissons une dualité entre ces algèbres hilbertiennes à gauche et certains poids sur les algèbres de von Neumann, généralisant la situation que nous venons de rappeler. Les principaux résultats de cet article ont été annoncés dans [3].

Cette dualité est explicitée au paragraphe 2. Nous étudions, en application de ces résultats, l'ensemble des formes linéaires positives normales sur une algèbre de von Neumann qui sont majorées par un poids fidèle, semi-fini et ultrafaiblement semi-continu inférieurement.

Au paragraphe 3, nous caractérisons les algèbres hilbertiennes à gauche $\mathfrak{A}$ telles que l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ correspondante soit G-finie pour le groupe G des automorphismes modulaires définis par $\mathfrak{A}$. Ce sont les algèbres hilbertiennes à gauche qui définissent sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ un poids somme de formes linéaires positives normales à supports deux à deux orthogonaux. Nous explicitons quelque peu la structure de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{A}'$ en utilisant ces formes linéaires.

Au paragraphe 4, nous montrons que certains résultats concernant les états K.M.S. sur une algèbre de von Neumann peuvent être étendus à. des poids K.M.S. convenablement définis.

Nous reprenons les définitions et les notations introduites par M. Takesaki dans [13]. Une algèbre hilbertienne généralisée à gauche (nous dirons simplement 'algèbre hilbertienne à gauche') est une algèbre involutive $\mathfrak{A}$ sur le corps $\boldsymbol{C}$ munie d'un produit scalaire vérifiant les axiomes suivants (nous notons $\xi \mapsto \xi^{\#}$ l'involution de $\mathfrak{A}$)

(I) pour tous $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{A}$ on a $(\xi\eta|\zeta) = (\eta|\xi^{\#}\zeta)$;

(II) pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$, l'application $\eta \mapsto \xi\eta$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ est continue;

(III) la sous-algèbre $\mathfrak{A}^2$ de $\mathfrak{A}$ est dense dans $\mathfrak{A}$;

(IV) il existe un opérateur fermé S de l'espace hilbertien H complété de $\mathfrak{A}$ dans l'espace hilbertien conjugué $\overline{H}$, qui prolonge l'application $\xi \mapsto \xi^{\#}$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$.

Une algèbre involutive sur $\boldsymbol{C}$ munie d'un produit scalaire est dite hilbertienne à droite si l'algèbre opposée est hilbertienne à gauche. Nous noterons $\mathfrak{A}'$ l'algèbre hilbertienne à droite achevée associée à une algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$, $\eta \mapsto \eta^{\flat}$ l'involution de $\mathfrak{A}'$ (sa fermeture F est l'adjoint de S), $\mathscr{D}^{\#}$ et $\mathscr{D}^{\flat}$ les domaines respectifs de S et de F, Δ l'opérateur modulaire $FS = S^*S$, $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ la décomposition polaire de S. Rappelons que J est une application linéaire isométrique de H sur $\overline{H}$. Nous noterons $\xi \mapsto \pi(\xi)$ la représentation canonique de $\mathfrak{A}$ sur H définie grâce aux axiomes (II) et (I) précédents et $\eta \mapsto \pi'(\eta)$ la représentation de l'algèbre opposée de $\mathfrak{A}'$ sur H définie de façon analogue. Nous noterons $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ ou M et $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}')$ ou M' les algèbres de von Neumann (commutant l'une à l'autre) engendrées respectivement par $\pi(\mathfrak{A})$ et $\pi'(\mathfrak{A}')$. Nous noterons $\mathfrak{A}''$ l'algèbre hilbertienne à gauche achevée associée à $\mathfrak{A}$ (voir [13], § 5). Nous utiliserons aussi au paragraphe 4, l'ensemble $\mathscr{P}^{\#}$ (resp. $\mathscr{P}^{\flat}$) des $\alpha \in \mathscr{D}^{\#}$ (resp. $\mathscr{D}^{\flat}$) tels que l'opérateur $\eta \mapsto \pi'(\eta)\alpha$ défini sur $\mathfrak{A}'$ soit symétrique positif et nous nous appuirons sur l'étude faite dans [12] de ces ensembles.

Comme dans (1), nous appellerons poids sur une C^*-algèbre A, une fonction φ définie sur A^+, à valeurs dans $[0, +\infty]$ vérifiant les conditions suivantes: a- pour $x, y \in A^+$ on a $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$; b) pour $x \in A^+$ et $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ on a $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ (on convient que $0. +\infty = 0$). L'ensemble F des $x \in A^+$ tels que $\varphi(x) < +\infty$ est une face du cône A^+ (c'est-à-dire un sous-cône convexe héréditaire de A^+). Le sous-espace vectoriel lin F linéairement engendré par F est une sous-algèbre involutive $\mathfrak{M}_\varphi$ de A. L'ensemble des $x \in A$ tels que $x^*x \in F$ (resp. tels que $\varphi(x^*x) = 0$) est un idéal à gauche $\mathfrak{N}_\varphi$ (resp. N_φ) de A et on a $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^*\mathfrak{N}_\varphi$. Le poids φ se prolonge en une forme linéaire positive unique sur $\mathfrak{M}_\varphi$, que nous notons encore φ. On note Λ_φ l'application canonique $A \to A/N_\varphi$, H_φ l'espace hilbertien complété de A/N_φ pour le produit scalaire $(\Lambda_\varphi x|\Lambda_\varphi y) = \varphi(y^*x)$, π_φ la représentation de A sur H_φ obtenue par le procédé habituel.

Soient $\mathscr{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids sur $\mathscr{Q}^+$. Nous dirons que φ est normal si pour toute famille filtrante croissante (x_i) d'éléments de $\mathscr{Q}^+$ admettant une borne supérieure x, on a $\varphi(x) = \sup \varphi(x_i)$. Si φ est normal, l'ensemble des projecteurs $p \in \mathscr{Q}$ tels que $\varphi(p) = 0$ possède un plus grand élément p_0. Le projecteur $I - p_0$ sera appelé le support de φ. Si $N_\varphi = (0)$, on dira que φ est fidèle. Si $\mathfrak{M}_\varphi$ est faiblement dense dans $\mathscr{Q}$, on dira que φ est semi-fini (on voit facilement que pour une trace normale cette condition est équivalente à la définition usuelle des traces normales semi-finies).

Je tiens à remercier J. Dixmier et F. Perdrizet, avec lesquels j'ai eu d'instructives discussions sur ces questions.

2. Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche

2.1. Définition. Reprenons une notion introduite par J. Dixmier dans [7]. Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche, H l'espace hilbertien complété. Nous dirons qu'un vecteur α de H est borné à gauche si l'application $\eta \mapsto \pi'(\eta)\alpha$ définie sur $\mathfrak{A}'$ est un opérateur linéaire borné. Le prolongement continu de cet opérateur à tout H sera noté $\pi(\alpha)$. Nous noterons H_g l'ensemble de ces vecteurs. On définit de façon analogue les éléments bornés à droite et leur ensemble H_d. Tout élément α de $\mathfrak{A}$ est évidemment borné à gauche et $\pi(\alpha)$ est alors l'opérateur déjà introduit.

Les lemmes suivants sont connus et empruntés à [7] et à [13].

2.2. Lemme. *Si $\alpha, \beta \in H_g$ sont tels que $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, on a $\alpha = \beta$.*

Comme π' est une représentation non dégénérée, la condition $\pi'(\eta)(\alpha-\beta) = 0$ pour tout $\eta \in \mathfrak{A}'$ entraine $\alpha = \beta$.

2.3. Lemme ([7], lemme 1). *Si $\alpha \in H_g$,* pour tout $t \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A}) = M$, *on a $t\alpha \in H_g$ et $\pi(t\alpha) = t\pi(\alpha)$. Les opérateurs $\pi(\alpha)$ où α décrit H_g forment un idéal à gauche $\mathfrak{N}$ de M. De même, les opérateurs $\pi'(\alpha)$ où α décrit H_d forment un idéal à gauche de $M' = \mathfrak{L}(\mathfrak{A}')$.*

2.4. Lemme ([7], lemme 3). *Soient $\alpha, \beta \in H_g$. Si on a $\pi(\alpha)^* = \pi(\beta)$, alors α et β appartiennent à l'algèbre hilbertienne à gauche achevée $\mathfrak{A}''$ associée à $\mathfrak{A}$ et on a $\alpha^\sharp = \beta$. En particulier, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^* = \pi(\mathfrak{A}'')$.*

Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{A}'$. On a

$$\begin{aligned}(\alpha|\eta_2\eta_1^\flat) &= (\alpha|\pi'(\eta_1^\flat)\eta_2) = (\pi'(\eta_1)\alpha|\eta_2) = (\pi(\alpha)\eta_1|\eta_2) \\ &= (\eta_1|\pi(\beta)\eta_2) = (\eta_1|\pi'(\eta_2)\beta) = (\pi'(\eta_2^\flat)\eta_1|\beta) = (\eta_1\eta_2^\flat|\beta)\end{aligned}$$

D'après ([13], lemme 4.1), on a $\alpha \in \mathscr{D}^\sharp$ et $\beta = \alpha^\sharp$. Comme α et β sont bornés à gauche, ils appartiennent à $\mathfrak{A}''$. Réciproquement, si $\alpha \in \mathfrak{A}''$, on a $\alpha^\sharp \in \mathfrak{A}''$ et $\pi(\alpha^\sharp) = \pi(\alpha)^*$, ce qui montre que $\pi(\mathfrak{A}'') = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*$.

2.5. LEMME. *Si $\alpha \in H_g$, pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ on a $\Delta^{it}\alpha \in H_g$ et $\pi(\Delta^{it}\alpha) = \Delta^{it}\pi(\alpha)\Delta^{-it}$.*

Soit $\pi(\alpha) = v|\pi(\alpha)|$ la décomposition polaire de l'opérateur $\pi(\alpha)$. D'après le lemme 2.3, $v^*\alpha$ est borné à gauche et on a

$$|\pi(\alpha)| = v^*\pi(\alpha) = \pi(v^*\alpha).$$

Comme $|\pi(\alpha)|$ est positif, le lemme 2.4 montre que $\xi = v^*\alpha \in \mathfrak{A}''$. D'après ([13], cor. 9.1), on a $\pi(\Delta^{it}\xi) = \Delta^{it}\pi(\xi)\Delta^{-it}$. Comme la relation $\pi(\alpha) = v\pi(\xi) = \pi(v\xi)$ et le lemme 2.2 entrainent $\alpha = v\xi$, on a

$$\pi(\Delta^{it}\alpha) = \pi(\Delta^{it}v\Delta^{-it}\Delta^{it}\xi) = \Delta^{it}v\Delta^{-it}\pi(\Delta^{it}\xi) = \Delta^{it}v\Delta^{-it}\Delta^{it}\pi(\xi)\Delta^{-it} = \Delta^{it}\pi(\alpha)\Delta^{-it}$$

2.6. LEMME. *Soient H un espace hilbertien, h un opérateur densément défini auto-adjoint sur H.*

(i) *Soit s un nombre réel > 0. Pour tout $\xi \in \mathscr{D}(\exp(sh))$, la fonction $z \mapsto \exp(zh)\xi$ est définie continue uniformément bornée pour $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq s$, analytique à l'intérieur de cette bande.*

(ii) *Si $\xi \in \bigcap_{n\in\boldsymbol{Z}} \mathscr{D}(\exp nh) = \bigcap_{t\in\boldsymbol{R}} \mathscr{D}(\exp th)$, la fonction $z \mapsto \exp(zh)\xi$ est définie et analytique sur $\boldsymbol{C}$.*

(i) Soit $h = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$ la résolution spectrale de h. Soit η un vecteur de la forme $f(h)\alpha$ où $\alpha \in H$ et où f est une fonction borélienne bornée dont le support est contenu dans un intervalle $[-m, m]$. La fonction $z \mapsto \exp(zh)\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda z)f(\lambda)d(E_\lambda\alpha)$ est alors analytique sur tout $\boldsymbol{C}$ et elle est bornée uniformément sur la bande fermée B considérée, car on a

$$\begin{aligned}\|\exp(zh)\eta\|^2 = (\exp(2\operatorname{Re} zh)\eta|\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp((2\operatorname{Re} z)\lambda)|f(\lambda)|^2 d(E_\lambda\alpha|\alpha) \\ &\leqq \exp(2sm)\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda\alpha|\alpha).\end{aligned}$$

Soit (η_n) une suite de vecteurs du type précédent convergeant vers ξ pour la norme de l'espace hilbertien $\mathscr{D}(\exp(sh))$. On a alors pour $z \in B$,

$$\|[1+\exp(sh)](\xi-\eta_n)\| \to 0 \quad \text{et} \quad \|\exp(zh)[1+\exp(sh)]^{-1}\| \leqq 1, \quad \text{donc}$$

$$\|\exp(zh)(\xi-\eta_n)\| = \|\exp(zh)[1+\exp(sh)]^{-1}[1+\exp(sh)](\xi-\eta_n)\|$$

converge uniformément vers zéro sur B, ce qui établit (i).

(ii) Supposons que $\xi \in \bigcap_{n\in\boldsymbol{Z}} \mathscr{D}(\exp(nh))$. Pour établir (ii), il suffit de montrer que $z \mapsto \exp(zh)\xi$ est holomorphe pour $p < \operatorname{Re} z < q$, où $p, q \in \boldsymbol{Z}$ sont fixés. Il est clair que $\xi' = \exp(ph)\xi$ appartient à $\bigcap_{n\in\boldsymbol{Z}} \mathscr{D}(\exp(nh))$ et que $\exp(zh)\xi = \exp[(z-p)h]\xi'$. En posant $z' = z-p$ et $s = q-p$, nous sommes ramenés à démontrer que $z' \mapsto \exp(z'h)\xi'$ est holomorphe pour $0 < \operatorname{Re} z' < s$ et cela résulte de (i).

2.7. Lemme ([7], prop. 6). *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche, H l'espace hilbertien complété de $\mathfrak{A}$, Δ l'opérateur modulaire. L'ensemble $\mathfrak{B}$ des vecteurs $\alpha \in H$ tels que tous les $\Delta^n\alpha$ existent et sont bornés à gauche pour $n \in \mathbf{Z}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}''$, modulaire pour les automorphismes Δ^z et équivalente à $\mathfrak{A}$. Toute autre algèbre modulaire possédant ces propriétés est continue dans $\mathfrak{B}$.*

Soit $\mathfrak{B}_0$ l'algèbre modulaire équivalente à $\mathfrak{A}$ construite dans ([13], § 10). Comme toute algèbre modulaire, elle est quasi-unitaire au sens de [7]. D'après ([7], prop. 6), $\mathfrak{B}$ est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}''$ et c'est une algèbre quasi-unitaire, donc une algèbre hilbertienne à gauche. Comme on a $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}$ est équivalente à $\mathfrak{A}$. Il est clair que toute sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}''$ modulaire pour les automorphismes Δ^z est contenue dans $\mathfrak{B}$. D'après le lemme 2.6, pour $\xi, \eta \in \mathfrak{B}$, la fonction $z \mapsto (\Delta^z\xi|\eta)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Les autres axiomes des algèbres modulaires se vérifient facilement.

2.8. Définition. Nous appellerons $\mathfrak{B}$ l'algèbre modulaire maximale associée à $\mathfrak{A}$. Il est clair qu'il existe une bijection entre algèbres hilbertiennes à gauche achevées et algèbres modulaires maximales.

2.9. Lemme. *Soient M une algèbre de von Neumann, $r, s \in M^+$, $t = r+s$. Il existe alors deux éléments $a, b \in M$ possédant les propriétés suivantes: $r^{\frac{1}{2}} = at^{\frac{1}{2}}$, $s^{\frac{1}{2}} = bt^{\frac{1}{2}}$, $c = a^*a+b^*b$ est le projecteur support de t.*
(voir [5], ch. I, § 6, dém. th. 1).

2.10. Lemme. *Soient A une C^*-algèbre, F une face de A^+, $\mathfrak{M} = \operatorname{lin} F$ la sous-algèbre faciale de A linéairement engendrée par F, $\mathfrak{N}$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $x^*x \in F$. Alors on a $\mathfrak{M} = (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*)^2$.*

On a toujours $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$, d'où $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*)^2 \subset \mathfrak{M}$ ([2], prop. 1.3). Réciproquement, pour $x \in \mathfrak{M}^+ = F$, on a $x^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}^+$, d'où $x \in (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*)^2$. On a donc $\mathfrak{M} = \operatorname{lin} F \subset (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*)^2$.

2.11. Théorème. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche, H l'espace hilbertien complété de $\mathfrak{A}$, M l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Pour $x \in \mathfrak{M}^+$, posons $\varphi(x) = (\alpha|\alpha)$ si il existe $\alpha \in H_g$ tel que $x^{\frac{1}{2}} = \pi(\alpha)$, $\varphi(x) = +\infty$ dans le cas contraire.*

Alors φ est un poids fidèle, semi-fini, ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur M^+. L'idéal à gauche $\mathfrak{N}_\varphi$ est identique à l'idéal à gauche $\mathfrak{N}$ des opérateurs $\pi(\alpha)$ où α décrit H_g et pour $\alpha, \beta \in H_g$ on a $\varphi(\pi(\beta)^*\pi(\alpha)) = (\alpha|\beta)$. La sous-algèbre involutive $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ de M est identique à $\pi(\mathfrak{A}'')$. La sous-algèbre involutive $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi^*\mathfrak{N}_\varphi$ de M est identique à $\pi((\mathfrak{A}'')^2)$. Le poids φ est invariant par le groupe des automorphismes modulaires de M.

La démonstration qui suit est pratiquement la même que dans le cas des algèbres hilbertiennes et des traces ([5], ch. I, § 6, th. 1).

Si $x \in M^+$ est de la forme $\pi(\alpha)$, avec $\alpha \in H_g$, on a $x \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^* = \pi(\mathfrak{A}'')$ d'après le lemme 2.4. D'autre part, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{N}$ de M, les conditions $y \in \mathfrak{N}$ et $|y| \in \mathfrak{N}$ sont équivalentes (grâce à la décomposition polaire de y). On a donc pour $y \in M$

$$(1) \qquad \varphi(y^*y) < +\infty \Leftrightarrow |y| \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow y \in \mathfrak{N}.$$

Soient $\alpha \in H_g$, $x = \pi(\alpha) \in \mathfrak{N}$, $x = v|x|$ la décomposition polaire de x, $\xi \in \mathfrak{A}''$ tel que $|x| = \pi(\xi)$. D'après les lemmes 2.3 et 2.2 on a $\alpha = v\xi$. Comme ξ appartient à l'adhérence de l'image de $|x| = \pi(\xi)$, on a

$$(2) \quad ||\alpha||^2 = ||v\xi||^2 = ||\xi||^2 = \varphi(|x|^2) = \varphi(x^*x) = \varphi(\pi(\alpha)^*\pi(\alpha)).$$

On a $\varphi(M^+) \subset [0, +\infty]$ et $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ pour $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ et $x \in M^+$. Montrons que φ est additive. Soient $r, s \in M^+$, $t = r+s$ et soient $a, b, c \in M$ possédant les propriétés du lemme 2.9. Supposons d'abord que $\varphi(t) < +\infty$. Il existe alors $\alpha \in H_g$ tel que $\pi(\alpha) = t^{\frac{1}{2}}$ et on a, puisque $\alpha \in \overline{\operatorname{Im} \pi(\alpha)}$,

$$r^{\frac{1}{2}} = at^{\frac{1}{2}} = a\pi(\alpha) = \pi(a\alpha) \quad \text{et} \quad s^{\frac{1}{2}} = \pi(b\alpha),$$

d'où

$$\varphi(r)+\varphi(s) = (a\alpha|a\alpha)+(b\alpha|b\alpha) = (c\alpha|\alpha) = (\alpha|\alpha) = \varphi(t).$$

Si au contraire $\varphi(t) = +\infty$, on a $\varphi(r) = +\infty$ ou $\varphi(s) = +\infty$, sinon il existerait $\beta, \gamma \in H_g$ tels que $r^{\frac{1}{2}} = \pi(\beta)$, $s^{\frac{1}{2}} = \pi(\gamma)$ et on aurait

$$t^{\frac{1}{2}} = ct^{\frac{1}{2}} = a^*at^{\frac{1}{2}}+b^*bt^{\frac{1}{2}} = a^*r^{\frac{1}{2}}+b^*s^{\frac{1}{2}} = \pi(a^*\beta+b^*\gamma),$$

d'où $\varphi(t) < +\infty$. Ainsi, φ est un poids et d'après (1), on a $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}$, d'où $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^* = \pi(\mathfrak{A}'')$. D'après le lemme 2.10, on a $\mathfrak{M}_\varphi = (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)^2 = \pi((\mathfrak{A}'')^2)$. Par polarisation, la relation (2) donne $\varphi(\pi(\beta)^*\pi(\alpha)) = (\alpha|\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in H_g$.

Montrons que φ est ultrafaiblement semi-continu-inférieurement sur M^+. Soit $\lambda \in [0, +\infty]$ et montrons que l'ensemble X_λ des $x \in M^+$ tels que $\varphi(x) \leqq \lambda$ est ultrafaiblement fermé. Pour $\lambda = +\infty$, $X_\lambda = M^+$ est ultrafaiblement fermé, aussi supposerons nous $\lambda < +\infty$. Comme X_λ est convexe, il suffit de vérifier que son intersection avec toute boule fermée centrée à l'origine est fortement fermée. Soit ρ le rayon d'une telle boule. Supposons que $x_i \in X_\lambda$ converge fortement vers $x \in M^+$ avec $||x_i|| \leqq \rho$. Alors d'après ([9], corollaire) $x_i^{\frac{1}{2}}$ converge fortement vers $x^{\frac{1}{2}}$ Pour tout i, il existe $\xi_i \in \mathfrak{A}''$ tel que $x_i^{\frac{1}{2}} = \pi(\xi_i)$ et on a $||\xi_i||^2 = \varphi(x_i) \leqq \lambda$. Soient $\eta, \gamma \in \mathfrak{A}'$. On a alors

$$(\xi_i|\eta\gamma^b) = (\pi'(\gamma)\xi_i|\eta) = (\pi(\xi_i)\gamma|\eta) \mapsto (x^{\frac{1}{2}}\gamma|\eta).$$

Comme $(\mathfrak{A}')^2$ est partout dense dans H et comme $||\xi_i||$ reste borné, les vecteurs ξ_i convergent faiblement vers un vecteur $\alpha \in H$ vérifiant $||\alpha|| \leqq \lambda$. Pour $\eta, \gamma \in \mathfrak{A}'$ on a

$$|(\pi'(\gamma)\alpha|\eta)| = |(\alpha|\eta\gamma^\flat)| = \lim |(\pi(\xi_i)\gamma|\eta)| = |(x^{\frac{1}{2}}\gamma|\eta)| \leqq ||x^{\frac{1}{2}}||\, ||\gamma||\, ||\eta||.$$

On en déduit $||\pi'(\gamma)\alpha|| \leqq ||x^{\frac{1}{2}}||\, ||\gamma||$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{A}'$. Ainsi α est borné à gauche (et $\pi(\alpha) = x^{\frac{1}{2}}$). On a donc $\varphi(x) = ||\alpha||^2 \leqq \lambda$ et X_λ est fortement fermé.

Le poids φ est évidemment fidèle. Il est semi-fini car $\mathfrak{M}_\varphi = \pi(\mathfrak{A}'')^2$ est faiblement dense dans $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Montrons qu'il est invariant par le groupe $(\sigma_t)_{t\in \boldsymbol{R}}$ des automorphismes modulaires de M. Soit $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et soit $\xi \in \mathfrak{A}''$ tel que $x^{\frac{1}{2}} = \pi(\xi)$. On a alors pour tout $t \in \boldsymbol{R}$

$$\sigma_t(x)^{\frac{1}{2}} = \sigma_t(x^{\frac{1}{2}}) = \Delta^{it}x^{\frac{1}{2}}\Delta^{-it} = \pi(\Delta^{it}\xi).$$

Comme $\Delta^{it}\xi \in \mathfrak{A}''$, on a $\sigma_t(x) \in \mathfrak{M}_\varphi$ et

$$\varphi[\sigma_t(x)] = (\Delta^{it}\xi|\Delta^{it}\xi) = (\xi|\xi) = \varphi(x).$$

Supposons maintenant que $x \in M^+$ soit tel que $\varphi(x) = +\infty$. Alors $\varphi(\sigma_t(x)) = +\infty$, sinon d'après ce qui précède, on aurait $\varphi(x) = \varphi[\sigma_{-t}(\sigma_t(x))] < +\infty$.

2.12. Définition. Le poids φ que nous venons d'étudier sera appelé le poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$. Nous allons étudier maintenant la réciproque du théorème 2.11.

2.13. Théorème. *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids fidèle, semi-fini et ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $\mathcal{Q}^+$. Alors $\mathfrak{A} = \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$ muni du produit scalaire $(\Lambda_\varphi x, \Lambda_\varphi y) \mapsto \varphi(y^*x)$, du produit et de l'involution images de ceux de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ est une algèbre hilbertienne à gauche. Pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on a $\pi(\Lambda_\varphi x) = \pi_\varphi(x)$ de sorte que $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}) = \pi_\varphi(\mathcal{Q})$. Si φ est l'enveloppe supérieure sur tout $\mathcal{Q}^+$ de l'ensemble Γ des formes linéaires positives normales qu'il majore, $\mathfrak{A}$ est achevée et le poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ est égal au transporté de φ par l'isomorphisme π_φ.*

Si (u_i) désigne une unité approchée filtrante croissante de $\mathfrak{N}_\varphi$, u_i converge fortement vers I sur H_φ et on a alors pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi$

$$(1) \qquad ||\Lambda_\varphi x - \Lambda_\varphi u_i x||^2 = \varphi[(x-u_ix)^*(x-u_ix)] \leqq 2[\varphi(x^*x) - \varphi(x^*u_ix)] \to 0.$$

Comme on a $u_ix \in \mathfrak{N}_\varphi^*\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{M}_\varphi \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on voit que $\mathfrak{A} = \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$ est partout dense dans H_φ. D'après le lemme 2.1 de (I) et sa démonstration, $\mathfrak{A}$ vérifie les axiomes I, II, III des algèbres hilbertiennes à gauche. Montrons maintenant que l'involution de $\mathfrak{A}$ admet un adjoint densément défini.

Soit A l'adhérence normique de $\mathfrak{M}_\varphi$ dans $\mathscr{Q}$ et $\psi = \varphi|A^+$. Il est clair que l'on a $\mathfrak{M}_\psi = \mathfrak{M}_\varphi$, $\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^* = (\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*) \cap A$ et que H_ψ s'identifie à l'adhérence de $\Lambda_\varphi \mathfrak{N}_\psi$ dans H_φ. En fait, dans la relation (1) ci-dessus, on a $u_i x \in \mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{M}_\psi \subset \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$. On en déduit que $H_\psi = H_\varphi$. D'après ((I), lemma 1.5), ψ est l'enveloppe supérieure sur $\mathfrak{M}_\psi^+$ de l'ensemble des formes linéaires positives définies sur A qu'il majore et d'après ((I), lemme 4.3), chacune de ces formes est la restriction à A d'un élément de Γ. De plus, $\pi_\varphi(\mathscr{Q})$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\varphi(A) = \pi_\psi(A)$. D'après ((I), lemmes 2.3), pour tout $f \in \Gamma$, il existe un opérateur positif $t_f \in \pi_\varphi(A)'$ unique tel que

$$f(x^*x) = (t_f \Lambda_\varphi x | \Lambda_\varphi x) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*.$$

En utilisant la relation (1), on voit facilement que cette égalité est encore valable pour $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. D'après ((I), lemme 2.6), I est faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs $(t_f)_{f \in \Gamma}$. Comme Γ est convexe, on voit facilement que l'ensemble des opérateurs t_f est convexe. Donc I est fortement adhérent à cette famille. D'après un théorème de Kaplansky (voir (9)), I est fortement adhérent à la famille $(t_f^{\frac{1}{2}})_{f \in \Gamma}$. D'après ((I), prop. 2.4), pour tout $f \in \Gamma$, il existe un vecteur $\alpha_f \in H_\varphi$ unique tel que l'on ait $\pi_\varphi(x)\alpha_f = t_f^{\frac{1}{2}} \Lambda_\varphi x$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$, et par suite pour $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ (d'après la relation (1)). D'après ((I), lemme 4.8), π_φ est fidèle et d'après ((I), cor. 2.10), les vecteurs $(\alpha_f)_{f \in \Gamma}$ sont séparateurs pour $\pi_\varphi(A)''$, donc totalisateurs pour $\pi_\varphi(A)'$. Les éléments de la forme $\sum_{i=1}^n t_{f_i}^{\frac{1}{2}} y_i \alpha_{g_i}$ (où $f_i, g_i \in \Gamma$ et $y_i \in \pi_\varphi(A)'$ pour $i = 1, \cdots, n$) sont partout denses dans H_φ. Nous allons vérifier qu'ils appartiennent au domaine $\mathscr{D}^\flat$ de l'adjoint $\flat$ de l'involution $\sharp$ de $\mathfrak{A}$. Pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, tout $y \in \pi_\varphi(A)'$, tous $f, g \in \Gamma$ on a

$$\begin{aligned}((\Lambda_\varphi x)^\sharp | t_f^{\frac{1}{2}} y \alpha_g) &= (t_f^{\frac{1}{2}} \Lambda_\varphi x^* | y\alpha_g) = (\pi_\varphi(x^*)\alpha_f | y\alpha_g) \\ &= (y^*\alpha_f | \pi_\varphi(x)\alpha_g) = (y^*\alpha_f | t_g^{\frac{1}{2}} \Lambda_\varphi x) = (t_g^{\frac{1}{2}} y^* \alpha_f | \Lambda_\varphi x).\end{aligned}$$

On a donc bien

$$t_f^{\frac{1}{2}} y \alpha_g \in \mathscr{D}^\flat \quad \text{et} \quad (t_f^{\frac{1}{2}} y \alpha_g)^\flat = t_g^{\frac{1}{2}} y^* \alpha_f.$$

Supposons maintenant que pour tout $x \in \mathscr{Q}^+$, on ait $\varphi(x) = \sup_{f \in \Gamma} f(x)$ et montrons que $\mathfrak{A}$ est alors achevée, et pout cela montrons que l'on a

$$\pi(\mathfrak{A}'') \subset \pi(\mathfrak{A}) = \pi_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*). \tag{2}$$

Notons d'abord que pour tout $f \in \Gamma$, α_f est un élément de $\mathfrak{A}'$. En effet, la relation $\pi(\Lambda_\varphi x)\alpha_f = t_f^{\frac{1}{2}} \Lambda_\varphi x$, valable pour $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ montre que α_f est borné à droite et que $\pi'(\alpha_f) = t_f^{\frac{1}{2}}$; comme $t_f^{\frac{1}{2}}$ est positif, le lemme 2.4 montre que $\alpha_f \in \mathfrak{A}'$. Considérons un vecteur $\xi \in H_\varphi$ borné à gauche et soit $x \in \mathscr{Q}$ tel que $\pi_\varphi(x) = \pi(\xi)$. On a alors

$$\varphi(x^*x) = \sup_{f\in\Gamma} f(x^*x) = \sup_{f\in\Gamma} \|\pi_\varphi(x)\alpha_f\|^2 = \sup_{f\in\Gamma} \|\pi(\xi)\alpha_f\|^2$$
$$= \sup_{f\in\Gamma} \|\pi'(\alpha_f)\xi\|^2 = \sup_{f\in\Gamma} \|t_f^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 = \|\xi\|^2 < +\infty.$$

On a donc $x \in \mathfrak{N}_\varphi$. Compte tenu du lemme 2.4, la relation (2) est alors évidente. En outre, on voit que le poids défini par $\mathfrak{A}$ est le transporté de φ à l'aide de l'isomorphisme π_φ.

2.14. PROPOSITION. *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, E son prédual, φ un poids sur $\mathcal{Q}^+$ fidèle, semi-fini et ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$. Posons $M = \pi_\varphi(\mathcal{Q})$ et notons $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne à gauche définie par φ, τ' le poids défini par $\mathfrak{A}'$ sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}') = M'$, C le sous-cone convexe de E^+ ensemble des formes linéaires positives normales sur $\mathcal{Q}$, majorées par un multiple de φ. Pour tout $f \in C$, soit t_f l'unique opérateur positif de M' tel que $f(y^*x) = (t_f \Lambda_\varphi x|\Lambda_\varphi y)$ pour $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$.*

(i) *C est l'ensemble des formes linéaires $\omega_\eta \circ \pi_\varphi$ où η décrit $\mathfrak{A}'$.*

(ii) *$f \mapsto t_f$ est une bijection linéaire de C sur le sous-cone convexe $\mathfrak{M}_\tau^+$, de $(M')^+$. Pour que f soit majorée par φ, il faut et il suffit que t_f soit majorée par I dans M'.*

(iii) *C est normiquement dense dans E^+ et pour tout $f \in C$ on a $\|f\| = \tau'(t_f)$.*

(i) Soit $f \in C$ et soit α_f l'unique vecteur de H_φ tel que $f = \omega_{\alpha_f} \circ \pi_\varphi$ et tel que $\pi_\varphi(x)\alpha_f = t_f^{\frac{1}{2}}\Lambda_\varphi x$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. On a déjà vu que $\alpha_f \in \mathfrak{A}'$ en démontrant le théorème 2.13. Réciproquement, soit $\alpha \in \mathfrak{A}'$ et posons $f = \omega_\alpha \circ \pi_\varphi$. Pour $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ on a alors $x^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, d'où

$$f(x) = \|\pi_\varphi(x^{\frac{1}{2}})\alpha\|^2 = \|\pi(\Lambda_\varphi x^{\frac{1}{2}})\alpha\|^2 = \|\pi'(\alpha)\Lambda_\varphi x^{\frac{1}{2}}\|^2$$
$$\leqq \|\pi'(\alpha)\|^2\|\Lambda_\varphi x^{\frac{1}{2}}\|^2 = \|\pi'(\alpha)\|^2\varphi(x).$$

on a donc $f \in C$.

(ii) Pour tout $f \in C$, on a $\alpha_f \in \mathfrak{A}'$ et $\pi'(\alpha_f) = t_f^{\frac{1}{2}}$. On a donc $t_f \in \mathfrak{M}_\tau$ et $\tau'(t_f) = (\alpha_f|\alpha_f') = \|f\|$, ce qui montre que l'application $f \mapsto t_f$ est injective. Il est clair que cette application est linéaire. Montrons qu'elle est surjective. Soit $t \in \mathfrak{M}_\tau^+$. Il existe alors $\alpha \in \mathfrak{A}'$ tel que $\pi'(\alpha) = t^{\frac{1}{2}}$. D'après (i), $f = \omega_\alpha \circ \pi_\varphi$ est un élément de C. On voit facilement que l'opérateur t_f correspondant est égal à t.

La deuxième assertion se vérifie tout aussi aisément.

(iii) Vérifions que le bipolaire de C dans E est égal à E^+. Soit $x \in \mathcal{Q}$ hermitien tel que l'on ait $f(x) \geqq 0$ pour tout $f \in C$. D'après (i) on a alors $(\pi_\varphi(x)\alpha|\alpha) \geqq 0$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}'$, donc $\pi_\varphi(x)$ (et par suite x) est positif, d'où l'assertion.

2.15. COROLLAIRE. *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids* *sur $\mathcal{Q}^+$ fidèle, semi-fini et ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$. Alors il existe une famille filtrante croissante de formes linéaires positives normales sur $\mathcal{Q}$ dont φ soit l'enveloppe supérieure sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$.*

Reprenons les notations de la proposition précédente. D'après ((4), lemme 3.1) l'ensemble J des opérateurs $t \in \mathfrak{M}_{\tau'}^+$ tels que $||t|| < 1$ est filtrant croissant et c'est une unité approchée de l'adhérence normique de $\mathfrak{M}_{\tau'}^+$. Donc ces opérateurs $(t_j)_{j\in J}$ convergent fortement vers I. Pour tout $j \in J$, soit $f_j \in C$ la forme correspondante. D'après ((I), lemme 2.6), on a $\varphi(x) = \sup_{j\in J} f_j(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. Il est clair que la famille $(f_j)_{j\in J}$ est filtrante croissante.

Le résultat suivant est du à (12) (prop. 6.2). En application de ce qui précède nous en donnons une nouvelle démonstration ne reposant pas sur le théorème B-T de von Neumann.

2.16. Corollaire. *Soit $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann sur un espace hilbertien H. On suppose qu'il existe une application linéaire isométrique J de H sur l'espace hilbertien conjugué de H, telle que $J\mathcal{Q}J = \mathcal{Q}'$ et telle que $JxJ = x^*$ pour tout $x \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$. Alors toute forme linéaire positive normale sur $\mathcal{Q}$ est de la forme ω_α avec $\alpha \in H$.*

D'après ((13), th. 12.2), $\mathcal{Q}$ est isomorphe à l'algèbre de von Neumann $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ définie par une algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$ et d'après ((5), ch. III, § I, th. 6) cet isomorphisme est spatial. Pour démontrer l'assertion, nous pouvons donc remplacer $\mathcal{Q}$ par M. Soit alors φ le poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$ sur M et soit C le sous-cône convexe du prédual E de M ensemble des formes linéaires positives normales majorées par un multiple de φ. D'après la proposition 2.14, tout élément de C est de la forme ω_α et C est normiquement dense dans E^+. L'assertion résulte alors de ((8), th. D).

2.17. Remarques. a) Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids sur $\mathcal{Q}^+$. Les deux problèmes suivants se posent naturellement.

Problème 1. Si φ est normal, φ est-il faiblement semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$ et par suite enveloppe supérieure sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$ de formes linéaires positives normales?

Problème 2 (voir (5), ch. 1, § 4, p. 53). Si φ est faiblement semi-continu unférieurement sur $\mathcal{Q}^+$, existe-t-il une famille $(f_i)_{i\in I}$ de formes linéaires positives normales telles que $\varphi = \sum_{i\in I} f_i$?

b) En utilisant ((11), th. 1.3 et 3.1) et ((1), prop. 1.9 et lemme 4.3), on voit facilement que le problème 2 précédent a une réponse positive lorsque φ est à valeurs finies sur la partie positive d'un idéal bitère de $\mathcal{Q}$ faiblement dense dans $\mathcal{Q}$.

c) D'après (11), th. 3.8), sur l'algèbre $\mathscr{L}(H)$ de tous les opérateurs sur un espace hilbertien H, tout poids du type que nous venons de décrire dans la remarque b) est de la forme $x \mapsto \operatorname{tr}(a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}})$ avec $a \in \mathscr{L}(H)^+$. Donnons un exemple d'un poids fidèle, semi-fini, faiblement semi-continu inférieurement qui ne soit pas de ce type-là.

Soit H un espace hilbertien de dimension infinie dénombrable et soit $e_1, e_2, \cdots$ une base orthonormale de H. Posons $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{4n}(xe_n|e_n)$. Comme $\mathfrak{M}_\varphi$ contient les projecteurs de rang un correspondant aux vecteurs $e_1, e_2, \cdots$, le poids φ est semi-fini. Il est évidemment fidèle et faiblement semi-continu inférieurement. Si φ était à valeurs finies sur un idéal bilatère non nul de $\mathscr{L}(H)$, pour tout opérateur de rang fini x sur H, $\varphi(x)$ serait fini. Or $\mathfrak{M}_\varphi$ ne contient pas le projecteur de rang un correspondant au vecteur $\alpha = \frac{1}{2}e_1 + (1/2^2)e_2 + \cdots$.

3. Algèbres hilbertiennes à gauche engendrant une algèbre de von Neumann G-finie pour le groupe G des automorphismes modulaires

Si M est une algèbre de von Neumann, et si G est un groupe d'automorphismes de M, on dit que M est G-finie (voir (10)), si pour tout $x \in M^+$ non nul, il existe une forme linéaire positive normale et G-invariante f telle que $f(x) > 0$. D'après ((10), théorème 2), M est G-finie si et seulement si il existe une projection normale fidèle G-invariante Φ de M sur la sous-algèbre de von Neumann P de M formée des $x \in M$ tels que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$.

Si M est l'algèbre $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ associée à une algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$, et si G est le groupe des automorphismes modulaires $\sigma_t : x \mapsto \Delta^{it}x\Delta^{-it}$, P est l'ensemble des éléments de M permutables à Δ. Reprenant les notations de (12), nous noterons H_0 l'ensemble des vecteurs ξ du complété H de $\mathfrak{A}$ tels que $\Delta\xi = \xi$ et nous poserons $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \cap H_0$. D'après ((12), prop. 4.3 et 4.4) $\mathfrak{A}_0$ est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}$. Sur $\mathfrak{A}_0$ les trois involutions S, F, J sont définies et coincident et $\mathfrak{A}_0$ est une algèbre hilbertienne pour ces involutions. Si $\mathfrak{A}$ est achevée, $\mathfrak{A}_0$ est achevée et partout dense dans H_0. Les opérateurs $\pi(\xi)$ où $\xi \in \mathfrak{A}_0''$ appartiennent à P; nous noterons M_0 l'algèbre involutive faiblement fermée qu'ils engendrent dans P. D'après ((12), prop. 4.6), la projection p de H sur H_0 applique $\mathfrak{A}''$ sur $\mathfrak{A}_0''$; il existe une projection positive normale Φ de M sur M_0 unique telle que $\Phi(\pi(\eta)) = \pi(p\eta)$ pour tout $\eta \in \mathfrak{A}$.

3.1. LEMME. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche, φ le poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$ sur $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, $t \mapsto \sigma_t$ le groupe des automorphismes modulaires de $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Pour un vecteur ξ du complété H de $\mathfrak{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\xi \in \mathfrak{A}_0''$.

(ii) $\xi \in \mathfrak{A}''$ *et* $\varphi[\pi(\xi)y] = \varphi[y\pi(\xi)]$ *pour tout* $y \in \pi(\mathfrak{A})$.

(iii) $\xi \in \mathfrak{A}''$ *et* $\sigma_t[\pi(\xi)] = \pi(\xi)$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) d'après ((12), prop. 4.3).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si $\xi \in \mathfrak{A}_0''$, on a $\xi \in \mathscr{D}^\# \cap \mathscr{D}^\flat$ et $\xi^\# = \xi^\flat$, d'où pour tout $\eta \in \mathfrak{A}$,

$$\varphi[\pi(\xi)\pi(\eta)] = (\eta|\xi^\#) = (\xi|\eta^\#) = \varphi[\pi(\eta)\pi(\xi)].$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $\xi \in \mathfrak{A}''$ est tel que $\varphi[\pi(\xi)\pi(\eta)] = \varphi[\pi(\eta)\pi(\xi)]$ pour tout $\eta \in \mathfrak{A}$, on a $(\eta|\xi^\#) = (\xi|\eta^\#)$ pour tout $\eta \in \mathfrak{A}$, ce qui prouve que $\xi \in \mathscr{D}^\flat$ et que $\xi^\# = \xi^\flat$.

Notons que la condition (ii) du lemme 2.1 et la définition de φ montrent que $\varphi_0 = \varphi|P^+$ est une trace (normale et fidèle) et que M_0 est l'adhérence faible de $\mathfrak{N}_{\varphi_0} = \pi(\mathfrak{A}_0'')$.

3.2. Proposition. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne à gauche,* φ *le poids canoniquement défini par* $\mathfrak{A}$. *Pour que* φ *soit une trace, il faut et il suffit que* $\mathfrak{A}$ *soit une algèbre hilbertienne.*

Si φ est une trace, $\mathfrak{N}_\varphi$ est un idéal bilatère, donc auto-adjoint, de l'algèbre de von Neumann $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. On a $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ pour tous $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^* = \pi(\mathfrak{A}'')$, de sorte que l'on a $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}_0''$ d'après le lemme 3.1. Alors $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre hilbertienne de $\mathfrak{A}''$. La réciproque est bien connue.

3.3. Lemme. *Soient* M *une algèbre de von Neumann,* P *une sous-algèbre de von Neumann de* M, Φ *une projection positive normale fidèle de* M *sur* P. *Pour toute forme linéaire positive normale* g *sur* P, *le support de* $g \circ \Phi$ *est égal au support de* g.

Posons $f = g \circ \Phi$. Le support q de f est majoré par le support p de g car on a $f(I-p) = g[\Phi(I-\mathrm{p})] = g(I-p) = 0$. On en déduit que $\Phi(q) \leqq p$. Par définition de q, on a $g[p-\Phi(q)] = f(p-q) = 0$. D'après la définition du support p de g, on a $p-\Phi(q) = 0$, soit $\Phi(p-q) = 0$. Comme Φ est fidèle, $p = q$.

3.4. Théorème. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne à gauche achevée,* φ *le poids canoniquement défini par* $\mathfrak{A}$ *sur* $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, G *le groupe à un paramètre des automorphismes modulaires de* M, P *l'ensemble des éléments de* M *fixes pour* G, $\mathfrak{A}_0$ *l'algèbre hilbertienne associée* à $\mathfrak{A}$. *On pose* $\varphi_0 = \varphi|P^+$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'algèbre de von Neumann* M *est* G*-finie.*

(ii) *L'ensemble des éléments* $\xi\eta$ *où* $\xi \in \mathfrak{A}_0$ *et où* $\eta \in \mathfrak{A}$ *est partout dense dans* $\mathfrak{A}$.

(iii) φ_0 *est une trace normale fidèle semi-finie sur* P.

(iv) *Il existe une projection positive normale* Φ *de* M *sur* P *telle que* $\varphi(x) = \varphi_0[\Phi(x)]$ *pour tout* $x \in M^+$.

(v) *Il existe une famille* $(f_i)_{i \in I}$ *de formes linéaires positives normales dont les supports sont deux à deux orthogonaux telle que* $\varphi(x) = \sum_{i \in I} f_i(x)$ *pour tout* $x \in M^+$.

De plus, si les conditions précédentes sont vérifiées, la projection Φ *vérifiant la condition* (*iv*) *est unique et G-invariante.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si M est G-finie, il existe une projection positive, normale, fidèle G-invariante Φ de M sur P ((10), th. 2) et pour tout $a \in M$, il existe une famille $(x_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble filtrant I, formée d'éléments de l'enveloppe convexe des éléments $(g \cdot a)_{g \in G}$, qui converge ultrafaiblement vers $\Phi(a)$. Comme φ est ultrafaiblement semi-continu inférieurement et invariant, on a pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$

$$\varphi(\Phi(a)) \leqq \liminf \varphi(x_i) = \liminf \varphi(a) = \varphi(a) < +\infty.$$

Donc pour tout $a \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, on a $\Phi(a) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$. Comme $\mathfrak{M}_\varphi$ est ultrafaiblement dense dans M, on peut trouver une famille filtrante croissante $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathfrak{M}_\varphi^+$ qui converge ultrafaiblement vers I dans M. Alors $(\Phi(u_i))_{i \in I}$ est filtrante croissante dans $\mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$ de borne supérieure I dans P. Elle converge donc fortement vers I. Si pour tout $i \in I$, nous choisissons $\xi_i \in \mathfrak{A}_0$ tel que $\pi(\xi_i) = \Phi(u_i)$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\xi_i \alpha = \pi(\xi_i)\alpha$ converge vers α.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si (ii) est vérifiée, la représentation $\xi \mapsto \pi(\xi)$ de $\mathfrak{A}_0$ sur H est non dégénérée. Donc I est ultrafaiblement adhérent à $\pi(\mathfrak{A}_0) = \mathfrak{N}_{\varphi_0}$ et la trace φ_0 est semi-finie sur P.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Si φ_0 est semi-finie sur P, P est l'adhérecne ultrafaible de $\mathfrak{M}_{\varphi_0}$, donc $P = M_0$. Soit Φ la projection de M sur P décrite dans (12), prop. 4.6).

Montrons d'abord que pour $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ tel que $\Phi(x) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$ on a $\varphi_0(\Phi(X)) = \varphi(x)$. Pour $\xi \in \mathfrak{A}$ et $\eta \in \mathfrak{A}_0$, cn a

$$\varphi[\pi(\xi)^*\pi(\eta)] = (\eta|\xi) = (\eta|p\xi) = \varphi_0[\Phi(\pi(\xi)^*)\pi(\eta)] = \varphi_0[\Phi(\pi(\xi)^*\pi(\eta))].$$

Soient $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et $\xi \in \mathfrak{A}$ tel que $\pi(\xi) = x^{\frac{1}{2}}$. Dans $\mathfrak{A}_0$ choisissons une famille (η_i) indexée par un ensemble filtrant, telle que $\pi(\eta_i) = y_i$ converge ultrafaiblement vers I. Comme φ_0 est une trace, on a

$$\begin{aligned}\varphi_0[\Phi(x)^{\frac{1}{2}}y_i\Phi(x)^{\frac{1}{2}}] &= \varphi_0[\Phi(x)y_i] = \varphi_0[\Phi(\pi(\xi^\#\xi))\pi(\eta_i)] \\ &= \varphi[\pi(\xi^\#\xi)\pi(\eta_i)] = (\eta_i|\xi^\#\xi) = (\pi(\xi)\eta_i|\xi) = (\pi'(\eta_i)\xi|\xi).\end{aligned}$$

Comme $y \mapsto \varphi_0[\Phi(x)^{\frac{1}{2}}y\Phi(x)^{\frac{1}{2}}]$ est une forme linéaire positive normale sur P, le premier membre tend vers $\varphi_0(\Phi(x))$. D'autre part, on a $\eta_i^\flat = J\eta_i$ pour tout i, d'où

$$\pi'(\eta_i)^* = \pi'(J\eta_i) = J\pi(\eta_i)J = Jy_iJ.$$

Ainsi $\pi'(\eta_i)$ converge ultrafaiblement vers I et le dernier membre de la relation précédente converge vers $(\xi|\xi) = \varphi(x)$. On a donc $\varphi_0(\Phi(x)) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ tel que $\Phi(x) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$ et par suite pour toute combinaison linéaire de tels éléments.

Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{M}_{\varphi_0}$ de somme égale à I dans P. Comme $p_i^2 = p_i$, on a $p_i \in \mathfrak{N}_{\varphi_0} \subset \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ pour tout $i \in I$. Pour tout $i \in I$, soit $\alpha_i \in \mathfrak{A}_0$ tel que $p_i = \pi(\alpha_i)$. Pour $u, v \in M$ et $i, j \in I$, on a $\Phi(p_j v^* u p_i) = p_j \Phi(v^*u) p_i$ et la formule de polarisation montre que $p_j v^* u p_i$ est combinaison linéaire d'éléments x_k de $\mathfrak{M}_\varphi^+$ tels que $\Phi(x_k) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$. On a donc, puisque $up_i = u\pi(\alpha_i) = \pi(u\alpha_i)$,

$$(u\alpha_i|v\alpha_j) = \varphi(p_j v^* u p_i) = \varphi_0(\Phi(p_j v^* u p_i)) = \varphi_0(p_j \Phi(v^*u) p_i).$$

Pour $i \neq j$, on a donc $(u\alpha_i|v\alpha_j) = 0$ et les sous-espaces $(\overline{M\alpha_i})_{i\in I}$ de H sont deux à deux orthogonaux. Pour $x \in M^+$ on obtient en posant $u = v = x^{\frac{1}{2}}$

$$\sum_{i\in I} ||x^{\frac{1}{2}}\alpha_i||^2 = \sum_{i\in I} \varphi_0(p_i \Phi(x) p_i) = \sum_{i\in I} \varphi_0(\Phi(x)^{\frac{1}{2}} p_i \Phi(x)^{\frac{1}{2}}) = \varphi_0(\Phi(x)).$$

Soit $x \in M^+$ tel que $\Phi(x) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$, (soit $\varphi_0(\Phi(x)) < +\infty$). Soit β le vecteur de H égal à $\sum_{i\in I} x^{\frac{1}{2}}\alpha_i$. Pour tout $\eta \in \mathfrak{A}'$ on a

$$\begin{aligned}\pi'(\eta)\beta &= \sum_{i\in I} \pi'(\eta) x^{\frac{1}{2}}\alpha_i = \sum_{i\in I} x^{\frac{1}{2}}\pi'(\eta)\alpha_i = \sum_{i\in I} x^{\frac{1}{2}}\pi(\alpha_i)\eta \\ &= \sum_{i\in I} x^{\frac{1}{2}} p_i \eta = x^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i\in I} p_i \eta\Big) = x^{\frac{1}{2}}\eta,\end{aligned}$$

ce qui montre que β est borné à gauche et que $\pi(\beta) = x^{\frac{1}{2}}$. Alors on a $x^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, d'où $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et

$$\varphi(x) = ||\beta||^2 = \sum_{i\in I} ||x^{\frac{1}{2}}\alpha_i||^2 = \varphi_0(\Phi(x)).$$

Supposons maintenant que $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et soit $\xi \in \mathfrak{A}$ tel que $x^{\frac{1}{2}} = \pi(\xi)$. On a alors

$$\varphi_0(\Phi(x)) = \sum_{i\in I} ||x^{\frac{1}{2}}\alpha_i||^2 = \sum_{i\in I} ||\pi(\xi)\alpha_i||^2 = \sum_{i\in I} ||\pi'(\alpha_i)\xi||^2 = ||\xi||^2 = \varphi(x).$$

Nous avons donc établi que $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ si et seulement si $\Phi(x) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$ et que l'on a alors $\varphi(x) = \varphi_0(\Phi(x))$, ce qui démontre (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v) Supposons qu'il existe une projection normale Φ de M sur P telle que $\varphi(x) = \varphi_0(\Phi(x))$ pour tout $x \in M^+$. Soit (u_i) une unité approchée, filtrante croissante de la sous-algèbre $\mathfrak{M}_\varphi$ de M. Alors u_i converge ultrafaiblement vers I. Il en est de même pour $\Phi(u_i)$. Comme on a $\varphi_0(\Phi(u_i)) = \varphi(u_i) < +\infty$, on voit que la trace normale fidèle φ_0 est semi-finie sur P. Soit alors $(p_i)_{i\in I}$ une famille de projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{M}_{\varphi_0}$ de somme égale à I et posons pour $i \in I$ et $x \in P$,

$g_i(x) = \varphi_0(xp_i) = \varphi_0(p_i x p_i)$. On obtient ainsi une famille de formes linéaires positives normales sur P dont les supports $(p_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux, et telle que $\varphi_0(x) = \sum_{i\in I} g_i(x)$ pour tout $x \in P^+$. Pour tout $i \in I$, posons $f_i = g_i \circ \Phi$. Comme φ est fidèle, Φ est fidèle. D'après le lemme 3.3, le support de f_i est p_i et on a $\varphi(x) = \varphi_0(\Phi(x)) = \sum_{i\in I} g_i(\Phi(x)) = \sum_{i\in I} f_i(x)$ pour tout $x \in M^+$.

(v) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe une famille $(f_i)_{i\in I}$ de formes linéaires positives normales dont les supports $(p_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux et telle que $\varphi(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)$ pour tout $x \in M^+$. Pour tout $i \in I$, on a $\varphi(p_i) = f_i(p_i) < +\infty$. On a donc $p_i \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et comme $p_i^2 = p_i$, on a $p_i \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. D'autre part, pour tout $y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, on a $\varphi(yp_i) = f_i(y) = \varphi(p_i y)$. D'après le lemme 3.1, p_i est invariant par les automorphismes σ_t de G et par suite, $x \mapsto f_i(x) = \varphi(p_i x p_i)$ est une forme linèaire positive normale G-invariante. Si $x \in M^+$ est non nul, on a $\varphi(x) > 0$ puisque φ est fidèle. Il existe alors $i \in I$ tel que $f_i(x) > 0$. Donc M est G-finie.

L'application Φ est fidèle, normale, positive. Montrons qu'elle est G-invariante. Elle sera alors unique d'après les résultats de Kovacs et Szücs. Soient $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ et $y \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$; pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ on a $\sigma_t(y) = y$ et $\Phi(\sigma_t(x)) \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}^+$, d'où puisque φ est G-invariante

$$\varphi_0(\Phi[\sigma_t(x)]y) = \varphi_0(\Phi[\sigma_t(x)y]) = \varphi(\sigma_t(x)y) = \varphi(x\sigma_{-t}(y)) = \varphi(xy)$$
$$= \varphi_0(\Phi(xy)) = \varphi_0(\Phi(x)y).$$

Prenons $y = \Phi[\sigma_t(x)]^* - \Phi(x)^* \in \mathfrak{M}_{\varphi_0}$. On obtient $\varphi_0(y^*y) = 0$, d'où $y = 0$. On a donc $\Phi(\sigma_t(x)) = \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, donc pour tout $x \in M$.

3.5. Corollaire. *Pour toute algèbre de von Neumann $\mathcal{Q}$, il existe une algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$ telle que l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ soit G-finie pour le groupe G des automorphismes modulaires, et isomorphe à $\mathcal{Q}$.*

Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de projecteurs cycliques de $\mathcal{Q}$, deux à deux orthogonaux, de somme égale à I. Pour tout $i \in I$, soit $\alpha_i \in p_i(H)$ un vecteur tel que $p_i = E_{\alpha_i}^{\mathcal{Q}'}$. Alors $x \mapsto \varphi(x) = \sum_{i\in I} \omega_{\alpha_i}(x)$ définit une algèbre hilbertienne à gauche vérifiant les hypothèses du théorème 3.4.

3.6. Proposition. *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids fidèle sur $\mathcal{Q}^+$. On suppose que φ est somme d'une famille $(f_i)_{i\in I}$ de formes linéaires positives normales dont les supports $(p_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux. On considère les objets $\mathfrak{M}_\varphi$, $\mathfrak{N}_\varphi$, Λ, H, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$,* etc $\cdots$ *canoniquement définis par φ. On pose $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ et $\Lambda p_i = \alpha_i$ pour tout $i \in I$. On note τ et τ' les poids canoniquement définis par $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sur M et M'.*

(i) *Les sous-espaces* $H_i = \overline{M\alpha_i}$ (*resp.* $H_i' = \overline{M'\alpha_i}$) *de* H *sont deux à deux orthogonaux et on a* $H = \bigoplus_{i\in I} H_i = \bigoplus_{i\in I} H_i'$.

(ii) $\mathfrak{A}$ *est l'ensemble des éléments* $(\pi_\varphi(x)\alpha_i)_{i\in I}$ *de* $\bigoplus_{i\in I} H_i$, *où* x *décrit* $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. *De même* $\mathfrak{A}'$ *est l'ensemble des éléments* $(y\alpha_i)_{i\in I}$ *de* $\bigoplus_{i\in I} H_i'$ *où* y *décrit* $\mathfrak{N}_{\tau'} \cap \mathfrak{N}_{\tau'}^*$. *Les algèbres hilbertiennes à gauche et à droite* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{A}'$ *sont achevées.*

(iii) *Les vecteurs* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *sont invariants par l'isométrie antilinéaire* J *et on a* $J(H_i) = H_i'$ *pour tout* $i \in I$, $\tau = \sum_{i\in I} \omega_{\alpha_i}|M^+$, $\tau' = \sum_{i\in I} \omega_{\alpha_i}|(M')^+$.

(iv) M *est G-finie pour le groupe* G *des automorphismes modulaires de* M.

On peut supposer qu'aucune des formes f_i n'est nulle, soit $p_i \neq 0$, pour tout $i \in I$.

(i) Pour $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi$ on a $\sum_{i\in I} f_i(x^*x) = \varphi(x^*x) < +\infty$ et $\sum_{i\in I} f_i(y^*y) < +\infty$. D'après l'inégalité $|f_i(y^*x)| \leqq f_i(x^*x)^{\frac{1}{2}} f_i(y^*y)^{\frac{1}{2}}$, la famille $\sum_{i\in I} f_i(y^*x)$ est sommable. Soient i, j deux indices distincts. Alors pour $u, v \in \mathcal{Q}$, on a $up_i, vp_j \in \mathfrak{N}_\varphi$ et

$$(\pi_\varphi(u)\alpha_i|\pi_\varphi(v)\alpha_j) = (\Lambda up_i|\Lambda vp_j) = \varphi(p_j v^* u p_i) = \sum_{k\in I} f_k(p_j v^* u p_i) = 0.$$

Les sous-espaces $H_i = \overline{M\alpha_i}$ sont deux à deux orthogonaux. Montrons que $H = \sum_{i\in I} H_i$. Soient $x \in \mathfrak{N}_\varphi$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une famille finie $i_1, \ldots, i_n$ d'indices telle que

$$\varphi(x^*x) - f_{i_1}(x^*x) \cdots - f_{i_n}(x^*x) \leqq \varepsilon.$$

On a alors, compte tenu de l'orthogonalité des éléments $\Lambda x p_i$

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda x - \sum_{k=1}^{n} \pi_\varphi(x)\alpha_{i_k}\|^2 \\
&\quad = \|\Lambda x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (\Lambda x|\Lambda x p_{i_k}) - \sum_{k=1}^{n} (\Lambda x p_{i_k}|\Lambda x) + \sum_{k=1}^{n} (\Lambda x p_{i_k}|\Lambda x p_{i_k}) \\
&\quad = \varphi(x^*x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(p_{i_k} x^* x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x^* x p_{i_k}) + \sum_{k=1}^{n} \varphi(p_{i_k} x^* x p_{i_k}) \\
&\quad = \varphi(x^*x) - \sum_{k=1}^{n} f_{i_k}(x^*x) \leqq \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi $\bigoplus_{i\in I} H_i$ est dense dans $\Lambda\mathfrak{N}_\varphi$, donc égal à H.

Les projecteurs $E_{\alpha_i}^{M'}$ (où $i \in I$) sont les supports des formes linéaires ω_{α_i} définies sur M. Comme on a $f_i = \omega_{\alpha_i} \circ \pi_\varphi$, ils sont égaux aux projecteurs $\pi_\varphi(p_i)$. Ils sont donc deux à deux orthogonaux, de somme égale à I. On a donc $H = \bigoplus_{i\in I} H_i'$.

(ii) D'après le théorème 2.13, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ sont achevées et on a $\mathfrak{A} = \Lambda(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$. Pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi$, les composantes de Λx dans $\bigoplus_{i\in I} H_i$

étant les vecteurs $\Lambda x p_i = \pi_\varphi(x)\alpha_i$, $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des $(\pi_\varphi(x)\alpha_i)_{i\in I}$ où x décrit $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$. Provisoirement, notons ψ le poids $\sum_{i\in I}\omega_{\alpha_i}$ sur $(M')^+$. Les vecteurs α_i étant totalisateurs pour π_φ, ils sont séparateurs pour M' et l'application $\Lambda' : y \mapsto (y\alpha_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} H_i' = H$ est une injection de $\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$ dans H. Montrons que $\Lambda'(\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*)$ muni du produit et de l'involution images de ceux de l'algèbre $\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$ est égal à $\mathfrak{A}'$. Pour $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ et $y \in \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*$ on a

$$(\Lambda x^\sharp|\Lambda' y) = (\sum_{i\in I} x^*\alpha_i|\sum_{j\in I} y\alpha_j) = \sum_{i,j}(x^*\alpha_i|y\alpha_j) = \sum_{i,j}(y^*\alpha_i|x\alpha_j)$$
$$= (\Lambda' y^*|\Lambda x)$$

On a donc $\Lambda' y \in \mathscr{D}^\flat$ et $(\Lambda' y)^\flat = \Lambda' y^*$. Vérifions que $\Lambda' y$ est borné à droite. Pour $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ on a

$$\pi(\Lambda x)\Lambda' y = \pi_\varphi(x)(\sum_{i\in I} y\alpha_i) = \sum_{i\in I} y\pi_\varphi(x)\alpha_i = y(\sum_{i\in I}\pi_\varphi(x)\alpha_i) = y\Lambda x.$$

Ainsi $\Lambda' y$ est borné à droite et on a $\pi'(\Lambda' y) = y$. Ceci montre que $\Lambda'(\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*) \subset \mathfrak{A}'$. Réciproquement, soit $\eta \in \mathfrak{A}'$ et posons $y = \pi'(\eta)$. Si $\eta = \sum_{i\in I}\eta_i$ est la décomposition de η selon les sous-espaces H_i' de H, on a

$$\eta_i = \pi_\varphi(p_i)\eta = \pi(\alpha_i)\eta = \pi'(\eta)\alpha_i = y\alpha_i,$$

d'où

$$\psi(y^*y) = \sum_{i\in I}\omega_{\alpha_i}(y^*y) = \sum_{i\in I}\|y\alpha_i\|^2 = \sum_{i\in I}\|\eta_i\|^2 = \|\eta\|^2 < +\infty.$$

On a donc $y \in \mathfrak{N}_\psi$ et de même $y^* = \pi'(\eta^\flat) \in \mathfrak{N}_\psi$. Ainsi $\mathfrak{A}'$ est égale à $\Lambda'(\mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^*)$. Vérifions que l'on a $\psi = \tau'$, ce qui démontrera (ii) entièrement. Pour $\eta \in \mathfrak{A}'$ on a

$$\tau'(\pi'(\eta)^*\pi'(\eta)) = \|\eta\|^2 = \sum_{i\in I}\|\eta_i\|^2 = \sum_{i\in I}\|\pi'(\eta)\alpha_i\|^2 = \sum_{i\in I}(\pi'(\eta)^*\pi'(\eta)\alpha_i|\alpha_i).$$

Donc pour $y \in \mathfrak{M}_{\tau'}^+$, on a $\tau'(y) = \psi(y)$. Réciproquement, si $y \in \mathfrak{M}_\psi^+$, on a $y^{\frac{1}{2}} \in \pi(\mathfrak{A}')$, d'où $y \in \mathfrak{M}_{\tau'}^+$. Ainsi τ' et ψ sont égaux.

(iii) Notons p_i' le support de $\omega_{\alpha_i}|M'$. On a $\alpha_i = \Lambda p_i = \alpha_i^\sharp$ et $\alpha_i = \Lambda' p_i' = \alpha_i^\flat$. D'après ((12), prop. 4.3), on a $\alpha_i \in \mathfrak{A}_0$ et $J\alpha_i = \alpha_i$. Comme $JMJ = M'$, on obtient $J(H_i) = H_i'$. Le poids τ étant transporté de φ par l'isomorphisme π_φ, on a $\tau = \sum_{i\in I}\omega_{\alpha_i}|M^+$ tandis que $\tau' = \psi = \sum_{.\in I}\omega_{\alpha_i}|(M')$.

(iv) Comme τ est somme de formes linéaires positives normales a supports deux à deux orthogonaux, M est G-finie.

La proposition suivante parmet de donner des exemples simples de poids vérifiant les conditions de la proposition 3.6, ou ne les vérifiant pas.

3.7. Proposition. *Soit a un élément positif de l'algèbre $\mathscr{L}(H)$ de tous les opérateurs sur un espace hilbertien H. Le poids $\varphi : x \mapsto tr(a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}})$ est sur $\mathscr{L}(H)^+$ somme de formes linéaires positives normales. Pour qu'il existe* *une famille de formes linéaires positives normales à supports deux à deux orthogonaux de somme égale à φ sur $\mathscr{L}(H)^+$, il faut et il suffit que a soit de la forme $a = \sum_{i\in I} \lambda_i p_i$ où les λ_i sont des nombres réels positifs et où les p_i sont des projecteurs de rang fini deux à deux orthogonaux.*

Il est clair que φ est somme de formes linéaires positives normales. Si a est de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i p_i$, où les $\lambda_i \in \boldsymbol{R}^+$ et où les p_i sont des projecteurs de rang fini deux à deux orthogonaux, les formes $f_i : x \mapsto \lambda_i tr(xp_i)$ sont positives normales de somme égale à φ sur $\mathscr{L}(H)^+$ et leurs supports $(p_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux.

Réciproquement, supposons qu'il existe des formes linéaires positives normales $(f_i)_{i\in I}$ dont ls supports $(p_i)_{i\in I}$ sont deux à deux orthogonaux et telles que $\varphi(x) = \sum_{i\in I} f_i(x)$ pour tout $x \in \mathscr{L}(H)^+$. Pour tout $i \in I$, il existe $a_i \in \mathscr{L}C(H)^+$ tel que $f_i(x) = \mathrm{tr}(a_i^{\frac{1}{2}} x a_i^{\frac{1}{2}}) = tr(xa_i)$ pour tout $x \in \mathscr{L}(H)$ ((6), 4.1.2). Pour toute partie finie J de I, posons $f_J = \sum_{i\in I} f_i$, $a_J = \sum_{i\in I} a_i$. Pour tout opérateur à trace positif x on a

$$tr\,[x^{\frac{1}{2}}(a-a_J)x^{\frac{1}{2}}] = \varphi(x) - f_J(x) \geqq 0; \text{ on a donc } a_J \leqq a.$$

La famille filtrante croissante (a_J) admet une borne supérieure $b \leqq a$. Pour tout opérateur à trace positif x on a $tr[x^{\frac{1}{2}}(a-b)x^{\frac{1}{2}}] = 0$, donc $a = b$, soit $a = \sum_{i\in I} a_i$. Comme les supports des opérateurs a_i sont égaux aux supports des formes f_i, ils sont deux à deux orthogonaux. Comme chaque a_i est de la forme proposée, il en est de même pour a.

Donnons quelques propriétés supplémentaires de l'algèbre hilbertienne à gauche associée à certains poids du type $x \mapsto tr(a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}})$ sur $\mathscr{L}(H)^+$.

3.8. Proposition. *Soient ψ une trace normale fidèle semi-finie sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{Q}$. Soit $a \in \mathscr{Q}^+$ un opérateur inversible d'inverse borné. Pour tout $x \in \mathscr{Q}^+$, posons $\varphi(x) = \psi(a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}})$. Notons $\mathfrak{K}$ l'algèbre hilbertienne achevée définie par ψ, $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne à gauche définie par φ.*

(i) *φ est un poids fidèle faiblement semi-continu inférieurement sur $\mathscr{Q}^+$ et on a $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{N}_\psi$, $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{M}_\psi$.*

(ii) *On a $H_\varphi = H_\psi$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$ et par suite l'algèbre modulaire maximale définie par $\mathfrak{A}$ est égale à $\mathfrak{A}$.*

(iii) *L'involution adjointe de l'involution $\Lambda_\varphi x \mapsto (\Lambda_\varphi x)^\sharp = \Lambda_\varphi x^*$ de $\mathfrak{A}$ est $\Lambda_\varphi x \mapsto \Lambda_\varphi a x^* a^{-1} = (\Lambda_\varphi x)^\flat$. L'automorphisme modulaire Δ de $\mathfrak{A}$ est donné par $\Delta(\Lambda_\varphi x) = \Lambda_\varphi a x a^{-1}$; il est isométrique pour la norme de H_ψ (qui est équivalente à celle de H_φ).*

(i) est évident.

(ii) Comme on a $\varphi(x^*x) \leqq ||a||\psi(x^*x)$, $\psi(x^*x) \leqq ||a^{-1}||\varphi(x^*x)$, les normes définies par φ et ψ sont équivalentes, donc $H_\varphi = H_\psi$. Il est clair que $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$ en tant qu'algèbre involutive; l'opérateur $\pi(\xi)$ est donc le même qu'il soit défini par $\mathfrak{K}$ ou par $\mathfrak{A}$. Il en résulte que $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{A}$ définissent le même ensemble de vecteurs bornés à droite soit H_d. Pour $\alpha \in H_d$, $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{A}$ définissent le même opérateur $\pi'(\alpha)$. D'après le lemme 2.4, on a $\mathfrak{K}' = \mathfrak{A}'$. Comme $\mathfrak{K}$ est achevée, on a $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$, d'où $\mathfrak{K} = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. On voit de même que $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}''$. Comme on a $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ appartient au domaine de Δ^n pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$, donc $\mathfrak{A}$ est égale à l'algèbre modulaire maximale qui lui est associée.

(iii) Pour $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi$, on a

$$((\Lambda_\varphi x)^\sharp | \Lambda_\varphi y) = (\Lambda_\varphi x^* | \Lambda_\varphi y) = \psi(a^{\frac{1}{2}} y^* x^* a^{\frac{1}{2}}) = \psi(x^* a y^*)$$
$$= \psi(x^* a y^* a^{-1} a) = (\Lambda_\varphi a y^* a^{-1} | \Lambda_\varphi x),$$

ce qui montre que $\Lambda_\varphi y \in \mathscr{D}^\flat$ et que $(\Lambda_\varphi y)^\flat = \Lambda_\varphi a y^* a^{-1}$. D'autre part,

$$\Delta(\Lambda_\varphi x) = [(\Lambda_\varphi x)^\sharp]^\flat = (\Lambda_\varphi x^*)^\flat = \Lambda_\varphi a x a^{-1},$$

donc Δ est isométrique pour la norme de H_ψ.

4. Poids K.M.S. et automorphismes modulaires

Ce paragraphe n'est qu'une adaptation de ((13), § 13) et de (14) qui étudient les états K.M.S. sur les C^*-algèbres et les algèbres de von Neumann. Pour qu'il existe un état normal fidèle sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{Q}$, il faut et il suffit que $\mathscr{Q}$ soit de genre dénombrable. Il semble donc que l'extention de certains résultats de ((13), § 13) ou de (14) à une algèbre de von Neumann quelconque nécessite l'utilisation des poids.

4.1. Définition. Soient A une C^*-algèbre, φ un poids sur A^+. On dira que φ est un poids K.M.S. s'il existe un nombre $\beta > 0$, un homomorphisme $t \mapsto \sigma_t$ de $\boldsymbol{R}$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes de A vérifiant les deux condition suivantes

a) φ est invariant par σ_t pour tout $t \in \boldsymbol{R}$;

b) pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, il existe une fonction F continue et bornée sur la bande des $z \in \boldsymbol{C}$ tels que $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq \beta$, holomorphe dans cette bande telle que

$$F(t) = \varphi[\sigma_t(a)b], \quad F(t+i\beta) = \varphi[b\sigma_t(a)] \quad \text{pour tout } t \in \boldsymbol{R}.$$

4.2. Remarques

a) Soit β' un nombre > 0. Posons $\sigma'(t) = [\sigma(\beta/\beta')t]$. Alors β' et $t \mapsto \sigma'(\mathrm{t})$ vérifient les conditions a) et b) de la définition précédente.

b) Supposons que A soit une algèbre de von Neumann, que φ soit un poids fidèle, semi-fini, enveloppe supérieure sur A^+ de formes linéaires positives normales. On verra (prop. 4.8) qu'il existe alors un seul groupe à un paramètre $t \mapsto \sigma_t$ d'automorphismes de A vérifiant les conditions a) et b) de la définition 4.1 (φ et β étant fixés).

4.3 LEMME (voir (13), th. 13.1). *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche. Pour tout couple ξ, η d'éléments de $\mathscr{D}^{\#}$, il existe une fonction F définie, continue et bornée pour $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq I$, holomorphe à l'intérieur de cette bande et telle que*

$$F(t) = (\xi | \Delta^{it}\eta^{\#}), \qquad F(t+i) = (\Delta^{it}\eta | \xi^{\#}) \quad \textit{pour tout} \ t \in \boldsymbol{R}.$$

D'après le lemme 2.6, les fonctions $G(z) = (\Delta^{z}\xi | \eta^{\#})$ et $G'(z) = (\eta | \Delta^{1-\bar{z}}\xi^{\#})$ sont définies et continues respectivement pour $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$; elles sont holomorphes à l'intérieur de ces bandes et bornées. Pour $z = \frac{1}{2} + it$ (avec $t \in \boldsymbol{R}$), on a

$$\begin{aligned} G(z) &= (\Delta^{z}\xi | \eta^{\#}) = (\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{it}\xi | \Delta^{-\frac{1}{2}}J\eta) = (\Delta^{it}\xi | J\eta) = (\xi | \Delta^{-it}J\eta) \\ &= (\xi | J\Delta^{-it}\eta) = (\Delta^{-it}\eta | J\xi) = (\Delta^{-it}\eta | \Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}J\xi) = (\eta | \Delta^{it}\Delta^{\frac{1}{2}}\xi^{\#}) \\ &= (\eta | \Delta^{\frac{1}{2}+it}\xi^{\#}) = G'(z). \end{aligned}$$

Il existe donc une fonction définie, continue et bornée pour $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$ holomorphe à l'intérieur de cette bande, coincidant avec G pour $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq \frac{1}{2}$ et avec G' pour $\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1$. Posons $F(z) = H(-iz)$; cette fonction convient.

4.4. PROPOSITION. *Soient $\mathscr{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids semi-fini, fidèle, enveloppe supérieure sur $\mathscr{Q}^{+}$ des formes linéaires positives normales qu'il majore. Alors φ est un poids K.M.S..*

Soient $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne à gauche achevée canoniquement définie par φ, τ le poids que définit $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Notons σ_t (pour $t \in \boldsymbol{R}$) les automorphismes de $\mathscr{Q}$ transportés à l'aide de l'isomorphisme π_{φ} des automorphismes modulaires de $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Soient $x, y \in \mathfrak{N}_{\varphi} \cap \mathfrak{N}_{\varphi}^{*}$ et soient $\xi = \Lambda_{\varphi}x$, $\eta = \Lambda_{\varphi}y$ les éléments correspondants de $\mathfrak{A}$, F la fonction holomorphe associée au couple ξ, η par le lemme 4.3. Pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, on a

$$\begin{aligned} F(t) &= (\xi | \Delta^{it}\eta^{\#}) = \tau[\pi(\Delta^{it}\eta)\pi(\xi)] = \varphi[\sigma_t(y)x]. \\ F(t+i) &= (\Delta^{it}\eta | \xi^{\#}) = \tau[\pi(\xi)\pi(\Delta^{it}\eta)] = \varphi[x\sigma_t(y)]. \end{aligned}$$

Comme φ est invariant par les automorphismes σ_t (th. 2.13 et 2.11), φ est K.M.S.

4.5. LEMME (voir (13), lemme 10.1). *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée, H l'espace hilbertien complété de $\mathfrak{A}$, $u : t \mapsto u(t)$ un groupe à un paramètre continu d'unitaires sur H, T le générateur infinitésimal de u donné par le théorème de Stone. On suppose que pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ et tout $\xi \in \mathfrak{A}$, on a $u(t)\xi \in \mathfrak{A}$ et $\pi[u(t)\xi] = u(t)\pi(\xi)u(-t)$. Alors on a $(u(t)\xi)^{\#} = u(t)\xi^{\#}$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ et tout $\xi \in \mathfrak{A}$, et pour toute fonction continue de type positif f sur $\boldsymbol{R}$, on a $f(T)\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ et $[f(T)\xi]^{\#} = f(T)\xi^{\#}$ pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$.*

D'après le théorème de Bochner, il existe une mesure positive μ sur $\boldsymbol{R}$

de masse totale $f(0) = \sup_{t\in\boldsymbol{R}} |f(t)|$, telle que $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\mu(t)$. D'après le théorème de Fubini, on a alors (les intégrales convergeant pour la topologie forte des opérateurs),

$$f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itT} d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) d\mu(t).$$

Pour $\xi \in \mathfrak{A}$ et $\eta \in \mathfrak{A}'$, on a $\pi'(\eta)[u(t)\xi] = \pi[u(t)\xi]\eta = u(t)\pi(\xi)u(-t)\eta$, d'où

$$\|\pi'(\eta)f(T)\xi\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \pi'(\eta)u(t)\xi d\mu(t) \right\| \leqq \|\eta\| \, \|\pi(\xi)\| \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(t).$$

Ainsi $f(T)\xi$ est borné à gauche. Montrons que $f(T)\xi \in \mathscr{D}^\#$ et alors on aura $f(T)\xi \in \mathfrak{A}$. Notons d'abord que pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, on a

$$\pi[(u(t)\xi)^\#] = \pi[u(t)\xi]^* = u(t)\pi(\xi)^* u(-t) = \pi[u(t)\xi^\#].$$

On a donc $[u(t)\xi]^\# = u(t)\xi^\#$, d'où pour tout $\eta \in \mathfrak{A}'$,

$$(f(T)\xi|\eta^\flat) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itT}\xi|\eta^\flat) d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta|e^{itT}\xi^\#) d\mu(t) = (\eta|f(T)\xi^\#).$$

On a donc $f(T)\xi \in \mathscr{D}^\#$ et $[f(T)\xi]^\# = f(T)\xi^\#$.

4.6. Lemme (voir (13), dem. th. 10.1). *Soient H un espace hilbertien, X une partie de H partout dense dans H, T un opérateur auto-adjoint sur H. On note E l'ensemble des fonctions $h * g$ où h, g sont des fonctions continues à support compact sur $\boldsymbol{R}$. Alors pour toute fonction continue F sur $\boldsymbol{R}$, les éléments $f(T)\xi$ où f décrit E et où ξ décrit X sont contenus et partout denses dans l'espace hilbertien $\mathscr{D}(F(T))$.*

4.7. Lemme. *Soient A une C^*-algèbre, φ un poids sur A^+.*

(i) *Si φ est invariant par un automorphisme α de A, il existe sur H_φ un opérateur unitaire u unique tel que $u(\Lambda_\varphi x) = \Lambda_\varphi \alpha(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ et on a alors $\pi_\varphi[\alpha(x)] = u\pi_\varphi(x)u^{-1}$ pour tout $x \in A$.*

(ii) *Si φ est semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$ et K.M.S. pour un groupe à un parametre $t \mapsto \alpha_t$ d'automorphismes de A, les unitaires $u(t)$ correspondants forment un groupe à un paramètre continu.*

(i) se vérifie facilement comme dans le cas où φ est un état (voir (10) par exemple).

(ii) Il est clair que $t \mapsto u(t)$ est un homomorphisme de groupes. Vérifions sa continuité pour la topologie faible des opérateurs. Comme φ est semi-continu inférieurement, pour toute unité approchée filtrante croissante (u_i) de $\mathfrak{N}_\varphi$ et tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi$, on a $\|\Lambda_\varphi x - \Lambda_\varphi u_i x\| \to 0$ et $u_i x \in \mathfrak{N}_\varphi^* \mathfrak{N}_\varphi$, donc $\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ est partout dense dans H_φ. Comme φ est K.M.S., pour tous $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, la fonction

$$t \mapsto (u(t)\Lambda_\varphi x|\Lambda_\varphi y) = (\Lambda_\varphi \alpha_t(x)|\Lambda_\varphi y) = \varphi[y^*\alpha_t(x)]$$

est continue. Par raison d'équicontinuité, $t \mapsto u(t)$ est continu.

4.8. Proposition (voir (13), th. 13.2). *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids fidèle, semi-fini sur $\mathcal{Q}^+$. On suppose que φ est enveloppe supérieure sur $\mathcal{Q}^+$ des formes linéaires positives qu'il majore et que φ est K.M.S. avec la constante $\beta = 1$ pour un groupe à un paramètre $t \mapsto \sigma_t$ d'automorphismes de $\mathcal{Q}$. Alors $t \mapsto \pi_\varphi \circ \sigma_t \circ \pi_\varphi^{-1}$ est le groupe des automorphismes modulaires de $\pi_\varphi(\mathcal{Q})$ définis par l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A} = \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$.*

D'après le lemme 4.7, il existe un groupe à un paramètre continu $u : t \mapsto u(t)$ d'unitaires de H tel que $u(t)\Lambda_\varphi x = \Lambda_\varphi \sigma_t(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$, et on a $u(t)\pi_\varphi(x)u(-t) = \pi_\varphi[\sigma_t(x)]$ pour tout $x \in \mathcal{Q}$. Soit T le générateur infinitésimal de u donné par le théorème de Stone et soit $T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$ sa résolution spectrale. Soit $\xi \in \mathfrak{A}$ et soit $\eta \in H_\varphi$ de la forme $f(T)\alpha$ où $\alpha \in \mathfrak{A}$ et où f est le produit de convolution $h * g$ de deux fonctions continues à support compact définies sur $\boldsymbol{R}$. Alors la fonction

$$G(z) = (\exp(-izT)\eta|\xi^\#) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\lambda} f(\lambda) d(E_\lambda \eta|\xi^\#)$$

est holomorphe dans $\boldsymbol{C}$. D'après le théorème 2.13, $\mathfrak{A}$ est achevée et d'après le lemme 4.5 on a $\eta \in \mathfrak{A}$. Soient $x, y \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ tels que $\xi = \Lambda_\varphi x$, $\eta = \Lambda_\varphi y$. Comme φ est K.M.S. pour $t \mapsto \sigma_t$, il existe une fonction F continue pour $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 1$, holomorphe pour $0 < \operatorname{Im} z < 1$ telle qu'on ait pour tout $t \in \boldsymbol{R}$

$$F(t) = \varphi[\sigma_t(x)y] = (\Lambda_\varphi y|\Lambda_\varphi \sigma_t(x)^*) = (\eta|u(t)\xi^\#) = (\exp(-itT)\eta|\xi^\#)$$
$$F(t+i) = \varphi[y\sigma_t(x)] = (\exp(itT)\xi|\eta^\#).$$

Comme F et G coincident pour $z \in \boldsymbol{R}$, elles coincident pour $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 1$. On a donc en particulier pour tout $t \in \boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned}(\exp(itT)\xi|\eta^\#) = F(t+i) = G(t+i) &= (\exp[(-it+1)T]\eta|\xi^\#) \\ &= (\exp T \exp(-itT)\eta|\xi^\#).\end{aligned}$$

Appliquons cette relation en remplaçant ξ par $u(-t)\xi = \exp(-itT)\xi$. D'après le lemme 4.5, on a $[u(-t)\xi]^\# = u(-t)\xi^\#$ et d'après le lemme 4.6, on a $\eta \in \mathcal{D}(\exp T)$, d'où puisque $\exp(-itT)\exp(T) \subset \exp(T)\exp(-itT)$

$$(\xi|\eta^\#) = (\exp(T)\eta|\xi^\#).$$

Cette relation valable pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$, montre que $\exp(T)\eta \in \mathcal{D}^\flat$ et que $(\exp(T)\eta)^\flat = \eta^\#$. On a donc $\eta \in \mathcal{D}(\Delta)$ et $\exp(T)\eta = \Delta\eta$. D'après le lemme 4.6, les éléments de la forme de η sont denses dans l'espace hilbertien $\mathcal{D}(\exp T)$, de sorte que $\exp T \subset \Delta$. D'après la maximalité des opérateurs auto-adjoints, on a $\exp T = \Delta$ et par suite $u(t) = \Delta^{it}$ pour $t \in R$.

4.9. Corollaire. *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, φ un poids sur $\mathcal{Q}^+$ fidèle, semi-fini et enveloppe supérieure sur $\mathcal{Q}^+$ des formes linéaires positives normales qu'il majore. On suppose que φ est K.M.S. avec la constante β pour un groupe à un paramètre $t \mapsto \sigma_t$ d'automorphismes de $\mathcal{Q}$.*

(i) *Si φ est K.M.S. avec la constante β pour un autre groupe à un paramètre $t \mapsto \alpha_t$ d'automorphismes de $\mathcal{Q}$, on a $\alpha_t = \sigma_t$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$.*

(ii) *Si φ est une trace, on a $\sigma_t = Id$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$.*

(iii) *$t \mapsto \sigma_t$ est continu quand on munit Aut $\mathcal{Q}$ de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{Q}$ que l'on a elle-même munie de la topologie ultrafaible.*

Si $t \mapsto \sigma_t$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann $\mathcal{Q}$ quels sont les poids sur $\mathcal{Q}^+$ qui sont K.M.S. pour $t \mapsto \sigma_t$ avec une constante β donnée? Dans quelle mesure, l'un d'eux détermine-t-il les autres? Dans (13) et (14), ces questions sont entièrement élucidées pour les formes positives normales sur $\mathcal{Q}$. Nous allons donner des réponses partielles pour les poids. Le lemme suivant et sa démonstration sont empruntés à ((7), prop. 1).

4.10. Lemme. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée et posons $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, $Z = M \cap M'$.*

(i) *Pour tout $\xi \in \mathscr{D}^\#$ et tout $x \in Z$ on a $x\xi \in \mathscr{D}^\#$ et $(x\xi)^\# = x^*\xi^\#$.*

(ii) *Pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$ et tout $x \in Z$ on a $x\xi \in \mathfrak{A}$ et $\pi(x\xi) = x\pi(\xi)$.*

(iii) *Tout $x \in Z$ est permutable avec l'opérateur modulaire Δ.*

(i) Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{A}'$, Comme $\pi(\xi)$ et $\pi(\xi^\#)$ sont affiliés à M, et comme $\pi(\xi^\#) \subset \pi(\xi)^*$, on a

$$
\begin{aligned}
(x\xi|\eta_1\eta_2^\flat) &= (\pi'(\eta_2)x\xi|\eta_1) = (x\pi'(\eta_2)\xi|\eta_1) = (x\pi(\xi)\eta_2|\eta_1)\\
&= (\pi(\xi)\eta_2|x^*\eta_1) = (\eta_2|\pi(\xi^\#)x^*\eta_1) = (\eta_2|x^*\pi(\xi^\#)\eta_1) = (\eta_2|x^*\pi'(\eta_1)\xi^\#)\\
&= (\eta_2|\pi'(\eta_1)x^*\xi^\#) = (\eta_1^\flat\eta_2|x^*\xi^\#).
\end{aligned}
$$

Comme $(\mathfrak{A}')^2$ est dense dans $\mathscr{D}^\flat$, on obtient (i).

(ii) Si $\xi \in \mathscr{D}^\#$ est borné à gauche, on a $x\xi \in \mathscr{D}^\#$ d'après (i), et $x\xi$ est borné à gauche d'après le lemme 2.3. Donc $x\xi \in \mathfrak{A}$ et $\pi(x\xi) = x\pi(\xi)$.

(iii) Pour tout $\xi \in \mathfrak{A} \cap \mathscr{D}(\Delta)$ on a d'après (i)

$$x\Delta\xi = x[(\xi)^\#]^\flat = [x^*\xi^\#]^\flat = [(x\xi)^\#]^\flat = \Delta x\xi.$$

Comme $\mathfrak{A} \cap \mathscr{D}(\Delta)$ contient l'algèbre modulaire maximale associée à $\mathfrak{A}$, cet ensemble est dense dans l'espace hilbertien $\mathscr{D}(\Delta)$. Comme Δ et Δx sont fermés, on a donc $x\Delta \subset \Delta x$.

4.11. Lemme ((7), lemmes 12 et 13). *Soit $\mathfrak{N}$ un idéal à gauche d'une algèbre de von Neumann M. Alors $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$ est une sous-algèbre faciale de M et $\mathfrak{N}$ est l'ensemble des $x \in M$ tels que $x^*x \in \mathfrak{M}^+$.*

Montrons d'abord que pour $x \in \mathfrak{M}^+$ on a $x^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}$. Considérons des éléments $x_1, \cdots, x_n$ et $y_1, \cdots, y_n$ de $\mathfrak{N}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n y_i^* x_i$. Pour $i = 1, \cdots, n$, posons $u_i = \frac{1}{2}(x_i + y_i)$, $v_i = \frac{1}{2}(x_i - y_i)$. On a

$$x = \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i^*)(u_i + v_i) = \sum_{i=1}^{n} (u_i^* u_i + u_i^* v_i - v_i^* u_i - v_i^* v_i),$$

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} (u_i^* u_i - u_i^* v_i + v_i^* u_i - v_i^* v_i).$$

d'où

$$x = \tfrac{1}{2}(x + x^*) = \sum_{i=1}^{n} u_i^* u_i - v_i^* v_i \geqq 0.$$

Posons $z = \sum_{i=1}^n u_i^* u_i$. On a $x \leqq z$. Donc d'après ((5), ch. I, § 1, lemme 2), il existe un élément $a \in M$ tel que $x^{\frac{1}{2}} = az^{\frac{1}{2}}$ et $||a|| \leqq 1$. Montrons $z^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}$ et on aura alors $x^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}$. Une généralisation facile du lemme 2.9, montre qu'il existe des éléments $a_1, \cdots, a_n$ de M possédant les propriétés suivantes

$u_i = a_i z^{\frac{1}{2}}$ pour $i = 1, \cdots, n$ et $\sum_{i=1}^n a_i^* a_i$ est le projecteur support de z. On a alors

$$x^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i) z^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* u_i \in \mathfrak{N}.$$

Démontrons maintenant le lemme. D'après la formule de polarisation tout élément de $\mathfrak{M}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathfrak{M}^+$. Montrons que $\mathfrak{M}^+$ est hétéditaire, ce qui prouvera que $\mathfrak{M}$ est une sous-algèbre faciale de M. Soient $x \in \mathfrak{M}^+$ et $y \in \mathfrak{M}^+$ tels que $0 \leqq y \leqq x$. D'après le lemme de (5) déjà invoqué, il existe $a \in M$ tel que $y^{\frac{1}{2}} = ax^{\frac{1}{2}}$. On a $x^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}$, d'où $y^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{N}$ et $y \in \mathfrak{M}^+$.

Si $x \in M$ vérifie $x^* x \in \mathfrak{M}^+$, on a $|x| \in \mathfrak{N}$, et d'après la décomposition polaire de x, on a $x \in \mathfrak{N}$, d'où la dernière assertion.

4.12. Lemme ((7), dém. th. 2). *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche; posons $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Soit h un opérateur auto-adjoint positif, affilié au centre Z de M. Soit X l'ensemble des vecteurs $\alpha \in \mathscr{D}(h)$ qui sont bornés à gauche. Alors l'ensemble $\mathfrak{N}$ des opérateurs $\pi(\xi)$ où ξ décrit X est un idéal à gauche de M et $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^* \mathfrak{N}$ est une sous-algèbre faciale de M ultrafaiblement dense dans M.*

Comme h est affilié à Z, pour tout $x \in M$ et tout $\xi \in \mathscr{D}(h)$, on a $x\xi \in \mathscr{D}(h)$. Si ξ est borné à gauche, $x\xi$ l'est aussi. Pour tout $\xi \in X$ et tout $x \in M$, on a donc $x\xi \in X$ et $\pi(x\xi) = x\pi(\xi)$. Ainsi $\mathfrak{N}$ est un idéal à gauche de M. D'après le lemme 4.11, $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^* \mathfrak{N}$ est une sous-algèbre faciale de M. Soit $h = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ la résolution spectrale de h et pour $n = 1, 2, \cdots$ posons $f_n = \int_0^n dE_\lambda$. D'après le lemme 4.10-(ii), pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$ on a $f_n \xi \in \mathfrak{A}$. On a aussi $f_n \xi \in \mathscr{D}(h)$, d'où $f_n \xi \in X$ et de même $(f_n \xi)^\# = f_n \xi^\# \in X$.

Ceci montre que $f_n\mathfrak{A} \subset X$. Pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$, $\pi(f_n\xi) = f_n\pi(\xi)$ converge fortement vers $\pi(\xi)$ quand $n \to \infty$, donc $\mathfrak{N} = \pi(X)$ est fortement dense dans M. Il en est de même pour $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^*\mathfrak{N}$.

4.13. PROPOSITION. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée, $t \mapsto \sigma_t$ le groupe à un paramètre des automorphismes modulaires définis par $\mathfrak{A}$ sur M. Soit k un opérateur auto-adjoint positif affilié au centre Z de M. On introduit les ensembles $X \subset H$ et $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \subset M$ définis par le lemme* 4.12 *pour l'opérateur $h = k^2$. Pour $x \in \mathfrak{M}^+$, posons $\psi(x) = ||k\xi||^2$, où ξ est l'unique élément de H borné à gauche tel que $\pi(\xi) = x^{\frac{1}{2}}$ et pour tout autre élément x de M^+ posons $\psi(x) = +\infty$. Alors ψ est un poids sur M^+, semi-fini, ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}_\psi^+$ et K.M.S. avec la constante $\beta = 1$ pour $t \mapsto \sigma_t$.*

Notons φ le poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$ sur M^+. On a $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_\varphi$. En effet, si $x \in \mathfrak{M}^+$, il existe $\xi \in X$ tel que $\pi(\xi) = x^{\frac{1}{2}}$; d'après le lemme 2.4, on a $\xi \in \mathfrak{A}$ d'où $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. Il est clair que $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$ pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ et tout $x \in M^+$. Comme $\mathfrak{M}$ est une sous-algèbre faciale de M, pour que ψ soit linéaire il suffit que pour $r, s \in \mathfrak{M}^+$ on ait $\psi(r+s) = \psi(r)+\psi(s)$ ((1), rem. 1.4). Posons $t = r+s$ et soient $a, b, c \in M$ possédant les propriétés du lemme 2.9. Soit $\xi \in X$ tel que $t^{\frac{1}{2}} = \pi(\xi)$. On a alors

$$r^{\frac{1}{2}} = at^{\frac{1}{2}} = \pi(a\xi) \text{ et } s^{\frac{1}{2}} = \pi(b\xi) \text{ avec } a\xi,\ b\xi \in X \subset H_g, \text{ d'où}$$

$$\psi(r)+\psi(s) = (ka\xi|ka\xi)+(kb\xi|kb\xi) = (a\xi|ha\xi)+(b\xi|hb\xi)$$
$$= ((a^*a+b^*b)\xi|h\xi) = (c\xi|h\xi) = (\xi|h\xi) = ||k\xi||^2 = \psi(t)$$

Donc ψ est un poids et d'après le lemme 4.12, il est semi-fini. Montrons que ψ est ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}^+$. Soit $h = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ la résolution spectrale de h et pour tout $n = 1, 2, \cdots$ posons $h_n = \int_0^n \lambda dE_\lambda$. Pour tout n, soit ψ_n le poids défini par l'opérateur h_n selon le procédé que nous venons de décrire. Comme h_n est borné, ψ_n est défini sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$ (et majoré par $||h_n||\varphi$). Si $x_i \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ converge ultrafaiblement vers $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$, $x_i h_n = x_i^{\frac{1}{2}} h_n x_i^{\frac{1}{2}}$ converge ultrafaiblement vers $xh_n \in \mathfrak{M}_\varphi^+$. On a donc

$$\psi_n(x) = \varphi(xh_n) \leqq \liminf \varphi(x_i h_n) = \liminf \psi_n(x_i).$$

Donc ψ_n est ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$. On voit facilement que sur $\mathfrak{M}^+$, ψ est l'enveloppe supérieure des poids Ψ_n, donc Ψ est ultrafaiblement semi-continu inférieurement sur $\mathfrak{M}^+$.

Montrons que ψ est K.M.S. avec la constante $\beta = 1$ pour $t \mapsto \sigma_t$. Comme h est affilié au centre de M, pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ l'unitaire Δ^{it} commute à h d'après le lemme 4.10 (iii). On en déduit que l'ensemble X des éléments bornés à gauche de $\mathscr{D}(h)$ est invariant par Δ^{it} pour $t \in \boldsymbol{R}$, donc que $\mathfrak{N}$ et par suite $\mathfrak{M}$ sont invariants par les automorphismes σ_t. Pour $x \in M^+$

avec $x \notin \mathfrak{M}^+$, on a donc $\psi(x) = \psi(\sigma_t(x)) = +\infty$. Pour $x \in \mathfrak{M}^+$, soit $\xi \in X$ tel que $x^{\frac{1}{2}} = \pi(\xi)$. On a $\sigma_t(x)^{\frac{1}{2}} = \pi(\Delta^{it}\xi)$, d'où

$$\psi(\sigma_t(x)) = ||k\Delta^{it}\xi||^2 = ||\Delta^{it}k\xi||^2 = ||k\xi||^2 = \psi(x).$$

Ainsi ψ est invariant par σ_t pour $t \in \boldsymbol{R}$. Vérifions maintenant la condition b) de la définition 4.1.

Soient $x, y \in \mathfrak{N}_\psi \cap \mathfrak{N}_\psi^* = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*$ et soient $\xi, \eta \in X$ tels que $x = \pi(\xi)$, $y = \pi(\eta)$. Pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ on a $\sigma_t(x) \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^*$ et

$$\psi[\sigma_t(x)y] = (k\eta|k\Delta^{it}\xi^\#) = (k\eta|\Delta^{it}k\xi^\#).$$

Soit $k = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ la résolution spectrale de k et pour $n = 1, 2, \cdots$ posons $k_n = \int_0^n \lambda dE_\lambda$. On a $k_n \in Z$ et le lemme 4.10-(i) donne $k_n\xi \in \mathscr{D}^\#$, $(k_n\xi)^\# = k_n\xi^\#$. Quand $n \to \infty$, on obtient $k_n\xi \to k\xi$, $(k_n\xi)^\# = k_n\xi^\# \to k\xi^\#$ de sorte que $k\xi \in \mathscr{D}^\#$ et $(k\xi)^\# = k\xi^\#$. De même $k\eta \in \mathscr{D}^\#$ et $(k\eta)^\# = k\eta^\#$. Soit alors F la fonction associée aux éléments $k\xi$, $k\eta$ de $\mathscr{D}^\#$ par le lemme 4.3. Pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ on a $F(t) = \Psi(\sigma_t(x)y)$ et

$$F(t+i) = (\Delta^{it}k\xi|k\eta^\#) = (k\Delta^{it}\xi|k\eta^\#) = \psi[y\sigma_t(x)].$$

4.14. Lemme. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne à gauche*, $\mathfrak{B}$ *l'algèbre modulaire maximale correspondante*, ξ *un élément de* $\mathfrak{B}$, α *un élément de* $\mathscr{D}^\#$. *Alors* $\pi(\xi)\alpha$ *appartient à* $\mathscr{D}^\#$ *et* $(\pi(\xi)\alpha)^\# = \pi(\alpha^\#)\xi^\#$.

Le lemme résulte des relations suivantes valables pour tous $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{A}'$

$$\begin{aligned}(\pi(\xi)\alpha|\eta_1\eta_2^\flat) &= (\pi'(\eta_2)\pi(\xi)\alpha|\eta_1) = (\pi(\xi)\pi'(\eta_2)\alpha|\eta_1)\\ &= (\pi'(\eta_2)\alpha|\pi(\xi^\#)\eta_1) = (\pi(\alpha)\eta_2|\pi'(\eta_1)\xi^\#) = (\pi'(\eta_1^\flat)\pi(\alpha)\eta_2|\xi^\#)\\ &= (\pi(\alpha)\eta_2\eta_1^\flat|\xi^\#) = (\eta_2\eta_1^\flat|\pi(\alpha^\#)\xi^\#).\end{aligned}$$

4.15. Lemme. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne à gauche*, $\mathfrak{B}$ *l'algèbre modulaire maximale associée à* $\mathfrak{A}$, ξ *un élément de* $\mathscr{D}^\#$, *Si* $\pi(\xi)$ *et* Δ *sont permutables*, $\mathfrak{B}$ *est domaine essentiel de l'opérateur* $\pi(\xi)$.

Par définition de l'opérateur $\pi(\xi)$, $\mathfrak{A}'$ est domaine essentiel pour $\pi(\xi)$. Montrons donc que $\mathfrak{B}$ est partout dense dans $\mathfrak{A}'$ pour la norme de l'espace hilbertien $\mathscr{D}(\pi(\xi))$. Soit $\eta \in \mathfrak{A}'$ et soit E l'espace des fonctions de la forme $h * g$ où h, g sont des fonctions continues à support compact sur $\boldsymbol{R}$. Choisis sons une suite (f_n) d'éléments de E telle que les opérateurs $f_n(\log \Delta)$ convergent fortement vers I. D'après ((13), dém. th. 10.1), les éléments $\eta_n = f_n(\log \Delta)\eta$ appartiennent à $\mathfrak{B}$ et on a $\eta_n \to \eta$ et

$$\pi(\xi)\eta_n = \pi(\xi)f_n(\log \Delta)\eta = f_n(\log \Delta)\pi(\xi)\eta \to \pi(\xi)\eta,$$

ce qui démontre l'assertion.

4.16. Lemme. *Soient* a *et* b *deux opérateurs auto-adjoints positifs sur un espace hilbertien* H. *On suppose qu'il existe* $X \subset H$ *contenu dans le do-*

maine de a et dans celui de b qui soit domaine essentiel pour a, et on suppose que $||a\xi||^2 = ||b\xi||^2$ *pour tout* $\xi \in X$. *Alors* $a = b$.
(voir (7), dém. lemme 23).

4.17. Proposition. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne à gauche achevée et posons* $M = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. *Soit* $t \mapsto \sigma_t$ *le groupe à un paramètre d'automorphismes de* M *définis par* $\mathfrak{A}$. *Pour une forme linéaire positive normale* f *sur* M, *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) f *est K.M.S. avec la constante* $\beta = 1$ *pour* $t \mapsto \sigma_t$.

(ii) *il existe* $\alpha \in \mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$ *tel que* $\pi(\alpha) = \pi'(\alpha)$ *et tel que* $f = \omega_\alpha$.

(iii) *il existe un vecteur* α *dans l'adhérence du centre de l'algèbre* $\mathfrak{A}$ *tel que* $f = \omega_\alpha$.

Avant toute démonstration, notons que cette proposition donne une réciproque à la proposition 4.13. En effet, notons φ le poids canoniquement défini par $\mathfrak{A}$ sur M et soient $x \in \mathfrak{M}_\varphi^+$ puis $\xi \in \mathfrak{A}$ tel que $\pi(\xi) = x^{\frac{1}{2}}$. Si la condition (ii) est vérifiée on a

$$f(x) = (x\alpha|\alpha) = (\pi(\xi)\alpha|\pi(\xi)\alpha) = ||\pi'(\alpha)\xi||^2.$$

L'opérateur $k = \pi'(\alpha)$ est auto-adjoint positif d'après ((12), cor. 4.9), affilié au centre Z de M d'après la relation $\pi(\alpha) = \pi'(\alpha)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si la forme f est K.M.S., elle est invariante pour les automorphismes σ_t. D'après ((12), prop. 4.8) il existe $\alpha \in \mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$ unique tel que $f = \omega_\alpha$ et on a $\alpha = \alpha^\# = \alpha^\flat = \Delta\alpha$ d'où $\Delta^{it}\alpha = \alpha$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ ((12), prop. 2.5 et 4.3). Soit ξ un élément de l'algèbre modulaire maximale $\mathfrak{B}$ associée à $\mathfrak{A}$. D'après le lemme 4.14, on a

$$\pi(\xi)\alpha \in \mathscr{D}^\#, \quad [\pi(\xi)\alpha]^\# = \pi(\alpha)\xi^\#.$$

Soit alors F la fonction associée au couple $\pi(\xi^\#)\alpha$, $\pi(\alpha)\xi$ d'éléments de $\mathscr{D}^\#$ par le lemme 4.3. Pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, on a

$$F(t) = (\pi(\xi^\#)\alpha|\Delta^{it}\pi(\xi^\#)\alpha) = \omega_\alpha(\sigma_t[\pi(\xi)]\pi(\xi)^*); \quad F(t+i) = (\Delta^{it}\pi(\alpha)\xi|\pi(\alpha)\xi).$$

Comme f est K.M.S. avec la constante $\beta = 1$ pour $t \mapsto \sigma_t$, il existe une fonction G définie sur la bande B des $z \in \boldsymbol{C}$ tels que $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 1$, continue et bornée sur B, holomorphe à l'intérieur de B vérifiant pour tout $t \in R$

$$G(t) = \omega_\alpha(\sigma_t[\pi(\xi)]\pi(\xi)^*), \qquad G(t+i) = \omega_\alpha(\pi(\xi)^*\sigma_t[\pi(\xi)]).$$

Comme F et G coincident sur $\boldsymbol{R}$, on a $F = G$ et par suite $F(t+i) = G(t+i)$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$. Pour $t = 0$, cette relation donne (pour tout $\xi \in \mathfrak{B}$)

$$||\pi'(\alpha)\xi||^2 = ||\pi(\xi)\alpha||^2 = ||\pi(\alpha)\xi||^2.$$

D'après les lemmes 4.15 et 4.16, on a $\pi(\alpha) = \pi'(\alpha)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) D'après ((12), cor. 4.9), $\pi(\alpha) = \pi'(\alpha)$ est un opérateur auto-adjoint positif. D'après ((13), lemme 6.1), pour toute fonction numérique f à support compact contenu dans $]0, +\infty[$, l'élément $\eta(f) = (f_0 f)(\pi(\alpha))\alpha$ (où $f_0(t) = 1/t$) est contenu dans $\mathfrak{A}$ (et de même dans $\mathfrak{A}'$) et on a $\pi(\eta(f)) = f(\pi(\alpha)) = \pi'(\eta(f))$. On a donc $\pi(\eta(f)) \in Z$. Si on choisit une suite (f_n) de fonctions telle que $f_0 f_n$ converge simplement en croissant vers I sur $]0, +\infty[$, α est limite de $\eta(f_n)$ puisque α est dans l'image de $\pi(\alpha)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si α est limite d'une suite (α_n) d'éléments du centre de $\mathfrak{A}$, ω_α est limite normique des formes ω_{α_n}. Comme $\pi(\alpha_n)$ est dans le centre de M et borné, pour rour n le poids égal à ω_{α_n} sur $\mathfrak{M}_\varphi^+$ et à $+\infty$ sur $M^+ - \mathfrak{M}_\varphi^+$ est K.M.S. d'après la proposition 4.12. On en déduit que ω_α est K.M.S. d'après les lemmes suivants.

4.18. Lemme. *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, $\mathfrak{M}$ une sous-algèbre involutive de $\mathcal{Q}$ qui engendre $\mathcal{Q}$, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathcal{Q}$, β un nombre > 0, f un état normal de $\mathcal{Q}$. Pour que f soit K.M.S. pour $(\beta, t \mapsto \sigma_t)$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées*

a) *pour tout $x \in \mathfrak{M}$ on a $f(\sigma_t(x)) = f(x)$;*

b) *pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathfrak{M}$, il existe une fonction continue et bornée sur la bande des $z \in \mathbf{C}$ tels que $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq \beta$, holomorphe à l'intérieur de cette bande et telle que*

$$F(t) = f(\sigma_t(x)y),\ F(t+i) = f(y\sigma_t(x)) \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

(voir (13), dém. th. 13.13).

4.19. Lemme. *Soient $\mathcal{Q}$ une algèbre de von Neumann, E son prédual, $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathcal{Q}$, β un nombre > 0. L'ensemble des éléments de E^+ qui sont K.M.S. pour $(\beta, t \mapsto \sigma_t)$ est un sous-cône convexe réticulé et fermé de E^+.*

La démonstration est laissée au soin du lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

F. Combes

[1] Poids sur une C*-algèbre (J. Math. pures et appl., t. 47, 1968, p. 57–100).

F. Combes

[2] Sur les faces d'une C*-algèbre (Bull. Sc. Math., t. 93, 1969, p. 37–62).

F. Combes

[3] Poids associé à une algèbre hibertienne généralisée (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, p. 33–36).

F. Combes et F. Perdrizet

[4] Certains idéaux dans les espaces vectoriels ordonnés (J. Math. pures et appl., t. 49, 1970, p. 61–98).

J. DIXMIER
[5] Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann) (Gauthier-Villars, Paris, 1969).

J. DIXMIER
[6] Les C*-algèbres et leurs représentations (Gauthier-Villars, Paris, 1969).

J. DIXMIER
[7] Algèbres quasi-unitaires (Comment. Math. Helv., t. 26, 1952, p. 275–322).

R. V. KADISON
[8] States and representations (Trans. Amer. Math. Soc., t. 103, 1962, p. 304–319).

I. KAPLANSKY
[9] A theorem on rings of operators (Pacific J. Math., t. I, 1951, p. 227–232).

I. KOVACS ET J. SZUCS
[10] Ergodic type theorems in von Neumann algebras (Acta Sci. Math. Szeged, t. 27, p. 233–246).

G. K. PEDERSEN
[11] Measure theory for C*-algebras (Math. Scand., t. 19, 1966, p. 131–145).

F. PERDRIZET
[12] Eléments positifs relativement à une algèbre hilbertienne à gauche. (Voir ce même journal.)

M. TAKESAKI
[13] Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications (Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, 1970).

M. TAKESAKI
[14] Disjointness of the K.M.S.-states of different temperature.

M. TOMITA
[15] Standard forms of von Neumann algebras (the Vth functional analysis sumposium of the Math. Soc. of Japan, Sendai, 1967).

(Oblatum 29–II–1970)

François Combes,
28/A_1 Avenue du Panorama,
92-Bourg-la-Reine (France).