COMPOSITIO MATHEMATICA

F. PERDRIZET

Éléments positifs relatifs à une algèbre hilbertienne à gauche

Compositio Mathematica, tome 23, nº 1 (1971), p. 25-47
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1971__23_1_25_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 23, Fasc. 1, 1971, pag. 25–47
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

ELEMENTS POSITIFS RELATIFS A UNE ALGEBRE HILBERTIENNE A GAUCHE

par

F. Perdrizet

1. Introduction

Considérons l'algèbre hilbertienne généralisée associée à une algèbre de von Neumann possèdant un vecteur cyclique et séparateur. Dans ([11], ch. 15) Takesaki a introduit certains ensembles qui éclairent d'un jour nouveau le théorème de Radon-Nikodym non commutatif. Nous nous proposons de généraliser et de compléter si possible ce processus.

Rappelons les définitions et certains résultats de [11].

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche généralisée ([11] def. 2.1), c'est-à-dire une algèbre involutive sur $\boldsymbol{C}$ (l'involution étant notée $\xi \mapsto \xi^{\#}$) munie d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, telle que

1) Pour tous $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{A}$, on a $(\xi\eta|\zeta) = (\eta|\xi^{\#}\zeta)$

2) Pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$, l'application $\eta \mapsto \xi\eta$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$ est continue

3) La sous-algèbre $\mathfrak{A}^2$ de $\mathfrak{A}$ engendrée par les éléments de la forme $\xi\eta$, où $\xi, \eta \in \mathfrak{A}$, est dense dans $\mathfrak{A}$.

4) Si $\mathscr{H}$ désigne l'espace de Hilbert complété de $\mathfrak{A}$ pour le produit scalaire, l'application $\xi \mapsto \xi^{\#}$ de $\mathscr{H}$ dans son espace conjugué $\mathscr{H}^c$ est fermable. Nous noterons S sa fermeture.

Comme dans [11], pour $\xi \in \mathfrak{A}$, notons $\pi(\xi)$ l'unique opérateur borné de $\mathscr{H}$ prolongeant l'application $\eta \mapsto \xi\eta$, $\eta \in \mathfrak{A}$ et désignons par $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ l'algèbre de von Neumann sur $\mathscr{H}$ engendrée par $\pi(\mathfrak{A})$.

L'opérateur S défini par la propriété 4), considéré comme un opérateur de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, admet une décomposition polaire $J\Delta^{\frac{1}{2}}$, où J est une involution isométrique de $\mathscr{H}$ et Δ un opérateur autoadjoint positif inversible de $\mathscr{H}$ appelé opérateur modulaire de $\mathfrak{A}$. Nous noterons $\mathscr{D}^{\#}$ le domaine de S qui est aussi égal à celui de $\Delta^{\frac{1}{2}}$.

Nous dirons simplement algèbre hilbertienne à gauche au lieu d'algèbre hilbertienne à gauche généralisée; la terminologie algèbre hilbertienne à droite se comprend d'elle-même.

On associe à toute algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$, une algèbre hilbertienne à droite $\mathfrak{A}'$ de la manière suivante ([11] ch. 3). Si F désigne l'opérateur adjoint de S, considéré comme un opérateur de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, on a

$F = J\Delta^{-\frac{1}{2}}$ ([11] ch. 7). Notons $\mathscr{D}^\flat$ le domaine de F qui est égal aussi à celui de $\Delta^{-\frac{1}{2}}$. On considère alors l'ensemble $\mathfrak{A}'$ des éléments η de $\mathscr{D}^\flat$ tels que l'application $\xi \mapsto \xi\eta$, $\xi \in \mathfrak{A}$ soit continue et on désigne par $\pi'(\eta)$ l'unique opérateur borné de $\mathscr{H}$ qui prolonge cette application. On vérifie alors que $\mathfrak{A}'$ muni de la multiplication $\eta_1 \cdot \eta_2 = \pi'(\eta_2)\eta_1$, de l'involution $\xi \mapsto \xi^\flat = F\xi$ et du produit scalaire induit par celui de $\mathscr{H}$ est une algèbre hilbertienne à droite qui sera dite associée à $\mathfrak{A}$.

Remarquons que l'opérateur modulaire relatif à $\mathfrak{A}'$ est Δ^{-1}. Toutes les notations afférentes à $\mathfrak{A}'$ seront affectées d'un prime, ou d'un exposant bémol.

Réitérant le procédé en l'appliquant à $\mathfrak{A}'$, il existe une algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}''$ dont $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre involutive: nous l'appellerons l'algèbre hilbertienne à gauche achevée associée à $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ sera dite achevée si l'on a $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$).

Un cas particulier d'algèbre hilbertienne à gauche, à savoir celui d'algèbre hilbertienne modulaire ([11] def. 2.1) se révèle comme un outil fondamental de la théorie, le résultat principal s'énonçant: Pour toute algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$, il existe une sous-algèbre involutive $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{A}''$ qui est modulaire et telle que $\mathscr{B}'' = \mathfrak{A}''$ ([11] th. 10.1).

Enfin rappelons que l'application $x \mapsto \Delta^{it}x\Delta^{-it}$ (où $t \in \boldsymbol{R}$) est un automorphisme σ_t de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ ([11] cor 9.1). Nous noterons G le groupe à 1 paramètre des automorphismes modulaires σ_t.

Au paragraphe 2, nous introduisons quelques sous-ensembles de $\mathscr{H}$, associés à une algèbre hilbertienne à gauche achevée $\mathfrak{A}$. Les plus importants d'entre eux sont $\mathscr{F}^\sharp$, $\mathscr{P}^\sharp$, $\mathscr{P}a^\sharp$ (et leurs homologues en bémol). Notant pour tout $\xi \in \mathscr{H}$, $\rho(\xi)$ l'opérateur $\eta \mapsto \pi'(\eta)\xi$ de domaine $\mathfrak{A}'$, $\mathscr{F}^\sharp$ (resp. $\mathscr{P}^\sharp$, resp. $\mathscr{P}a^\sharp$) n'est autre que l'ensemble des éléments ξ de $\mathscr{H}$ tels que $\rho(\xi)$ soit fermable (resp. positif, resp. positif essentiellement autoadjoint). Le cône $\mathscr{P}^\sharp$ avait été introduit dans ([11] ch. 15) dans un cas particulier. Généralisant ([11] lemme 15.2) nous montrons que $\mathscr{P}^\sharp$, adhèrence de l'ensemble $\mathfrak{A}^+$ des éléments ξ de $\mathfrak{A}$ tel que $\pi(\xi) \geqq 0$, engendre algèbriquement $\mathscr{D}^\sharp$ et est le polaire du cône $\mathscr{P}^\flat$ pour la dualité associée au produit scalaire de $\mathscr{H}$. Nous servant de la décomposition polaire d'un opérateur fermé, nous donnons le lien entre $\mathscr{F}^\sharp$ et $\mathscr{P}a^\sharp$, à savoir que $\xi \in \mathscr{F}^\sharp$ si et seulement s'il existe un opérateur partiellement isométrique u de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ tel que $u\xi \in \mathscr{P}a^\sharp$ et $u^*u\xi = \xi$.

Au paragraphe 3, nous supposons que $\mathfrak{A}$ est une algèbre hilbertienne; c'est un cas particulier d'algèbre hilbertienne à gauche où les involutions $\sharp$ et $\flat$ sont égales. Nous avons dans ce cas $\mathscr{F}^\sharp = \mathscr{H}$, $\mathscr{P}^\flat = \mathscr{P}a^\sharp$ (ensemble que nous noterons $\mathscr{P}$). L'application $\Phi : \xi \mapsto \omega_\xi$ de $\mathscr{H}$ sur l'ensemble des formes positives normales sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$, quand on la restreint à $\mathscr{P}$ est alors une bijection qui envoit $\mathfrak{A}^+$ sur l'ensemble des formes linéaires positives normales sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ majorées par un multiple de la trace naturelle.

Au paragraphe 4, nous nous replaçons dans le cas général d'une algèbre hilbertienne à gauche achevée $\mathfrak{A}$. Considérant l'ensemble $\mathfrak{A}_0$ intersection de l'espace vectoriel $\mathscr{H}_0$ des vecteurs propres de Δ associés à la valeur propre 1 et de $\mathfrak{A}$, nous montrons que $\mathfrak{A}_0$ est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}$ qui est une algèbre hilbertienne achevée que nous dirons associée à $\mathfrak{A}$. L'adhérence de $\mathfrak{A}_0$ est égale à $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{P}_0$ (voir paragraphe 3) est égale à $\mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$ et il existe une projection positive normale Ψ de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ sur l'adhérence faible de $\pi(\mathfrak{A}_0)$ dans $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$. Soit alors ω une forme positive normale G-invariante sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$. Appliquant le théorème d'Alaoglu-Birkhoff nous démontrons que $\omega(\mathrm{x}) = \omega(\Psi(x))$ pour tout $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$ et que l'application $\Phi : \xi \mapsto \omega_\xi$ de $\mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$ dans l'ensemble des formes positives normales G-invariantes sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ est une bijection.

Au paragraphe 5, nous construirons quelques exemples qui permettent de préciser les positions respectives de tous les sous-ensembles de $\mathscr{H}$ introduits au paragraphe 2. La méthode principalement utilisée est un transport d'opérateurs "malades" définis dans un espace de Hilbert $\mathscr{K}$ sur des opérateurs définis dans $\mathscr{K} \otimes \mathscr{K}$.

Dans le paragraphe 6, nous nous plaçons dans le cas particulier d'une algèbre hilbertienne à gauche $\mathfrak{A}$ associée à une algèbre de von Neumann $\mathscr{M}$, sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, possédant un vecteur cyclique et séparateur ξ_0 ([11] th. 12.1). Considérant alors la surjection $\Phi : \xi \mapsto \omega_\xi$ de $\mathscr{H}$ sur l'ensemble des formes positives normales de $\mathscr{M}$ nous montrons que $\mathscr{F}^\flat$ est l'image réciproque par Φ des formes normales presque dominées par ω_{ξ_0}. Soit ensuite ω une forme positive normale sur $\mathscr{M}$, nous regardons la question d'existence et d'unicité d'un opérateur t positif autoadjoint affilié à $\mathscr{M}$ tel que $\omega = \omega_{t\xi_0}$ (c'est là une des formes du théorème de Radon-Nikodym non commutatif). On connaissait l'existence ([11] th. 15.1). Nous montrons qu'en général nous n'avons pas l'unicité car $\mathscr{P}^\# \neq \mathscr{P}^\flat$, mais que dans le cas d'une algèbre de von Neumann finie ou d'une forme G-invariante la réponse est affirmative. Ceci répond à une question de Takesaki ([11] th. 15.1 et lignes suivantes).

L'auteur remercie vivement J. Dixmier pour son aide et ses encouragements ainsi que F. Combes pour de fructueuses discussions sur ces questions.

2. Quelques ensembles associés à une algèbre hilbertienne à gauche achevée

2.1. NOTATIONS. Pour $\xi \in \mathscr{H}$, notons $\rho(\xi)$ (resp. $\rho'(\xi)$) l'opérateur défini sur $\mathfrak{A}'$ (resp. $\mathfrak{A}$) par $\rho(\xi)\eta = \pi'(\eta)\xi$, $\eta \in \mathfrak{A}'$ (resp. $\rho'(\xi)\theta = \pi(\theta)\xi$, $\theta \in \mathfrak{A}$).

Soients $\mathscr{F}^\#$ (resp. $\mathscr{F}^\flat$) l'ensemble des éléments $\xi \in \mathscr{H}$ tels que $\rho(\xi)$

(resp. $\rho'(\xi)$) soit un opérateur fermable, $\mathscr{B}^\#$ (resp. $\mathscr{B}^\flat$) l'ensemble des éléments $\xi \in \mathscr{F}^\#$ (resp. $\mathscr{F}^\flat$) tels que $\rho(\xi)$ (resp. $\rho'(\xi)$) soit borné. On a alors le diagramme suivant, les flèches désignant des inclusions.

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{B}^\# \arrow[dr] & & \\
\mathfrak{A} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathscr{F}^\# \arrow[r] & \mathscr{H} \\
& \mathscr{D}^\# \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Diagramme 1

Nous montrerons que ces inclusions en général sont strictes (5.7).

Soit $\xi \in \mathscr{F}^\#$ (resp. $\mathscr{F}^\flat$). Notons $\pi(\xi)$ (resp. $\pi'(\xi)$) la fermeture de $\rho(\xi)$ (resp. $\rho'(\xi)$). Soient $\mathscr{P}^\#$ (resp. $\mathscr{P}^\flat$), l'ensemble contenu dans $\mathscr{F}^\#$ (resp. $\mathscr{F}^\flat$) des éléments $\xi \in \mathscr{H}$ tels que $\rho(\xi)$ (resp. $\rho'(\xi)$) soit positif, $\mathscr{P}a^\#$ (resp. $\mathscr{P}a^\flat$) l'ensemble des $\xi \in \mathscr{P}^\#$ (resp. $\mathscr{P}^\flat$) tels que $\pi(\xi)$ (resp. $\pi'(\xi)$) soit autoadjoint, $\mathfrak{A}^+$ (resp. $\mathfrak{A}'^+$) l'ensemble des éléments $\xi \in \mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}'$) tels que $\pi(\xi)$ (resp. $\pi'(\xi)$) soit positif, $\mathscr{I}^+$ (resp. $\mathscr{I}'^+$) l'ensemble des éléments de $\mathscr{H}$ de la forme $\xi\xi^\#$, $\xi \in \mathfrak{A}$ (resp. $\xi\xi^\flat$, $\xi \in \mathfrak{A}'$). On a alors le diagramme suivant:

$$\mathscr{I}^+ \longrightarrow \mathfrak{A}^+ \longrightarrow \mathscr{P}a^\# \longrightarrow \mathscr{P}^\#$$

Diagramme 2

Nous montrerons qu'en général les inclusions sont strictes (5.7).

2.2. LEMME. *L'application $\xi \mapsto \rho(\xi)$ est une injection. Soit ξ appartenant à $\mathscr{F}^\#$, alors l'opérateur $\pi(\xi)$ est affilié à l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ associé à $\mathfrak{A}$.*

Remarquons que la même assertion est valable pour π', $\xi \in \mathscr{F}^\flat$ et $\mathfrak{A}'$. Dans la suite ce genre de remarque sera implicite.

Soit un filtre $(\eta_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ dans $\mathfrak{A}'$ tel que $\pi'(\eta_\alpha)$ tend fortement vers l'opérateur 1. Soit $\xi \in \mathscr{H}$. On a $\xi = \lim_\alpha \pi'(\eta_\alpha)\xi = \lim \rho(\xi)\eta_\alpha$ d'où la 1ère assertion.

Soit $\xi \in \mathscr{F}^\#$. Montrons d'abord que pour tous $\eta \in \mathfrak{A}'$ et $x' \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})'$, $x'\eta$ appartient à $\mathscr{D}(\pi(\xi))$ et que l'on a $x'\rho(\xi)\eta = \pi(\xi)x'\eta$.

Choisissons une suite $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots$ dans $\mathfrak{A}'$ telle que

$$\lim_n \pi'(\eta_n)\eta = x'\eta \qquad \lim_n \pi(\eta_n)(\pi'(\eta)\xi) = x'\pi'(\eta)\xi;$$

on a

$$\pi'(\eta_n)\pi'(\eta)\xi = \pi'(\eta\eta_n)\xi = \rho(\xi)\eta\eta_n = \rho(\xi)(\pi'(\eta_n)\eta)$$

On en déduit que $x'\eta \in \mathscr{D}(\pi(\xi))$ et que l'on a

$$\pi(\xi)x'\eta = \lim_n \pi'(\eta_n)\pi'(\eta)\xi = x'\pi'(\eta)\xi = x'\rho(\xi)\eta$$

ce qu'il fallait montrer. Soit maintenant $\theta \in \mathscr{D}(\pi(\xi))$. Il existe une suite $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \cdots$ dans $\mathfrak{A}'$ telle que

$$\lim_n \theta_n = \theta, \qquad \lim_n \rho(\xi)\theta_n = \pi(\xi)\theta$$

d'où

$$\lim_n x'\theta_n = x'\theta \qquad \lim_n x'\rho(\xi)\theta_n = x'\pi(\xi)\theta$$

Comme d'après ce qui précéde on a pour tout n, $x'\rho(\xi)\theta_n = \pi(\xi)x'\theta_n$ on en déduit que $x'\theta \in \mathscr{D}(\pi(\xi))$ et l'on a $\pi(\xi)x'\theta = x'\pi(\xi)\theta$.

L'assertion résulte alors de ([3] ch. I § 3 exer 7a)).

2.3. LEMME. *Soient ξ un élément de $\mathscr{D}^\#$ tel que l'opérateur $\pi(\xi)$ soit positif, $t \mapsto f(t)$ une fonction réelle sur $\mathbf{R}$, borèlienne, bornée et à support contenu dans un segment* $[0, \lambda]$. *Notons h l'opérateur prolongement de Friedrichs de $\pi(\xi)$. Alors $hf(h)\xi$ appartient à $\mathfrak{A}$ et l'on a $\pi(hf(h)\xi) = h^2 f(h)$.*

Soit $\theta = hf(h)\xi$. Pour tout $\eta \in \mathfrak{A}' \subset \mathscr{D}(\pi(\xi)) \subset \mathscr{D}(h)$, on a

$$\begin{aligned}(\eta|\theta) &= (\eta|hf(h)\xi) = (h\eta|f(h)\xi)\\ &= (f(h)\pi(\xi)\eta|\xi) = (f(h)\pi'(\eta)\xi|\xi) = (\pi'(\eta)f(h)\xi|\xi)\\ &= (f(h)\xi|\pi'(\eta)^*\xi) = (f(h)\xi|\pi(\xi)\eta^\flat) = (hf(h)\xi|\eta^\flat)\end{aligned}$$

puisque $f(h)\xi$ appartient à $\mathscr{D}(h)$. Par définition $\theta = hf(h)\xi$ appartient donc à $\mathscr{D}^\#$.

On a d'autre part pour $\eta \in \mathfrak{A}'$

$$\pi(hf(h)\xi)\eta = \pi'(\eta)hf(h)\xi = hf(h)\pi'(\eta)\xi = hf(h)h\xi = h^2 f(h)\xi$$

Comme $||h^2 f(h)|| < \infty$, on a l'assertion

2.4. REMARQUE. Si l'opérateur $\pi(\xi)$ est affilié à une algèbre de von Neumann $\mathscr{C}$, alors $\pi(hf(h)\xi)$ appartient à $\mathscr{C}$.

2.5. PROPOSITION. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et ξ un élément de $\mathscr{H}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'élément ξ appartient à $\mathscr{P}^\#$*

(ii) *L'élément ξ appartient à $\mathscr{D}^\#$, $\xi^\#$ est égal à ξ et l'operateur $\pi(\xi)$ est positif.*

(iii) *L'élément ξ appartient à l'adhérence normique de $\mathscr{I}^+$.*

(iv) *On a* $(\xi|\eta) \geqq 0$ *pour tout* $\eta \in \mathscr{P}^{\flat}$.

Soient $\xi \in \mathscr{H}$, $\eta \in \mathfrak{A}'$. On a

$$(1) \qquad (\xi|\eta\eta^{\flat}) = (\xi|\pi'(\eta)^*\eta) = (\pi'(\eta)\xi|\eta) = (\rho(\xi)\eta|\eta)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $\xi \in \mathscr{P}^{\sharp}$. D'après (1), pour tout $\eta \in \mathfrak{A}'$, on a $(\xi|\eta\eta^{\flat}) \geqq 0$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{A}'$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{3} i^n(\xi|(\eta_1+i^n\eta_2)(\eta_1+i^n\eta_2)^{\flat}) = \sum_{n=0}^{3} i^n((\eta_1+i^n\eta_2)(\eta_1+i^n\eta_2)^{\flat}|\xi)$$

d'où en développant $4(\xi|\eta_2\eta_1^{\flat}) = 4(\eta_1\eta_2^{\flat}|\xi)$. D'après ([11] lemme 3.4), ξ appartient à $\mathscr{D}^{\sharp}$ et on a $\xi = \xi^{\sharp}$. Comme $\pi(\xi)$ est égal à la fermeture de $\rho(\xi)$, $\pi(\xi)$ est un opérateur positif, d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit un élément ξ de $\mathscr{D}^{\sharp}$ tel que $\pi(\xi)$ soit positif. Notons h le prolongement de Friedrichs de $\pi(\xi)$. Choisissons une suite croissante $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ de fonctions réelles sur $\boldsymbol{R}$ positives et continues telles que $f_n(t) = 0$ si $t \notin [0, n]$,

$$\lim_n t^3 f_n^2(t) = \chi_{]0,+\infty[}(t), \; t \in \boldsymbol{R}.$$

D'après le lemme 2.3, $hf_n(h)\xi$ appartient à $\mathfrak{A}^+$. Soit ξ_n l'élément de $\mathscr{I}^+$ égal à $hf_n(h)\xi \cdot hf_n(h)\xi = h^3 f_n^2(h)\xi$. Comme $\xi \in \overline{\operatorname{Im}\pi(\xi)} \subseteqq \overline{\operatorname{Im} h}$ on a $\lim_n \xi_n = \xi$, d'où (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Par les implications précédentes, on a montré également que tout élément de $\mathscr{P}^{\flat}$ est adhérent à $\mathscr{I}'^+$. Soient $\eta \in \mathfrak{A}'$ et $\xi \in \mathfrak{A}$. On a:

$$\begin{aligned}(\xi\xi^{\sharp}|\eta\eta^{\flat}) &= (\pi(\xi)\xi^{\sharp}|\pi'(\eta)^*\eta) = (\pi'(\eta)\pi(\xi)\xi^{\sharp}|\eta) \\ &= (\pi(\xi)\pi'(\eta)\xi^{\sharp}|\eta) = (\pi(\xi)^*\eta|\pi(\xi)^*\eta) \geqq 0\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on démontre aisement l'implication.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Comme $\mathscr{I}'^+$ est inclu dans $\mathscr{P}^{\flat}$, l'égalité (1) donne le résultat.

2.6. PROPOSITION. *Soit* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne à gauche achevée. L'espace vectoriel* $\mathscr{D}^{\sharp}$ *est engendré linéairement par le cône* $\mathscr{P}^{\sharp}$.

Soit ξ appartenant à $\mathscr{D}^{\sharp}$ et montrons que ξ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{P}^{\sharp}$. On peut supposer que ξ est égal à $\xi^{\sharp}$. Comme $\mathfrak{A}$ est dense dans $\mathscr{D}^{\sharp}$ pour le norme dièse ($\xi \mapsto (||\xi||^2 + ||\xi^{\sharp}||^2)^{\frac{1}{2}}$), il existe une suite $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots$ dans $\mathfrak{A}$ telle que pour tout n, $\eta_n = \eta_n^{\sharp}$, pour $n \geqq 2$, $||\eta_n|| \leqq 1/2^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \xi$. Soit $a_n = \pi(\eta_n)$ et considérons sa décomposition polaire $u_n h_n$, où h_n est un opérateur borné positif et u_n un opérateur partiellement isométrique. Comme a_n est un opérateur hermitien, on a

$$u_n h_n = h_n u_n, \qquad u_n^* = u_n$$

Par un raisonnement classique, il existe 2 projecteurs e_n et f_n tels que

$$u_n = e_n - f_n, \quad e_n h_n = h_n e_n, \quad f_n h_n = h_n f_n, \quad e_n f_n = 0$$

Soient $\alpha_n = e_n \eta_n$, $\beta_n = -f_n \eta_n$. On a

$$\rho(\alpha_n) \subseteq e_n \pi(\eta_n) = e_n a_n = e_n u_n h_n = e_n h_n$$
$$\rho(\beta_n) \subseteq -f_n \pi(\eta_n) = -f_n a_n = -f_n u_n h_n = f_n h_n$$

D'après la proposition 2.5 (i) $\Rightarrow$ (ii), α_n et β_n appartiennent à $\mathfrak{A}^+$ et l'on a $\|\alpha_n\|$, $\|\beta_n\| \leqq 1/2^n$. Comme η_n appartient à la fermeture de l'image de $\pi(\eta_n)$, on a $\eta_n = (e_n + f_n)\eta_n = \alpha_n - \beta_n$.

Soient

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \qquad \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

Alors α et β appartiennent à $\mathscr{P}^\sharp$ et l'on a $\xi = \alpha - \beta$.

2.7. LEMME. *Soient a et b deux opérateurs fermés dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}$ tel que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$ et tel que la fermeture de $a|\mathscr{D}$ (resp. $b|\mathscr{D}$) soit égale à a (resp. b). Supposons qu'il existe un opérateur partiellement isométrique u de $\mathscr{H}$ tel que $a|\mathscr{D} = ub|\mathscr{D}$ et dont le support final (resp. initial) contient l'image de a (resp. b). Alors on a $ub = a$.*

La démonstration est facile et laissée au soin du lecteur.

2.8. PROPOSITION. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée, $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ l'algèbre de von Neumann sur $\mathscr{H}$ associée et ξ un élément de $\mathscr{H}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'élément ξ appartient à $\mathscr{F}^\flat$*

(ii) *Il existe un opérateur partiellement isométrique $u' \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})'$ tel que $u'^*\xi \in \mathscr{P}a^\flat$ et $u'u'^*\xi = \xi$*

(iii) *Il existe un élément θ appartenant à $\mathscr{P}a^\flat$ tel que les formes positives normales ω_ξ et ω_θ sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ soient égales.*

Sous ces conditions l'élément de $\mathscr{P}a^\flat$ associé à ξ défini en (iii) est unique.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soient $\xi \in \mathscr{F}^\flat$ et $a = \pi'(\xi)$. Considérons la décomposition polaire à gauche de a, soit uh, où u est un opérateur partiellement isométrique de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})'$ et h un opérateur autoadjoint positif affilié à $\mathscr{L}(\mathfrak{A})'$ (voir lemme 2.2).

Comme ξ appartient à $\overline{\operatorname{Im} a}$, on a $u'u'^*\xi = \xi$. Soit $\eta \in \mathfrak{A}$. On a

$$\rho'(u'^*\xi)\eta = \pi(\eta)u'^*\xi = u'^*\pi(\eta)\xi = u'^*\rho'(\xi)\eta = h\eta$$

Ceci montre que $\rho'(u'\xi)$ est un opérateur fermable et d'après le lemme 2.7, on a $\pi'(u'^*\xi) = u'^*\pi'(\xi) = h$, d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soient $\theta = u'^*\xi \in \mathscr{P}a^\flat$ donné par (ii) et $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$. On a

$$\omega_\theta(x) = (x\theta|\theta) = (xu'^*\xi|u'^*\xi) = (u'xu'^*\xi|\xi)$$
$$= (xu'u'^*\xi|\xi) = (x\xi|\xi) = \omega_\xi(x)$$

d'où l'assertion

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soient $\xi \in \mathscr{H}$ et $\theta \in \mathscr{P}a^\flat$ tels que pour tout $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$ l'on ait $(x\xi|\xi) = (x\theta|\theta)$. On a pour tout $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$, $||x\xi|| = ||x\theta||$. Il existe donc un opérateur partiellement isométrique v' de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})'$ tel que

$$v'x\theta = x\xi,\ x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}),\ \text{et}\ v'(\mathscr{H} - \{\mathscr{L}(\mathfrak{A})\theta\}) = 0$$

Soit $\eta \in \mathfrak{A}$. On a

$$v'\pi'(\theta)\eta = v'\pi(\eta)\theta = \pi(\eta)v'\theta = \pi(\eta)\xi = \rho'(\xi)\eta$$

Comme $\overline{\operatorname{Im}\pi'(\theta)}$ (resp. $\overline{\operatorname{Im}\rho'(\xi)}$) est contenu dans le support initial (resp. final) de v', l'opérateur $\rho'(\xi)$ est fermable, d'où (i). De plus d'après le lemme 2.7 on a $\pi'(\xi) = v'\pi'(\theta)$.

Reprenant le raisonnement (iii) $\Rightarrow$ (i), en supposant que ξ appartient à $\mathscr{P}a^\flat$, on a $\pi'(\xi) = v'\pi'(\theta)$. Comme le support initial de v' est $\overline{\operatorname{Im}\pi'(\theta)}$ on a

$$(\pi'(\xi))^2 = \pi'(\theta)v'^*v'\pi'(\theta) = (\pi'(\theta))^2, \qquad \text{d'où}\quad \pi'(\theta) = \pi'(\xi)$$

D'après le lemme 2.2 on a $\xi = \theta$.

2.9. Remarque. Soient $\xi \in \mathscr{F}^\flat$ et θ l'élément de $\mathscr{P}a^\flat$ associé à ξ défini dans la proposition 2.8 (iii). Si $\pi'(\xi)$ est affilié à une algèbre de von Neumann $\mathscr{B}$, $\pi'(\theta)$ est affilié à $\mathscr{B}$.

3. Cas d'une algèbre hilbertienne

3.1. Lemme. *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée. Alors $\mathfrak{A}$ est une algèbre hilbertienne si et seulement si pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$ l'on a $\xi^\# = \xi^\flat = J\xi$. Dans ce cas on a*

$$\mathscr{D}^\# = \mathscr{F}^\# = \mathscr{D}^\flat = \mathscr{F}^\flat = \mathscr{H},\ \mathscr{P}a^\# = \mathscr{P}a^\flat = \mathscr{P}^\# = \mathscr{P}^\#.$$

Nous noterons le dernier ensemble $\mathscr{P}$.

La seule assertion non triviale est l'égalité $\mathscr{P}^\# = \mathscr{P}a^\#$. D'après ([3] ch. I, § 5, exer 6) pour tout $\xi \in \mathscr{H}$ tel que $J\xi = \xi$, on a $\pi(\xi) = \pi(\xi)^*$, d'où l'assertion

3.2. Remarque. Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne associée à un groupe discret commutatif ([3] ch. III, § 7, n° 6) les éléments bornés relativement à $\mathfrak{A}$ ont une transformée de Fourier bornée: il en résulte que l'on a en général $\mathfrak{A}'' \neq \mathscr{D}^\#$ et $\mathscr{B}^\# \neq \mathscr{F}^\#$.

3.3. Proposition. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne achevée et* $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$, *l'algèbre de von Neumann associée. L'application* $\Phi : \xi \mapsto \omega_\xi$ *de* $\mathscr{P}$ *dans l'ensemble des formes positives normales sur* $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ *est une bijection. Pour que* ω_ξ *soit majoré par un multiple de la trace naturelle associée, il faut et il suffit que* ξ *appartienne à* $\mathfrak{A}^+$.

D'après le lemme 3.1 et les propositions 2.8 et 6.2, Φ est une bijection.

Soient $\xi \in \mathfrak{A}$ et $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})^+$. On a $\omega_\xi(x) = (x^{\frac{1}{2}}\xi | x^{\frac{1}{2}}\xi)$. Or $x^{\frac{1}{2}}\xi$ appartient à $\mathfrak{A}$ et $\pi(x^{\frac{1}{2}}\xi) = x^{\frac{1}{2}}\pi(\xi)$. Alors

$$\omega_\xi(x) = \mathrm{Tr}\,(\pi(x^{\frac{1}{2}}\xi)^*\pi(x^{\frac{1}{2}}\xi)) = \mathrm{Tr}\,(x^{\frac{1}{2}}\pi(\xi)^2x^{\frac{1}{2}}) \leqq \|\pi(\xi)\|^2\,\mathrm{Tr}\,(x)$$

Réciproquement soit $\xi \in \mathscr{P}$ tel que ω_ξ soit majoré par un multiple de la trace. D'après ([1] prop. 2.4), il existe $a \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})'^+$, $\alpha \in \mathscr{H}$ tels que pour tout $\eta \in \mathfrak{A}$ l'on ait $\pi(\eta)\alpha = a^{\frac{1}{2}}\eta$ et $\omega_\alpha = \omega_\xi$. Donc α appartient à $\mathfrak{A}^+$ et d'après l'unicité, on a $\alpha = \xi$.

3.4. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres de von Neumann sur les espaces de Hilbert $\mathscr{H}$ et $\mathscr{K}$ et Φ un isomorphisme de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{B}$. Pour tout opérateur a autoadjoint positif affilié à $\mathscr{A}$, soit $a = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ sa décomposition spectrale. Considérons une suite de nombres réels $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, $\lim_n \lambda_n = +\infty$. Alors nous appellerons $\varphi(a)$ l'opérateur défini dans $\mathscr{K}$ par

$$\mathscr{D}(\varphi(a)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi(e_{\lambda_i})(\mathscr{K}) \tag{1}$$

(2) Pour $\xi \in \Phi(e_{\lambda_i})(\mathscr{K})$, on a $\varphi(a)\xi = \Phi(ae_{\lambda_i})\xi$.

On montre facilement que l'on définit ainsi un opérateur à domaine dense, essentiellement autoadjoint, positif, affilié à $\mathscr{B}$ et qu'il y a indépendance par rapport au choix de la suite $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$. De plus l'application $a \mapsto \Phi(a)$, où $\Phi(a)$ est la fermeture de $\varphi(a)$, est une bijection de l'ensemble des opérateurs autoadjoints positifs dans $\mathscr{H}$ affiliés à $\mathscr{A}$ sur l'ensemble des opérateurs autoadjoints positifs dans $\mathscr{K}$ affiliés à $\mathscr{B}$. Dans cette correspondance les projecteurs spectraux s'échangent par l'application Φ. C'est dans ce sens que nous parlerons du transport de structure des opérateurs autoadjoints positifs. Nous nous servirons d'un procédé analogue au paragraphe 5.

Le corollaire suivant est connu ([10] th. 14, p. 433, [8] th. 1). Nous en donnerons une démonstration simple.

3.5. Corollaire. *Soient* $\mathscr{M}$ *une algèbre de von Neumann semi-finie,* ϕ *une trace normale semi-finie fidèle sur* $\mathscr{M}$, ω *une forme normale positive sur* $\mathscr{M}$. *Il existe un opérateur autoadjoint positif* h *affilié à* $\mathscr{M}$ *tel que si* $\int_0^\infty \lambda de_\lambda$ *désigne sa décomposition spectrale et si* $e_n = \int_{1/n}^n de_\lambda$, *l'on ait:* (i) $\phi(he_n) < +\infty$ *pour tout* n. (ii) *Pour* $x \in \mathscr{M}$, $\omega(x) = \lim_n \phi(xhe_n)$.

Sous ces conditions h est unique. C'est un opérateur borné si et seulement si ω est majoré par un multiple de la trace ϕ.

Par transport de structure, on peut se ramener au cas où $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ avec $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne achevée, et où ϕ est la trace naturelle. D'après la proposition 3.3, il existe $\xi \in \mathcal{P}$ tel que $\omega = \omega_\xi$. Soient $k = \pi(\xi)$ et $h = k^2$. Ce sont des opérateurs autoadjoints positifs (lemme 3.1). Soient $k = \int_0^\infty \lambda df_\lambda$, $h = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ leurs décompositions spectrales. Par un théorème spectral classique, on a

$$e_n = \int_{1/n}^{n} de_\lambda = \int_{1/\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} df_\lambda = f_{\sqrt{n}}$$

Pour tout entier n considérons la fonction g_n sur $\boldsymbol{R}$

$$g_n(t) = 0 \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\cup [\sqrt{n}, +\infty[$$

$$g_n(t) = \frac{1}{t} \text{ si } t \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}\right[.$$

D'après le lemme 2.3, $\xi_n = kg_n(k)\xi \in \mathfrak{A}^+$ et l'on a $\lim_n \xi_n = \xi$. Les formes normales ω_{ξ_n} convergent donc en norme vers ω_ξ. D'après le lemme 2.3 et ([3] ch. I, § 5, lemme 1), pour $x \in \mathcal{M}^+$, on a

$$\omega_{\xi_n}(x) = (x^{\frac{1}{2}}\xi_n | x^{\frac{1}{2}}\xi_n) = \phi((x^{\frac{1}{2}}k^2 g_n(k))^* x^{\frac{1}{2}}k^2 g_n(k)) = \phi(xk^2 f_{\sqrt{n}}) = \phi(xhe_n)$$

d'où l'assertion d'existence.

Montrons l'unicité. Soit h vérifiant les conditions (i) et (ii). Comme on a $\phi(he_n) < \infty$, il existe pour tout entier n,

$$\xi_n \in \mathfrak{A}^+ \quad \text{tel que} \quad \pi(\xi_n) = h^{\frac{1}{2}}e_n.$$

Soient $n > m$. On a

$$(\xi_n - \xi_m | \xi_n - \xi_m) = \phi(h^{\frac{1}{2}}e_n - h^{\frac{1}{2}}e_m)^2) = \phi(h(e_n - e_m)) = \omega(e_n - e_m).$$

On en déduit que la suite $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ est de Cauchy. Soit ξ sa limite dans $\mathcal{P}$. Montrons que $h = \pi(\xi)^2$. Soit $\eta \in \mathfrak{A}$, on a

$$\pi(\xi)\eta = \pi'(\eta)\xi = \lim_n \pi'(\eta)\xi_n = \lim_n \pi(\xi_n)\eta = \lim h^{\frac{1}{2}}e_n\eta.$$

Comme $\lim_n e_n\eta = P_{\overline{\mathrm{Im}\, h}}(\eta)$, on a $\eta \in \mathcal{D}(h^{\frac{1}{2}})$ et $\pi(\xi)\eta = h^{\frac{1}{2}}\eta$. L'opérateur $h^{\frac{1}{2}}$ prolongeant $\pi(\xi)$, d'après le lemme 3.1 et la maximalité des opérateurs autoadjoints, on a $\pi(\xi) = h^{\frac{1}{2}}$. Enfin un calcul simple montre que $\omega = \omega_\xi$. L'unicité résulte alors de la proposition 3.3.

3.6. Remarque. L'exemple classique de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\mathfrak{A}$ les opérateurs de Hilbert-Schmidt montre que $\mathscr{I}^+$ est différent de $\mathfrak{A}^+$.

4. Algèbre hilbertienne associée à une algèbre hilbertienne à gauche et formes G-invariantes

4.1. LEMME. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche, $\mathfrak{A}''$ l'algèbre hilbertienne à gauche achevée associée, $\mathfrak{A}_1$ une sous-algèbre hilbertienne à gauche modulaire de $\mathfrak{A}''$ telle que $\mathfrak{A}_1'' = \mathfrak{A}''$. Soit ξ un élément de $\mathscr{D}^\#$ tel que $\xi^\#$ appartienne à $\mathfrak{A}'$. Alors pour tout $\eta \in \mathfrak{A}_1$, on a*

$$J(\xi \cdot \eta) = J\eta \cdot J\xi, \quad J\pi(\xi)J|\mathfrak{A}_1 = \pi'(J\xi)|\mathfrak{A}_1$$

D'après ([11] th. 9.1), on a $\Delta^{\frac{1}{2}}(\Delta^{-\frac{1}{2}}\eta \cdot \xi^\#) = \eta \cdot \Delta^{\frac{1}{2}}\xi^\#$, où $\eta \in \mathfrak{A}_1$. Soit $\eta_1^\# = \Delta^{-\frac{1}{2}}\eta$. On a

$$\Delta^{\frac{1}{2}}((\xi\eta_1)^\#) = \Delta^{\frac{1}{2}}(\eta_1^\# \cdot \xi\ ) = \Delta^{\frac{1}{2}}\eta_1^\# \cdot \Delta^{\frac{1}{2}}\xi^\#.$$

Comme

$$(\xi \cdot \eta_1)^\# = \Delta^{-\frac{1}{2}}J(\xi \cdot \eta_1), \quad \xi^\# = \Delta^{-\frac{1}{2}}J\xi, \quad \eta_1^\# = \Delta^{-\frac{1}{2}}J\eta_1$$

([11] th. 7.1), on obtient $J\eta_1 \cdot J\xi = J(\xi \cdot \eta_1)$ d'où la lère relation.

Soit $\eta \in \mathfrak{A}_1$, on a

$$J\pi(\xi)J\eta = J(\xi \cdot J\eta) = J(J\eta)J\xi = \pi'(J\xi)\eta$$

d'où la 2ème relation.

4.2. NOTATIONS. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche dans $\mathscr{H}$. Notons $\mathscr{H}_0$ l'ensemble des éléments ξ de $\mathscr{D}^\# \cap \mathscr{D}^\flat$ tels que $\xi^\# = \xi^\flat$ et $\mathscr{C}$ l'algèbre de von Neumann des éléments x de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ tels que $\sigma_t(x) = x$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$.

4.3. PROPOSITION: *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche dans $\mathscr{H}$ et ξ un élément de $\mathscr{H}$.*

a) *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\xi \in \mathscr{H}_0$

(ii) $\xi \in \mathscr{D}^\# \cap \mathscr{D}^\flat$ *et l'on a* $J\xi = \xi^\# = \xi^\flat$

(iii) $\xi \in \mathscr{D}(\Delta)$ *et* $\Delta\xi = \xi$

(iv) $\xi \in \mathscr{D}^\#$ *et* $\pi(\xi)$ *est affilié à* $\mathscr{C}$

b) *on a les propriétés suivantes*

(i) $\mathscr{H}_0$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathscr{H}$ *et* $\mathscr{H}_0 = J(\mathscr{H}_0) = \mathscr{H}_0{}^\# = \mathscr{H}_0{}^\flat$

(ii) *Le projecteur orthogonal de* $\mathscr{H}$ *sur* $\mathscr{H}_0$ *appartient à* $\mathscr{C}'$

(iii) *On a les égalités* $\mathfrak{A}'' \cap \mathscr{H}_0 = \mathfrak{A}' \cap \mathscr{H}_0$ *et* $\mathfrak{A}''^+ \cap \mathscr{H}_0 = \mathfrak{A}'^+ \cap \mathscr{H}_0$.

a) (i) $\Rightarrow$ (iii). Soit $\xi \in \mathscr{H}_0$. On a $\xi = (\xi^\flat)^\flat = (\xi^\#)^\flat = \Delta\xi$ d'après ([11] th. 7.1)

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Soit $\xi \in \mathscr{D}(\Delta)$ tel que $\Delta\xi = \xi$. On a $\Delta^{-\frac{1}{2}}\xi = \Delta^{\frac{1}{2}}\xi = \xi$. D'après ([11] th. 7.1), on a $J\xi = J\Delta^{-\frac{1}{2}}\xi = J\Delta^{\frac{1}{2}}\xi = \xi^\# = \xi^\flat$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) est trivial.

Montrons que (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Soit $\xi \in \mathscr{D}^\#$. Pour $\eta \in \mathfrak{A}'$, on a grâce au fait que $\Delta^{it}\xi \in \mathscr{D}(\Delta^{\frac{1}{2}})$ et d'après ([11] cor. 9.1)

$$(1) \qquad \Delta^{it}\pi(\xi)\Delta^{-it}\eta = \Delta^{it}\pi'(\Delta^{-it}\eta)\xi = \Delta^{it}\Delta^{-it}\pi'(\eta)\Delta^{it}\xi = \pi(\Delta^{it}\xi)\eta$$

Remarquant alors que $\pi(\xi)$ est affilié à $\mathscr{C}$ si et seulement si il permute à Δ^{it} pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, l'égalité ci-dessus et le lemme 2.2 montrent que cette dernière propriété est équivalente à l'égalité $\Delta^{it}\xi = \xi$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, soit encore par calcul spectral $\Delta\xi = \xi$

b) (i) D'après a) – (iii), $\mathscr{H}_0$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$. Soit $\xi \in \mathscr{H}_0$. D'après a) – (ii), on a $(J\xi)^\# = (\xi^\#)^\# = (\xi^\flat)^\flat = (J\xi)^\flat$, d'où l'assertion.

(ii) Soit p le projecteur orthogonal de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}_0$. D'après le théorème d'Alaoglu-Birkhoff ([9] § 146), p appartient à l'adhérence faible de l'enveloppe convexe des Δ^{it}, $t \in \boldsymbol{R}$, d'où l'assertion.

(iii) Par raison de symétrie, il suffit de montrer que $\mathfrak{A}' \cap \mathscr{H}_0$ (resp. $\mathfrak{A}'^+ \cap \mathscr{H}_0$) est inclus dans $\mathfrak{A}'' \cap \mathscr{H}_0$ (resp. $\mathfrak{A}''^+ \cap \mathscr{H}_0$). Soit $\xi \in \mathfrak{A}' \cap \mathscr{H}_0$. On a $J\xi = \xi^\# = \xi^\flat \in \mathfrak{A}'$. D'après le lemme 4.1 dont nous introduisons les notations, on a

$$(2) \qquad J\pi(\xi)J|\mathfrak{A}_1 = \pi'(J\xi)|\mathfrak{A}_1 = \pi'(\xi^\flat)|\mathfrak{A}_1$$

D'après ([11] lemme 14.6) ξ est borné à gauche et comme $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{D}^\#$, on en déduit que $\xi \in \mathfrak{A}'' \cap \mathscr{H}_0$. Si de plus $\xi \in \mathfrak{A}'^+ \cap \mathscr{H}_0$, on a $\xi = \xi^\flat$ et $\pi'(\xi) \geqq 0$. La relation (2) donne alors la fin de l'assertion.

4.4. PROPOSITION. *Soient* $\mathfrak{A}$ *une algèbre hilbertienne à gauche et* $\mathfrak{A}_0$ *l'intersection de* $\mathfrak{A}$ *et de* $\mathscr{H}_0$. *Alors* $\mathfrak{A}_0$ *est une sous algèbre involutive de* $\mathfrak{A}$ *qui est une algèbre hilbertienne. Supposons que* $\mathfrak{A}$ *soit achevée.*

(i) *Pour tout* $\xi \in \mathscr{H}_0$, *l'algèbre spectrale* $\mathfrak{A}_0(\xi)$ *de* ξ ([11] § 6) *est incluse dans* $\mathfrak{A}_0$.

(ii) $\mathfrak{A}_0$ *est une algèbre hilbertienne achevée.*

(iii) *L'adhérence de* $\mathfrak{A}_0$ *est égale à* $\mathscr{H}_0$.

D'après la proposition 4.3 a) – (iv), $\mathfrak{A}_0$ est une sous-algèbre involutive de $\mathfrak{A}$. D'après ([11] lemme 5.1), c'est une algèbre hilbertienne à gauche.

Sur $\mathfrak{A}_0$ les différentes involutions sont confondues, d'après la proposition 4.3 a) – (ii), d'où la première assertion.

Supposons désormais $\mathfrak{A}$ achevée.

(i) D'après la définition ([11] § 6) et la proposition 4.3 a) – (iv) l'assertion est immédiate.

(ii) Soit ξ un élément borné relativement à $\mathfrak{A}_0$; ξ appartient à $\mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{D}^\sharp$. D'après (i) et ([11] lemme 6.3), ξ est donc borné à gauche dans $\mathscr{H}$. Il appartient donc à $\mathfrak{A}_0$.

(iii) Soit ξ un élément de $\mathscr{H}_0$. D'après la proposition 4.3 a) – (iv) tous les éléments des décompositions polaires de $\pi(\xi)$ sont affiliés à $\mathscr{C}$. L'assertion résulte alors de la démonstration de ([11] lemme 3.3).

4.5. Définition et notations. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche. Nous appellerons algèbre hilbertienne associée à $\mathfrak{A}$, la sous-algèbre involutive $(\mathfrak{A}'')_0$ de $\mathfrak{A}''$. Nous noterons tous les éléments afférents à cette algèbre avec un indice zéro. Enfin notons $\mathscr{M}_0$ l'adhérence faible de $\pi((\mathfrak{A}'')_0)$: c'est une sous-algèbre involutive faiblement fermée de $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{A})$.

4.6. Proposition. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée, $\mathfrak{A}_0$ l'algèbre hilbertienne associée, p la projection orthogonale de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}_0$.*

(i) *On a $p(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_0$. Pour $\eta \in \mathfrak{A}$, on a $J(p\eta) = p\eta^\sharp$, $\pi_0(p\eta) = p\pi(\eta)p$. Pour $\eta \in \mathfrak{A}$ et $\xi \in \mathfrak{A}_0$, on a $p(\eta\xi) = p\eta \cdot \xi$, $p(\xi\eta) = \xi \cdot p\eta$.*

(ii) *On a $p\mathscr{L}(\mathfrak{A})p = \mathscr{C}p = \mathscr{M}_0 p = \mathscr{L}(\mathfrak{A}_0)$.*

(iii) *L'application $\varphi_1 : x_0 \mapsto xp$ de $\mathscr{M}_0$ dans $\mathscr{M}_0 p$ est un isomorphisme d'algèbres involutives.*

(iv) *Soit φ_2 l'application $y \mapsto pyp$ de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ dans $\mathscr{M}_0 p$. Alors l'application $\Psi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ est la projection normale positive unique de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ sur $\mathscr{M}_0$ telle que pour tout $\eta \in \mathfrak{A}$, l'on ait $\Psi(\pi(\eta)) = \pi(p\eta)$. De plus pour $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$, $y, z \in \mathscr{M}_0$, on a $\Psi(yxz) = y\Psi(x)z$.*

Soient $\eta \in \mathfrak{A}$ et $\xi \in \mathfrak{A}_0$, on a

$$(p\eta|\xi) = (\eta|p\xi) = (\eta|\xi) = (\eta^\sharp|\xi^\flat) = (p\eta^\sharp|J\xi), \quad \text{d'où} \quad p\eta^\sharp = J(p\eta)$$

Soient $\eta \in \mathfrak{A}$, ξ, $\alpha \in \mathfrak{A}_0$, on a

$$(\pi_0'(\xi)p\eta|\alpha) = (p\eta|\alpha\xi^\flat) = (\eta|\alpha\xi^\flat) = (\pi'(\xi)\eta|\alpha) = (p\pi(\eta)\xi|\alpha)$$

Ceci montre que $p\eta$ est borné relativement à $\mathfrak{A}_0$ et que l'on a $\pi_0(p\eta) = p\pi(\eta)p$.

Il est alors immédiat que $p\mathfrak{A}$ est égal à $\mathfrak{A}_0$. Pour montrer la fin de l'assertion, comme l'application $\xi \mapsto \pi_0(\xi)$ de $\mathfrak{A}_0$ dans $\mathscr{L}(\mathfrak{A}_0)$ est une injection, il suffit de montrer $\pi_0(p(\eta\xi)) = \pi_0(p\eta \cdot \xi)$ (et la même égalité de l'autre côté). D'après la proposition 4.3 b) – (ii) p commute à $\mathscr{C}$ donc à $\mathscr{M}_0$. On a d'après ce qui précéde:

$$\pi_0(p(\eta\xi)) = p\pi(\eta\xi)p = p\pi(\eta)p\pi_0(\xi) = \pi_0(p\eta)\pi_0(\xi) = \pi_0(p\eta \cdot \xi)$$

d'où l'assertion.

(ii) D'après la proposition 4.3 b) – (ii), on a $\mathscr{M}_0 p \subseteq \mathscr{C} p \subseteq p\mathscr{L}(\mathfrak{A})p$. D'après (i), on a alors $\mathscr{L}(\mathfrak{A}_0) = p\mathscr{L}(\mathfrak{A})p = \mathscr{M}_0 p$, d'où (ii).

(iii) Soit q le plus grand projecteur de $\mathscr{M}_0$. Il existe un filtre Λ dans $\mathfrak{A}_0$ tel que $\pi(\eta_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ tend fortement vers q. Soit $x \in \mathscr{M}_0$ tel que $xp = 0$. On a $x\eta_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Lambda$ et donc $x\pi(\eta_\alpha) = \pi(x\eta_\alpha) = 0$, ce qui implique $x = 0$. L'application φ_1 est donc un isomorphisme de $\mathscr{M}_0$ sur $\mathscr{M}_0 p$, d'où (iii).

(iv) On voit facilement que $\Psi = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$ est une projection positive normale de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ sur $\mathscr{M}_0$, telle que si $\eta \in \mathfrak{A}$, on ait $\Psi(\pi(\eta)) = \phi_1^{-1}(\pi_0(p\eta)) = \pi(p\eta)$ et l'unicité est triviale. Soient enfin $y, z \in \mathscr{M}_0$, $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$. On a

$$\Psi(yxz) = \phi_1^{-1}(pyxzp) = \phi_1^{-1}(yppxpzp) = y\,\Psi(x)z.$$

4.7. Corollaire. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée et $\mathfrak{A}_0$ l'algèbre hilbertienne associée. Alors $\mathscr{P}_0$ est égal à l'intersection de $\mathscr{P}^\sharp$ et de $\mathscr{P}^\flat$.*

Soit $\xi \in \mathscr{P}^\sharp \cap \mathscr{P}^\flat \subseteq \mathscr{H}_0$. L'opérateur positif $\pi(\xi)$ est d'après la proposition 4.3 a) – (iv) affilié à $\mathscr{C}$. Soit h son prolongement de Friedrichs. Il existe une suite croissante $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ de fonctions réelles sur $\boldsymbol{R}$ continues à support compact dans $]0, +\infty[$ telle que $\lim_n tf_n(t) = \chi_{]0,+\infty[}(t)$, $t \in R$. D'après la remarque 2.4 et le lemme 2.3, $\xi_n = hf_n(h)\xi$ appartient à $\mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}^+ \subseteq \mathfrak{A}_0^+$ et l'on a $\lim_n \xi_n = \xi$. On en déduit que ξ appartient à $\mathscr{P}_0$.

Soit $\xi \in \mathfrak{A}_0^+$. D'après la proposition 4.6 (iii), ξ appartient à $\mathfrak{A}^+ \cap \mathscr{H}_0$. D'après la proposition 4.3 b) – (iii), ξ appartient à $\mathfrak{A}'^+ \cap \mathscr{H}_0$ et donc ξ appartient à $\mathscr{P}^\sharp \cap \mathscr{P}^\flat$. L'assertion résulte alors du fait que $\mathscr{P}_0$ est l'adhérence de $\mathfrak{A}_0^+$.

4.8. Proposition. *Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée, $\mathfrak{A}_0$ l'algèbre hilbertienne associée, Ψ la projection normale de $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ sur $\mathscr{M}_0$ définie précédemment, G le groupe à 1 paramètre des automorphismes modulaires et ω une forme positive normale G-invariante sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.*

(i) *Pour tout $x \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})$, on a $\omega(x) = \omega(\Psi(x))$.*

(ii) *L'application $\Phi : \xi \mapsto \omega_\xi$ est une bijection de $\mathscr{P}^\sharp \cap \mathscr{P}^\flat$ sur l'ensemble formes positives normales G-invariantes sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.*

(i) Soit p la projection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}_0$. Il suffit de montrer que pour tout $\eta \in \mathfrak{A}$, l'on a $\omega(\pi(\eta)) = \omega(\pi(p\eta))$. Comme $\Psi(\pi(\eta)) = \pi(p\eta)$ (proposition 4.6 (iv)), l'assertion résultera de la continuité ultrafaible de ω et Ψ.

Soit $\eta \in \mathfrak{A}$. D'après le théorème d'Alaoglu-Birkhoff, il existe une filtre Λ d'éléments a_α, $\alpha \in \Lambda$ tels que:

$$a_\alpha = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_j^\alpha \Delta^{it(\alpha, j)}, \quad \lambda_j^\alpha \geqq 0 \quad \sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_j^\alpha = 1, \quad \lim\nolimits_\alpha \text{forte } a_\alpha = p$$

($t(\alpha, j) \in \boldsymbol{R}$ pour tout $\alpha \in \Lambda$ et $j = 1, \cdots, n_\alpha$).

Montrons que la limite ultrafaible de

$$\sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_j^\alpha \pi(\Delta^{it(\alpha, j)}\eta) = b_\alpha$$

existe et est égale à $\pi(p\eta)$. Comme on est dans une boule, il suffit de montrer que pour $\theta \in \mathfrak{A}'$, $\lim_\alpha (b_\alpha \theta | \theta) = (\pi(p\eta)\theta|\theta)$. On a

$$(b_\alpha \theta|\theta) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \lambda_j^\alpha (\pi'(\theta)\Delta^{it(\alpha, j)}\eta|\theta) = (a_\alpha \eta|\theta\theta^\flat),$$

d'où

$$\lim_\alpha (b_\alpha \theta|\theta) = (p\eta|\theta\theta^\flat) = (\pi(p\eta)\theta|\theta)$$

D'autre part d'après ([11] cor. 9.1), on a $\pi(\Delta^{it}\eta) = \Delta^{it}\pi(\eta)\Delta^{-it}$. On en déduit $\omega(b_\alpha) = \omega(\pi(\eta))$ pour tout $\alpha \in \Lambda$. Le passage à la limite donne l'assertion

(ii) Soit $\xi \in \mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$. On a $\xi = \xi^\# = \xi^\flat$ (proposition 2.5). D'après la proposition 4.3 a) – (iii), on a $\Delta^{it}\xi = \xi$ pour tout $t \in \boldsymbol{R}$ et la forme positive normale ω_ξ est G-invariante.

Montrons que Φ est une surjection. Soit ω une forme positive normale, G-invariante sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ et β sa restriction à $\mathscr{M}_0$. Reprenons les notations de la proposition 4.6. D'après la proposition 3.3, il existe $\xi \in \mathscr{P}_0$ tel que pour tout $\eta \in \mathfrak{A}_0$ on ait

$$\beta(\pi(\eta)) = \omega_\xi(\varphi_1(\pi(\eta)) = (\pi_0(\eta)\xi|\xi) \tag{3}$$

D'après le corollaire 4.7, $\xi \in \mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$ et la proposition 4.6 (i) permet d'écrire

$$\beta(\pi(\eta)) = (\pi(\eta)\xi|\xi) \quad \text{pour tout } \eta \in \mathfrak{A}_0 \tag{4}$$

Les deux formes positives normales ω et ω_ξ sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ étant invariantes par G et coincidant sur $\mathscr{M}_0$, on a d'après (i) l'égalité partout. L'injectivité résulte facilement de la proposition 3.3 et de ce qui précède.

4.9. Corollaire: *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée. On a la relation $\mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat = \mathscr{P}a^\# \cap \mathscr{P}a^\flat$.*

On a $\mathscr{P}a^\# \cap \mathscr{P}a^\flat \subseteq \mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$. Soit $\xi \in \mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$. D'après la proposition 2.5 on a $\xi \in \mathscr{D}^\# \cap \mathscr{D}^\flat$ et $\xi = \xi^\# = \xi^\flat$. Par raison de symétrie, il suffit de montrer que ξ appartient à $\mathscr{P}a^\flat$. La forme positive normale ω_ξ sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ est G-invariante d'après la proposition 4.8. D'autre part d'après la proposition 2.8, la remarque 2.9 et la proposition 4.3 a) – (iv), il existe $\theta \in \mathscr{P}a^\flat \cap \mathscr{H}_0$ tel que les 2 formes linéaires ω_ξ et ω_θ sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ soient égales. Comme l'on a $\mathscr{P}a^\flat \cap \mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{P}_0 = \mathscr{P}^\# \cap \mathscr{P}^\flat$, la proposition 4.8 (ii) montre que $\xi = \theta$ et on a l'assertion cherchée.

5. Exemples, séparation des différents ensembles introduits au §2

Nous allons reprendre avec plus de précisions le procédé de 3.4.

5.1. NOTATIONS. Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et t un opérateur linéaire dans $\mathscr{H}$ de domaine $\mathscr{D}(t)$. Notons $\varphi(t)$ l'opérateur défini dans $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ tel que

1) Le domaine $\mathscr{D}(\varphi(t))$ de $\varphi(t)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la forme $\xi \otimes \eta$ avec $\xi \in \mathscr{D}(t)$ et $\eta \in \mathscr{H}$.

2) On a

$$\varphi(t)\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \eta_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} t\xi_i \otimes \eta_i, \quad \xi_i \in \mathscr{D}(t), \ \eta_i \in \mathscr{H}$$

Il est clair que $\varphi(t)$ est un opérateur linéaire. Si cet opérateur est fermable, nous noterons $\Phi(t)$ sa fermeture.

La démonstration de ce qui suit est laissée au lecteur.

5.2. LEMME. *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, t_1, t_2 des opérateurs linéaires dans $\mathscr{H}$ et $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ l'algèbre de von Neumann des opérateurs linéaires bornés sur $\mathscr{H}$.*

(i) *Si $\mathscr{D}(t)$ est dense dans $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}(\varphi(t))$ est dense dans $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$.*

(ii) *Si t_2 prolonge t_1, alors $\varphi(t_2)$ prolonge $\varphi(t_1)$.*

(iii) *L'opérateur $\varphi(t)$ est affilié à $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \otimes 1$. Il en est de même de sa fermeture quand elle existe.*

(iv) *L'application $\Phi : b \mapsto \Phi(b)$ de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \otimes 1$ est un isomorphisme d'algèbres de von Neumann.*

(v) *Si t est un opérateur autoadjoint positif, alors $\varphi(t)$ est un opérateur positif essentiellement autoadjoint dans $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$.*

5.3. Rappelons les propriétés de la transformation T de Cayley ([9] p. 317–324). On sait que T est une bijection entre les opérateurs symétriques fermés de $\mathscr{H}$ et les opérateurs partiellement isométriques v de $\mathscr{H}$ tels que $(1-v)(v^*v)(\mathscr{H})$ soit dense dans $\mathscr{H}$. Soient s un opérateur symétrique fermé de $\mathscr{H}$ et v un opérateur partiellement isométrique de $\mathscr{H}$ tel que $(1-v)(v^*v)(\mathscr{H})$ soit dense dans $\mathscr{H}$.

1) Le support initial (resp. final) de $T(s)$ est le sous-espace vectoriel $\mathscr{I}(s)$ (resp. $\mathscr{J}(s)$) de $\mathscr{H}$ des éléments de la forme $(s+i\cdot 1)\eta$, $\eta \in \mathscr{D}(s)$ (resp. $(s-i\cdot 1)\eta$). Posons $\xi = (s+i\cdot 1)\eta$, $\eta \in \mathscr{D}(s)$. On a $T(s)\xi = (s-i\cdot 1)\eta$.

2) Le domaine de $T^{-1}(v)$ est égal à $(1-v)(v^*v)(\mathscr{H})$.
Pour $\eta = (1/2i)(1-v)\xi$ avec $v^*v\xi = \xi$, on a $T^{-1}(v)\eta = \frac{1}{2}(1+v)\xi$.

Rappelons enfin que s admet un prolongement autoadjoint (resp. est autoadjoint) si et seulement si les dimensions $\mathscr{H} - \mathscr{I}(s)$ et $\mathscr{H} - \mathscr{J}(s)$ sont égales (resp. nulles).

5.4 LEMME. *Soient deux opérateurs a_1, a_2 de $\mathscr{H}$ autoadjoints positifs distincts. Alors $\Phi(a_1)$ est distinct de $\Phi(a_2)$.*

D'après 5.3, comme a_1 est distinct de a_2, les transformés de Cayley $T(a_1)$ et $T(a_2)$ sont 2 opérateurs unitaires distincts de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. D'après le lemme 5.2 (iv), $\Phi \circ T(a_1)$ est distinct de $\Phi \circ T(a_2)$. Soit $x = \eta \otimes \theta$ avec $\eta \in \mathscr{D}(a_k)$, $k = 1$ ou 2, $\theta \in \mathscr{H}$. Soit $\xi = (a_k + i \cdot 1)\eta$. D'après 5.3–1), on a

$$\xi \otimes \theta = (a_k + i \cdot 1)\eta \otimes \theta, \quad T(a_k)\xi = (a_k - i \cdot 1)\eta$$

$$\Phi \circ T(a_k)\,(\xi \otimes \theta) = (a_k - i \cdot 1)\eta \otimes \theta$$

d'où
$$\eta \otimes \theta = (1/2i)(1 - \Phi \circ T(a_k))(\xi \otimes \theta).$$

D'après 5.3, $T^{-1} \circ \Phi \circ T(a_1)$ et $T^{-1} \circ \Phi \circ T(a_2)$ existent et sont 2 opérateurs autoadjoints distincts. De plus d'après 5.3–2), $\eta \otimes \theta$ appartient à $\mathscr{D}(T^{-1} \circ \Phi \circ T(a_k))$ et

$$T^{-1} \circ \Phi \circ T(a_k)(\eta \otimes \theta) = \tfrac{1}{2}[1 + \Phi \circ T(a_k)](\xi \otimes \theta) = a_k \eta \otimes \theta.$$

Donc $T^{-1} \circ \Phi \circ T(a_k)$ prolonge $\varphi(a_k)$. D'après le lemme 5.2 (v) et la maximalité des opérateurs autoadjoints, on a $\Phi(a_k) = T^{-1} \circ \Phi \circ T(a_k)$ et l'assertion est démontrée.

5.5. LEMME. *Considérons un espace hilbertien séparable $\mathscr{K}$, une algèbre de von Neumann $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{K}$ possédant un vecteur totaliseur et séparateur ξ_0. Pour tout $\xi \in \mathscr{K}$, nous noterons $\rho(\xi)$ l'opérateur $a'\xi_0 \to a'\xi$ de domaine $\mathscr{M}'\xi_0$.*

(i) *On peut choisir $\mathscr{K}$, $\mathscr{M}$, ξ_0 tels qu'il existe deux opérateurs a_1 et a_2 autoadjoints positifs distincts affiliés à $\mathscr{M}$ vérifiant $\xi_0 \in \mathscr{D}(a_1) \cap \mathscr{D}(a_2)$ et $a_1\xi_0 = a_2\xi_0 \neq 0$.*

(ii) *On peut choisir $\mathscr{K}$, $\mathscr{M}$, ξ_0, ξ tels que l'opérateur $\rho(\xi)$ ne soit pas fermable.*

(i) Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable. D'après ([6] ou [9] p. 336), il existe un opérateur symétrique fermé positif s possédant deux prolongements autoadjoints positifs t_1 et t_2 distincts. Choisissons une suite de vecteurs de $\mathscr{D}(s)$, $g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots$ dense dans $\mathscr{D}(s)$ avec $s(g_1) \neq 0$. Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, il existe une base orthonormale de $\mathscr{H}$, $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ dans $\mathscr{D}(s)$ avec $s(e_1) \neq 0$.

Choisissonsune suite de nombres réels $> 0, \lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n, \cdots$ telle que $\sup(\lambda_n, \lambda_n \|s(e_n)\|) \leqq 1/n^2$.

Soient maintenant $\mathscr{K} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$, $\mathscr{M} = \mathscr{L}(\mathscr{H}) \otimes 1$,

$$\xi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$$

$a_1 = \Phi(t_1)$, $a_2 = \Phi(t_2)$. Montrons que ξ_0 est totalisateur pour $\mathscr{M}$. Soient deux entiers m et n. Il existe un opérateur $b \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que pour

$p \neq m$, $be_p = 0$ *et* $be_m = e_n$. On a alors $\Phi(b)\xi_0 = \lambda_m e_n \otimes e_m \neq 0$, d'où l'assertion. De la même facon on montre que ξ_0 est totalisateur pour $\mathscr{M}' = 1 \otimes \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et donc séparateur pour $\mathscr{M}$.

D'après les lemmes 5.2 (iii), (v) et 5.4, a_1 et a_2 sont deux opérateurs autoadjoints positifs distincts affiliés à $\mathscr{M}$. D'après le lemme 5.2 (ii), a_1 et a_2 prolonge $\varphi(s)$ et donc $\Phi(s)$. Montrons que $\xi_0 \in \mathscr{D}(\Phi(s))$. Soit pour tout n, $\xi_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i$. On a $\xi_n \in \mathscr{D}(\Phi(s))$ et $\lim_n \xi_n = \xi_0$. D'autre part soient p, q, 2 entiers avec $q < p$. On a

$$\|\varphi(s)\xi_p - \varphi(s)\xi_q\| \leqq \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{p^2}$$

La suite $\varphi(s)\xi_1, \varphi(s)\xi_2, \cdots, \varphi(s)\xi_n, \cdots$ est donc de Cauchy; soit ξ sa limite. On a alors $\xi_0 \in \mathscr{D}(\Phi(s))$ et $\Phi(s)\xi_0 = \xi$. Comme $(\varphi(s)\xi_n | \eta \otimes e_1) = \lambda_1(s(e_1)|\eta)$ pour tout n et $\eta \in \mathscr{H}$, on a $\xi \neq 0$ et l'assertion est démontrée.

(ii) Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable et t un opérateur linéaire à domaine dense dans $\mathscr{H}$ non fermable. Choissisons une suite $g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots$ dans $\mathscr{D}(t)$ dense dans $\mathscr{D}(t)$ avec $t(g_1) \neq 0$. D'autre part, il existe une suite $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ dans $\mathscr{D}(t)$ telle que $\lim_n f_n = 0$, $\lim_n t(f_n) = k \neq 0$. Appliquant alors le procédé d'orthogonalisation de Schmidt à la suite $g_1, f_1, g_2, \cdots, g_n, f_n, \cdots$ il existe une base orthonormale de $\mathscr{H}$, $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ dans $\mathscr{D}(t)$ telle que $t(e_1) \neq 0$ et telle que chaque f_n soit combinaison linéaire d'un nombre fini de e_i. En remplacant s par t, choisissons des nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$, comme dans (i). On pose $\mathscr{K} = \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$, $\mathscr{M} = \mathscr{L}(\mathscr{H}) \otimes 1$, $\xi_0 = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n e_n \otimes e_n$. De la même facon que dans (i), ξ_0 est un vecteur cyclique et séparateur pour $\mathscr{M}$. De même si $\xi_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i$, la suite $\varphi(t)\xi_1, \varphi(t)\xi_2, \cdots, \varphi(t)\xi_n, \cdots$ est de Cauchy avec pour limite un vecteur $\xi \neq 0$. Comme ξ_0 est séparateur pour $\mathscr{M}$, l'application $a'\xi_0 \to a'\xi$ de domaine $\mathscr{M}'\xi_0$ définit bien un opérateur linéaire $\rho(\xi)$ dans $\mathscr{H}$.

Il est facile de voir que pour tout n, il existe $b_n \in \mathscr{M}'$ tel que

$$e_n \otimes e_1 = b_n(\xi_0), \quad b_n(\xi) = t(e_n) \otimes e_1 = \rho(\xi)(b_n(\xi_0)).$$

Considérons les éléments de la forme $\eta_n = f_n \otimes e_1$. On a $\eta_n \in \mathscr{D}(\rho(\xi))$, $\lim_n \eta_n = 0$, $\lim_n \rho(\xi)\eta_n = k \otimes e_1 \neq 0$, d'où l'assertion.

5.6. Exemple d'une algèbre hilbertienne à gauche achevée $\mathfrak{A}$, telle que $\mathscr{B}^\# \neq \mathfrak{A}$.

Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable, $e_1, e_2 \cdots e_k, \cdots$ une base orthonormale de $\mathscr{H}$, $p(e_1), p(e_2), \cdots, p(e_k), \cdots$ les projecteurs de dimension 1 correspondants.

Considérons un poids ψ sur $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ de la forme $x \to \sum_{k=1}^\infty \lambda_k(xe_k|e_k)$ où les λ_k sont des nombres réels > 0. Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne à gauche achevée associée (voir [2] th. 2.13). Nous allons choisir $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \cdots$ et un élément $y \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $\psi(y^*y) < +\infty$ et $\psi(yy^*) = +\infty$, ce qui montrera que $\mathscr{B}^\#$ est différent de $\mathfrak{A}$.

Soit n un entier positif. Considérons la matrice d'ordre n, $z_n = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = 1$ pour $j \geqq i$, $a_{ij} = 0$ pour $j < i$. Choisissons une suite $\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(n), \cdots$ de nombres réels > 0 telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \|z_n\|^{-1}\alpha(n) < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \|z_n\|^{-1}\alpha(n) = +\infty$$

Posons $q(n) = \sum_k p(e_k)$ où

$$k = \frac{(n-1)n}{2} + 1, \frac{(n+1)n}{2} + 2, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}.$$

La matrice z_n étant considérée comme la matrice d'un opérateur par rapport à la base e_k de $q(n)(\mathscr{H})$, notons $y = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^{-1} q(n) z_n q(n)$ et posons pour

$$k = \frac{(n-1)n}{2} + 1, \cdots, \frac{n(n+1)}{2}, \quad \lambda_k = \alpha(n)\left((n+1) - \left(k - \frac{n(n-1)}{2}\right)\right).$$

On a alors $y \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \psi(y^*y) < +\infty$ et $\psi(yy^*) = +\infty$.

5.7. Retour sur les inclusions considérées en 2.1.

1) Soit $\mathscr{M}$ une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert $\mathscr{K}$ possédant un vecteur cyclique et séparateur ξ_0. D'après ([11] th. 12.1), $\mathscr{M}\xi_0$ est une algèbre hilbertienne à gauche achevée, l'algèbre hilbertienne à droite associée étant $\mathscr{M}'\xi_0$.

Choisissant alors $\mathscr{M}, \mathscr{K}, \xi_0, \xi$ comme dans le lemme 5.5 (ii), on voit immédiatement que $\xi \notin \mathscr{F}^\#$ et donc, en général $\mathscr{F}^\#$ est différent de $\mathscr{H}$. D'après la remarque 3.2, on a en général $\mathfrak{A} \neq \mathscr{D}^\#$, $\mathscr{B}^\# \neq \mathscr{F}^\#$ et 5.6 montre que $\mathfrak{A}$ est différent de $\mathscr{B}^\#$. Ceci permet de dire que toutes les inclusions du diagramme 1 sont strictes.

2) Choisissons $\mathscr{K}, \mathscr{M}, \xi_0, a_1, a_2$ comme dans le lemme 5.5 (i) et considérons l'algèbre hilbertienne à gauche $\mathscr{M}\xi_0$. On a $\pi(a_1\xi_0) \subset a_1, a_2$. Ceci montre que $\mathscr{P}^\#$ est différent de $\mathscr{P}a^\#$. D'après la remarque 3.6, on a $\mathscr{I}^+ \neq \mathfrak{A}^+$ et le lemme 3.1 montre que $\mathfrak{A}^+$ est différent de $\mathscr{P}a^\#$. Donc les inclusions du diagramme 2 sont strictes.

5.8. Remarque. Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche achevée et ξ un élément de $\mathscr{D}^\#$. Le paragraphe 5.7 montre qu'en général on a $\pi(\xi^\#) \neq \pi(\xi)^*$ car $\mathscr{P}^\# \neq \mathscr{P}a^\#$.

6. Formes normales sur une algèbre de von Neumann ayant un vecteur cyclique et séparateur

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche. Dans ce paragraphe, nous allons en particulier nous préoccuper de l'application $\xi \mapsto \omega_\xi$ de $\mathscr{H}$ dans l'ensemble des formes normales sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.

6.1. Lemme (*voir aussi* ([2] 2.16)). *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann dans $\mathscr{H}$, $\mathscr{Z}$ son centre. Supposons qu'il existe dans $\mathscr{A}$ une involution J possédant les propriétés suivantes*: (i) $J\mathscr{A}J = \mathscr{A}'$; (ii) $JcJ = c^*$ *pour tout* $c \in \mathscr{Z}$. *Alors toute forme normale positive sur $\mathscr{A}$ est de la forme ω_ξ avec ξ.*

D'après ([3] ch. III, § 1, lemme 7), $\mathscr{A}'$ est produit d'algèbres de von Neumann $\mathscr{B}'$ possédant l'une ou l'autre des propriétés suivantes: (i) $\mathscr{B}'$ est de genre dénombrable, ou; (ii) il existe une famille non dénombrable (e_i'), $i \in I$ de projecteurs équivalents de $\mathscr{B}'$ 2 à 2 orthogonaux de somme 1. Alors $\mathscr{B} = J\mathscr{B}'J$ est soit de genre dénombrable, soit à commutant proprement infini. L'assertion résulte alors ([3] ch. III, § 1, lemme 5, § 8 corollaire 10, et Ch. I, § 4, lemme 2).

6.2. Proposition. *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre hilbertienne à gauche sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Alors toute forme positive normale sur $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ a une écriture sous la forme ω_ξ avec $\xi \in \mathscr{H}$.*

Soit J l'involution associée à $\mathfrak{A}$. Comme une algèbre de Hilbert modulaire ([11] def. 2.1) est une algèbre quasi-unitaire ([4], § 1, déf. 1), d'après ([11] th. 10.1) et ([4], § 3, cor.) le couple $(\mathscr{L}(\mathfrak{A}), J)$ vérifie les hypothèses du lemme 6.1 et on a l'assertion.

6.3. Soient $\mathscr{M}$ une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et ξ_0 un vecteur de cyclique et séparateur pour $\mathscr{M}$. Rappelons ([11], th. 12.1) que l'ensemble $\mathfrak{A}$ des éléments $\mathscr{H}$ de la forme $a\xi_0$, $a \in \mathscr{M}$ muni des lois

$$a\xi_0 \cdot b\xi_0 = ab\xi_0,\ (a\xi_0)^\# = a^*\xi_0,\ a, b \in \mathscr{M}$$

est une algèbre hilbertienne à gauche achevée; l'algèbre hilbertienne à droite associée $\mathfrak{A}'$ est l'ensemble des $a'\xi_0$, $a' \in \mathscr{M}'$ muni des lois

$$a'\xi_0 \cdot b'\xi_0 = b'a'\xi_0,\ (a'\xi_0)^\flat = a'^*\xi_0,\ a', b' \in \mathscr{M}'$$

et l'on a $\pi(a\xi_0) = a$, $a \in \mathscr{M}$, $\pi'(a'\xi_0) = a'$, $a' \in \mathscr{M}'$.

Dans ce case, on a $\mathscr{I}^+ = \mathfrak{A}^+$ et d'après le lemme 2.2, $\mathscr{B}^\# = \mathfrak{A}$.

Le caractère "très achevé" se traduit au niveau de l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{A}_0$ associée à $\mathfrak{A}$: l'image par π de $\mathfrak{A}_0$ est égale à l'algèbre de von Neumann $\mathscr{C}$ des éléments de $\mathscr{M}$ invariants par σ_t, $t \in \boldsymbol{R}$. En effet, on a toujours $\pi(\mathfrak{A}_0) \subset \mathscr{C}$. Réciproquement soit $a \in \mathscr{C}$. D'après ([11], § 15, lemme 15.8), on a $a \cdot \omega_{\xi_0} = \omega_{\xi_0} \cdot a$. Pour $y \in \mathscr{M}$ on a donc

$$(y\xi_0|a^*\xi_0) = (ay\xi_0|\xi_0) = (ya\xi_0|\xi_0) = (a\xi_0|y^*\xi_0)$$

Ce qui montre que $a\xi_0 \in \mathscr{D}^b$ et que $(a\xi_0)^b = a^*\xi_0 = (a\xi_0)^\#$. Posons $\xi = a\xi_0$. On en déduit que $\xi \in \mathfrak{A}_0$ et que $\pi(\xi) = a$.

Enfin rappelons que l'application $\xi \mapsto \omega_\xi$ de $\mathscr{P}^\#$ dans l'ensemble des formes positives normales de $\mathscr{M} = \mathscr{L}(\mathfrak{A})$ est une bijection ([11], lemme 15.3 et th. 15.1).

Par la suite nous n'envisagerons que ce cas particulier.

6.4. Proposition. *Soient $\mathscr{M}$ une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ possédant un vecteur cyclique et séparateur ξ_0 et ω une forme positive normale sur $\mathscr{M}$. Pour que ω soit presque dominée par ω_{ξ_0}* ([3], *ch. I,* § 4 *exer.* 8), *il faut et il suffit que tout vecteur ξ de $\mathscr{H}$ tel que $\omega = \omega_\xi$ appartienne à $\mathscr{F}^b$ (relatif à $\mathfrak{A} = \mathscr{M}\xi_0$).*

Montrons que la condition est nécessaire. Soit $\xi \in \mathscr{H}$ tel que $\omega = \omega_\xi$. D'après ([3], ch. I, § 4 exer. 8), il existe un opérateur t' fermé affilié à $\mathscr{M}'$ tel que $\omega_{t'\xi_0} = \omega$. Comme $\rho'(t'\xi_0) \subset t'$, $t'\xi_0$ appartient à $\mathscr{F}^b$ par définition. D'après la proposition 2.8 (ii) $\Rightarrow$ (iii), il existe un élément $\theta \in \mathscr{P}a^b$ tel que $\omega = \omega_\xi = \omega_\theta$. L'assertion résulte alors de la proposition 2.8 (iii) $\Rightarrow$ (i). Montrons que la condition est suffisante. D'après la proposition 6.2, il existe ξ tel que $\omega_\xi = \omega$. L'hypothèse implique $\xi \in \mathscr{F}^b$. On sait alors (lemme 2.2) que $\pi'(\xi)$ est affilié à $\mathscr{M}'$, que $\xi_0 \in \mathscr{D}(\pi'(\xi))$ et que $\pi'(\xi)\xi_0 = \xi$. Donc ω s'écrit $\omega_{\pi(\xi)\xi_0}$. L'assertion résulte alors de ([3], ch. I, § 4 exer. 8).

6.5. Remarques.

1) Compte tenu de la proposition 6.4, choisissant $\mathscr{M}$, ξ_0, ξ comme dans le lemme 5.5 (ii), on peut affirmer qu'il existe une forme normale positive non presque dominée par ω_{ξ_0}.

2) Considérons l'application $\xi \mapsto \omega_\xi$ de $\mathscr{P}^b$ dans l'ensemble des formes positives normales sur $\mathscr{M}$. Compte tenu de ce qui précède et de la proposition 6.4, ce n'est pas une surjection. La proposition 2.8 et 5.7–2) montrent que ce n'est pas une injection.

6.6. Proposition. *Soient $\mathscr{M}$ une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, ξ_0 un vecteur cyclique et séparateur de $\mathscr{M}$ et ω une forme positive normale sur $\mathscr{M}$.*

(i) *Il existe un opérateur t autoadjoint positif affilié à $\mathscr{M}$ tel que $\xi_0 \in \mathscr{D}(t)$ et $\omega = \omega_{t\xi_0}$.*

(ii) *Si $\mathscr{M}$ est une algèbre de von Neumann finie, t est unique.*

(iii) *Dans le cas général, on n'a pas l'unicité.*

Cette proposition répond à une question de Takesaki ([11], th. 15.1 et lignes suivantes).

(i) Ce n'est autre que ([11], th. 15.1). De plus si ξ est l'élément unique de $\mathscr{P}^\#$ (6.3) tel que $\omega = \omega_\xi$, notons que t prolonge nécessairement $\pi(\xi)$.

Si $\mathcal{M}$ est une algèbre de von Neumann finie, (ii) résulte alors de ([5], 5.1, p. 264; [7], 16.4.1).

Choisissant $\mathcal{M}, a_1, a_2$, comme dans le lemme 5.6 (i), on a $\omega_{a_1\xi_0} = \omega_{a_2\xi_0}$ d'où (iii).

Le corollaire qui suit complète en ce qui concerne l'unicité ([5], cor. 5.1, th. 4, p. 268) et ([8], th. 2).

6.7. Corollaire. *Soient $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann finie dans $\mathcal{H}$, ϕ et ψ deux formes linéaires positives normales de $\mathcal{M}$ de support e_ϕ, e_ψ tels que $e_\psi \leqq e_\phi$. Il existe alors un opérateur autoadjoint positif t affilié à $\mathcal{M}$ unique tel que si $\int_0^\infty \lambda\, de_\lambda$ désigne sa décomposition spectrale.*

(i) $\operatorname{Im} t \leqq e_\phi(\mathcal{H})$. (ii) *Si l'on pose $e_n = \int_0^n \lambda\, de_\lambda$, on a pour tout $x \in \mathcal{M}$, $\lim_n \phi((te_n)^* x(te_n)) = \psi(x)$.*

Considérant l'algèbre de von Neumann $e_\phi \mathcal{M} e_\phi$, on se ramène par transport de structure, au cas où $\mathcal{M}$ est une algèbre de von Neumann finie possédant un vecteur cyclique et séparateur ξ_0 et où $\phi = \omega_{\xi_0}$. D'après la proposition 6.6, il existe un opérateur t autoadjoint positif affilié à $\mathcal{M}$, tel que $\psi = \omega_{t\xi_0}$.

Soient $\int_0^\infty \lambda\, de_\lambda$ la décomposition spectrale de t et $e_n = \int_0^n de_\lambda$. Posons $\xi_n = te_n\xi_0$. On a $\lim_n te_n\xi_0 = t\xi_0$. Les formes linéaires ω_{ξ_n} convergent donc en norme vers $\omega_{t\xi_0} = \psi$ et l'on a $\omega_{\xi_n}(x) = ((te_n)^* x(te_n)\xi_0|\xi_0) = \phi((te_n)^* x(te_n))$ pour $x \in \mathcal{M}$, d'où l'existence.

Montrons l'unicité. Soient donc un opérateur t' satisfaisant aux hypothèses de la proposition, $\int_0^\infty \lambda\, de'_\lambda$ sa décomposition spectrale et $e'_n = \int_0^n de'_\lambda$. On a

$$\int_0^n |\lambda|^2 d(e'_\lambda \xi_0|\xi_0) = (t'e'_n\xi_0|t'e'_n\xi_0) = \phi((t'e'_n)^* t'e'_n)$$

Comme le membre de droite a une limite, on en déduit que $\xi_0 \in \mathcal{D}(t')$ et que l'on a $\lim_n t'e'_n\xi_0 = t'\xi_0$. Il est alors clair que l'on a $\psi = \omega_{t'\xi_0}$, d'où l'assertion, d'après la proposition 6.6.

6.8. La proposition qui suit recouvre une partie de ([11], th. 15.2).

Proposition. *Soient $\mathfrak{A}$ l'algèbre hilbertienne à gauche associée à une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ possédant un vecteur cyclique et séparateur ξ_0 et ω une forme positive normale sur $\mathcal{M}$. Désignons par G le groupe des automorphismes modulaires de $\mathfrak{A}$.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes*

a) *ω est une forme G-invariante*

b) *Il existe $\xi \in \mathcal{P}^\sharp \cap \mathcal{P}^\flat$ tel que $\omega = \omega_\xi$.*

(ii) *Si* (i) *est vérifié, il existe un opérateur autoadjoint positif h unique affilié à l'algèbre de von Neumann des éléments de $\mathcal{M}$ invariants par G tel que $\omega = \omega_{h\xi_0}$.*

(iii) *Si* (i) *est vérifié, l'unique opérateur h de possédant la propriété de* (ii) *est tel que* $\pi(h\xi_0) = h$.

La démonstration est facile avec la proposition 4.8 (ii) et le corollaire 4.9. Elle est laissée aux soins du lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

F. COMBES
[1] Poids sur une C*-algèbre (Jour. Math. pures et app., t. 47, 1968, p. 57–100).

F. COMBES
[2] Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche (à paraître dans le même journal).

J. DIXMIER
[3] Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. (Gauthier-Villars, Paris, 1969.)

J. DIXMIER
[4] Algèbres quasi-unitaires (Comment. Math. Helv., t. 26, 1952, p. 275–322).

H. A. DYE
[5] The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators (Trans. Amer. Math. Soc., t. 72, 1952, p. 243–280).

H. FREUDENTHAL
[6] Über die Friedrichsche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren. (Neder. Akad. Wetensch. Proc. 39, 832–833, 1936).

F. J. MURRAY ET J. VON NEUMANN
[7] On ring of operators. (Ann. Math. t. 37, 1936, p. 116–229).

L. PUKANSZKY
[8] The theorem of Radon-Nikodym in operator rings (Acta Sc. Math. Szeged, t. 15, 1954, p. 149–156).

F. RIESZ ET B. SZ-NAGY
[9] Leçons d'analyse fonctionnelle (Gauthier-Villars, Paris, 1965).

I. E. SEGAL
[10] A non commutative extension of abstract integration (Ann. Math., t. 57, 1953, p. 401–457).

M. TAKESAKI
[11] Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications (à paraître).

M. TOMITA
[12] Quasi-standard von Neumann algebras (à paraître).

(Oblatum 29–II–70)

F. Perdrizet,
Faculté des Sciences de Paris,
Département de Mathématiques,
9, quai Saint-Bernard,
PARIS-V,
France.