Compositio Mathematica

U. Westphal

Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren. Teil I : Halbgruppenerzeuger

Compositio Mathematica, tome 22, nº 1 (1970), p. 67-103

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1970__22_1_67_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 22, Fasc. 1, 1970, pag. 67-103
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren

Teil I: Halbgruppenerzeuger

von

U. Westphal

0. Einleitung

Gebrochene Potenzen von unbeschränkten linearen Operatoren wurden erstmals für Differentialoperatoren eingeführt. In Verbindung damit spielen die Riemann-Liouville Integrale und ihre Verallgemeinerungen von A. Marchaud [21] sowie M. Riesz [26] und W. Feller [14] eine wesentliche Rolle. In engem Zusammenhang mit den von Riesz eingeführten und Feller erweiterten Riesz-Potentialen stehen die Untersuchungen von S. Bochner [7], dessen Definition gebrochener Ableitungen durch die Untersuchung der stabilen Dichteverteilungen im Sinne von P. Lévy und die darauf bezogenen Diffusionsgleichungen motiviert ist.

R. S. Phillips [25] hat mit seiner "Methode der Erzeugung neuer Halbgruppen aus alten" die Ergebnisse von Bochner in einen allgemeineren Rahmen eingebaut. Er definiert gebrochene Potenzen von infinitesimalen Erzeugern starkstetiger Halbgruppen auf Banachräumen durch Erzeuger "neuer" Halbgruppen; und zwar gilt diese Methode für Potenzen der Ordnung γ im Falle $0 < \gamma < 1$.

Von A. V. Balakrishnan sind zwei wichtige Arbeiten zu nennen. In der ersten [1] aus dem Jahre 1959 erhält er eine Definition gebrochener Potenzen von Halbgruppenerzeugern als spezielles Ergebnis eines für infinitesimale Erzeuger entwickelten Operatorkalküls; in der zweiten [2], 1960, konstruiert er gebrochene Potenzen für eine allgemeinere Klasse von Operatoren, nämlich für abgeschlossene lineare, die durch gewisse Nebenbedingungen an die Resolvente eingeschränkt sind. Im Zusammenhang mit der ersten Arbeit von Balakrishnan steht auch ein Funktionalkalkül von E. Nelson [22]. Alle genannten Definitionen gebrochener Potenzen sind (für gleiche Operatoren) äquivalent zueinander. Mit der Frage der Äquivalenz beschäftigt sich eine Arbeit von V. Nollau [23].

Bzgl. der umfangreichen Literatur über gebrochene Potenzen von Operatoren im Hilbertraum verweisen wir auf das Buch [29] von B. Sz.-Nagy-C. Foiaş und die dort zitierten Arbeiten.

Bis auf die Definition von Phillips, die jedoch nur Exponenten $0 < \gamma < 1$ zuläßt, gilt für alle anderen genannten Definitionsmethoden, daß die gebrochenen Potenzen immer nur auf einer echten Teilmenge ihres Definitionsbereiches explizit dargestellt werden. In der vorliegenden Arbeit soll nun noch eine weitere Definition gebrochener Potenzen von Halbgruppenerzeugern eingeführt werden, und zwar so, daß per definitionem eine explizite Darstellung auf dem gesamten Definitionsbereich gewährleistet ist.

Sei $\{T(t);\, t \geqq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$, gegeben auf einem Banachraum X. Dann sei die gebrochene Potenz $(-A)^\gamma$, $0 < \gamma < n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, ihres infinitesimalen Erzeugers A wie folgt definiert:

Existiert für $f \in \mathsf{X}$ ein Element $h \in \mathsf{X}$, so daß ($C_{\gamma,n}$ konstant)

$$(0.1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\| \frac{1}{C_{\gamma,n}} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\gamma}[I - T(t)]^n f\, dt - h \right\|_{\mathsf{X}} = 0$$

gilt, dann setzen wir $(-A)^\gamma f = h$. Alle Elemente $f \in \mathsf{X}$, für die der Grenzwert (0.1) existiert, bilden den Definitionsbereich $\mathsf{D}((-A)^\gamma)$ von $(-A)^\gamma$.

Diese Definition ist erstens dadurch motiviert, daß sie die Potenzen mit ganzzahligen Exponenten interpoliert, wie mit Hilfe von J. L. Lions-J. Peetre [20] gezeigt werden kann, zweitens dadurch, daß Integrale obigen Typs in Verbindung mit gebrochenen Ableitungen von stetigen Funktionen bereits von Marchaud [21] betrachtet wurden. Drittens ist (0.1) eine echte Erweiterung eines Ergebnisses von Balakrishnan [1]. Dieses lautet, für $0 < \gamma < 1$ formuliert: Die Restriktion der nach Balakrishnan konstruierten Potenzen $(-A)_B^\gamma$ [1] auf $\mathsf{D}(A)$ läßt sich darstellen durch

$$(0.2) \qquad (-A)_B^\gamma f = \frac{1}{C_{\gamma,1}} \int_0^\infty t^{-1-\gamma}[I - T(t)] f\, dt.$$

Offensichtlich ist laut Definition des Bochnerintegrals die Menge

[1] Index B steht hier für Balakrishnan.

aller Elemente f, für die das Integral (0.2) existiert, eine echte Teilmenge aller f, für die der Grenzwert (0.1) existiert. ($\int_0^\infty g(t)dt$ existiert im Bochnerschen Sinne genau dann, wenn

$$\int_0^\infty ||g(t)||_X dt < \infty.$$

Dieser Sachverhalt liegt für das Integral (0.2) vor, in (0.1) existiert jedoch nur $\int_\varepsilon^\infty ||g(t)||_X dt$ für jedes $\varepsilon > 0$.) Auf diesen Unterschied sei besonders hingewiesen. Im Zusammenhang mit H. Komatsu [18] vgl. die Ausführungen in Abschnitt 5.

In dieser Arbeit wird nun für die durch (0.1) definierten Potenzen ein Kalkül entwickelt, mit dessen Hilfe die Potenzregeln, eine Unkehrformel, die Abgeschlossenheit und weitere Charakterisierungen dieser Operatoren in direkter Schlußweise gefolgert werden können. Der Kalkül zeichnet sich dadurch aus, daß er im Aufbau leicht überschaubar ist und nur wenige Hilfsmittel benötigt. Sein Prinzip besteht darin, zu einem jeden Problem, das untersucht werden soll, eine charakteristische Identität zu finden und diese dann auszuwerten. Für gebrochene Potenzen von Halbgruppenerzeugern werden wir vier solcher fundamentaler Identitäten aufstellen, von denen an dieser Stelle die folgende angeführt sei:

$$\begin{aligned}(0.3)\quad &\int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n du\left[\int_0^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{x}{\eta}\right) T(x)f\,\frac{dx}{\eta}\right]\\ &= \int_\eta^\infty x^{-1-\gamma}[I-T(x)]^k dx\left[\int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}\right] \quad (f \in X),\end{aligned}$$

wobei die $q_{\gamma,n}(u)$ gewisse Funktionen (siehe (2.5)) aus $L(0, \infty)$ sind. (0.3) ist eine Verallgemeinerung der einfachen klassischen Identität (siehe E. Hille-R. S. Phillips [15, p. 307], P. L. Butzer-H. Berens [9, Sec. 1.1])

$$(0.4)\quad \frac{T(t)-I}{t}\left[\frac{1}{x}\int_0^x T(u)f du\right] = \frac{T(x)-I}{x}\left[\frac{1}{t}\int_0^t T(u)f du\right].$$

Sie wird bei der Behandlung des infinitesimalen Erzeugers A benutzt, der ja ebenso wie die gebrochene Potenz in (0.1) durch einen Grenzwert definiert ist: $Af = \text{s-lim}_{t\to 0+} t^{-1}[T(t)-I]f$.

Ein umgekehrter Zugang zur Charakterisierung gebrochener Potenzen von Halbgruppenerzeugern durch die Integrale in (0.1) ist in H. Berens-P. L. Butzer-U. Westphal [5] skizziert, siehe auch U. Westphal [31].

Die vorliegende Arbeit ist der erste Beitrag einer zweiteiligen Abhandlung. Während im ersten Teil das oben geschilderte Problem für gleichmäßig beschränkte Halbgruppen von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ diskutiert wird, untersuchen wir im zweiten ein entsprechendes Problem für gleichmäßig beschränkte Gruppen $\{G(t);\ -\infty < t < \infty\}$ der Klasse $(\mathscr{C}_0)$; und zwar entwickeln wir analog zu Teil I einen Kalkül für den Grenzwert

$$(0.5)\quad \underset{\varepsilon\to 0+}{\text{s-lim}}\ \frac{1}{K_{\gamma,n}}\int_\varepsilon^\infty t^{-1-\gamma}[G(t/2)-G(-t/2)]^n f\,dt \quad (K_{\gamma,n}\ \text{konstant}),$$

in dem der Integralausdruck mit Hilfe der n-ten zentralen Differenz der Gruppe $\{G(t)\}$ gebildet ist.

Integrale vom Typ wie in (0.5) werden für die spezielle Gruppe der Translationen in der Monographie [11] von P. L. Butzer-W. Trebels behandelt, im Zusammenhang mit periodischen Funktionen von M. Zamansky [35], G. Sunouchi [28] und P. L. Butzer-E. Görlich [10]. Im allgemeinen gibt es jedoch über Gruppen von Operatoren nur sehr wenig Literatur, im Vergleich zu den umfangreichen Abhandlungen über Halbgruppen.

In unseren Untersuchungen spielen beim Aufbau des Kalküls jeweils zwei Funktionen eine wesentliche Rolle. Dies sind in Teil I die Funktionen $q_{\gamma,n}$, $0<\gamma<n$, und $p_{\gamma,n}$, $0<\gamma\leqq n$ $(n=1,2,\cdots)$, aus $L(0,\infty)$ und in Teil II entsprechend $\bar{q}_{\gamma,n}$ und $\bar{p}_{\gamma,n}$ aus $L(-\infty,\infty)$. Die beiden Funktionen aus dem Halbgruppenteil sind über ihre Laplacetransformierten durch

$$(0.6)\quad \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda u} q_{\gamma,n}(u)\,du &= \lambda^{-\gamma}\int_1^\infty u^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda u})^n\,du \quad &(\lambda>0)\\ \int_0^\infty e^{-\lambda u} p_{\gamma,n}(u)\,du &= \lambda^{-\gamma}(1-e^{-\lambda})^n \quad &(\lambda>0) \end{aligned}$$

definiert. Vgl. (2.4) und (3.2). Die Funktionen $q_{\gamma,n}$ werden schon in U. Westphal [30] in Verbindung mit der Halbgruppe der Translationen verwendet; siehe auch H. Berens-U. Westphal [6].

Die Darstellung (0.6) deutet darauf hin, daß in Teil I die Laplacetransformation ein bedeutendes Hilfsmittel ist. Bei ihrer Anwendung wird entscheidend ausgenutzt, daß der exponentielle Faktor $e^{-\lambda t}$ $(t\geqq 0;\ \lambda>0$ fest$)$, multipliziert mit den Elementen des reellen oder komplexen Zahlensystems, der einfachste Spezialfall einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ ist. Laplacetransformationsmethoden werden häufig in der Halbgruppentheorie bei der Entwicklung von Operatorkalkülen verwendet; siehe z. B. Hille-Phillips [15, Ch. XV], Phillips [25], Nelson [22]. Im Gruppenteil übernimmt die Fouriertransformation die Rolle der Laplacetransformation.

Im einzelnen werden im ersten Abschnitt von Teil I einige Hilfsmittel über die Laplacetransformation sowie Halbgruppen von Operatoren zusammengestellt, wobei besonderer Wert darauf gelegt wird, die später zu verallgemeinernden Beziehungen für den infinitesimalen Erzeuger und seine ganzzahligen Potenzen hervorzuheben. Ausgehend von der Definition der Potenz $(-A)^\gamma$, $\gamma > 0$, beweisen wir in Abschnitt 2 die Identität (0.3) und als Schlußfolgerung daraus, daß $(-A)^\gamma$ abgeschlossen ist und der Definitionsbereich $D((-A)^\gamma)$ dicht in X liegt. Mit einer Umkehrformel für $(-A)^\gamma$ und daraus resultierenden Abschätzungen befaßt sich Abschnitt 3, während wir in 4. die Potenzregeln

$$(-A)^{\gamma_1+\gamma_2} = (-A)^{\gamma_1}(-A)^{\gamma_2} \quad (\gamma_1, \gamma_2 > 0)$$

und

$$((-A)^\alpha)^\gamma = (-A)^{\alpha\gamma} \quad (0 < \alpha < 1, \gamma > 0)$$

beweisen. Im letzten Abschnitt dieser Arbeit, Abschnitt 5, untersuchen wir den Zusammenhang der Definition (0.1) gebrochener Potenzen von Operatoren mit derjenigen von Balakrishnan [2].

Die vorliegende Abhandlung entstand am Lehrstuhl A für Mathematik der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen. Sie ist im wesentlichen die Promotionsarbeit des Verfassers. Dem Lehrstuhlinhaber, Herrn Professor Dr. P. L. Butzer und Herrn Dozent Dr. H. Berens, auf dessen Vorschlag die Problemstellung zurückgeht, gilt mein herzlicher Dank für die stets bereitwillige, wertvolle Unterstützung, mit der sie diese Arbeit im Verlauf ihrer Entstehung gefördert haben.

Ferner danke ich Herrn W. Trebels für hilfreiche Bemerkungen im Zusammenhang mit Teil II der Abhandlung und Herrn K. Scherer für eine kritische Durchsicht der endgültigen Fassung des Manuskriptes. Fräulein U. Combach hat die Schreibmaschinenarbeit schnellstens und mit größter Sorgfalt ausgeführt; auch dafür möchte ich vielmals danken.

1. Hilfsmittel

In dieser Arbeit benötigen wir einige grundlegende Eigenschaften der Laplacetransformation, die im folgenden kurz zusammengestellt werden. Bezüglich Literatur über die Laplacetransformation erwähnen wir nur die Standardwerke von D. V. Widder [32] und G. Doetsch [12].

Ist die Funktion $f(u)$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ definiert und gehört sie für jedes $c > 0$ zu $L(0, c)$ (dem Raum der auf $(0, c)$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen), so ist die Laplacetransformierte von f gegeben durch

$$\mathscr{L}[f(u)](\lambda) = f^{\wedge}(\lambda) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} f(u) du, \tag{1.1}$$

sofern das Integral existiert. (Im Rahmen dieser Arbeit genügt es, sich von vornherein auf reelle Zahlen λ zu beschränken.) Konvergiert das Integral (1.1) für ein λ_0, so existiert es für jedes λ, $\lambda \geqq \lambda_0$. Ist $f^{\wedge}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \geqq \lambda_0$, wobei λ_0 ein Konvergenzpunkt von (1.1) sei, so gilt $f(u) = 0$ f. ü. auf $(0, \infty)$ (Eindeutigkeitssatz).

Als Laplacesche Faltung zweier Funktionen $f_1(u)$ und $f_2(u)$, die beide zu $L(0, c)$ (jedes $c > 0$) gehören mögen, bezeichnet man das Integral

$$[f_1 * f_2](t) = \int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du, \tag{1.2}$$

das für fast alle $t > 0$ existiert. Im Fall, daß $f_1, f_2 \in L(0, \infty)$ sind, gehört die Faltung (1.2) ebenfalls zu diesem Raum, und ihre Norm bzgl. $L(0, \infty)$ genügt der Ungleichung

$$\|f_1 * f_2\|_{L(0,\infty)} \leqq \|f_1\|_{L(0,\infty)} \|f_2\|_{L(0,\infty)}.$$

Konvergieren $f_1^{\wedge}(\lambda)$ und $f_2^{\wedge}(\lambda)$ absolut für $\lambda \geqq \lambda_0$, dann konvergiert auch die Laplacetransformierte der Faltung (1.2) absolut für $\lambda \geqq \lambda_0$ und erfüllt die Gleichung

$$[f_1 * f_2]^{\wedge}(\lambda) = f_1^{\wedge}(\lambda) f_2^{\wedge}(\lambda) \qquad (\lambda \geqq \lambda_0)$$

(Faltungssatz).

Halbgruppen von beschränkten, linearen Operatoren werden ausführlich in dem umfangreichen Werk von E. Hille- R. S. Phillips [15, Ch. X-XII] untersucht. Für unsere Belange eignen sich besser die gezielteren Abhandlungen in den Büchern von P. L. Butzer-H. Berens [9, Ch. I], N. Dunford-J. T. Schwartz [13, Ch. XIII] sowie K. Yosida [34, Ch. IX].

Sei X ein reeller oder komplexer Banachraum mit den Elementen $f, g, \cdots$ und der Norm $\|\cdot\|_X$ (meistens nur mit $\|\cdot\|$ bezeichnet) und $\mathscr{E}(X)$ die Banachalgebra der beschränkten linearen Operatoren von X in sich. Eine einparametrige Schar

$\{T(t);\, t \geqq 0\}$ von Operatoren in $\mathscr{E}(X)$ heißt eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $T(t) \in \mathscr{E}(X)$ für jedes $t \in [0, \infty)$ mit $T(0) = I$ (Identität).

(ii) $T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2)$ für alle $t_1, t_2 \in [0, \infty)$.

(iii) $||T(t)f|| \leqq M||f||$ für alle $f \in X$ und alle $t \in [0, \infty)$, wobei M eine Konstante ist.

(iv) $\operatorname*{s-lim}_{t\to 0+} T(t)f = f$ für alle $f \in X$ $((\mathscr{C}_0)$-Eigenschaft$)$.

Offensichtlich ist unter diesen Voraussetzungen die vektorwertige Funktion $T(t)f$ von $0 \leqq t < \infty$ in X stark stetig für jedes $f \in X$.

Der infinitesimale Erzeuger A der Halbgruppe ist definiert durch den starken Limes für $t \to 0+$ von

$$A_t f \equiv \frac{T(t)-I}{t} f.$$

Die Menge aller Elemente f, für die dieser Grenzwert existiert, bildet den Definitionsbereich $D(A)$ von A. A ist ein linearer (i.a. unbeschränkter) abgeschlossener Operator mit $D(A)$ dicht in X. Ist f aus $D(A)$, so gehört für jedes $t \geqq 0$ auch $T(t)f$ dazu, und es gilt

$$\frac{d}{dt} T(t)f = AT(t)f = T(t)Af,$$

woraus die Beziehung

$$T(t)f-f = \int_0^t T(u)Af\,du \tag{1.3}$$

gefolgert werden kann.

Die ganzzahligen Potenzen A^n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ von A sind iterativ definiert durch $A^0 = I$, $A^1 = A$ und

$$A^n f = A(A^{n-1}f)$$

mit

$$D(A^n) = \{f;\, f \in D(A^{n-1}) \text{ und } A^{n-1}f \in D(A)\}.$$

Die Potenz A^n ist für jedes $n = 1, 2, \cdots$ ein linearer abgeschlossener Operator und $D(A^n)$ dicht in X. Als Erweiterung von (1.3) gilt für $f \in D(A^n)$ die Taylorformel

$$T(t)f - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} A^j f = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-u)^{n-1} T(u)A^n f\,du,$$

sowie die Beziehung

(1.4) $[T(t)-I]^n f = \int_0^t T(u_1)du_1 \int_0^t T(u_2) \cdots du_{n-1} \int_0^t T(u_n)A^n f du_n,$

aus der sich unmittelbar die Normabschätzung

$$\|[T(t)-I]^n f\| = O(t^n) \qquad (t \to 0+;\, f \in D(A^n))$$

schließen läßt. Allgemeiner als (1.4) ist die Aussage, daß für jedes $f \in X$ die iterierten Integrale

$$\frac{1}{t^n}\int_0^t T(u_1) \cdots du_{n-1} \int_0^t T(u_n) f du_n, \tag{1.5}$$

die für $t \to 0+$ im starken Sinne gegen f konvergieren, zu $D(A^n)$ gehören und die Gleichung

$$A^n \left[\frac{1}{t^n}\int_0^t T(u_1) \cdots du_{n-1} \int_0^t T(u_n) f du_n\right] = \frac{[T(t)-I]^n}{t^n} f \qquad (f \in X) \tag{1.6}$$

erfüllen. Daraus läßt sich unmittelbar herleiten, daß die Potenzen von A äquivalent definiert werden können durch den Grenzwert

$$A^n f \equiv \operatorname*{s-lim}_{t\to 0+} \frac{[T(t)-I]^n}{t^n} f, \tag{1.7}$$

falls er existiert. Dieses Ergebnis erhält H. Berens in einer noch etwas allgemeineren Form in [3]. Er benutzt dabei eine Verallgemeinerung der Identität

$$\begin{aligned} &\frac{[T(t)-I]^n}{t^n}\left[\frac{1}{x^n}\int_0^x T(u_1) \cdots du_{n-1} \int_0^x T(u_n) f du_n\right] \\ &\qquad = \frac{[T(x)-I]^n}{x^n}\left[\frac{1}{t^n}\int_0^t T(u_1) \cdots du_{n-1} \int_0^t T(u_n) f du_n\right] \\ &\qquad\qquad (t,\, x > 0;\, f \in X), \end{aligned} \tag{1.8}$$

die eine bzgl. x und t symmetrische Verknüpfung des Integralausdrucks (1.5) mit dem Differenzenquotienten $t^{-n}[T(t)-I]^n$ der Halbgruppe darstellt. (1.8) ist eine Erweiterung der Identität (0.4). Neben (1.7) erwähnen wir noch eine andere äquivalente Charakterisierung der Potenzen A_n, die J. L. Lions-J. Peetre [20] über das Integral

$$\int_\varepsilon^\infty u^{-1-n}[I-T(u)]^k f du \qquad (0 < n < k;\, n, k \text{ ganzzahlig};\, \varepsilon > 0) \tag{1.9}$$

mit distributionentheoretischen Methoden bewiesen haben:

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Element $f \in X$ zum Definitionsbereich $D(A^n)$, $n = 1, 2, \cdots$, gehört, ist die Bedingung, daß der Limes für $\varepsilon \to 0+$ des Integrals (1.9) *in der Norm des Raumes X existiert. Es gilt dann*

$$(1.10) \qquad (-A)^n f = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{C_{n,k}} \int_\varepsilon^\infty u^{-1-n}[I - T(u)]^k f du \quad (k > n),$$

wobei die Konstante $C_{n,k}$ durch

$$C_{n,k} = \int_0^\infty u^{-1-n}(1-e^{-u})^k du$$

gegeben ist.

Unter den eingangs gemachten Voraussetzungen an die Halbgruppe $\{T(t); t \geqq 0\}$ gehört jede reelle Zahl $\lambda > 0$ zur Resolventenmenge $\rho(A)$ des infinitesimalen Erzeugers, und die Resolvente $R(\lambda; A)$ ist darstellbar als Laplacetransformierte der Operatoren $T(t)$, $t \geqq 0$:

$$(1.11) \qquad R(\lambda; A)f = \int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u) f du \qquad (f \in X; \lambda > 0).$$

Die Folge $\lambda^n[R(\lambda; A)]^n$ ist in der Operatortopologie bzgl. $\lambda > 0$ und $n = 1, 2, \cdots$ gleichmäßig beschränkt durch die Konstante M, also

$$\|\lambda^n[R(\lambda; A)]^n\| \leqq M \qquad (\lambda > 0;\ n = 1, 2, \cdots).$$

Gilt zusätzlich zu den Bedingungen (i)—(iv), daß $T(t)[X] \subset D(A)$ für jedes $t > 0$ und $\|AT(t)\| = O(t)$ $(t \to 0+)$, so besitzt die Halbgruppe eine holomorphe Fortsetzung $T(\xi)$ in einen Sektor $\{\xi; \operatorname{Re} \xi > 0, |\arg \xi| < \varepsilon_0\}$ der komplexen Ebene. Unter diesen Voraussetzungen spricht man von einer gleichmäßig beschränkten holomorphen Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$.

2. Einführung gebrochener Potenzen von infinitesimalen Erzeugern von Halbgruppen

Sei $\{T(t); t \geqq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ auf einem reellen oder komplexen Banachraum X und A ihr infinitesimaler Erzeuger.

Definition 2.1. *Für eine reelle positive Zahl γ, $0 < \gamma < n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, definieren wir die gebrochene Potenz $(-A)^\gamma$ des Operators $(-A)$ durch*

$$(2.1) \qquad (-A)^\gamma f = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{C_{\gamma,n}} \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I - T(u)]^n f du,$$

sofern der Limes existiert. Dabei ist die Konstante $C_{\gamma,n}$ *gegeben durch*

$$C_{\gamma,n} = \int_0^\infty u^{-1-\gamma}(1-e^{-u})^n du.$$

Wir bezeichnen als Definitionsbereich $D((-A)^\gamma)$ *von* $(-A)^\gamma$ *die Menge aller* f, *für die der Grenzwert* (2.1) *existiert.*

Wie in der Einleitung geschildert, ist es unser Ziel, zu zeigen, daß der durch (2.1) definierte Operator alle gewünschten Eigenschaften einer Potenz erfüllt.

Als erstes können wir sofort sagen, daß $(-A)^\gamma$ linear ist und die ganzzahligen Potenzen von $(-A)$ interpoliert, wie aus der Darstellung (1.10) von Lions-Peetre hervorgeht. Ferner zeigt eine einfache Überlegung, daß der Definitionsbereich $D((-A)^\gamma)$ nicht leer ist; denn für $f \in D(A^n)$, $n > \gamma$, existiert wegen der Abschätzung $||[I-T(t)]^n f|| = O(t^n)$ $(t \to 0+)$ das Integral

$$\frac{1}{C_{\gamma,n}} \int_0^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du$$

im Bochnerschen Sinn und ist nach Definition gleich $(-A)^\gamma f$.

Es ist vorläufig noch nicht einzusehen, daß der Grenzwert (2.1) für ein fest vorgegebenes γ von der ganzen Zahl n, $n > \gamma$, unabhängig ist. Um dies zu zeigen, müssen wir erst einige Hilfsmittel bereitstellen.

Wir betrachten zunächst die spezielle Halbgruppe

$$T_\lambda(t)f = e^{-\lambda t} f \qquad (t \geqq 0;\ \lambda > 0, \text{ fest}), \tag{2.2}$$

definiert auf dem reellen oder komplexen Zahlensystem Z, und schließen dann von den Ergebnissen für dieses Beispiel auf entsprechende Aussagen für beliebige gleichmäßig beschränkte Halbgruppen der Klasse $(\mathscr{C}_0)$. Es ist klar, daß für die Halbgruppe (2.2) $Af = -\lambda f$ mit $D(A) = Z$ gilt. Ebenso leicht erhält man mit Hilfe der Substitution $u\lambda \to u$ in (2.1):

$$(-A)^\gamma f = \lambda^\gamma f \text{ und } D((-A)^\gamma) = Z. \tag{2.3}$$

Wir zeigen nun, daß der mit der Halbgruppe (2.2) verknüpfte Integralausdruck in (2.1) sich darstellen läßt als Laplacetransformierte einer Funktion aus $L(0, \infty)$, multipliziert mit dem Faktor $\lambda^\gamma f$ $(f \in Z)$.

Lemma 2.2. *Für* $0 < \gamma < n$, $n = 1, 2, \cdots$ *gilt*

$$(2.4)\qquad \lambda^{\gamma} q^{\wedge}_{\gamma,n}(\lambda) = \int_1^{\infty} u^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda u})^n du \qquad (\lambda > 0),$$

wobei $q^{\wedge}_{\gamma,n}(\lambda)$ *die Laplacetransformierte der Funktion*

$$(2.5)\quad q_{\gamma,n}(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{-1}}{\Gamma(1+\gamma)} \displaystyle\sum_{j=0}^{l} (-1)^j \binom{n}{j} (u-j)^{\gamma} & (l < u \leqq l+1;\ l=0, 1, \cdots, n-1) \\ \dfrac{u^{-1}}{\Gamma(1+\gamma)} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (u-j)^{\gamma} & (u > n) \end{cases}$$

ist, die zu $L(0, \infty)$ *gehört. Für* $u > n$ *ist*

$$(2.6)\quad q_{\gamma,n}(u) = \begin{cases} 0 & (\gamma = 1, 2, \cdots, n-1) \\ -\dfrac{\sin \gamma\pi}{u\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ut} t^{-1-\gamma}(1-e^t)^n dt & (0 < \gamma < n,\ \gamma \text{ nicht ganzzahlig}). \end{cases}$$

Ferner gelten

$$(2.7)\qquad \lim_{\lambda\to 0+} q^{\wedge}_{\gamma,n}(\lambda) = \int_0^{\infty} q_{\gamma,n}(u) du = C_{\gamma,n}$$

und

$$(2.8)\quad C_{\gamma,n} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\gamma+1}}{\gamma!} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} j^{\gamma} \log j & (\gamma = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \Gamma(-\gamma) \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} j^{\gamma} & (0 < \gamma < n,\ \gamma \text{ nicht ganzzahlig}). \end{cases}$$

Beweis. Wir führen die Hilfsfunktionen

$$a(u) = \frac{u^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \quad (u > 0) \quad \text{und} \quad b_{\varepsilon}(u) = \begin{cases} 0 & (0 < u < \varepsilon) \\ u^{-1-\gamma} & (u > \varepsilon) \end{cases}$$

ein. Offensichtlich gehört $b_{\varepsilon}(u)$ für jedes ε und $\gamma > 0$ zu $L(0, \infty)$ mit $\int_0^{\infty} b_{\varepsilon}(u) du = \gamma^{-1}\varepsilon^{-\gamma}$. Die Funktion $a(u)$ ist zwar nicht in $L(0, \infty)$, wohl aber in $L(0, c)$ für jedes $c > 0$; ihre Laplacetransformierte nach (1.1) konvergiert absolut für jedes $\lambda > 0$ und ist gegeben durch

$$(2.9)\qquad \mathscr{L}[a](\lambda) \equiv a^{\wedge}(\lambda) = \lambda^{-\gamma} \qquad (\lambda > 0).$$

Für $\lambda > 0$ erhält man nun mit Hilfe des Faltungssatzes der Laplacetransformation

$$
\begin{aligned}
\lambda^{-\gamma}\int_1^\infty & u^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda u})^n du \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \binom{n}{j}\left\{j^\gamma \lambda^{-\gamma}\int_j^\infty e^{-\lambda u}u^{-1-\gamma}du-\gamma^{-1}\lambda^{-\gamma}\right\} \\
&= \mathscr{L}[q_{\gamma,n}(u)](\lambda),
\end{aligned}
$$

wobei die Funktion $q_{\gamma,n}(u)$ durch

$$
q_{\gamma,n}(u) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\left\{j^\gamma[a * b_j](u)-\frac{1}{\gamma}a(u)\right\} \tag{2.10}
$$

gegeben ist. Das Faltungsprodukt (siehe (1.2))

$$
[a * b_\varepsilon](u) = \begin{cases} 0 & (0 < u < \varepsilon) \\ \dfrac{1}{\Gamma(\gamma)}\displaystyle\int_\varepsilon^u (u-t)^{\gamma-1}t^{-1-\gamma}dt & (u > \varepsilon) \end{cases}
$$

läßt sich für $u > \varepsilon$ mit der Substitution $(u/t)-1 \to t$ leicht ausrechnen zu

$$
[a * b_\varepsilon](u) = \frac{u^{-1}\varepsilon^{-\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)}(u-\varepsilon)^\gamma.
$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die Gleichung (2.10) ein, so erhalten wir die Darstellung (2.5) von $q_{\gamma,n}$. Aus dieser erkennt man, daß $q_{\gamma,n}(u)$ auf $0 < u < \infty$ stetig ist und für jedes $c > 0$ zu $L(0, c)$ gehört. Um zu zeigen, daß $q_{\gamma,n}$ tatsächlich in $L(0, \infty)$ enthalten ist, beweisen wir erst die Darstellung (2.6) dieser Funktion für $u > n$. Sie folgt im Fall ganzzahliger γ-Werte aus der bekannten Identität

$$
\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^\nu = 0, \qquad \nu = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{2.11}
$$

Für nicht ganzzahlige γ-Werte müssen wir die Identität

$$
\int_0^\infty e^{-ut}t^{-1-\gamma}(1-e^t)^n dt = \Gamma(-\gamma)\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(u-j)^\gamma \tag{2.12}
$$
$$
(k-1 < \gamma < k,\ k = 0, 1, \cdots, n;\ u > n)
$$

verifizieren. Durch partielle Integration ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_\delta^\infty e^{-ut}t^{-1-\gamma}(1-e^t)^n dt &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\int_\delta^\infty e^{-(u-j)t}t^{-1-\gamma}dt \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(-1)^\nu(u-j)^\nu}{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-\nu)}\,\frac{e^{-\delta(u-j)}}{\delta^{\gamma-\nu}} \\
&\quad+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(-1)^k(u-j)^k}{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-k+1)}\int_\delta^\infty e^{-(u-j)t}t^{-1-\gamma+k}dt.
\end{aligned}
$$

Für $\delta \to 0$ strebt die Doppelsumme im ersten Glied der letzten Zeile gegen Null, während das Integral im zweiten Glied wegen (2.9) gegen $\Gamma(k-\gamma)(u-j)^{\gamma-k}$ konvergiert. Mit

$$\Gamma(k-\gamma) = (-1)^k \gamma(\gamma-1) \cdots (\gamma-k+1)\Gamma(-\gamma)$$

folgt dann die Gültigkeit von (2.12). Benutzen wir noch die Beziehung $\Gamma(-\gamma)\Gamma(1+\gamma) = -\pi/\sin \pi\gamma$ für die Γ-Funktion, so ist auch die Integraldarstellung (2.6) für $q_{\gamma,n}(u)(u > n;\ \gamma$ nicht ganzzahlig) klar. Daraus liest man ab, daß für ein festes γ $(k-1 < \gamma < k,\ k = 1, 2, \cdots, n)$ das Vorzeichen von $q_{\gamma,n}(u)$ für $u > n$ eindeutig bestimmt ist, nämlich $\operatorname{sgn} q_{\gamma,n}(u) = (-1)^{n-k}$ $(u > n)$. Deshalb ist

$$\int_c^d |q_{\gamma,n}(u)| du = (-1)^{n-k} \int_c^d q_{\gamma,n}(u) du \quad (n < c < d).$$

Daß man im letzten Integral den Limes für $d \to \infty$ bilden kann, folgt wieder mit Hilfe partieller Integration; denn es gilt

$$\begin{aligned} &\int_c^d u^{\gamma-1} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left(1-\frac{j}{u}\right)^\gamma du \\ &\quad = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \frac{u^{\gamma-\nu}}{\gamma-\nu} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} j^\nu \left(1-\frac{j}{u}\right)^{\gamma-\nu} \Bigg|_{u=c}^{u=d} \\ &\quad + \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (-1)^k j^k \int_c^d u^{\gamma-k-1} \left(1-\frac{j}{u}\right)^{\gamma-k} du. \end{aligned}$$

Setzt man in der Doppelsumme auf der rechten Seite der letzten Gleichung $u = d$, so konvergiert sie für $d \to \infty$ gegen Null; im zweiten Glied der rechten Seite wird der Integrand vergrößert durch die Funktion $(1-(j/c))^{\gamma-k}u^{\gamma-k-1}$, die auf dem Intervall (c, ∞) Lebesgue-integrierbar ist. Damit ist für alle γ, $0 < \gamma < n$, gezeigt, daß $q_{\gamma,n}$ zu $L(0, \infty)$ gehört.

In (2.7) erhält man die Gleichung

$$\lim_{\lambda \to 0+} q^\wedge_{\gamma,n}(\lambda) = \int_0^\infty q_{\gamma,n}(u) du$$

mit Hilfe des Kriteriums über majorisierte Konvergenz, während die Beziehung

$$\lim_{\lambda \to 0+} q^\wedge_{\gamma,n}(\lambda) = C_{\gamma,n}$$

aus der Relation (2.4) für die Laplacetransformierte der Funktion $q_{\gamma,n}$ folgt. Ebenfalls aus (2.4) ergibt sich die Darstellung (2.8) für die Konstante $C_{\gamma,n}$ wieder mittels partieller Integration entsprechend wie im Beweis der Identität (2.12).

Die Verallgemeinerung der Beziehung (2.4) in Lemma 2.2 von der speziellen Halbgruppe (2.2), der Exponentialfunktion $e^{-\lambda t}$ ($t \geqq 0$; $\lambda > 0$ fest), auf eine beliebige gleichmäßig beschränkte Halbgruppe von Operatoren $T(t)$ ($t \geqq 0$) der Klasse ($\mathscr{C}_0$) lautet (siehe (2.3))

$$(-A)^\gamma \int_0^\infty q_{\gamma,n}(u) T(u) f\, du = \int_1^\infty u^{-1-\gamma}[I - T(u)]^n f\, du \quad (f \in X).$$

Bevor wir die Gültigkeit dieser Beziehung in Satz 2.5 verifizieren, beweisen wir zwei Lemmata. Die Spezialisierung des ersten auf die Halbgruppe (2.2) ist der klassische Faltungssatz der Laplacetransformation.

Lemma 2.3. *Seien $g_1, g_2, \cdots, g_r$ r Funktionen aus $L(0, \infty)$. Dann gilt für jedes $f \in X$*

$$\int_0^\infty g_1(u_1) T(u_1) du_1 \int_0^\infty g_2(u_2) T(u_2) \cdots du_{r-1} \int_0^\infty g_r(u_r) T(u_r) f\, du_r$$
$$= \int_0^\infty [g_1 * g_2 * \cdots * g_r](t) T(t) f\, dt.$$

Beweis. Für $r = 2$ haben wir wegen der Halbgruppeneigenschaft

$$\int_0^\infty g(u_1) T(u_1) du_1 \int_0^\infty g(u_2) T(u_2) f\, du_2$$
$$= \int_0^\infty g_1(u_1) du_1 \int_0^\infty g_2(u_2) T(u_1 + u_2) f\, du_2.$$

Substituieren wir $u_1 + u_2 = t$ und vertauschen anschließend die Integrale nach dem Satz von Fubini, dann ist die rechte Seite der letzten Zeile gleich

$$\int_0^\infty g_1(u_1) du_1 \int_{u_1}^\infty g_2(t - u_1) T(t) f\, dt = \int_0^\infty T(t) f\, dt \int_0^t g_1(u_1) g_2(t - u_1) du_1$$
$$= \int_0^\infty [g_1 * g_2](t) T(t) f\, dt.$$

Für $r > 2$ folgt die Behauptung durch vollständige Induktion.

Lemma 2.4. *Seien k und n zwei positive ganze Zahlen und sei $0 < \gamma < \min(k, n)$. Für jedes $f \in X$ und für $\varepsilon, \eta > 0$ gilt die Identität*

$$\begin{aligned}(2.13)\qquad &\int_\eta^\infty t^{-1-\gamma}[I-T(t)]^k dt \int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u) f \frac{du}{\varepsilon} \\ &\qquad = \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\gamma}[I-T(t)]^n dt \int_0^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{u}{\eta}\right) T(u) f \frac{du}{\eta}.\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß die Integrale

$$\int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du \quad \text{und} \quad \int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u) f \frac{du}{\varepsilon}$$

$$(0<\gamma<n,\ n=1, 2, \cdots;\ \varepsilon>0)$$

für jedes $f \in X$ im Bochnerschen Sinn existieren und infolge der Normabschätzungen

$$\left\|\int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du\right\|_X \leqq (1+M)^n \gamma^{-1} \varepsilon^{-\gamma} \|f\|_X$$

und

$$(2.14)\qquad \left\|\int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u) f \frac{du}{\varepsilon}\right\|_X \leqq M \|q_{\gamma,n}\|_{L(0,\infty)} \|f\|_X$$

als beschränkte lineare Operatoren von X in sich angesehen werden können.

Die linke Seite der Identität (2.13) bezeichnen wir abkürzend mit $I_1(f)$, die rechte mit $I_2(f)$ für $f \in X$. Wie wir noch sehen werden, läßt sich I_r $(r=1, 2)$ auf die Form

$$(2.15)\qquad I_r(f) = \int_0^\infty Q_r(u) T(u) f du \qquad (r=1, 2)$$

umschreiben, wobei $Q_r(u)$ für $r=1$ und $r=2$ eine von den Parametern γ, ε, η, n und k abhängige Funktion aus $L(0, \infty)$ ist. Um auf die Gleichung $Q_1(u) = Q_2(u)$ f. ü. auf $(0, \infty)$ schließen zu können, womit die Identität bewiesen wäre, genügt es nach dem Eindeutigkeitssatz der Laplacetransformation, die Gültigkeit von $Q_1^\wedge(\lambda) = Q_2^\wedge(\lambda)$ für $\lambda > 0$ zu zeigen, was darauf hinausläuft, die Identität (2.13) explizit nur für die Halbgruppe aus Beispiel (2.2): $T_\lambda(t) f = e^{-\lambda t} f$ $(t \geqq 0)$ für jedes $\lambda > 0$ nachzuweisen.

Verifizieren wir also zuerst die Darstellung (2.15). Mit der n-ten Riemann-Differenz

$$(2.16)\qquad [I-T(t)]^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} T(jt)$$

schreiben wir

$$
(2.17)\quad \begin{aligned}
\int_\varepsilon^\infty t^{-1-\gamma}[I-T(t)]^n f\,dt &= \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} j^\gamma \int_0^\infty b_{\varepsilon j}(t)T(t)f\,dt \\
&+\gamma^{-1}\varepsilon^{-\gamma}f = \int_0^\infty c_\varepsilon^{(\gamma,n)}(t)T(t)f\,dt+\gamma^{-1}\varepsilon^{-\gamma}f,
\end{aligned}
$$

wobei $b_{\varepsilon j}(t)$ die aus dem Beweis von Lemma 2.2 bekannte Hilfsfunktion ist und $c_\varepsilon^{(\gamma,n)}(t)$ folgende Abkürzung bedeutet

$$
(2.18)\qquad c_\varepsilon^{(\gamma,n)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} j^\gamma b_{\varepsilon j}(t).
$$

Wendet man Darstellung (2.17) und dann Lemma 2.3 an, so lautet die linke Seite der Identität

$$
(2.19)\quad \begin{aligned}
I_1(f) &= \left\{\int_0^\infty c_\eta^{(\gamma,k)}(t)\,T(t)\,dt+\gamma^{-1}\eta^{-\gamma}I\right\}\int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon} \\
&= \int_0^\infty\left\{\left[c_\eta^{(\gamma,k)}(\cdot) * q_{\gamma,n}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right](u)+\gamma^{-1}\eta^{-\gamma}q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right\}T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Eine analoge Darstellung gilt für den Ausdruck $I_2(f)$, da er sich aus $I_1(f)$ ergibt, indem man gleichzeitig ε mit η und n mit k vertauscht.

Offensichtlich ist die Identität im Fall der Halbgruppe (2.2) für jedes $\lambda > 0$ erfüllt, da mit Hilfe der Darstellung (2.4) für die Laplacetransformierte $q_{\gamma,n}^\wedge(\lambda)$ folgendes gilt:

$$
\begin{aligned}
Q_1^\wedge(\lambda) = I_1(1) &= \int_\eta^\infty t^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda t})^k dt\,[q_{\gamma,n}]^\wedge(\lambda\varepsilon) \\
&= \lambda^{-\gamma}\int_\eta^\infty t^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda t})^k dt\int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda u})^n du \qquad (\lambda > 0).
\end{aligned}
$$

Aus der letzten Zeile erkennt man die Symmetrie von $Q_1^\wedge(\lambda)$ in den Paaren (η, k) und (ε, n); also gilt $Q_1^\wedge(\lambda) = Q_2^\wedge(\lambda)$ $(\lambda > 0)$. Nach den eingangs gemachten Bemerkungen ist Lemma 2.4 damit bewiesen.

Aus der Identität (2.13) folgert man nun

Satz 2.5. *Sei $0 < \gamma < n$, $n = 1, 2, \cdots$. Für jedes Element f aus X gehört das Integral*

$$
\int_0^\infty q_{\gamma,n}(u)T(u)f\,du
$$

zum Definitionsbereich $\mathsf{D}((-A)^\gamma)$, und für $\varepsilon > 0$ gilt

$$
(2.20)\quad (-A)^\gamma\left[\int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}\right] = \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f\,du.
$$

Gehört f zu $\mathsf{D}((-A)^{\gamma})$, so ist die Formel

$$(2.21)\qquad \int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u)(-A)^{\gamma} f\,\frac{du}{\varepsilon} = \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f\,du$$

gültig.

Beweis. Zunächst zeigen wir

$$(2.22)\qquad \operatorname*{s-lim}_{\eta\to 0+}\int_0^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{u}{\eta}\right) T(u)f\,\frac{du}{\eta} = C_{\gamma,k}f \qquad (0<\gamma<k;\ f\in X).$$

Nehmen wir mit Hilfe der Beziehung (2.7) folgende Zerlegung vor

$$\int_0^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{u}{\eta}\right) T(u)f\,\frac{du}{\eta} - C_{\gamma,k}f = \int_0^\delta q_{\gamma,k}\left(\frac{u}{\eta}\right)[T(u)-I]f\,\frac{du}{\eta}$$
$$+\int_\delta^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{u}{\eta}\right)[T(u)-I]f\,\frac{du}{\eta} \equiv I_1+I_2,$$

wobei wegen der $(\mathscr{C}_0)$-Eigenschaft der Halbgruppe $\{T(t);\, t\geqq 0\}$ das $\delta>0$ durch ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon>0$ so festgelegt werden kann, daß für $0\leqq t\leqq\delta$ $\|T(t)f-f\|<\varepsilon/\|q_{\gamma,k}\|_{L(0,\infty)}$ ist, dann gelten die Abschätzungen

$$\|I_1\| \leqq \sup_{0\leqq t\leqq\delta}\|T(t)f-f\|\int_0^\infty |q_{\gamma,k}(t)|dt < \varepsilon$$

und

$$\|I_2\| \leqq (M+1)\|f\|\int_{\delta/\eta}^\infty |q_{\gamma,k}(t)|dt < \varepsilon \quad \text{für } \eta<\eta_0(\varepsilon).$$

Sei nun γ eine fest vorgegebene positive Zahl und seien n und k zwei voneinander unabhängige ganze Zahlen $>\gamma$. Bildet man in der Identität (2.13) den starken Limes für $\eta\to 0+$, so strebt deren rechte Seite wegen der Grenzwertbeziehung (2.22) für jedes $f\in X$ gegen

$$C_{\gamma,k}\int_\varepsilon^\infty t^{-1-\gamma}[I-T(t)]^n f\,dt$$

und die linke nach Definition 2.1 gegen

$$(2.23)\qquad C_{\gamma,k}(-A)_k^{\gamma}\int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon},$$

wobei der Index k in $(-A)_k^{\gamma}$ andeuten soll, daß die gebrochene Potenz $(-A)^{\gamma}$ noch von k abhängen könnte. Abgesehen von dieser Einschränkung ist die Relation (2.20) damit bewiesen.

Gehört f zu $D((-A)_k^\gamma)$, so darf in (2.23) der Operator $(-A)_k^\gamma$ mit dem Integral vertauscht werden, so daß (2.21) zunächst mit $(-A)_k^\gamma$ statt $(-A)^\gamma$ gültig ist. Dies ergibt sich aus der Vertauschbarkeit der Integrale in der Identität (2.13) und der Abschätzung (2.14), die bei der Limesbildung $\eta \to 0+$ den Grenzübergang unter dem Integral rechtfertigt.

Aus (2.21) mit obiger Einschränkung schließen wir, daß $(-A)_k^\gamma$ unabhängig von k ist, denn für $\varepsilon \to 0+$ konvergiert die linke Seite dieser Gleichung im starken Sinne gegen $C_{\gamma,n}(-A)_k^\gamma f$, woraus per definitionem folgt, daß f auch zu $D((-A)_n^\gamma)$ gehört und

$$(-A)_k^\gamma f = (-A)_n^\gamma f$$

gilt. Damit fallen auch die Einschränkungen, unter denen die Beziehungen (2.20) und (2.21) zunächst bewiesen wurden, fort.

Folgerung 2.6. *Der durch* (2.1) *definierte Operator* $(-A)^\gamma$ $(0 < \gamma < n,\ n = 1, 2, \cdots)$ *ist unabhängig von der ganzen Zahl* n.

Betrachten wir noch einmal die Formel (2.20) in Satz 2.5. Sie sagt das folgende aus: Zu jedem $f \in X$ kann man explizit eine von ε abhängige Schar von Elementen konstruieren, nämlich

$$(C_{\gamma,n})^{-1} \int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u) f \,\frac{du}{\varepsilon},$$

die zum Definitionsbereich $D((-A)^\gamma)$, $\gamma > 0$, gehören und für $\varepsilon \to 0+$ im starken Sinne gegen f konvergieren. Die Anwendung von $(-A)^\gamma$ auf die Elemente der Schar ergibt genau diejenigen Integralausdrücke, deren Grenzwert in der Norm für $\varepsilon \to 0+$ den Operator $(-A)^\gamma$ definiert. In dieser Form ist (2.20) ein Analogon zu der klassischen Beziehung (1.6). Man kann demnach einerseits die Ausdrücke

$$(C_{\gamma,n})^{-1} \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I - T(u)]^n f \,du \qquad (\varepsilon > 0)$$

$$\text{und } t^{-n}[I - T(t)]^n f \qquad (t > 0),$$

andererseits die Integrale

$$(C_{\gamma,n})^{-1} \int_\varepsilon^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u) f \,\frac{du}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

$$\text{und } t^{-n} \int_0^t T(u_1) \cdots du_{n-1} \int_0^t T(u_n) f \,du_n \qquad (t > 0)$$

miteinander vergleichen. Der Identität (2.13) entspricht dann die Identität (1.8), der Relation (2.21) die Gleichung (1.4), mit dem Faktor t^{-n} multipliziert. Angesichts dieser Analogien liegt es nahe, den Integralausdruck in (2.1) als verallgemeinerten Differenzenquotienten für gebrochene Potenzen zu interpretieren.

So wie sich die Abgeschlossenheit des infinitesimalen Erzeugers A aus der Gleichung (1.3) herleiten läßt, folgt diese Eigenschaft für den Operator $(-A)^\gamma$ aus der entsprechenden Relation (2.21).

SATZ 2.7. *Für $\gamma > 0$ ist $(-A)^\gamma$ ein abgeschlossener Operator, und sein Definitionsbereich $D((-A)^\gamma)$ ist dicht in X.*

BEWEIS. Aus den vorangegangenen Erläuterungen zur Formel (2.20) geht hervor, daß $D((-A)^\gamma)$ dicht in X liegt. Andererseits ist diese Eigenschaft auch schon deshalb klar, weil für jede ganze Zahl $n > \gamma$ $D(A^n) \subset D((-A)^\gamma)$ und $\overline{D(A^n)} = X$ gilt. Um nachzuweisen, daß der Operator $(-A)^\gamma$ abgeschlossen ist, betrachten wir eine beliebige Folge $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset D((-A)^\gamma)$, die im starken Sinne gegen ein Element $f_0 \in X$ konvergiert und für die $(-A)^\gamma f_\nu$ in der Norm gegen ein Element $g_0 \in X$ strebt. Gemäß (2.21) gilt die Gleichung

$$\int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f_\nu du = \int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u)(-A)^\gamma f_\nu \frac{du}{\varepsilon},$$

die in die Beziehung

$$\int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f_0 du = \int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u) g_0 \frac{du}{\varepsilon}$$

übergeht, wenn wir den Limes in der Norm für $\nu \to \infty$ bilden. Da die rechte Seite dieser letzten Gleichung für $\varepsilon \to 0+$ im starken Sinne gegen $C_{\gamma,n} g_0$ konvergiert, gehört f_0 zu $D((-A)^\gamma)$ mit $(-A)^\gamma f_0 = g_0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Unser Ziel ist es, auch die Potenzeigenschaft des Operators $(-A)^\gamma$ zu beweisen. Es empfiehlt sich jedoch, zuvor eine Umkehrformel herzuleiten.

3. Eine Umkehrformel

Wie wir im Anschluß an Satz 2.5 bemerkten, lassen sich die Gleichungen (1.4) und (2.21) miteinander vergleichen, da beide eine Formel für den Differenzenquotienten von A^n bzw. $(-A)^\gamma$ liefern. Andererseits kann man aber (1.4) auch als eine Umkehrformel für den Operator A^n betrachten. Eine solche Umkehrung wollen wir nun ebenfalls für die Potenz $(-A)^\gamma$ untersuchen.

Wir werden sehen, daß für $f \in \mathsf{D}((-A)^\gamma)$ $(0 < \gamma \leqq n,\ n = 1, 2, \cdots)$ gilt

$$(3.1) \qquad [I-T(t)]^n f = t^\gamma \int_0^\infty p_{\gamma,n}\left(\frac{u}{t}\right) T(u)(-A)^\gamma f \frac{du}{t},$$

wobei wir die Funktion $p_{\gamma,n}(u)$ wieder durch ihre Laplacetransformierte mit Hilfe der speziellen Halbgruppe (2.2) bestimmen.

Lemma 3.1. *Für* $0 < \gamma \leqq n$, $n = 1, 2, \cdots$ *gilt*

$$(3.2) \qquad \lambda^\gamma p^\wedge_{\gamma,n}(\lambda) = (1-e^{-\lambda})^n \qquad (\lambda > 0),$$

wobei $p^\wedge_{\gamma,n}(\lambda)$ *die Laplacetransformierte der Funktion*

$$(3.3) \qquad p_{\gamma,n}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\gamma)} \displaystyle\sum_{j=0}^{l} (-1)^j \binom{n}{j} (u-j)^{\gamma-1} & (l < u < l+1;\ l = 0, 1, \cdots, n-1) \\ \dfrac{1}{\Gamma(\gamma)} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (u-j)^{\gamma-1} & (u > n) \end{cases}$$

ist. Für $u > n$ *gilt*

$$(3.4) \qquad p_{\gamma,n}(u) = \begin{cases} 0 & (\gamma = 1, 2, \cdots, n) \\ \dfrac{\sin \pi\gamma}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty e^{-ut} t^{-\gamma} (1-e^t)^n dt & (0 < \gamma < n,\ \gamma \text{ nicht ganzzahlig}). \end{cases}$$

Ferner gehört $p_{\gamma,n}$ *zu* $\mathsf{L}(0, \infty)$ *und erfüllt*

$$\int_0^\infty p_{\gamma,n}(u) du = \begin{cases} 0 & (0 < \gamma < n) \\ 1 & (\gamma = n). \end{cases}$$

Beweis. Mit Hilfe der Laplacetransformierten (2.9) gilt für $\lambda > 0$

$$\lambda^{-\gamma}(1-e^{-\lambda})^n = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \int_j^\infty e^{-\lambda u} (u-j)^{\gamma-1} du = p^\wedge_{\gamma,n}(\lambda),$$

woraus die Darstellung (3.3) der Funktion $p_{\gamma,n}(u)$ unmittelbar einsichtig ist. (3.4) folgt aus den Identitäten (2.11) (γ ganzzahlig) und (2.12) (γ nicht ganzzahlig). Mit Hilfe von (2.6) erhalten wir aus (3.4) für nicht ganzzahlige γ-Werte und jedes $\delta > 0$

$$\int_{n+\delta}^\infty |p_{\gamma,n}(u)| du = \frac{|\sin \gamma\pi|}{\pi} \int_{n+\delta}^\infty du \int_0^\infty e^{-ut} t^{-\gamma} (e^t-1)^n dt$$

$$= \frac{|\sin \gamma\pi|}{\pi} \int_0^\infty e^{-t(n+\delta)} t^{-1-\gamma} (e^t-1)^n dt = (n+\delta)|q_{\gamma,n}(n+\delta)|.$$

Damit ist klar, daß $p_{\gamma,n}$ für alle γ, $0<\gamma\leqq n$, zu $L(0,\infty)$ gehört. Aus (3.2) folgt dann

$$\int_0^\infty p_{\gamma,n}(u)du=\lim_{\lambda\to 0+}\left(\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\right)^n\lambda^{n-\gamma}=\begin{cases}0 & (0<\gamma<n)\\ 1 & (\gamma=n),\end{cases}$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Bemerkung. Die Funktionen $p_{\gamma,n}$ und $q_{\gamma,n}$ hängen über die Beziehungen

$$uq_{\gamma,n}(u)=\int_0^u p_{\gamma,n}(t)dt \qquad (0<\gamma<n)$$

und

$$uq_{\gamma,n}(u)=p_{\gamma+1,n}(u) \qquad (0<\gamma\leqq n-1)$$

miteinander zusammen, wie aus (2.5) und (3.3) direkt folgt.

Der Beweis der Formel (3.1) wird wieder über eine Identität geführt; diese entspricht der Identität (1.8).

Lemma 3.2. *Seien k und n zwei ganze positive Zahlen mit $n<k$ und f ein beliebiges Element des Raumes X. Dann gilt für $0<\gamma\leqq n$ und $\varepsilon, t>0$ die Identität*

$$\begin{aligned}&[I-T(t)]^n\int_0^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}\\ &\qquad=\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}[I-T(x)]^k dx\,t^\gamma\int_0^\infty p_{\gamma,n}\left(\frac{u}{t}\right)T(u)f\,\frac{du}{t}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Beweis. Die linke Seite von (3.5) bezeichnen wir mit $I_1(f)$ und formen sie wie folgt um:

$$\begin{aligned}I_1(f)&=\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{n}{j}\int_0^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)T(jt+u)f\,\frac{du}{\varepsilon}\\ &=\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{n}{j}\int_{jt}^\infty q_{\gamma,k}\left(\frac{u-jt}{\varepsilon}\right)T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}\\ &=\sum_{l=0}^{n-1}\int_{lt}^{(l+1)t}\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\binom{n}{j}q_{\gamma,k}\left(\frac{u-jt}{\varepsilon}\right)T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}\\ &\quad+\int_{nt}^\infty\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{n}{j}q_{\gamma,k}\left(\frac{u-jt}{\varepsilon}\right)T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Mit

$$Q_1(u)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{1}{\varepsilon}q_{\gamma,k}\left(\frac{u-jt}{\varepsilon}\right) & \begin{array}{l}(lt<u<(l+t)t,\\ l=0,1,\cdots,n-1)\end{array}\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{1}{\varepsilon}q_{\gamma,k}\left(\frac{u-jt}{\varepsilon}\right) & (u>n)\end{cases}$$

haben wir daher

$$I_1(f) = \int_0^\infty Q_1(u)T(u)f\,du.$$

Für die rechte Seite der Identität (3.5) erhält man eine solche Darstellung mit einer Funktion $Q_2(u)$ aus der Beziehung (2.19), wenn man dort die Größe η durch ε und die Funktion $\varepsilon^{-1}q_{\gamma,n}(u/\varepsilon)$ durch $t^{\gamma-1}p_{\gamma,n}(u/t)$ ersetzt. Aus

$$Q_1^\wedge(\lambda) = (1-e^{-\lambda t})^n[q_{\gamma,k}]^\wedge(\lambda\varepsilon) \qquad (\lambda > 0)$$

und

$$Q_2^\wedge(\lambda) = \int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda x})^k dx\, t^\gamma[p_{\gamma,n}]^\wedge(\lambda t) \qquad (\lambda > 0)$$

ergibt sich durch Einsetzen der Laplacetransformierten (2.4) und (3.2) $Q_1^\wedge(\lambda) = Q_2^\wedge(\lambda)$ für alle $\lambda > 0$, woraus die Gültigkeit der Identität (3.5) folgt.

Von Lemma 3.2 schließen wir nun auf

SATZ 3.3. *Sei $0 < \gamma \leqq n$, $n = 1, 2, \cdots$. Für jedes $f \in \mathsf{X}$ gehört das Integral*

$$\int_0^\infty p_{\gamma,n}(u)T(u)f\,du$$

zu $\mathsf{D}((-A)^\gamma)$, und es gilt für jedes $t > 0$

$$[I-T(t)]^n f = t^\gamma(-A)^\gamma \int_0^\infty p_{\gamma,n}\left(\frac{u}{t}\right) T(u)f\,\frac{du}{t}. \tag{3.6}$$

Gehört f zu $\mathsf{D}((-A)^\gamma)$, dann gilt die Formel

$$[I-T(t)]^n f = t^\gamma \int_0^\infty p_{\gamma,n}\left(\frac{u}{t}\right) T(u)(-A)^\gamma f\,\frac{du}{t}. \tag{3.7}$$

BEWEIS. (3.6) ergibt sich, wenn man in der Identität (3.5) den Parameter ε gegen Null streben läßt und dabei die Grenzwertbeziehung (2.22) benutzt. Aus (3.6) folgt die Relation (3.7) für $f \in \mathsf{D}((-A)^\gamma)$, weil $(-A)^\gamma$ als abgeschlossener Operator mit dem Integral vertauscht werden darf.

Für $\gamma = n$ ist (3.7) nichts anderes als die bekannte Umkehrformel (1.4) für den Operator $(-A)^n$. Daß tatsächlich

$$\begin{aligned} &\int_0^t T(u_1)du_1 \int_0^t T(u_2) \cdots du_{n-1} \int_0^t T(u_n)f\,du_n \\ &\qquad = t^n \int_0^\infty p_{n,n}\left(\frac{u}{t}\right) T(u)f\,\frac{du}{t} \qquad (t > 0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

gilt, läßt sich auch direkt nachrechnen. Definiert man nämlich die Funktion $h_t^n(u)$ für $t, u > 0$ und $n = 1, 2, \cdots$ iterativ durch

$$h_t^1(u) = \begin{cases} 1 & (0 < u < t) \\ 0 & (u > t) \end{cases} \quad \text{und} \quad h_t^{n+1}(u) = [h_t^1 * h_t^n](u) \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

so ist die linke Seite von (3.8) nach Lemma 2.3 gleich $\int_0^\infty h_t^n(u)T(u)f\,du$. Durch vollständige Induktion kann man dann zeigen, daß die Gleichung

$$h_t^n(u) = t^{n-1}p_{n,n}\left(\frac{u}{t}\right)$$

für fast alle $u > 0$ erfüllt ist.

Aus der Identität (3.5) und ihren Folgerungen in Satz 3.3 können wir noch eine Reihe weiterer Schlüsse ziehen, wenn wir $t \to 0+$ streben lassen. Zunächst bemerken wir für $\gamma = n$, daß wir das Ergebnis (1.10) von Lions-Peetre, das ja unsere Überlegungen u.a. anregte, unabhängig von der distributionentheoretischen Methode in [20] direkt aus (3.5) beweisen können:

Wegen $\int_0^\infty p_{n,n}(u)du = 1$ ist für jedes $f \in X$

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to 0+} \int_0^\infty p_{n,n}\left(\frac{u}{t}\right) T(u)f\,\frac{du}{t} = f.$$

Dividiert man (3.5) im Fall $\gamma = n$ durch t^n und bildet dann auf beiden Seiten den starken Limes für $t \to 0+$, so folgt

$$(-A)^n \int_0^\infty q_{n,k}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon} = \int_\varepsilon^\infty x^{-1-n}[I-T(x)]^k f\,dx \qquad (f \in X),$$

wobei also hier $(-A)^n$ durch den Grenzwert im starken Sinne von $t^{-n}[I-T(t)]^n f$ für $t \to 0+$ erhalten wurde. Für $\varepsilon \to 0+$ ergibt sich aus der letzten Gleichung die Aussage (1.10).

Außerdem läßt sich aus (3.7) das nächste Lemma schließen:

Lemma 3.4. *Gehört f zu $D((-A)^\gamma)$, $\gamma > 0$, dann gelten folgende Abschätzungen für jede positive ganze Zahl n, falls*

a) $n \geqq \gamma$:

$$\|[T(t)-I]^n f\| = O(t^\gamma) \qquad (t \to 0+),$$

b) $n > \gamma$:

$$\|[T(t)-I]^n f\| = o(t^\gamma) \qquad (t \to 0+).$$

Beweis. Aus (3.7) folgt für $f \in D((-A)^\gamma)$

$$\|[I-T(t)]^n f\| \leqq t^\gamma M \|p_{\gamma,n}\|_{L(0,\infty)} \|(-A)^\gamma f\|, \tag{3.9}$$

womit Teil a) bewiesen ist. Für $n > \gamma$ ist

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to 0+} \int_0^\infty p_{\gamma,n}\left(\frac{u}{t}\right) T(u)f \frac{du}{t} = 0 \qquad (f \in X),$$

da $\int_0^\infty p_{\gamma,n}(u)du = 0$ $(0 < \gamma < n)$. Läßt man in der durch t^γ dividierten Gleichung (3.7) $t \to 0+$ streben, dann folgt die Behauptung b)

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to 0+} \frac{[I-T(t)]^n f}{t^\gamma} = 0 \qquad f \in D((-A)^\gamma).$$

Bemerkung. Dieses Lemma zeigt, daß die gebrochene Potenz $(-A)^\gamma$ für $0 < \gamma < n$ nicht etwa in Verallgemeinerung von (1.7) durch den Grenzwert $\text{s-lim}_{t\to 0+} t^{-\gamma}[I-T(t)]^n f$ definiert werden kann.

Mit Hilfe der Abschätzungen aus Lemma 3.4 läßt sich nun auch sehr einfach die Enthaltensrelation

$$D((-A)^{\gamma_1}) \subset D((-A)^{\gamma_2}) \qquad (\gamma_1 > \gamma_2)$$

verifizieren.

Lemma 3.5. *Ein Element f aus $D((-A)^{\gamma_0})$ $(\gamma_0 > 0)$ gehört auch zu $D((-A)^\gamma)$ für jedes $\gamma < \gamma_0$, und es gilt*

$$(3.10) \qquad (-A)^\gamma f = \frac{1}{C_{\gamma,n}} \int_0^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du,$$

wobei n, $n > \gamma$, eine beliebige ganze Zahl ist.

Beweis. Ist $f \in D((-A)^{\gamma_0})$, $0 < \gamma_0 \leqq n$, so existiert für jedes γ mit $0 < \gamma < \gamma_0$ das Bochnerintegral

$$\int_0^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du,$$

da wegen (3.9)

$$\left\| \int_0^1 u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du \right\| \leqq \frac{M}{\gamma_0-\gamma} \|p_{\gamma_0,n}\|_{L(0,\infty)} \|(-A)^{\gamma_0} f\|$$

gilt. Also ist $f \in D((-A)^\gamma)$ für jedes $\gamma < \gamma_0$, und $(-A)^\gamma f$ besitzt die Darstellung (3.10), jedoch zunächst mit der Einschränkung $n \geqq \gamma_0$ (statt $n > \gamma$). Diese kann aber fallengelassen werden; denn wenn es zu festgehaltenem γ ein n gibt, so daß $\gamma < n < \gamma_0$ ist, dann läßt sich obige Argumentation für γ_0 auf jedes $\bar{\gamma}_0$ mit $\gamma < \bar{\gamma}_0 < n$ übertragen.

4. Potenzregeln

Als erste Potenzregel beweisen wir

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\gamma} = (-A)^{\alpha+\gamma} \qquad (\alpha, \gamma > 0).$$

Den Ausgangspunkt dazu bildet wieder eine Identität.

LEMMA 4.1. *Seien k, n und r positive ganze Zahlen, so daß $k > \alpha$, $n > \gamma$ und $r > \alpha+\gamma$ ist. Dann gilt für jedes $f \in X$ und beliebige positive Größen ε, δ und η die Identität*

(4.1)

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} u^{-1-\alpha}[I-T(u)]^k du \int_{\delta}^{\infty} x^{-1-\gamma}[I-T(x)]^n dx \int_0^{\infty} q_{\alpha+\gamma,r}\left(\frac{t}{\eta}\right) T(t)f \frac{dt}{\eta}$$
$$= \int_{\eta}^{\infty} t^{-1-\alpha-\gamma}[I-T(t)]^r dt \int_0^{\infty} q_{\gamma,n}\left(\frac{x}{\delta}\right) T(x) \frac{dx}{\delta} \int_0^{\infty} q_{\alpha,k}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u)f \frac{du}{\varepsilon}.$$

Auf den Beweis dieses Lemmas wollen wir verzichten, da er in analoger Weise zu dem von Lemma 2.4 durchführbar ist.

SATZ 4.2. *Es sei $\alpha, \gamma > 0$. Ein Element $f \in X$ gehört zum Definitionsbereich $D((-A)^{\alpha}(-A)^{\gamma})$ des Produktes der Operatoren $(-A)^{\alpha}$ und $(-A)^{\gamma}$ dann und nur dann, wenn es zu $D((-A)^{\alpha+\gamma})$ gehört. In diesem Falle besteht die Gleichung*

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\gamma}f = (-A)^{\alpha+\gamma}f.$$

BEWEIS. Läßt man in (4.1) zunächst δ, dann ε gegen Null streben, so folgt für jedes $f \in X$, daß der Ausdruck

$$(-A)^{\gamma}\int_0^{\infty} q_{\alpha+\gamma,r}\left(\frac{t}{\eta}\right) T(t)f \frac{dt}{\eta} \qquad (\eta > 0),$$

der nach Satz 2.5 und Lemma 3.5 für $f \in X$ existiert, zum Definitionsbereich $D((-A)^{\alpha})$ gehört und die Beziehung

$$(4.2) \qquad (-A)^{\alpha}(-A)^{\gamma}\int_0^{\infty} q_{\alpha+\gamma,r}\left(\frac{t}{\eta}\right) T(t)f \frac{dt}{\eta} = \int_{\eta}^{\infty} t^{-1-\alpha-\gamma}[I-T(t)]^r f\, dt \qquad (f \in X)$$

erfüllt.

Ist nun $f \in D((-A)^{\alpha}(-A)^{\gamma})$, so kann man in (4.2) das Produkt der Operatoren $(-A)^{\alpha}$ und $(-A)^{\gamma}$ mit dem Integral vertauschen, da jeder Operator für sich abgeschlossen ist. Für $\eta \to 0+$ folgt dann aus (4.2): $f \in D((-A)^{\alpha+\gamma})$ und $(-A)^{\alpha}(-A)^{\gamma}f = (-A)^{\alpha+\gamma}f$.

Ist umgekehrt f in $D((-A)^{\alpha+\gamma})$, dann gehört f auch zu $D((-A)^{\gamma})$, und wir können auf der linken Seite von (4.2) den Operator $(-A)^{\gamma}$ unters Integral ziehen. Für $\eta \to 0+$ ergibt sich mit Hilfe der Abgeschlossenheit von $(-A)^{\alpha}$:

$$(-A)^{\gamma} f \in D((-A)^{\alpha}) \text{ und } (-A)^{\alpha}(-A)^{\gamma} f = (-A)^{\alpha+\gamma} f.$$

Bei der Betrachtung gebrochener Potenzen von Halbgruppenerzeugern kann eine Potenzregel der Form

$$((-A)^{\alpha})^{\gamma} = (-A)^{\alpha\gamma}$$

nur dann sinnvoll mit Halbgruppenmethoden untersucht werden, wenn außer A auch $-(-A)^{\alpha}$ eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ erzeugt. Diese letztgenannte Bedingung ist im allgemeinen — d.h. wenn die gleichmäßig beschränkte Halbgruppe $\{T(t); t \geqq 0\}$ der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ mit Erzeuger A beliebig vorgegeben ist — nur im Falle $0 < \alpha < 1$ erfüllt.

Daher führen wir im folgenden die bekannte Halbgruppe $\{S_{\alpha}(t); t \geqq 0\}$ $(0 < \alpha < 1)$ ein (siehe 4.3) und zeigen, daß ihr infinitesimaler Erzeuger A_{α} mit der gebrochenen Potenz $-(-A)^{\alpha}$ im Sinne von Definition 2.1 übereinstimmt.

Unter den in dieser Arbeit üblichen Voraussetzungen an die Halbgruppe $\{T(t); t \geqq 0\}$ bilden die Operatoren

$$\text{(4.3)} \qquad S_{\alpha}(t) f = \begin{cases} \int_0^{\infty} \psi_{\alpha}(u; t) T(u) f \, du & (t > 0) \\ f & (t = 0) \end{cases}$$

für jedes α, $0 < \alpha < 1$, eine gleichmäßig beschränkte, holomorphe Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ auf X. Dabei ist $\psi_{\alpha}(u; t)$ eine stabile Dichtefunktion im Sinne von P. Lévy, die in Gestalt ihrer Laplacetransformierten durch

$$\text{(4.4)} \qquad e^{-t\lambda^{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \psi_{\alpha}(u; t) \, du \qquad (t, \lambda > 0)$$

gegeben ist. $\psi_{\alpha}(u; t)$ ist nicht negativ für $u > 0$, gehört zu $L(0, \infty)$ mit $\int_0^{\infty} \psi_{\alpha}(u; t) du = 1$ für jedes $t > 0$ und genügt der Funktionalgleichung

$$\psi_{\alpha}(u; t_1 + t_2) = \int_0^{\infty} \psi_{\alpha}(u - x; t_1) \psi_{\alpha}(x; t_2) \, dx \qquad (t_1, t_2, u > 0).$$

Die Restriktion des infinitesimalen Erzeugers A_{α} von $\{S_{\alpha}(t); t \geqq 0\}$ auf $D(A)$ kann mit Hilfe der ursprünglichen Halbgruppe $\{T(t); t \geqq 0\}$ in Form von

$$(4.5) \qquad A_\alpha f = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty u^{-1-\alpha}[I - T(u)] f \, du \qquad (f \in D(A))$$

dargestellt werden. Für die Resolvente von A_α gilt

(4.6)
$$R(\lambda; A_\alpha) f = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^\alpha}{\lambda^2 - 2u^\alpha \lambda \cos \alpha\pi + u^{2\alpha}} R(u; A) f \, du \qquad (f \in X).$$

Die Halbgruppe (4.3) ist ein Beispiel für die von R. S. Phillips in [25] konstruierten Halbgruppen, deren Untersuchung auf N. P. Romanoff [27] sowie S. Bochner [7] zurückgeht. Sie ist in der Literatur in Verbindung mit gebrochenen Potenzen wohlbekannt, und manche ihrer Eigenschaften wurde mit deren Hilfe hergeleitet. Jedoch sei besonders im Hinblick auf den Beweis des nachstehenden Satzes 4.3 betont, daß alle oben zitierten Ergebnisse natürlich auch unabhängig von der Theorie der gebrochenen Potenzen zu beweisen sind, was von verschiedenen Autoren ausgeführt wurde. So verifizierten z.B. R. S. Phillips loc. cit. und K. Yosida [33] die Darstellung (4.5) für den infinitesimalen Erzeuger A_α auf direktem Wege, A. V. Balakrishnan [1] hingegen unter Benutzung der nach seiner Methode konstruierten gebrochenen Potenzen. Ebenfalls von Yosida [33], sowie von T. Kato [16] wurde die Holomorphieeigenschaft der Halbgruppe $\{S_\alpha(t); t \geqq 0\}$ gezeigt. Von letzterem stammt auch die Resolventendarstellung (4.6), die er als Definitionsgleichung für $-(-A)^\alpha$ wählte. Eine Zusammenfassung von Ergebnissen über die Halbgruppe $\{S_\alpha(t); t \geqq 0\}$ in Verbindung mit gebrochenen Potenzen findet sich in Yosida [34; IX, 11].

Für die gebrochene Potenz $(-A)^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ im Sinne von Definition 2.1 gilt

Satz 4.3. *Ein Element $f \in X$ gehört zum Definitionsbereich $D((-A)^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, genau dann, wenn $f \in D(A_\alpha)$ ist, und es besteht die Verknüpfung*

$$-(-A)^\alpha f = A_\alpha f.$$

Beweis. Sei $f \in D((-A)^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Dann existiert eine Folge $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, deren Elemente zu $D(A)$ gehören und für die die Limesbeziehungen

$$\operatorname*{s-lim}_{\nu\to\infty} f_\nu = f, \qquad \operatorname*{s-lim}_{\nu\to\infty} (-A)^\alpha f_\nu = (-A)^\alpha f$$

gelten. (Z.B. kann die Folge $\{f_\nu\}$ durch $f_\nu = \nu \int_0^\infty p_{1,1}(\nu u) T(u) f \, du$

gegeben sein, siehe Satz 3.3.) Koppeln wir die Darstellungen (3.10) für die Potenz $(-A)^\alpha$ und (4.5) für den Erzeuger A_α, so folgt $-(-A^\alpha)f_\nu = A_\alpha f_\nu$ und damit die Relation

$$\operatorname*{s-lim}_{\nu\to\infty} A_\alpha f_\nu = -(-A)^\alpha f.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von A_α schließt man aus $f \in D((-A)^\alpha)$ auch $f \in D(A_\alpha)$ und $A_\alpha f = -(-A)^\alpha f$. Die Umkehrung dieser Aussage folgert man auf dieselbe Weise durch Vertauschung von A_α und $-(-A)^\alpha$.

Erzeugt der Operator A eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ — also $-(-A)^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ ebenso — dann kann man für $\gamma > 0$ die Potenz $((-A)^\alpha)^\gamma$ im Sinne von Definition 2.1 bilden und erhält Satz 4.5, dem wir eine Identität voranstellen.

Lemma 4.4. *Ist $0 < \gamma < n$, $n = 1, 2, \cdots$ und $0 < \alpha\gamma < k$, $k = 1, 2, \cdots$ für $0 < \alpha < 1$, so erfüllt jedes Element $f \in X$ die Identität*

$$\begin{aligned}(4.7)\qquad &\int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I - S_\alpha(u)]^n du \int_0^\infty q_{\alpha\gamma,k}\left(\frac{t}{\eta}\right) T(t)f\,\frac{dt}{\eta}\\ &\quad = \int_\eta^\infty u^{-1-\alpha\gamma}[I - T(u)]^k du \int_0^\infty q_{\gamma,n}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) S_\alpha(t)f\,\frac{dt}{\varepsilon},\end{aligned}$$

wobei ε und η positive Zahlen sind.

Beweis. Prinzipiell kann man diese Behauptung analog zu Lemma 2.4 beweisen. Die linke Seite $I_1(f)$ der Identität läßt sich darstellen in Form von

$$\begin{aligned}I_1(f) = \int_0^\infty \Big\{ &\int_0^\infty c_\varepsilon^{(\gamma,n)}(u) \left[\psi_\alpha(\cdot\,; u) * q_{\alpha\gamma,k}\left(\frac{\cdot}{\eta}\right)\right](t)du\\ &+ \gamma^{-1}\varepsilon^{-\gamma} q_{\alpha\gamma,k}\left(\frac{t}{\eta}\right)\Big\}\, T(t)f\,\frac{dt}{\eta},\end{aligned}$$

die rechte Seite $I_2(f)$ durch

$$\begin{aligned}I_2(f) = \int_0^\infty T(t)f\,dt \int_0^\infty &\{[c_\eta^{(\alpha\gamma,k)} * \psi_\alpha(\cdot\,; u)](t)\\ &+ (\alpha\gamma)^{-1}\eta^{-\alpha\gamma}\psi_\alpha(t; u)\} q_{\gamma,n}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\frac{du}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Für die Laplacetransformierten der Funktionen $Q_1(t)$ und $Q_2(t)$, die durch $I_r(f) = \int_0^\infty Q_r(t)T(t)f\,dt$ $(r = 1, 2)$ gegeben sind, folgt mit Hilfe von (4.4)

$$Q_1^\wedge(\lambda) = Q_2^\wedge(\lambda) = \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}(1-e^{-\lambda^\alpha u})^n du\,\lambda^{-\alpha\gamma}\int_\eta^\infty x^{-1-\alpha\gamma}(1-e^{-\lambda x})^k dx \qquad (\lambda > 0),$$

womit die Gültigkeit der Identität gezeigt ist.

Satz 4.5. *Sei $0 < \alpha < 1$ und $\gamma > 0$. $f \in X$ ist genau dann ein Element des Definitionsbereiches von $((-A)^\alpha)^\gamma$, wenn es zu $D((-A)^{\alpha\gamma})$ gehört; f genügt dann der Gleichung*

$$((-A)^\alpha)^\gamma f = (-A)^{\alpha\gamma} f.$$

Beweis. Für $\varepsilon \to 0+$ ergibt sich aus der Identität (4.7) die Beziehung

$$((-A)^\alpha)^\gamma \int_0^\infty q_{\alpha\gamma,k}\left(\frac{t}{\eta}\right) T(t)f\frac{dt}{\eta} = \int_\eta^\infty u^{-1-\alpha\gamma}[I-T(u)]^k f\,du \qquad (f \in X),$$

aus der man die gewünschte Potenzeigenschaft durch den Grenzübergang $\eta \to 0+$ unmittelbar schließen kann.

5. Zusammenhang mit der Konstruktion gebrochener Potenzen nach Balakrishnan

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst die Konstruktion gebrochener Potenzen von A. V. Balakrishnan [2] für eine allgemeine Klasse von abgeschlossenen linearen Operatoren U und zeigen dann, daß seine Definition äquivalent zur Definition 2.1 ist, wenn der Operator U der infinitesimale Erzeuger einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ ist.

Sei U ein abgeschlossener linearer Operator, dessen Definitions- und Wertebereich in dem Banachraum X liegen. Jedes $\lambda > 0$ gehöre zur Resolventenmenge $\rho(U)$, und die Resolvente genüge der Bedingung

$$\|\lambda R(\lambda; U)\| < M_0 \qquad (\lambda > 0),$$

wobei M_0 eine von λ unabhängige Konstante sei.

Für $n-1 \leqq \gamma < n$ $(n = 1, 2, \cdots; \gamma = 0$ ausgeschlossen) definiert Balakrishnan die gebrochene Potenz $(-U)_B^\gamma$ als kleinste abgeschlossene Fortsetzung des Operators J^γ, der auf $D(U^n)$ durch

$$(5.1)\qquad J^\gamma f = \begin{cases} -\dfrac{\sin \pi\gamma}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \lambda^{\gamma-n} R(\lambda; U)U^n f\,d\lambda & (n-1 < \gamma < n) \\ (-U)^{n-1} f & (\gamma = n-1) \end{cases}$$

gegeben ist. Hierbei existiert das Integral im Bochnerschen Sinn, da

$$||R(\lambda; U)U^n f|| \leqq \begin{cases} ||[\lambda R(\lambda; U)-I]U^{n-1}f|| \leqq (M_0+1)||U^{n-1}f|| \\ M_0\lambda^{-1}||U^n f|| \end{cases}$$

gilt. $(-U)^\gamma_B$ interpoliert die ganzzahligen Potenzen von $(-U)$ und genügt der Potenzregel

$$(-U)^{\gamma_1+\gamma_2}_B = \overline{(-U)^{\gamma_1}_B(-U)^{\gamma_2}_B} \qquad (\gamma_1, \gamma_2 > 0)$$

(wobei $\overline{(-U)^{\gamma_1}_B(-U)^{\gamma_2}_B}$ die kleinste Abschließung von $(-U)^{\gamma_1}_B(-U)^{\gamma_2}_B$ bezeichnet).

Obige Definition des Operators $(-U)^\gamma_B$ ist motiviert durch den Riesz-Dunford-Funktionenkalkül für beschränkte Operatoren. Siehe hierzu Dunford-Schwartz [13; VII, 3]. Danach ist, wenn U zusätzlich als beschränkt vorausgesetzt wird, die Operatorfunktion $(-U)^\gamma$ durch das Integral

$$(5.2) \qquad (-U)^\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\xi)^\gamma R(\xi; U)d\xi,$$

gegeben, das sich durch eine geeignete Wahl des Integrationsweges auf die Form des Integrals in (5.1) umschreiben läßt. (In (5.2) ist Γ eine positiv orientierte rektifizierbare Jordankurve, die das Spektrum des Operators U umschließt und keinen Punkt der positiven reellen Achse $[0, \infty)$ enthält. Die komplexe Funktion $(-\xi)^\gamma$ ist eindeutig bestimmt durch die Festsetzung $\mathrm{Re}(-\xi)^\gamma > 0$ für $\mathrm{Re}\, \xi < 0$.)

Insbesondere erfüllt der infinitesimale Erzeuger A einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ die oben zitierten Bedingungen von Balakrishnan [2] zur Definition der gebrochenen Potenz $(-A)^\gamma_B$. Sie stimmt mit der ersten Definition von Balakrishnan [1], die er speziell für Halbgruppenerzeuger einführte, überein. In [1] wird folgende Darstellungsformel für die Restriktion von $(-A)^\gamma_B$ $(n-1 < \gamma < n)$ auf den Unterraum $\mathsf{D}(A^n)$ von $\mathsf{D}((-A)^\gamma_B)$ bewiesen:

$$(5.3) \qquad (-A)^\gamma_B f = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int_0^\infty u^{-1-\gamma}\left[T(u)f - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{u^j}{j!}A^j f\right]du$$
$$(f \in \mathsf{D}(A^n);\ n-1 < \gamma < n,\ n = 1, 2, \cdots).$$

Wir werden sehen, daß sich in diesem Ausdruck die Taylordifferenz der Halbgruppe durch ihre Riemann-Differenz ersetzen läßt. Dies besagt, daß die Operatoren $(-A)^\gamma_B$ und $(-A)^\gamma$ für $n-1 < \gamma < n$

auf der in X dichten Teilmenge $D(A^n)$ übereinstimmen. Da wir die wichtigsten Eigenschaften des Potenzoperators $(-A)^\gamma$ aus seiner Definitionsgleichung (2.1) in den vorangegangenen Abschnitten hergeleitet haben — insbesondere auch seine Abgeschlossenheit — ist es nun nicht mehr schwer zu folgern, daß er mit dem Operator $(-A)_B^\gamma$ identisch ist.

Balakrishnan konnte seine Darstellung (5.3) der Restriktion des Operators $(-A)_B^\gamma$ auf einen Teilraum von $D((-A)_B^\gamma)$ nicht mit Hilfe des Grenzwertes

$$\text{(5.4)} \qquad \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma} \left[T(u)f - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^j}{j!} A^j f \right] du \qquad (n-1 < \gamma < n)$$

auf den gesamten Definitionsbereich $D((-A)_B^\gamma)$ verallgemeinern, da ihm die Abgeschlossenheit des durch (5.4) definierten Operators nicht zur Verfügung stand. (Ob Taylor- oder Riemann-Differenz spielt nicht die entscheidende Rolle; vgl. auch die Bemerkung am Ende dieses Abschnittes.)

LEMMA 5.1. *Für $f \in D(A^n)$, $n = 1, 2, \cdots$, und $n-1 < \gamma < n$ gilt*

(5.5)
$$\frac{1}{C_{\gamma,n}} \int_0^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du = \frac{-\sin \gamma\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\gamma-n} R(\lambda; A) A^n f d\lambda.$$

BEWEIS. (Für $n = 1$ siehe Yosida [34, p; 265].) Zu Beginn geben wir eine im folgenden benötigte Identität an (vgl. Hille-Phillips [15, p. 348])

$$\text{(5.6)} \qquad \lambda R(\lambda; A)f - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{A^\nu}{\lambda^\nu} f = \lambda^{-n+1} R(\lambda; A) A^n f \qquad (\lambda > 0; f \in D(A^n)).$$

Führen wir auf der linken Seite von (5.5) die Summendarstellung (2.16) für die n-te Riemann-Differenz sowie die Laplacetransformierte (2.9) ein, so ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \int_0^\infty t^{\gamma-1} dt \left\{ \int_0^\infty e^{-tu} t \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} T(ju) f du + f \right\}. \end{aligned}$$

Darin läßt sich der Ausdruck in der geschweiften Klammer

— abkürzend durch $E(t)$ bezeichnet — mit Hilfe der Resolventendarstellung (1.11) sowie der Identitäten (5.6 für $\lambda = t/j$) und (2.11) wie folgt umformen:

$$E(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{t}{j} R\left(\frac{t}{j}; A\right) f + f$$
$$= t^{-n+1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} j^{n-1} R\left(\frac{t}{j}; A\right) A^n f.$$

Setzt man dies in (5.7) ein, dann gelangt man zu der Gleichung

$$\int_0^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} j^\gamma \int_0^\infty u^{\gamma-n} R(u; A) A^n f du,$$

die mit Hilfe der Darstellung (2.8) für die Konstante $C_{\gamma,n}$ die gewünschte Beziehung (5.5) ergibt.

Wir haben nun bewiesen, daß für $0 < \gamma < n$, $n = 1, 2, \cdots$ $(-A)^\gamma$ und $(-A)^\gamma_B$ auf $D(A^n)$ übereinstimmen. Mit Hilfe der Abgeschlossenheit beider Operatoren folgt dann entsprechend zum Beweis von Satz 4.3, daß sie identisch sind. Dies besagt

Satz 5.2. *Ein Element $f \in X$ gehört zum Definitionsbereich $D((-A)^\gamma)$, $\gamma > 0$, genau dann, wenn $f \in D((-A)^\gamma_B)$ ist, und es gilt*

$$(-A)^\gamma f = (-A)^\gamma_B f.$$

H. Komatsu [18] beweist, daß sich die nach seiner Methode konstruierten gebrochenen Potenzen $(-A)^\gamma_K$ durch den Grenzwert

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{C_{\gamma,n}} \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[I-T(u)]^n f du \tag{5.8}$$

darstellen lassen. Da $(-A)^\gamma_K$ und $(-A)^\gamma_B$ ($\gamma > 0$) identisch sind, ist Komatsus Ergebnis äquivalent mit der Aussage des Satzes 5.2. Während jedoch in dieser Arbeit, von dem Grenzwert (5.8) ausgehend, ein Kalkül entwickelt wurde, der es auf besonders elementare Weise gestattet, (5.8) als Potenzoperator gebrochener Ordnung zu charakterisieren, ist für Komatsu (5.8) nur eine Darstellungsform von $(-A)^\gamma_K$, die er mit Hilfe der Inversen $(\mu I+A)^{-\gamma}_K$ ($\mu > 0$) von $(\mu I+A)^\gamma_K$ verifiziert. Da außerdem seine Konstruktion gebrochener Potenzen diffiziler ist, verläuft sein Beweis der Darstellung (5.8) weniger elementar.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Ausblick auf Verallgemeinerungen und Anwendungen.

Zunächst sei bemerkt, daß man in dem Differenzenquotienten (2.1) der gebrochenen Potenz $(-A)^\gamma$ die n-te Riemanndifferenz bzgl. der Halbgruppe $\{T(t); t \geqq 0\}$ auch durch ihre n-te Taylordifferenz ersetzen kann, so daß folgende Aussage gültig ist:

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Element $f \in X$ zum Definitionsbereich $D((-A)^\gamma)$, $n-1 < \gamma < n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ gehört, ist, daß f in $D(A^{n-1})$ ist und der Ausdruck

$$\frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma} \left\{ T(u)f - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^j}{j!} A^j f \right\} du$$

im starken Sinne für $\varepsilon \to 0+$ konvergiert; der Grenzwert ist dann gleich $(-A)^\gamma f$.

Siehe auch A. V. Balakrishnan [1] und H. Komatsu [17].

Zweitens liegt es nahe, die Untersuchungen dieser Arbeit auch auf den dualen Operator $(-A^*)$ von $(-A)$ in Verbindung mit der dualen Halbgruppe $\{T^*(t); t \geqq 0\}$ in $\mathscr{E}(X^*)$ zu übertragen. Siehe hierzu die Anmerkung in Berens-Butzer-Westphal [5], bzgl. dualer Halbgruppen Abschnitt 1.4 in Butzer-Berens [9] und die dort zitierten Literaturangaben. Weiter soll hier nicht darauf eingegangen werden.

Ferner läßt sich die in dieser Arbeit durchgeführte "Methode mittels Identitäten" wahrscheinlich auch auf die Klasse von Operatoren U übertragen, die die Bedingungen der Balakrishnan-Definition gebrochener Potenzen (siehe die Ausführungen zu Beginn dieses Abschnittes) erfüllen. Anlaß zu einer derartigen Vermutung gibt ein Ergebnis von H. Komatsu [18] über diese Operatoren:

$$(-U)^\gamma f = \operatorname*{s-lim}_{N\to\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(n-\gamma)} \int_0^N \lambda^{\gamma-1}[I - \lambda R(\lambda; U)]^n f d\lambda \qquad (0 < \gamma < n).$$

Eine Anwendung zu den Untersuchungen dieser Arbeit bietet sich, wenn man das Approximationsverhalten der gleichmäßig beschränkten Halbgruppe $\{T(t); t \geqq 0\}$ der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ an die Identität I studiert. Eine wichtige Rolle spielen in diesem Zusammenhang die normalisierten Banachunterräume $X_{\alpha,n;q}$ von X, erzeugt durch die Halbgruppe. Dabei ist $X_{\alpha,n;q}$ der Raum aller Elemente f aus X, für die die Norm

$$\|f_{\alpha,n;q}\| = \begin{cases} \|f\| + \left\{ \int_0^\infty (t^{-\alpha} \|[T(t)-I]^n f\|)^q \dfrac{dt}{t} \right\}^{1/q} & (0 < \alpha < n,\ 1 \leqq q < \infty) \\ \|f\| + t^{-\alpha} \|[T(t)-I]^n f\| & (0 < \alpha \leqq n,\ q = \infty) \end{cases}$$
$$n = 1, 2, \cdots$$

endlich ist. $X_{\alpha,n;q}$ sind für $\alpha = n$, $q = \infty$ unter dem Namen Favard- oder Saturationsräume bekannt und kennzeichnen das optimale Approximationsverhalten der n-ten Riemanndifferenz der Halbgruppe, während sie für $0 < \alpha < n$, $1 \leqq q \leqq \infty$ nicht-optimales Approximationsverhalten charakterisieren.

Die erste Arbeit für den Saturationsfall stammt von P. L. Butzer [8] aus dem Jahre 1956. Sie hat sich in vielen Richtungen als grundlegend erwiesen; so geht auch die Problemstellung hier auf obige Arbeit zurück. Im Falle nicht-optimaler Approximation ist an erster Stelle J. L. Lions [19], 1959, zu nennen. Bzgl. einer umfassenden Darstellung dieses Gebietes sei auf Butzer-Berens [9, Ch. II, III] und die dort zitierten Literaturangaben verwiesen.

Es gilt nun, daß die Approximationsräume $X_{\alpha,n;q}$ $(0 < \alpha < n$, $1 \leqq q \leqq \infty$ bzw. $\alpha = n$, $q = \infty$; $n = 1, 2, \cdots)$ gleich den über die K- Interpolationsmethode nach J. Peetre [24] konstruierten intermediären Räumen $(X, D(A^n))_{\alpha/n,q;\mathrm{K}}$ von X und $D(A^n)$ sind (vgl. Butzer-Berens [9; Sec. 3.4]).

Mit Hilfe der Sätze 2.5 und 3.3 der vorliegenden Arbeit läßt sich ein Ergebnis (siehe [9, Theoreme 3.4.6 und 3.4.10]) von Lions-Peetre bzw. Butzer-Berens in folgender Weise verschärfen:

Für $0 < \alpha < \gamma < n$, $1 \leqq q \leqq \infty$ $(n = 1, 2, \cdots)$ gilt

$$(X, D((-A)^\gamma))_{\alpha/\gamma,q;\mathrm{K}} = X_{\alpha,n;q},$$

für den Favardraum $(X, D((-A)^\gamma))_{1,\infty;\mathrm{K}}$ ist

$$(X, D((-A)^\gamma))_{1,\infty;\mathrm{K}} = \left\{f \in X; \sup_{\varepsilon > 0} \left\| \int_\varepsilon^\infty u^{-1-\gamma}[T(u)-I]^n f du \right\| < \infty \right\}.$$

Siehe [4; Abschn. 4.2].

LITERATURVERZEICHNIS

A. V. Balakrishnan

[1] An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 330—353.

A. V. Balakrishnan

[2] Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pacific J. Math. 10 (1960), 419—437.

H. Berens

[3] Equivalent representations for the infinitesimal generator of higher orders in semi-group theory. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 27 (1965), 497—512.

H. Berens

[4] Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen. Lecture Notes in Mathematics, no. 64. Springer, Berlin 1968, 90 S.

H. Berens, P. L. Butzer and U. Westphal
[5] Representation of fractional powers of infinitesimal generators of semi-groups. Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 191—196.

H. Berens und U. Westphal
[6] Zur Charakterisierung von Ableitungen nichtganzer Ordnung im Rahmen der Laplace-Transformation. Math. Nachr. 38 (1968), 115—129.

S. Bochner
[7] Diffusion equation and stochastic processes. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 35 (1949), 368—370.

P. L. Butzer
[8] Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines intégrales singulières. C. R. Acad. Sci. Paris 243 (1956), 1473—1475.

P. L. Butzer and H. Berens
[9] Semi-groups of operators and approximation. Grundl. d. math. Wiss., Bd. 145. Springer, Berlin 1967, xi+318 pp.

P. L. Butzer und E. Görlich
[10] Zur Charakterisierung von Saturationsklassen in der Theorie der Fourierreihen. Tôhoku Math. J. 17 (1965), 29—54.

P. L. Butzer und W. Trebels
[11] Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1889. Köln 1967, 81 S.

G. Doetsch
[12] Handbuch der Laplacetransformation, Bd. I. Birkhäuser, Basel 1950, 581 S.

N. Dunford and J. T. Schwartz
[13] Linear Operators. I. General Theory. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7. New York 1958, xiv+858 pp.

W. Feller
[14] On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups generated by them. Comm. Sém. Math. Univ. Lund. Tome Supplémentaire (1952), 72—81.

E. Hille and R. S. Phillips
[15] Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 31. Providence, R.I. 1957, xii+808 pp.

T. Kato
[16] Note on fractional powers of linear operators. Proc. Japan Acad. 36 (1960), 94—96.

H. Komatsu
[17] Fractional powers of operators. Pacific J. Math. 19 (1966), 285—346.

H. Komatsu
[18] Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces. Pacific J. Math. 21 (1967), 89—111.

J. L. Lions
[19] Théorèmes de trace et d'interpolation I. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 13 (1959), 389—403.

J. L. Lions et J. Peetre

[20] Sur une classe d'espaces d'interpolation. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964), 5—68.

A. Marchaud

[21] Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles. Journ. de Math. 6 (1927) 337—425.

E. Nelson

[22] A functional calculus using singular Laplace integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 400—413.

V. Nollau

[23] Über Potenzen von linearen Operatoren in Banachschen Räumen. Acta Sci. Math. (Szeged) 28 (1967), 107—121.

J. Peetre

[24] Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation. C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 1424—1426.

R. S. Phillips

[25] On the generation of semi-groups of linear operators. Pacific J. Math. 2 (1952), 343—369.

M. Riesz

[26] L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math. 81 (1948), 1—223.

N. P. Romanoff

[27] On one parameter groups of linear transformations I. Ann. of Math. 48 (1947), 216—233.

G. Sunouchi

[28] Characterization of certain classes of functions. Tôhoku Math. J. (2), 14 (1962), 127—134.

B. Sz.-Nagy et C. Foiaş

[29] Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert. Akadémiai Kiadó et Paris, Budapest 1967, xi+374 pp.

U. Westphal

[30] Charakterisierungen von Saturationsklassen für singuläre Integrale vom Laplaceschen Faltungstyp. TH Aachen 1966.

U. Westphal

[31] Über Potenzen von Erzeugern von Halbgruppenoperatoren. In: Abstract spaces and approximation, herausgegeben von P. L. Butzer und B. Sz.-Nagy. Birkhäuser, Basel 1969.

D. V. Widder

[32] The Laplace transform. Princeton Mathematical Series, No. 6, 1941, x+406 pp.

K. Yosida

[33] Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them. Proc. Japan Acad. 36 (1960), 86—89.

K. Yosida

[34] Functional analysis. Springer, Berlin 1965, xi+458 pp.

M. Zamansky

[35] Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 66 (1949), 19—93.

(Oblatum 28–IV–69)

Lehrstuhl A für Mathematik
Rhein.-Westf. Techn. Hochschule, Aachen
Templergraben 55, Aachen, Germany