COMPOSITIO MATHEMATICA

U. WESTPHAL

Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren. Teil II : Gruppenerzeuger

Compositio Mathematica, tome 22, nº 1 (1970), p. 104-136

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1970__22_1_104_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 22, Fasc. 1, 1970, pag. 104-136
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren

Teil II: Gruppenerzeuger

von

U. Westphal

Diese Arbeit ist der zweite Teil des vorangegangenen Artikels (S. 67—103), der unter demselben Titel veröffentlicht ist und dessen Inhalt wir im folgenden als bekannt voraussetzen. Formal ist der Zusammenhang mit dem ersten Beitrag dadurch gekennzeichnet, daß die Numerierung der Abschnitte sowie der Literaturzitate an Teil I anschließt.

6. Einleitung

Im zweiten Teil dieser Abhandlung werden statt der Halbgruppen gleichmäßig beschränkte Gruppen $\{G(t); -\infty < t < \infty\}$ von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ auf Banachräumen betrachtet und Potenzen ihrer infinitesimalen Erzeuger A charakterisiert.

Da die Operatorfamilie

$$\{G^+(t) = G(t);\ t \geqq 0\}$$

als auch

$$\{G^-(t) = G(-t);\ t \geqq 0\}$$

eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ mit Erzeuger A bzw. $(-A)$ bildet, gelten für die Potenzen $(-A)^\gamma$ and A^γ diejenigen Charakterisierungen mit Hilfe der Integrale

$$\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}[I-G(x)]^n f dx$$

und

$$\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}[I-G(-x)]^n f dx \qquad (0 < \gamma < n),$$

die aus Teil I der Abhandlung bekannt sind. Ersetzt man nun aber in einem solchen Integralausdruck die einseitige Differenz

$[I-G(x)]^n$ durch die zentrale Differenz $[G(x/2)-G(-x/2)]^n$, so wird sich zeigen, daß der starke Limes für $\varepsilon \to 0+$ des von n abhängigen Integralausdrucks

$$\frac{1}{K_{\gamma,n}}\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}[G(x/2)-G(-x/2)]^n f dx \quad (K_{\gamma,n} \text{ konstant}) \tag{6.1}$$

zwei abgeschlossene lineare Operatoren definiert, nämlich B_γ^g für gerades $n = g$ und B_γ^u für ungerades $n = u$, die mit dem infinitesimalen Erzeuger A der Gruppe sowohl durch die Beziehungen

$$B_\gamma^g = (-A^2)^{\gamma/2} \quad (\gamma > 0), \qquad B_\gamma^u = iA(-A^2)^{(\gamma-1)/2} \quad (\gamma \geqq 1) \tag{6.2}$$

als auch durch

$$\begin{aligned} (-A)^\gamma &= \overline{\left[\cos\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^g + i \sin\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^u\right]}, \\ A^\gamma &= \overline{\left[\cos\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^g - i \sin\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^u\right]} \qquad (\gamma > 0) \end{aligned} \tag{6.3}$$

verknüpft sind. ($\overline{[\cos(\pi/2)\gamma B_\gamma^g \pm i \sin(\pi/2)\gamma B_\gamma^u]}$ bezeichnet die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von $[\cos(\pi/2)\gamma B_\gamma^g \pm i \sin(\pi/2)\gamma B_\gamma^u]$.)

Das Vorbild für die Untersuchungen des Integrals (6.1) und seines Grenzwertes in der Norm ($\varepsilon \to 0+$) sind die Ergebnisse und Methoden im Halbgruppenteil dieser Abhandlung. Es werden zu den Funktionen $q_{\gamma,n}$ und $p_{\gamma,n}$ entsprechende Funktionen $\bar{q}_{\gamma,n}$ und $\bar{p}_{\gamma,n}$ eingeführt und mit ihrer Hilfe analoge Indentitäten zu (2.13) und (3.5) aufgestellt, und zwar (9.1) und (9.2), aus denen dann die Eigenschaften der Operatoren B_γ^g und B_γ^u hergeleitet werden können.

Die Rolle, die im Fall der Halbgruppen die Laplacetransformation spielte, fällt bei den Gruppen der Fouriertransformation zu; denn ihr charakteristischer Faktor $e^{-ivt}(-\infty < v, t < \infty)$, multipliziert mit den Elementen f des komplexen Zahlensystems, bildet auf diesem eine gleichmäßig beschränkte Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ bzgl. t (bei festgehaltenem v). Daher kann beispielsweise die Beziehung (9.6) für den Integralausdruck (6.1) als eine Verallgemeinerung der Darstellung (8.11) der Fouriertransformation von $\bar{q}_{\gamma,n}$ angesehen werden. Ein weiteres Beispiel für die Bedeutung der Fouriertransformation liefert der Beweis der schon erwähnten Identitäten (9.1) und (9.2).

Nach einem einleitenden Abschnitt mit einigen Bemerkungen über Gruppen von Operatoren und die Fouriertransformation werden in Abschnitt 8 die Funktionen $\bar{p}_{\gamma,n}$ und $\bar{q}_{\gamma,n}$ eingeführt und ihre wichtigsten Eigenschaften zusammengestellt, wie ihre Zugehörigkeit zu $L(-\infty, \infty)$ und verschiedene Darstellungsformeln, darunter die ihrer Fouriertransformierten. Danach können zu Beginn von Abschnitt 9 die wesentlichen Identitäten formuliert und bewiesen werden (Lemma 9.1). Es folgen die Definition der Operatoren B_γ^g und B_γ^u und ihre Charakterisierung mit Hilfe der Identitäten. Dazu gehören u. a. die Tatsache, daß die gebrochenen Potenzen abgeschlossen sind und ihre Definitionsbereiche dicht in X liegen, sowie eine Umkehrformel und die Enthaltensrelation

$$\{D(B_{\gamma_0}^g) \cup D(B_{\gamma_0}^u)\} \subset \{D(B_\gamma^g) \cap D(B_\gamma^u)\} \qquad \text{für } \gamma < \gamma_0.$$

Insbesondere erwähnen wir auch die Beziehung

$$(iA)^r = \begin{cases} B_r^g & (r = g) \\ B_r^u & (r = u) \end{cases}$$

(Folgerung 9.5), die sich aus der zweiten Identität (9.2) schließen läßt. Für alle übrigen zugelassenen γ-Werte wird dieser Zusammenhang mit dem infinitesimalen Erzeuger der Gruppe in Form der obengenannten Beziehungen (6.2) und (6.3) in Abschnitt 10 hergestellt. Zum Schluß wenden wir in Abschnitt 11 einige der Ergebnisse über Gruppen als auch über Halbgruppen auf Translationen in Verbindung mit den singulären Integralen von Gauss-Weierstrass und Cauchy-Poisson an.

7. Hilfsmittel

Sei X ein komplexer Banachraum mit den Elementen $f, h, \cdots$ und der Norm $\|\cdot\|$. Eine einparametrige Schar $\{G(t); -\infty < t < \infty\}$ von Operatoren in $\mathscr{E}(X)$ heißt eine gleichmäßig beschränkte Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $G(t) \in \mathscr{E}(X)$ für jedes $t \in (-\infty, \infty)$ mit $G(0) = I$.

(ii) $G(t_1+t_2) = G(t_1)G(t_2)$ $(-\infty < t_1, t_2 < \infty)$.

(iii) $\|G(t)f\| \leqq M\|f\|$ für alle $f \in X$ und $-\infty < t < \infty$, wobei M eine Konstante ist.

(iv) $\underset{t\to 0}{\text{s-lim}}\, G(t)f = f$ für alle $f \in X$ $\big((\mathscr{C}_0)$-Eigenschaft$\big)$.

Der infinitesimale Erzeuger A der Gruppe ist definiert durch

$$Af = \underset{t\to 0}{\text{s-lim}} \frac{G(t)-I}{t} f,$$

sofern der Grenzwert existiert. A ist ein abgeschlossener, linearer Operator, und sein Definitionsbereich $\mathsf{D}(A)$ liegt dicht in X.

Die Gruppe $\{G(t); -\infty < t < \infty\}$ läßt sich in zwei gleichmäßig beschränkte Halbgruppen von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ in $\mathscr{E}(\mathsf{X})$ zerlegen: die Halbgruppe $\{G^+(t) = G(t); t \geqq 0\}$, die von dem Operator A erzeugt wird, und die Halbgruppe $\{G^-(t) = G(-t); t \geqq 0\}$, deren infinitesimaler Erzeuger der Operator $(-A)$ ist.

Unter den bestehenden Voraussetzungen an die Gruppe $\{G(t)\}$ gehört jede reelle Zahl λ, $\lambda \neq 0$, zu den Resolventenmengen $\rho(A)$ und $\rho(-A)$ der Operatoren A und $(-A)$. Die Resolvente $R(\lambda; A)$ von A läßt sich darstellen durch

$$(7.1) \qquad R(\lambda; A)f = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) f\,dt & (\lambda > 0) \\ -\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda t} G(t) f\,dt & (\lambda < 0), \end{cases}$$

während man zu einer entsprechenden Darstellung der Resolventen $R(\lambda; -A)$ über die Beziehung

$$(7.2) \qquad R(\lambda; A) = -R(-\lambda; -A) \qquad (\lambda \neq 0)$$

gelangt.

Für die Norm der n-ten Potenz der Resolventen folgt aus (7.1) die Abschätzung

$$(7.3) \qquad ||[R(\lambda; A)]^n|| \leqq M|\lambda|^{-n} \quad (\lambda \neq 0, n = 1, 2, \cdots).$$

Ein spezieller Fall der "ersten Resolventengleichung" ist die Formel

$$R(\lambda; A) - R(-\lambda; A) = -2\lambda R(\lambda; A) R(-\lambda; A) \quad (\lambda \neq 0),$$

die sich mit Hilfe von (7.2) auf die Form

$$(7.4) \qquad R(\lambda; A) + R(\lambda; -A) = 2\lambda R(\lambda; A) R(\lambda; -A) \quad (\lambda \neq 0)$$

umschreiben läßt.

Die "zweite Resolventengleichung", auf die Operatoren A und $(-A)$ angewandt, lautet

$$(7.5) \qquad R(\lambda; A) - R(\lambda; -A) = 2R(\lambda; A) A R(\lambda; -A) \quad (\lambda \neq 0).$$

Ferner gehört die Menge $\{\lambda; \lambda > 0\}$ zur Resolventenmenge $\rho(A^2)$ des Operators A^2, und die Resolventen der Operatoren A, $(-A)$ und A^2 sind durch die Relation

$$(7.6) \qquad R(\lambda; A^2) = R(\sqrt{\lambda}; A) R(\sqrt{\lambda}; -A) \qquad (\lambda > 0)$$

miteinander verknüpft.

Wegen dieses Zusammenhangs führt die Abschätzung (7.3) zu der Ungleichung

$$||[R(\lambda; A^2)]^n|| \leqq ||[R(\sqrt{\lambda}; A)]^n||\,||[R(\sqrt{\lambda}; -A)]^n|| \leqq M^2\lambda^{-n} \qquad (\lambda > 0),$$

die eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, daß A^2 eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe $\{W(t); t \geqq 0\}$ von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ erzeugt. Dies gilt nach dem Satz von Hille-Yosida, siehe z.B. Hille-Phillips [15, p. 360]. Die Halbgruppenoperatoren $W(t)$ $(t > 0)$ lassen sich mit Hilfe der Gruppenoperatoren $G(t)$ und des Kerns $2^{-1}(\pi t)^{-\frac{1}{2}}e^{-x^2/4t}$ von Gauss-Weierstrass durch

$$W(t)f = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4t}G(x)f\,dx \qquad (t > 0; f \in X) \tag{7.7}$$

darstellen. Dieser Sachverhalt für das Beispiel der Translationsgruppe wird in Dunford-Schwartz [13, p. 639] in der hier angegebenen Form hergeleitet; bzgl. des allgemeinen Falls siehe auch A. V. Balakrishnan [36].

Darüber hinaus benötigen wir die Begriffe der Fouriertransformation und der Fourierschen Faltung. Die Fouriertransformierte einer Funktion f aus $L(-\infty, \infty)$ ist gegeben durch

$$f^\wedge(v) = \mathscr{F}[f(z)](v) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivz}f(z)\,dz \qquad (-\infty < v < \infty).$$

(Wir benutzen hier dasselbe Symbol $f^\wedge$ wie für die Laplacetransformation in Teil I, da Verwechselungen im folgenden nicht möglich sind.) $\mathscr{F}$ bildet für jedes feste $v \in (-\infty, \infty)$ ein beschränktes lineares Funktional $\langle f_v^*, f\rangle$ auf $L(-\infty, \infty)$ mit der Norm $||f_v^*|| = 1$. Als Funktion von v ist $f^\wedge(v)$ beschränkt und gleichmäßig stetig und genügt dem Satz von Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{|v|\to\infty} f^\wedge(v) = 0.$$

Ferner gilt der Eindeutigkeitssatz: Ist $f^\wedge(v) = 0$ für alle $v \in (-\infty, \infty)$, dann ist $f(z) = 0$ f.ü.

Unter der Faltung vom Fourierschen Typ zweier Funktionen f und h aus $L(-\infty, \infty)$ verstehen wir das Integral

$$[f * h](z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(z-t)h(t)\,dt,$$

das für fast alle z existiert und ebenfalls zu $L(-\infty, \infty)$ gehört.

Für die Fouriertransformierte von $[f * h](z)$ gilt der Faltungssatz

$$[f * h]^\wedge(v) = f^\wedge(v) h^\wedge(v).$$

Bzgl. Literatur zur Fouriertransformation verweisen wir u.a. auf die klassischen Bücher von Titchmarsh [45] und Bochner-Chandrasekharan [39].

8. Die Funktionen $\bar{p}_{\gamma,n}$ und $\bar{q}_{\gamma,n}$

DEFINITION 8.1. *Es sei* $0 < \gamma \leqq n$ *für* $n = 1, 2, \cdots$, *und* m *durchlaufe die ungeraden Zahlen* $1, 3, \cdots, n-1$, *falls* n *eine gerade Zahl ist, und die geraden Zahlen* $2, 4, \cdots, n-1$ *im Falle, daß* n *ungerade ist. Mit der Abkürzung*

$$R_{\gamma,n} = \begin{cases} \dfrac{i^n}{2 \cos \dfrac{\pi}{2} (\gamma+n)} & (\gamma \neq m) \\ \dfrac{(-i)^{\gamma+1}}{\pi} & (\gamma = m) \end{cases}$$

definieren wir

(8.1)

$$\bar{p}_{\gamma,n}(x) = \begin{cases} \dfrac{R_{\gamma,n}}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\operatorname{sgn}\left(x+\dfrac{n}{2}-j\right)\right]^n \left|x+\dfrac{n}{2}-j\right|^{\gamma-1} & (\gamma \neq m) \\ \dfrac{R_{\gamma,n}}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\operatorname{sgn}\left(x+\dfrac{n}{2}-j\right)\right]^n \left|x+\dfrac{n}{2}-j\right|^{\gamma-1} \cdot \log\left|x+\dfrac{n}{2}-j\right| & (\gamma = m). \end{cases}$$

Zu bemerken ist für gerade $n = 2r$

$$R_{\gamma,2r} = \begin{cases} \left[2 \cos \dfrac{\pi}{2} \gamma\right]^{-1} & (\gamma \neq m) \\ (-1)^{(\gamma+1)/2} \pi^{-1} & (\gamma = m) \end{cases} \tag{8.2}$$

und für ungerade $n = 2r+1$

$$R_{\gamma,2r+1} = \begin{cases} \left[2i \sin \dfrac{\pi}{2} \gamma\right]^{-1} & (\gamma \neq m) \\ (-1)^{\gamma/2} (i\pi)^{-1} & (\gamma = m). \end{cases} \tag{8.3}$$

Zuerst sei bemerkt, daß $\bar{p}_{\gamma,n}(x)$ auf $-\infty < x < \infty$ existiert bis auf die Stellen $x = j-(n/2)$, $j = 0, 1, \cdots, n$, falls $0 < \gamma < 1$ oder $\gamma = m$ ist, und daß $\bar{p}_{m,n}(x) = \lim_{\gamma\to m} \bar{p}_{\gamma,n}(x)$ gilt; letzteres folgt nach der L'Hospitalschen Regel mit Hilfe der Identität ($\gamma = m$)

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\operatorname{sgn}\left(x+\frac{n}{2}-j\right)\right]^n \left|x+\frac{n}{2}-j\right|^{\gamma-1} = 0.$$

Weitere Eigenschaften der Funktion $\bar{p}_{\gamma,n}$ sind im folgenden Lemma zusammengefaßt.

Lemma 8.2. *Für* $0 < \gamma \leqq n$ *gilt:*

(a) $\bar{p}_{\gamma,n}(x)$ *ist eine gerade Funktion.*

(b) *Für* $\gamma \neq m$ *besteht folgende Verknüpfung zwischen* $\bar{p}_{\gamma,n}$ *und* $p_{\gamma,n}$ (siehe (3.3))

$$\bar{p}_{\gamma,n}(x) = R_{\gamma,n}\left[p_{\gamma,n}\left(\frac{n}{2}+x\right)+p_{\gamma,n}\left(\frac{n}{2}-x\right)\right] \qquad (x>0). \tag{8.4}$$

(c) *Für* $x > n/2$ *gilt*

$$\bar{p}_{\gamma,n}(x) = \begin{cases} 0 & (\gamma = m-1, n) \\ \dfrac{(-i)^n}{\pi} \sin\dfrac{\pi}{2}(\gamma+n) \displaystyle\int_0^\infty e^{-(x+n/2)t} t^{-\gamma}(1-e^t)^n\,dt & (\gamma \textit{ sonst}). \end{cases} \tag{8.5}$$

(d) $\bar{p}_{\gamma,n} \in L(-\infty, \infty)$

(e) $\lim_{N\to\infty} \bar{p}_{\gamma,n}(N) = 0.$

Beweis. (a) folgt aus der Definitionsgleichung (8.1), wenn man den Summationsindex j in $\nu = n-j$ substituiert.

(b) Für $x > n/2$ ist die Darstellung (8.4) unmittelbar klar, wenn man $p_{\gamma,n}(x) = 0$ für $x < 0$ definiert. Für $l < x+n/2 < l+1$ ($l = n/2$, $[n/2]+1$, $[n/2]+2$, $\cdots$, $n-1$) spaltet man die Reihe

$$S \equiv \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\operatorname{sgn}\left(x+\frac{n}{2}-j\right)\right]^n \left|x+\frac{n}{2}-j\right|^{\gamma-1}$$

in die beiden Summen $\sum_{j=0}^{l}+\sum_{j=l+1}^{n}$ auf und substituiert in der zweiten Summe $\nu = n-j$. Dann ergibt sich

$$S = \sum_{j=0}^{l} (-1)^j \binom{n}{j} \left(x+\frac{n}{2}-j\right)^{\gamma-1} + \sum_{\nu=0}^{n-1-l} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \left(\frac{n}{2}-x-\nu\right)^{\gamma-1},$$

woraus die Behauptung (8.4) folgt.

Die Aussagen von (c) folgen für $\gamma \neq m$ über die Darstellung (8.4) aus den entsprechenden Aussagen über die Funktion $p_{\gamma,n}(t)$ $(t > n)$, während sich die Behauptung für $\gamma = m$ ergibt, wenn man in (8.5) mittels des Kriteriums über majorisierte Konvergenz den Limes $\gamma \to m$ bildet. Dieses Kriterium kann angewandt werden, da für $m-\varepsilon_0 \leqq \gamma \leqq m+\varepsilon_0$ $(0 < \varepsilon_0 < 1)$ die Abschätzung $|e^{-(x+n/2)t}t^{-\gamma}(1-e^t)^n| \leqq g(t)$ gilt, wobei die von γ unabhängige Funktion $g(t)$ aus $L(0, \infty)$ durch

$$g(t) = \begin{cases} e^{-(x+n/2)t}t^{-m-\varepsilon_0}(e^t-1)^n & \text{für } 0 < t \leqq 1 \\ e^{-(x+n/2)t}t^{-m+\varepsilon_0}(e^t-1)^n & \phantom{\text{für }} t > 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Die Funktion $g(t)$ liefert dann auch die Ungleichung

$$(8.6) \qquad |\bar{p}_{\gamma,n}(x)| \leqq c_1|\bar{p}_{m+\varepsilon_0,n}(x)|+c_2|\bar{p}_{m-\varepsilon_0,n}(x)| \qquad (x > n/2;\ m-\varepsilon_0 \leqq \gamma \leqq m+\varepsilon_0),$$

in der c_1 und c_2 von m und ε_0 abhängige Konstante sind.

(d) Daß $\bar{p}_{\gamma,n}$ zum Raume $L(-\infty, \infty)$ gehört, erhält man für $\gamma \neq m$ ebenfalls aus (a) und (b):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{p}_{\gamma,n}(x)|\,dx &= 2\int_0^{\infty} |\bar{p}_{\gamma,n}(x)|\,dx \\ &\leqq 2|R_{\gamma,n}|\left[\int_0^{\infty}\left|p_{\gamma,n}\left(\frac{n}{2}+x\right)\right|dx+\int_0^{n/2}\left|p_{\gamma,n}\left(\frac{n}{2}-x\right)\right|dx\right] \\ &= 2|R_{\gamma,n}|\int_0^{\infty}|p_{\gamma,n}(x)|dx < \infty.\end{aligned}$$

Für $\gamma = m$ ergibt sich dann aus der Ungleichung (8.6), daß $\bar{p}_{m,n} \in L(n/2, \infty)$ ist. Da $|x|^{m-1}|(|\log|x||)|$ auf jedem endlichen Intervall Lebesgue-integrierbar ist, folgt $\bar{p}_{m,n} \in L(0, \infty)$, also nach (a) die Aussage.

Die Behauptung (e) ist klar im Fall $\gamma = m-1, n$ nach (c). Für $k-1 < \gamma < k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ wendet man $(k-1)$-mal die L'Hospitalsche Regel an und erhält

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\gamma)}{R_{\gamma,n}}\lim_{N\to\infty}\bar{p}_{\gamma,n}(N) &= \lim_{N\to\infty}N^{\gamma-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\left(1+\frac{n/2-j}{N}\right)^{\gamma-1} \\ &= \lim_{N\to\infty}N^{\gamma-k}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\left(1+\frac{n/2-j}{N}\right)^{\gamma-k}\left(\frac{n}{2}-j\right)^{k-1} = 0,\end{aligned}$$

während man im Fall $\gamma = m$ die Abschätzung (8.6) benutzt, um zur Behauptung zu gelangen.

Da die Funktion $\bar{p}_{\gamma,n}(x)$ zu $L(-\infty, \infty)$ gehört, existiert ihre Fouriertransformierte $\mathscr{F}[\bar{p}_{\gamma,n}](v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx}\bar{p}_{\gamma,n}(x)dx$ für alle $v \in (-\infty, \infty)$. Sie hat die folgende Gestalt:

Lemma 8.3. *Für $0 < \gamma \leqq n$ ist die Fouriertransformierte von $\bar{p}_{\gamma,n}$ gegeben durch*

$$(8.7) \qquad [\bar{p}_{\gamma,n}]^\wedge(v) = (-i \operatorname{sgn} v)^n |v|^{-\gamma}\left(2 \sin \frac{v}{2}\right)^n \qquad (v \neq 0).$$

Beweis. Wir berechnen zuerst die Fouriertransformierte $\mathscr{F}[e^{-\delta|\cdot|}\bar{p}_{\gamma,n}(\cdot)](v)$ der Funktion $\bar{p}_{\gamma,n}(x)$, multipliziert mit dem Konvergenzfaktor $e^{-\delta|x|}$ $(\delta > 0)$, und erhalten dann daraus im Grenzfall für $\delta \to 0+$ die Fouriertransformierte von $\bar{p}_{\gamma,n}$ selbst auf Grund der Relation

$$\mathscr{F}[\bar{p}_{\gamma,n}(\cdot)](v) = \lim_{\delta \to 0+} \mathscr{F}[e^{-\delta|\cdot|}\bar{p}_{\gamma,n}(\cdot)](v).$$

Für $0 < \gamma \leqq n$, $\gamma \neq m$, gilt

$$\mathscr{F}[e^{-\delta|\cdot|}\bar{p}_{\gamma,n}(\cdot)](v)$$
$$= \frac{R_{\gamma,n}}{\Gamma(\gamma)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} e^{iv(n/2-j)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} e^{-\delta|x-n/2+j|} (\operatorname{sgn} x)^n |x|^{\gamma-1} dx.$$

Das Integral der letzten Zeile bezeichnen wir mit E_δ und zerlegen es in

$$\begin{aligned} E_\delta = {} & (-1)^n e^{-\delta(n/2-j)} \int_{-\infty}^{0} e^{-ivx} e^{-\delta|x|} |x|^{\gamma-1} dx \\ (8.8) \qquad & + e^{\delta(n/2-j)} \int_0^\infty e^{-ivx} e^{-\delta x} x^{\gamma-1} dx \\ & + \left(\operatorname{sgn}\left(\frac{n}{2}-j\right)\right)^n \int_0^{n/2-j} e^{-ivx} |x|^{\gamma-1} \left[e^{-\delta(n/2-j-x)} - e^{\delta(n/2-j-x)}\right] dx. \end{aligned}$$

In diese Darstellung setzen wir aus dem Tafelwerk von A. Erdélyi [41; pp. 15, 72] die Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ivx} e^{-\delta x} x^{\gamma-1} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{ivx} e^{-\delta|x|} |x|^{\gamma-1} dx \\ &= \Gamma(\gamma)(\delta^2+v^2)^{-\gamma/2} \exp\left[-i\gamma \operatorname{arctg} \frac{|v|}{\delta} \operatorname{sgn} v\right] \end{aligned}$$

ein, die für $\gamma > 0$, $\delta > 0$ existiert. Bilden wir danach den Limes für $\delta \to 0+$, so strebt das letzte Glied in (8.8) gegen Null, während sich die Grenzwerte der beiden ersten Glieder wie folgt zusammenfassen lassen

$$\lim_{\delta\to 0+} E_\delta = \Gamma(\gamma)|v|^{-\gamma}\{(-1)^n e^{i(\pi/2)\gamma\operatorname{sgn} v}+e^{-i(\pi/2)\gamma\operatorname{sgn} v}\}$$
$$= (-\operatorname{sgn} v)^n \frac{\Gamma(\gamma)}{R_{\gamma,n}}|v|^{-\gamma} \qquad (v \neq 0).$$

Damit erhält man unmittelbar

$$\mathscr{F}[\bar{p}_{\gamma,n}(\cdot)](v) = (-i \operatorname{sgn} v)^n |v|^{-\gamma}\left(2 \sin\frac{v}{2}\right)^n.$$

Beim Beweis dieser Behauptung für $\gamma = m$ kann man in entsprechender Weise verfahren, indem man die in Erdélyi [41; pp. 18, 77] tabulierte Fouriertransformierte

$$\int_0^\infty e^{-ivx}e^{-\delta x}x^{\gamma-1}\log x\,dx$$
$$= \Gamma(\gamma)(\delta^2+v^2)^{-\gamma/2}\exp\left[-i\gamma \operatorname{arctg}\frac{|v|}{\delta}\operatorname{sgn} v\right]$$
$$\cdot\left\{\frac{\Gamma'(\gamma)}{\Gamma(\gamma)}-\tfrac{1}{2}\log(\delta^2+v^2)-i\operatorname{arctg}\frac{|v|}{\delta}\operatorname{sgn} v\right\} \qquad (\gamma, \delta > 0)$$

für $\gamma = m$ benutzt.

Für $v \to 0$ folgt aus Gleichung (8.7) mit Hilfe des Kriteriums über majorisierte Konvergenz

(8.9)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\bar{p}_{\gamma,n}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & 0<\gamma<n \\ (-1)^r \quad \text{für} & \gamma = n = 2r \quad (r = 1, 2, \cdots) \\ i(-1)^{r+1} & \gamma = n = 2r+1 \quad (r = 0, 1, \cdots). \end{cases}$$

Zum Schluß der Ausführungen über die Funktion $\bar{p}_{\gamma,n}$ bemerken wir, daß sie mit den bei Okikiolu [44] auftretenden Funktionen

$$m(x) = \operatorname{sgn}(x-y)|x-y|^{\gamma-1}-(\operatorname{sgn} x)|x|^{\gamma-1}$$

und $n(x) = |x-y|^{\gamma-1}-|x|^{\gamma-1}$ (y feste reelle Zahl; $0 < \gamma < 1$) in Zusammenhang steht, deren Fouriertransformierten durch

$$\mathscr{F}[m](v) = 2i \sin\frac{\pi}{2}\gamma\Gamma(\gamma)(\operatorname{sgn} v)|v|^{-\gamma}(1-e^{-ivy})$$

$$\mathscr{F}[n](v) = -2\cos\frac{\pi}{2}\gamma\Gamma(\gamma)|v|^{-\gamma}(1-e^{-ivy})$$

gegeben sind.

Entsprechend wie die Funktion $\bar{p}_{\gamma,n}$ führen wir nun die Funktion $\bar{q}_{\gamma,n}$ ein und formulieren zwei zu Lemma 8.2 und 8.3 analoge Lemmata.

DEFINITION 8.4. *Sei $0 < \gamma < n$, $n = 1, 2, \cdots$. Sei $m = 1, 3, \cdots, n-1$, falls n gerade ist, und $m = 2, 4, \cdots, n-1$, falls n ungerade ist. Wir definieren*

$$\bar{q}_{\gamma,n}(x) = \begin{cases} \dfrac{R_{\gamma,n}}{x\Gamma(1+\gamma)} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\operatorname{sgn}\left(x+\frac{n}{2}-j\right)\right]^{n+1} \left|x+\frac{n}{2}-j\right|^{\gamma} & (\gamma \neq m) \\ \dfrac{R_{\gamma,n}}{x\Gamma(1+\gamma)} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left[\operatorname{sgn}\left(x+\frac{n}{2}-j\right)\right]^{n+1} \left|x+\frac{n}{2}-j\right|^{\gamma} \cdot \log\left|x+\frac{n}{2}-j\right| & (\gamma = m). \end{cases} \tag{8.10}$$

LEMMA 8.5. (a) *$\bar{q}_{\gamma,n}(x)$ ist eine gerade Funktion.*

(b) *Für $\gamma \neq m$ gilt*

$$\bar{q}_{\gamma,n}(x) = R_{\gamma,n} x^{-1} \left[\left(\frac{n}{2}+x\right) q_{\gamma,n}\left(\frac{n}{2}+x\right) - \left(\frac{n}{2}-x\right) q_{\gamma,n}\left(\frac{n}{2}-x\right)\right] \qquad (x > 0).$$

(c) *Für $x > n/2$ gilt*

$$\bar{q}_{\gamma,n}(x) = \begin{cases} 0 & (\gamma = m-1) \\ \dfrac{-(-i)^n}{\pi x} \sin\dfrac{\pi}{2}(\gamma+n) \displaystyle\int_0^\infty e^{-(x+n/2)t} t^{-1-\gamma} (1-e^t)^n \, dt & (\gamma \text{ sonst}) \end{cases}$$

(d) $\bar{q}_{\gamma,n} \in L(-\infty, \infty)$

(e) $\lim_{N\to\infty} \bar{q}_{\gamma,n}(N) = 0$.

Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 8.2 und wird deshalb nicht mehr explizit ausgeführt.

BEMERKUNG. Eine entsprechende Beziehung wie zwischen $p_{\gamma,n}$ und $q_{\gamma,n}$ (siehe die Bemerkung nach Lemma 3.1) besteht auch zwischen $\bar{p}_{\gamma,n}$ und $\bar{q}_{\gamma,n}$:

$$\bar{q}_{\gamma,n}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \bar{p}_{\gamma,n}(x)\, dx \qquad (0 < \gamma < n).$$

Das nächste Lemma betrifft die Darstellung der Fouriertransformierten der Funktion $\bar{q}_{\gamma,n}$.

LEMMA 8.6. *Für $0 < \gamma < n$ ist die Fouriertransformierte von $\bar{q}_{\gamma,n}$ gegeben durch*

$$[\bar{q}_{\gamma,n}]^\wedge(v) = (-i \operatorname{sgn} v)^n |v|^{-\gamma} \int_1^\infty x^{-1-\gamma} \left(2 \sin v\, \frac{x}{2}\right)^n dx \qquad (v \neq 0). \tag{8.11}$$

BEWEIS. Setzt man die nach Lemma 8.3 für $vx \neq 0$ gültige Beziehung

$$(-i \operatorname{sgn} vx)^n |vx|^{-\gamma} \left(2 \sin v \frac{x}{2}\right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt} \bar{p}_{\gamma,n}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{dt}{x}$$

auf der rechten Seite von (8.11) ein, so gilt

$$\begin{aligned}(-i \operatorname{sgn} v)^n |v|^{-\gamma} &\int_1^{\infty} x^{-1-\gamma} \left(2 \sin v \frac{x}{2}\right)^n dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-1} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt} \bar{p}_{\gamma,n}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{dt}{x}.\end{aligned}$$

Dies führt nach Vertauschung der Integrale und anschließender Substitution $tx^{-1} = y$ zu

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt} t^{-1} dt \int_{t/N}^{t} \bar{p}_{\gamma,n}(y) dy.$$

Da für fast alle $t \in (-\infty, \infty)$ die Beziehung

$$\int_{t/N}^{t} \bar{p}_{\gamma,n}(y) dy = t\bar{q}_{\gamma,n}(t) - \frac{t}{N} \bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{t}{N}\right)$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}(-i \operatorname{sgn} v)^n |v|^{-\gamma} &\int_1^{\infty} x^{-1-\gamma} \left(2 \sin v \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt} \bar{q}_{\gamma,n}(t) dt - \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivNt} \bar{q}_{\gamma,n}(t) dt,\end{aligned}$$

womit die Darstellung (8.11) bewiesen ist; denn nach dem Satz von Riemann-Lebesgue strebt die Fouriertransformierte $[\bar{q}_{\gamma,n}]^\wedge(vN)$ für $N \to \infty$ gegen Null.

Führen wir die Beziehung

$$K_{\gamma,n} = (-i)^n \int_0^{\infty} x^{-1-\gamma} \left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^n dx \quad (0 < \gamma < n)$$

ein, so folgt aus (8.11) in Lemma 8.6, wenn man v gegen Null streben läßt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}_{\gamma,n}(x) dx = K_{\gamma,n}.$$

Außerdem brauchen wir in Abschnitt 10 noch eine weitere Darstellung der Konstanten $K_{\gamma,n}$: Es gilt für $n = 2r$, $r = 1, 2, \cdots$

$$(8.12)\quad K_{\gamma,2r}=\begin{cases}\dfrac{2(-1)^{\gamma/2+1}}{\Gamma(1+\gamma)}\sum\limits_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\dbinom{2r}{r-j}j^{\gamma}\log j & (\gamma=m-1)\\[2ex] \dfrac{-\pi}{\sin\dfrac{\pi}{2}\gamma\cdot\Gamma(1+\gamma)}\sum\limits_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\dbinom{2r}{r-j}j^{\gamma} & (\gamma\text{ sonst})\end{cases}$$

und für $n = 2r+1$, $r = 0, 1, \cdots$

$$(8.13)\quad K_{\gamma,2r+1}=\begin{cases}\dfrac{2(-1)^{(\gamma-1)/2}i}{\Gamma(1+\gamma)}\sum\limits_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\dbinom{2r+1}{r-j}(j+\tfrac{1}{2})^{\gamma}\log(j+\tfrac{1}{2})\\ \hfill(\gamma=m-1)\\[2ex] \dfrac{-\pi i}{\cos\dfrac{\pi}{2}\gamma\cdot\Gamma(1+\gamma)}\sum\limits_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\dbinom{2r+1}{r-j}(j+\tfrac{1}{2})^{\gamma}\quad(\gamma\text{ sonst}).\end{cases}$$

Als Beispiel verifizieren wir (8.12) für $0<\gamma<2$. Es gilt die trigonometrische Identität

$$\left(-2i\sin\frac{x}{2}\right)^{2r}=2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}\cos xj+(-1)^{r}\binom{2r}{r}.$$

Daraus ergibt sich

$$(-i)^{2r}\int_{\varepsilon}^{\infty}x^{-1-\gamma}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{2r}dx$$
$$=2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}j^{\gamma}\int_{\varepsilon j}^{\infty}x^{-1-\gamma}\cos x\,dx+(-1)^{r}\binom{2r}{r}\gamma^{-1}\varepsilon^{-\gamma}.$$

Integriert man einmal partiell

$$\int_{\varepsilon j}^{\infty}x^{-1-\gamma}\cos x\,dx=\frac{1}{\gamma}\frac{\cos\varepsilon j}{(\varepsilon j)^{\gamma}}-\frac{1}{\gamma}\int_{\varepsilon j}^{\infty}x^{-\gamma}\sin x\,dx,$$

dann folgt für $0<\gamma<2$

$$K_{\gamma,2r}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0+}\gamma^{-1}\left\{\varepsilon^{-\gamma}\left(-2i\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r}-2\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}j^{\gamma}\int_{\varepsilon j}^{\infty}x^{-\gamma}\sin x\right\}dx$$
$$=\frac{-\pi}{\sin\dfrac{\pi}{2}\gamma\cdot\Gamma(1+\gamma)}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}j^{\gamma},$$

da nach Erdélyi [41; p. 68] gilt

$$\int_0^\infty x^{-\gamma} \sin x dx = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2} \gamma \cdot \Gamma(1+\gamma)} \qquad (0 < \gamma < 2).$$

Damit sind die für Abschnitt 9 notwendigen Vorbereitungen bzgl. der Funktionen $\bar{p}_{\gamma,n}$ und $\bar{q}_{\gamma,n}$ getroffen.

9. Einführung der Operatoren B_γ^g und B_γ^u

Sei $\{G(t);\ -\infty < t < \infty\}$ eine gleichmäßig beschränkte Gruppe von Operatoren der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ auf einem Banachraum X, und sei A ihr infinitesimaler Erzeuger.

Als wichtigstes Hilfsmittel zur Definition und Charakterisierung der Operatoren B_γ^g und B_γ^u dienen die beiden folgenden Identitäten in

Lemma 9.1. *Seien k und n entweder beide gerade oder beide ungerade positive ganze Zahlen, und sei f ein Element in X.*

(i) *Für $0 < \gamma < \min(k, n)$ und $\varepsilon, \eta > 0$ gilt die Identität*

$$\begin{aligned}(9.1)\qquad &\int_\eta^\infty y^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{y}{2}\right)-G\left(-\frac{y}{2}\right)\right]^k dy \int_{-\infty}^\infty \bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) G(x) f \frac{dx}{\varepsilon} \\ &= \int_\varepsilon^\infty y^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{y}{2}\right)-G\left(-\frac{y}{2}\right)\right]^n dy \int_{-\infty}^\infty \bar{q}_{\gamma,k}\left(\frac{x}{\eta}\right) G(x) f \frac{dx}{\eta}.\end{aligned}$$

(ii) *Ist $k < n$, dann gilt für $0 < \gamma \leqq k$ und $\varepsilon, t > 0$ die Identität*

$$\begin{aligned}(9.2)\qquad &\left[G\left(\frac{t}{2}\right)-G\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^k \int_{-\infty}^\infty \bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) G(y) f \frac{dy}{\varepsilon} \\ &= t^\gamma \int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{x}{2}\right)-G\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^n dx \int_{-\infty}^\infty \bar{p}_{\gamma,k}\left(\frac{y}{t}\right) G(y) f \frac{dy}{t}.\end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich existieren die Integrale, die in den Identitäten auftreten, im Bochnerschen Sinne, da die Gruppe $\{G(t);\ -\infty < t < \infty\}$ gleichmäßig beschränkt ist und die Funktionen $\bar{q}_{\gamma,n}$ und $\bar{p}_{\gamma,k}$ zu $L(-\infty, \infty)$ gehören.

Der Beweis von (9.1) und (9.2) verläuft prinzipiell analog zu dem der Identitäten (2.12) und (3.5) aus Teil I. Man zeigt erstens, daß sich jede Seite einer Identität in Form von

$$(9.3)\qquad \int_{-\infty}^\infty \bar{Q}_\nu(x) G(x) f dx \qquad (\nu = 1, 2)$$

schreiben läßt (der Index $\nu = 1$ repräsentiert die linke, $\nu = 2$ die rechte Seite der Identität) und beweist zweitens die Gleichung $\bar{Q}_1(x) = \bar{Q}_2(x)$ f.ü. in Fouriertransformierter Gestalt; d.h. anders ausgedrückt, man verifiziert die Gültigkeit der Identitäten für das einfachste Beispiel einer gleichmäßig beschränkten Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$,

$$G_v(t)f = e^{-ivt}f \qquad (-\infty < t,\ v < \infty,\ v \text{ fest};\ f \in Z), \tag{9.4}$$

wobei Z das komplexe Zahlensystem bezeichnet.

Wir beschränken uns darauf, die Identität (9.1) für gerade k und n zu zeigen, die Identität (9.2) für den "ungeraden Fall".

(i) Setzen wir $k = 2l$, $n = 2r$ und schreiben wir die linke Seite der Identität (9.1) in der Form (9.3). Dann gilt wegen des symmetrischen Aufbaus beider Seiten eine entsprechende Darstellung für die rechte Seite der Identität.

Da für $-\infty < x < \infty$ die Formel

$$\begin{aligned} &\left[G\left(\frac{x}{2}\right)-G\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^{2l} \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{l} (-1)^{l-j}\binom{2l}{l-j}[G(-xj)+G(xj)]+(-1)^l\binom{2l}{l} \end{aligned} \tag{9.5}$$

gilt, haben wir

$$\begin{aligned} E_\eta &\equiv \int_\eta^\infty x^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{x}{2}\right)-G\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^{2l} f\,dx \\ &= \sum_{j=1}^{l}(-1)^{l-j}\binom{2l}{l-j}\left[\int_\eta^\infty x^{-1-\gamma}G(-xj)f\,dx+\int_\eta^\infty x^{-1-\gamma}G(xj)f\,dx\right] \\ &\quad +(-1)^l\binom{2l}{l}\gamma^{-1}\eta^{-\gamma}f. \end{aligned}$$

Im ersten Integral der letzten Zeile substituieren wir $-xj = y$, im zweiten $xj = y$. Führen wir dann die Hilfsfunktionen

$$b_\eta^g(y) = \begin{cases} |y|^{-1-\gamma}, & |y| > \eta \\ 0, & |y| < \eta \end{cases} \qquad (\eta > 0)$$

und

$$c_{\eta,l}^g(y) = \sum_{j=1}^{l}(-1)^{l-j}\binom{2l}{l-j} j^\gamma b_{\eta j}^g(y)$$

ein, so erhalten wir

$$E_\eta = \int_{-\infty}^\infty c_{\eta,l}^g(y)G(y)f\,dy+(-1)^l\binom{2l}{l}\gamma^{-1}\eta^{-\gamma}f.$$

Lemma 2.3 aus Teil I läßt sich selbstverständlich auch auf Gruppen der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ übertragen, so daß die linke Seite der Identität (9.1) mit Hilfe der letzten Darstellung für E_η umgeformt werden kann zu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[c^g_{\eta,l}(\cdot)*\bar{q}_{\gamma,2r}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right](y)+(-1)^l\binom{2l}{l}\gamma^{-1}\eta^{-\gamma}\bar{q}_{\gamma,2r}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right\}G(y)f\frac{dy}{\varepsilon},$$

wobei also $[c^g_{\eta,l}(\cdot)*\bar{q}_{\gamma,2r}(\cdot/\varepsilon)](y)$ die Fouriersche Faltung der Funktionen $c^g_{\eta,l}(y)$ und $\bar{q}_{\gamma,2r}(y/\varepsilon)$ bedeutet. Damit ist der erste Schritt des Beweises erledigt.

Verifizieren wir nun die Identität (9.1) im Fall der Halbgruppe (9.4). Mit Hilfe der Darstellung (8.11) für die Fouriertransformierte von $\bar{q}_{\gamma,n}$ gilt

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1^\wedge(v) &= [\bar{q}_{\gamma,2r}]^\wedge(v\varepsilon)\int_\eta^\infty y^{-1-\gamma}(e^{-iv(y/2)}-e^{iv(y/2)})^{2l}\,dy\\ &= (-1)^{l+r}|v|^{-\gamma}\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}\left(2\sin v\frac{x}{2}\right)^{2r}dx\int_\eta^\infty y^{-1-\gamma}\left(2\sin v\frac{y}{2}\right)^{2l}dy.\end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck symmetrisch in den Paaren (ε, r) und (η, l) ist, folgt $\bar{Q}_1^\wedge(v)=\bar{Q}_2^\wedge(v)$, womit die Gültigkeit von (9.1) bewiesen ist.

(ii) Wir benutzen die Identität

$$\left[G\left(\frac{t}{2}\right)-G\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^{2l+1}=-\sum_{j=0}^{2l+1}(-1)^j\binom{2l+1}{j}G(t(j-l-\tfrac{1}{2})).$$

Mit $k=2l+1$ und $n=2r+1$ lautet dann die linke Seite von (9.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\sum_{j=0}^{2l+1}(-1)^j\binom{2l+1}{j}\bar{q}_{\gamma,2r+1}\left(\frac{x-t(j-l-\frac{1}{2})}{\varepsilon}\right)\right\}G(x)f\,dx,$$

für die somit die Darstellung (9.3) verwirklicht ist. Die rechte Seite von (9.2) ist gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{\gamma-1}\left[c^u_{\varepsilon,r}(\cdot)*\bar{p}_{\gamma,2l+1}\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right](x)G(x)f\,dx,$$

wobei die Hilfsfunktion $c^u_{\varepsilon,r}$ durch

$$c^u_{\varepsilon,r}(x)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{2r+1}{r-j}(j+\tfrac{1}{2})^\gamma b^u_{\varepsilon(j+\frac{1}{2})}(x)$$

gegeben ist mit

$$b^u_\varepsilon(x)=\begin{cases}(\operatorname{sgn}x)|x|^{-1-\gamma}, & |x|>\varepsilon\\ 0, & |x|<\varepsilon\end{cases}\qquad(\varepsilon>0).$$

Für die Fouriertransformierten der mit der Identität (9.2) verknüpften Funktionen $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ gilt

$$\bar{Q}_1^\wedge(v) = (e^{-ivt/2}-e^{ivt/2})^{2l+1}[\bar{q}_{\gamma,2r+1}]^\wedge(v\varepsilon)$$

und

$$\bar{Q}_2^\wedge(v) = t^\gamma \int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}(e^{-ivx/2}-e^{ivx/2})^{2r+1}dx[\bar{p}_{\gamma,2l+1}]^\wedge(vt),$$

woraus mit Hilfe der Darstellungen (8.7) und (8.11)

$$\bar{Q}_1^\wedge(v) = \bar{Q}_2^\wedge(v)$$
$$= (-1)^{r+l+1}(\operatorname{sgn} v)\left(2\sin v\frac{t}{2}\right)^{2l+1}|v|^{-\gamma}\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}\left(2\sin v\frac{x}{2}\right)^{2r+1}dx$$

folgt. Damit ist (9.2) für den ungeraden Fall bewiesen.

Seien γ, k und n wie in Lemma 9.1 definiert und nehmen wir an, daß der starke Limes für $\varepsilon \to 0+$ von

$$\frac{1}{K_{\gamma,k}}\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{x}{2}\right)-G\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^k f\,dx,$$

den wir abkürzend mit $B_\gamma^k f$ bezeichnen, existiert! Da für alle $f \in X$ die Grenzbeziehung

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^\infty \bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)G(x)f\frac{dx}{\varepsilon} = K_{\gamma,n}f$$

gilt, folgt aus der Identität (9.1), wenn man auf der linken Seite die Integrale miteinander vertauscht und anschließend erst η, dann ε gegen Null streben läßt, daß auch $B_\gamma^n f$ existiert und gleich $B_\gamma^k f$ ist. D.h., daß es bei der Abhängigkeit des Grenzwertes $B_\gamma^n f$ von n nur darauf ankommt, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Definition 9.2. *Sei $0 < \gamma < n$, $n = 1, 2, \cdots$. Für gerades n definieren wir den Operator B_γ^g, für ungerades n den Operator B_γ^u durch*

$$\left.\begin{matrix} B_\gamma^g f \\ B_\gamma^u f\end{matrix}\right\} = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{K_{\gamma,n}}\int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{x}{2}\right)-G\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^n f\,dx \qquad \begin{matrix}(n = g)\\ (n = u),\end{matrix}$$

falls der Grenzwert existiert.

Für das Beispiel (9.4) einer gleichmäßig beschränkten Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ sind die Operatoren A, B_γ^g und B_γ^u $(\gamma > 0)$ gegeben durch

$$D(A) = D(B_\gamma^g) = D(B_\gamma^u) = Z$$

und

$$Af = -ivf, \quad B_\gamma^g f = |v|^\gamma f, \quad B_\gamma^u f = (\operatorname{sgn} v)|v|^\gamma f \quad (f \in Z).$$

Daraus erkennt man, daß die Operatoren B_γ^g und B_γ^u im allgemeinen verschieden sind.

Für die Gruppe (9.4) gilt die Formel (8.11) der Fouriertransformierten von $\bar{q}_{\gamma,n}$. Wir werden nun zeigen, daß dieser Sachverhalt auch für allgemeine Gruppen gültig ist.

Der folgende Satz läßt sich aus der Identität (9.1) herleiten, analog zu den Beweisen der Sätze 2.5 und 2.7 in Abschnitt 2 von Teil I.

SATZ 9.3. (a) *Für* $0 < \gamma < n$, $n = 1, 2, \cdots$ *gehört das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) G(x) f \frac{dx}{\varepsilon}$$

für jedes $f \in X$ *und* $\varepsilon > 0$ *zum Definitionsbereich* $\mathsf{D}(B_\gamma^g)$ $(n = g)$ *bzw.* $\mathsf{D}(B_\gamma^u)$ $(n = u)$, *und es gilt*

$$\left.\begin{matrix} B_\gamma^g \\ B_\gamma^u \end{matrix}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) G(x) f \frac{dx}{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-1-\gamma} \left[G\left(\frac{x}{2}\right) - G\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^n f\,dx \qquad \begin{matrix} (n = g) \\ (n = u), \end{matrix} \tag{9.6}$$

(b) *Die Definitionsbereiche* $\mathsf{D}(B_\gamma^g)$ *und* $\mathsf{D}(B_\gamma^u)$ *sind dicht in* X; B_γ^g *und* B_γ^u *sind abgeschlossene, lineare Operatoren.*

Aus der Identität (9.2) folgern wir Satz 9.4, dessen Teil (b) als Umkehrformel des Operators B_γ^g bzw. B_γ^u gedeutet werden kann.

SATZ 9.4. *Sei* $0 < \gamma \leqq k$, $k = 1, 2, \cdots$

(a) *Für jedes* $f \in X$ *und* $t > 0$ *gehört das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_{\gamma,k}\left(\frac{x}{t}\right) G(x) f \frac{dx}{t}$$

zum Definitionsbereich von B_γ^g $(k = g)$ *bzw.* B_γ^u $(k = u)$, *und es gilt*

$$\left[G\left(\frac{t}{2}\right) - G\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^k f = t^\gamma \begin{Bmatrix} B_\gamma^g \\ B_\gamma^u \end{Bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_{\gamma,k}\left(\frac{x}{t}\right) G(x) f \frac{dx}{t} \qquad \begin{matrix} (k = g) \\ (k = u), \end{matrix}$$

(b) *Ist* $f \in \mathsf{D}(B_\gamma^g)$ $(k = g)$ *bzw.* $f \in \mathsf{D}(B_\gamma^u)$ $(k = u)$, *dann gilt für* $t > 0$ *die Umkehrformel*

$$\left[G\left(\frac{t}{2}\right) - G\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^k f = t^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_{\gamma,k}\left(\frac{x}{t}\right) G(x) \begin{Bmatrix} B_\gamma^g \\ B_\gamma^u \end{Bmatrix} f \frac{dx}{t} \qquad \begin{matrix} (k = g) \\ (k = u). \end{matrix}$$

Für $t \to 0+$ erhalten wir aus den Formeln von Satz 9.4 im Fall $\gamma = k$ den Zusammenhang der Operatoren B_k^g $(k = g)$ und B_k^u

$(k = u)$ mit den k-ten Potenzen des infinitesimalen Erzeugers A der Gruppe $\{G(t);\ -\infty < t < \infty\}$.

FOLGERUNG 9.5. (i) *f gehört zum Definitionsbereich von B^g_{2r}, $r = 1, 2, \cdots$, genau dann, wenn f zu $\mathsf{D}(A^{2r})$ gehört, und es gilt*

$$(9.7) \qquad (-A^2)^r f = B^g_{2r} f.$$

(ii) *Es ist $f \in \mathsf{D}(B^u_{2r+1})$, $r = 0, 1, 2, \cdots$, genau dann, wenn $f \in \mathsf{D}(A^{2r+1})$, und es gilt*

$$(9.8) \qquad (iA)(-A^2)^r f = B^u_{2r+1} f.$$

Den Zusammenhang der Operatoren B^g_γ und B^u_γ mit Potenzen des Erzeugers A werden wir im anschließenden Abschnitt weiter verfolgen, ebenso die Potenzeigenschaften dieser Operatoren.

In Anbetracht der Identitäten (9.7) und (9.8) von Folgerung 9.5 genügt die k-te zentrale Differenz der Gruppe $\{G(t)\}$, angewandt auf f, für $f \in \mathsf{D}(B^g_k)$ $(k = g)$ bzw. $f \in \mathsf{D}(B^u_k)$ $(k = u)$ der bekannten Lipschitzbedingung

$$\left\| \left[G\left(\frac{t}{2}\right) - G\left(-\frac{t}{2}\right) \right]^k f \right\| = O(t^k) \qquad (t \to 0+).$$

Hingegen haben wir für $0 < \gamma < k$ folgende schärfere Form der Abschätzung, die wir aus Satz 9.4 (b) und der Relation (8.9) schließen können.

FOLGERUNG 9.6. (i) *Ist $f \in \mathsf{D}(B^g_\gamma)$, $0 < \gamma < 2r$ $(r = 1, 2, \cdots)$, so gilt für jede ganze Zahl $n \geqq 2r$*

$$\left\| \left[G\left(\frac{t}{2}\right) - G\left(-\frac{t}{2}\right) \right]^n f \right\| = o(t^\gamma) \qquad (t \to 0+).$$

(ii) *Ist $f \in \mathsf{D}(B^u_\gamma)$, $0 < \gamma < 2r+1$ $(r = 0, 1, 2, \cdots)$, so gilt für jede ganze Zahl $n \geqq 2r+1$*

$$\left\| \left[G\left(\frac{t}{2}\right) - G\left(-\frac{t}{2}\right) \right]^n f \right\| = o(t^\gamma) \qquad (t \to 0+).$$

Aus Folgerung 9.6 ergibt sich

FOLGERUNG 9.7. *Gehört f entweder zu $\mathsf{D}(B^g_{\gamma_0})$ oder zu $\mathsf{D}(B^u_{\gamma_0})$ für ein $\gamma_0 > 0$, dann gehört f für jedes γ, $0 < \gamma < \gamma_0$, sowohl zu $\mathsf{D}(B^g_\gamma)$ als auch zu $\mathsf{D}(B^u_\gamma)$, und es gilt*

(9.9)

$$\left.\begin{matrix} B^g_\gamma f \\ B^u_\gamma f \end{matrix}\right\} = \frac{1}{K_{\gamma,n}} \int_0^\infty x^{-1-\gamma} \left[G\left(\frac{x}{2}\right) - G\left(-\frac{x}{2}\right) \right]^n f\, dx \quad \begin{matrix} (n = g) \\ (n = u) \end{matrix} \quad (n > \gamma).$$

10. Zusammenhang der Operatoren B_γ^g und B_γ^u mit dem infinitesimalen Erzeuger der Gruppe

Etwas umgeschrieben, lautet die Aussage von Folgerung 9.5:

$$(iA)^k = \begin{cases} B_k^g \\ B_k^u \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} k = 2, 4, 6, \cdots \\ k = 1, 3, 5, \cdots. \end{matrix}$$

In dieser Form legt sie die Frage nahe, ob nicht die Operatoren B_γ^g und B_γ^u auch für die oben nicht zugelassenen γ-Werte ($\gamma > 0$) mit dem Operator $(iA)^\gamma$ identifiziert werden könnten. Dies gilt jedoch nicht einmal für den Operator B_γ^g, falls γ eine ungerade ganze Zahl ist, und für B_γ^u, falls γ gerade ist, wie man an dem einfachen Beispiel (9.4) erkennt, für das die Beziehung

$$(iA)^m f = v^m f \neq (\operatorname{sgn} v)\, v^m f = \begin{cases} B_m^g f & (m = 1, 3, 5, \cdots) \\ B_m^u f & (m = 2, 4, 6, \cdots) \end{cases}$$

Gültigkeit hat. Jedoch ist in Form der Aussagen (9.7) und (9.8) eine Verallgemeinerung von Folgerung 9.5 auf alle zugelassenen γ-Werte möglich. Diesen Zusammenhang mit der quadratischen Potenz $(-A^2)$ zeigen wir nun, indem wir uns die bekannte Beziehung (7.6) zwischen den Resolventen von A, $(-A)$ und A^2 zunutze machen.

Da A^2 die gleichmäßig beschränkte Halbgruppe $\{W(t); t \geqq 0\}$ der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ erzeugt (vgl. (7.7)), lassen sich die gebrochenen Potenzen $(-A^2)^\alpha$ ($\alpha > 0$) im Sinne von Teil I einführen und charakterisieren. Wir benutzen im folgenden ihre Darstellung mit Hilfe der Resolventen des Erzeugers A^2 (siehe (5.5) und (5.1)), die für $k-1 < \alpha < k$ ($k = 1, 2, \cdots$) und $f \in \mathsf{D}(A^{2k})$ gültig ist:

$$(10.1) \qquad (-A^2)^\alpha f = -\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty x^{\alpha-k} R(x; A^2) A^{2k} f\, dx.$$

Im ersten Lemma dieses Abschnitts formen wir das für die Operatoren B_γ^g und B_γ^u charakteristische Integral

$$\int_0^\infty t^{-1-\gamma} \left[G\left(\frac{t}{2}\right) - G\left(-\frac{t}{2}\right) \right]^n f\, dt \qquad (f \in \mathsf{D}(A^n))$$

um, indem wir die Gruppe $\{G(t)\}$ durch die Resolvente ihres Erzeugers A ersetzen.

Lemma 10.1. *Sei $f \in \mathsf{D}(A^n)$, $n = 1, 2, \cdots$. Für $n-2 < \gamma < n$ ($n = 2, 3, \cdots$) und $0 < \gamma < 1$ ($n = 1$) gilt*

$$\frac{1}{K_{\gamma,n}}\int_0^\infty t^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{t}{2}\right)-G\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^n f\,dt$$
$$= \frac{-(-i)^n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\gamma+n)\int_0^\infty x^{\gamma/2-n/2}R(x;A^2)A^n f\,dx.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für $n = 2r$, $r = 1, 2, \cdots$. Mit Hilfe von (9.5) und der Laplacetransformierten (2.9) ergibt sich

$$\int_0^\infty t^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{t}{2}\right)-G\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^{2r} f\,dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\int_0^\infty x^\gamma\,dx\int_0^\infty e^{-tx}$$
$$\cdot\left\{\sum_{j=1}^r(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}[G(-tj)+G(tj)]f+(-1)^r\binom{2r}{r}f\right\}dt$$
$$\equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\int_0^\infty x^\gamma E(x)\,dx.$$

In dem mit $E(x)$ abgekürzten Integralausdruck vertauschen wir Summe und Integral, substituieren $tj \to t$ und gelangen mit Hilfe der Resolventendarstellung (7.1), der ersten Resolventengleichung (7.4) und der Beziehung (7.6) zu

$$E(x) = x^{-1}\left\{2\sum_{j=1}^r(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}\frac{x^2}{j^2}R\left(\frac{x^2}{j^2};A^2\right)f+(-1)^r\binom{2r}{r}f\right\}.$$

Benutzen wir die Identität (5.6) für $f \in D(A^{2r})$ und $\lambda = x^2/j^2$, sowie

$$2\sum_{j=1}^r(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}j^{2\nu} = \begin{cases} 0 & (\nu = 1, 2, \cdots, r-1)\\ -(-1)^r\binom{2r}{r} & (\nu = 0)\end{cases}$$

(vgl. (2.11)), dann erhalten wir

$$E(x) = 2\sum_{j=1}^r(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}x^{-2r+1}j^{2r-2}R\left(\frac{x^2}{j^2};A^2\right)A^{2r}f,$$

womit sich

$$\int_0^\infty t^{-1-\gamma}\left[G\left(\frac{t}{2}\right)-G\left(-\frac{t}{2}\right)\right]^{2r} f\,dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)}\sum_{j=1}^r(-1)^{r-j}\binom{2r}{r-j}j^\gamma\int_0^\infty x^{\gamma/2-r}R(x;A^2)A^{2r}f\,dx$$

ergibt. Das letzte Integral existiert, da die Abschätzungen

$$\left\|\int_0^1 x^{\gamma/2-r}R(x;\,A^2)A^{2r}f\,dx\right\| = \left\|\int_0^1 x^{\gamma/2-r}[xR(x;\,A^2)-I]\,A^{2r-2}f\,dx\right\|$$
$$\leqq \frac{(M^2+1)}{\gamma/2-r-1}\,||A^{2r-2}f||$$

und

$$\left\|\int_1^\infty x^{\gamma/2-r}R(x;\,A^2)A^{2r}f\,dx\right\| \leqq \frac{M^2}{r-\gamma/2}\,||A^{2r}f||$$

gelten. Mit der Darstellung (8.12) für die Konstante $K_{\gamma,2r}$ folgt dann die Behauptung für $n = 2r$. Für ungerade n wird sie in entsprechender Weise bewiesen. Erwähnt sei hier nur, daß wir die zweite Resolventengleichung statt der ersten benutzen, sowie die Identität

$$2\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{2r+1}{r-j}(j+\tfrac{1}{2})^{2\nu+1} = 0 \quad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \cdots, r-1.$$

Unter Benutzung von (9.9) und (10.1) lautet die Aussage von Lemma 10.1:

Folgerung 10.2. *Für $f \in \mathsf{D}(A^n)$ und $n-2<\gamma<n$ $(n=2,3,4,\cdots)$ ist*

$$B_\gamma^g f = (-A^2)^{\gamma/2}f \qquad (n = g)$$
$$B_\gamma^u f = (iA)(-A^2)^{\gamma/2-\frac{1}{2}}f = (-A^2)^{\gamma/2-\frac{1}{2}}(iA)f \qquad (n = u).$$

Hieraus folgert man nun

Satz 10.3. (i) *Ein Element $f \in X$ gehört zum Definitionsbereich $\mathsf{D}(B_\gamma^g)$ für $\gamma > 0$ genau dann, wenn $f \in \mathsf{D}((-A^2)^{\gamma/2})$ ist, und es gilt*

$$B_\gamma^g f = (-A^2)^{\gamma/2}f. \tag{10.2}$$

(ii) *$f \in X$ gehört zu $\mathsf{D}(B_\gamma^u)$ für $\gamma \geqq 1$ dann und nur dann, wenn f zu $\mathsf{D}((-A^2)^{\gamma/2-\frac{1}{2}})$ und $(-A^2)^{\gamma/2-\frac{1}{2}}f$ zu $\mathsf{D}(A)$ gehört. Es besteht dann die Beziehung*

$$B_\gamma^u f = (iA)(-A^2)^{\gamma/2-\frac{1}{2}}f = (-A^2)^{\gamma/2-\frac{1}{2}}(iA)f. \tag{10.3}$$

Beweis. In Folgerung 9.5 wurden die Relationen (10.2) für $\gamma = 2, 4, 6, \cdots$ und (10.3) für $\gamma = 1, 3, 5, \cdots$ bereits bewiesen. Für alle übrigen γ-Werte schließt man die Behauptungen des Satzes aus Folgerung 10.2 und der Tatsache, daß die Operatoren A, $(-A^2)^{\gamma/2}$, B_γ^g und B_γ^u abgeschlossen sind, in analoger Weise zum Beweis von Satz 4.2 aus Teil I.

Aus der Potenzeigenschaft des Operators $(-A^2)^\alpha$ bzgl. $\alpha > 0$ folgern wir die Funktionalgleichungen

$$B^g_{\gamma_1+\gamma_2} = B^g_{\gamma_1} B^g_{\gamma_2} \qquad \gamma_1, \gamma_2 > 0$$
$$B^u_{\gamma_1+\gamma_2} = B^u_{\gamma_1} B^g_{\gamma_2} \qquad \gamma_1 \geqq 1, \gamma_2 > 0$$
$$B^u_{\gamma_1} B^u_{\gamma_2} = B^g_{\gamma_1} B^g_{\gamma_2} \qquad \gamma_1, \gamma_2 \geqq 1.$$

Daraus ersieht man, daß B^g_γ bzgl. $\gamma > 0$ den Regeln einer Potenz genügt, während dies jedoch für B^u_γ nicht der Fall ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, wie die Operatoren B^g_γ und B^u_γ mit den Potenzen von der Ordnung γ der Halbgruppenerzeuger A und $(-A)$ verknüpft sind.

LEMMA 10.4. (i) *Für* $2r-2 < \gamma < 2r$ $(r = 1, 2, \cdots)$ *und* $f \in D(A^{2r})$ *gilt*

$$(-A)^\gamma f + A^\gamma f = 2 \cos \frac{\pi}{2} \gamma B^g_\gamma f.$$

(ii) *Sei* $f \in D(A^{2r+1})$, $r = 0, 1, 2, \cdots$. *Dann gilt für* $2r-1 < \gamma < 2r+1$ $(r = 1, 2, \cdots)$ und $0 < \gamma < 1$ $(r = 0)$

$$(-A)^\gamma f - A^\gamma f = 2i \sin \frac{\pi}{2} \gamma B^u_\gamma f.$$

BEWEIS. Sei $n = 1, 2, \cdots$. Benutzen wir für die gebrochenen Potenzen $(-A)^\gamma$ und A^γ die Darstellungen $(n-1 < \gamma < n;$ $f \in D(A^n))$

$$(-A)^\gamma f = -\frac{\sin \gamma\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\gamma-n} R(\lambda; A) A^n f d\lambda$$

und

$$A^\gamma f = -\frac{\sin \gamma\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\gamma-n} R(\lambda; -A)(-A)^n f d\lambda$$

(vgl. (5.5) und (5.1)), so folgern wir mit Hilfe der ersten Resolventengleichung (7.4) und der Beziehung (7.6) für $f \in D(A^n)$, $n-1 < \gamma < n$,

$$(10.4) \quad (-A)^\gamma f + (-1)^n A^\gamma f = -\frac{\sin \gamma\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\gamma/2-n/2} R(\lambda; A^2) A^n f d\lambda$$

und mit Hilfe der zweiten Resolventengleichung (7.5) sowie (7.6) für $f \in D(A^{n+1})$, $n-1 < \gamma < n$,

$$(10.5) \quad \begin{aligned} &(-A)^\gamma f - (-1)^n A^\gamma f \\ &= -\frac{\sin \gamma\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\gamma/2-\frac{1}{2}-n/2} R(\lambda; A^2) A^{n+1} f d\lambda. \end{aligned}$$

Ist nun $f \in D(A^{2r})$, $r = 1, 2, \cdots$, dann folgt aus (10.4) für

$2r-1 < \gamma < 2r$ $(n = 2r)$ und aus (10.5) für $2r-2 < \gamma < 2r-1$ $(n = 2r-1)$ die Behauptung in (i):

$$(-A)^\gamma f + A^\gamma f = 2\cos\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^g f,$$

die für $\gamma = 2r-1$ trivialerweise erfüllt ist, da sie sich auf die Identität $0 = 0$ reduziert.

Entsprechend schließt man (ii) für $2r < \gamma < 2r+1$ $(r = 0, 1, \cdots)$ aus (10.4) und für $2r-1 < \gamma < 2r$ $(r = 1, 2, \cdots)$ aus (10.5), während die Aussage für $\gamma = 2r$ $(r = 1, 2, \cdots)$ offensichtlich gültig ist.

Gehört f zu $\mathsf{D}((-A)^\gamma) \cap \mathsf{D}(A^\gamma)$, dann folgt, weil die Operatoren B_γ^g und B_γ^u abgeschlossen sind, aus Lemma 10.4, daß f sowohl in $\mathsf{D}(B_\gamma^g)$ $(\gamma \neq 1, 3, 5, \cdots)$ als auch in $\mathsf{D}(B_\gamma^u)$ $(\gamma \neq 2, 4, 6, \cdots)$ liegt und

$$(10.6)\quad \begin{cases} (-A)^\gamma f + A^\gamma f = 2\cos\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^g f \\ \qquad\qquad (f \in \mathsf{D}((-A)^\gamma) \cap \mathsf{D}(A^\gamma);\ \gamma > 0,\ \gamma \neq m) \\ (-A)^\gamma f - A^\gamma f = 2i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^u f \end{cases}$$

gilt. Dieselben Gleichungen können wir jedoch unter der Voraussetzung, daß f zu $\mathsf{D}(B_\gamma^g)$ bzw. $\mathsf{D}(B_\gamma^u)$ gehört, nicht beweisen, da Summe oder Differenz zweier abgeschlossener Operatoren i.a. nicht wieder abgeschlossen zu sein braucht. Wohl aber ist der Operator $[(-A)^\gamma + A^\gamma]$ bzw. $[(-A)^\gamma - A^\gamma]$ abschließbar; dies ergibt sich aus (10.6) wegen der Abgeschlossenheit von B_γ^g bzw. B_γ^u. Es gilt daher eine erweiterte Fassung der Relationen in (10.6) im Sinne des folgenden Satzes, in dem $\overline{[(-A)^\gamma \pm A^\gamma]}$ die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von $[(-A)^\gamma \pm A^\gamma]$ bezeichnet.

Satz 10.5. (i) *Für $\gamma \neq 1, 3, 5, \cdots$ gehört f zu $\mathsf{D}(B_\gamma^g)$ genau dann, wenn f zum Definitionsbereich der kleinsten abgeschlossenen Fortsetzung von $[(-A)^\gamma + A^\gamma]$ gehört, und es gilt*

$$\overline{[(-A)^\gamma + A^\gamma]} f = 2\cos\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^g f.$$

(ii) *Ein Element $f \in \mathsf{X}$ gehört zu $\mathsf{D}(B_\gamma^u)$ $(\gamma \neq 2, 4, 6, \cdots)$ genau dann, wenn $f \in \mathsf{D}(\overline{[(-A)^\gamma - A^\gamma]})$ ist, und es gilt*

$$\overline{[(-A)^\gamma - A^\gamma]} f = 2i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B_\gamma^u f.$$

Koppeln wir in Lemma 10.4 die Teile (i) und (ii) miteinander, so führt dies zusammen mit Folgerung 9.5 auf die für *alle* $\gamma > 0$ gültige Aussage:

Ist $f \in D(B^g_\gamma) \cap D(B^u_\gamma)$ für $\gamma > 0$, so gehört f auch zu $D((-A)^\gamma) \cap D(A^\gamma)$ und genügt den Gleichungen

$$(-A)^\gamma f = \cos\frac{\pi}{2}\gamma B^g_\gamma f + i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B^u_\gamma f$$

$$A^\gamma f = \cos\frac{\pi}{2}\gamma B^g_\gamma f - i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B^u_\gamma f.$$

Bezeichnen wir die kleinste abgeschlossene Fortsetzung der Operatoren

$$\left[\cos\frac{\pi}{2}\gamma B^g_\gamma \pm i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B^u_\gamma\right] \text{ mit } \overline{\left[\cos\frac{\pi}{2}\gamma B^g_\gamma \pm i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B^u_\gamma\right]},$$

so ergibt sich

Satz 10.6. *Für $\gamma > 0$ gilt*

$$(-A^\gamma) = \overline{\left[\cos\frac{\pi}{2}\gamma B^g_\gamma + i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B^u_\gamma\right]}$$

$$A^\gamma = \overline{\left[\cos\frac{\pi}{2}\gamma B^g_\gamma - i\sin\frac{\pi}{2}\gamma B^u_\gamma\right]}.$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer weiteren Charakterisierung des Operators B^g_γ, die sich auf Grund der Relation (10.2): $B^g_\gamma = (-A^2)^{\gamma/2}$ $(\gamma > 0)$ ergibt.

Ist $\{G(t);\ -\infty < t < \infty\}$ eine gleichmäßig beschränkte Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ mit infinitesimalem Erzeuger A und $\{W(t);\ t \geqq 0\}$ die von $A_W = A^2$ erzeugte gleichmäßig beschränkte Halbgruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ (siehe (7.7)), so gilt nach Satz 4.2 von Teil I, daß der Operator $(-B^g_\gamma) = -(-A_W)^{\gamma/2}$ im Falle $0 < \gamma < 2$ ebenfalls eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe $\{V_\gamma(t);\ t \geqq 0\}$ der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ erzeugt, die nach (4.3) durch

$$V_\gamma(t)f = \int_0^\infty \psi_{\gamma/2}(x;\,t)\,W(x)f\,dx \qquad (t > 0)$$

gegeben ist. Setzt man darin die Darstellung (7.7) der Halbgruppe $\{W(t);\ t \geqq 0\}$ ein und definiert man außerdem $V_2(t) = W(t)$ $(t \geqq 0)$, so läßt sich für $0 < \gamma \leqq 2$ schreiben

$$(10.7)\qquad V_\gamma(t)f = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\gamma(x; t) G(x) f\,dx \quad (t > 0;\ 0 < \gamma \leqq 2;\ f \in X),$$

wobei $\varphi_\gamma(x; t)$ diejenigen stabilen Dichtefunktionen im Sinne von P. Lévy sind, deren Fouriertransformierten (bzgl. x) die Gestalt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} \varphi_\gamma(x; t)\,dx = e^{-t|v|^\gamma}$$

haben. $\varphi_\gamma(x; t)$ sind nicht negative, gerade Funktionen aus $L(-\infty, \infty)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\gamma(x; t)dx = 1$ für $t > 0$.

Für $\gamma = 1$ und $\gamma = 2$ ist $\varphi_\gamma(x; t)$ geschlossen darstellbar; $\varphi_2(x; t) = 2^{-1}(\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2/4t}$ ist der schon erwähnte Kern von Gauss-Weierstrass, und $\varphi_1(x; t) = t/\pi(x^2+t^2)^{-1}$ ist als Kern des singulären Integrals von Cauchy-Poisson bekannt. Im Fall $\gamma = 1$ führen wir für das Integral (10.7) ebenfalls eine gesonderte Bezeichnung ein, und zwar $V_1(t) = P(t)$ $(t \geqq 0)$; so ist also

$$(10.8)\qquad P(t)f = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+t^2}\, G(x) f\,dx \qquad (t > 0;\ f \in X).$$

Dieses Integral wird uns im folgenden Abschnitt u.a. beschäftigen.

Den oben dargelegten Sachverhalt fassen wir, wie folgt, zusammen:

SATZ 10.7. *Für $0 < \gamma \leqq 2$ ist der Operator $(-B_\gamma^g) = -(-A^2)^{\gamma/2}$ gleich dem infinitesimalen Erzeuger der Halbgruppe $\{V_\gamma(t); t \geqq 0\}$.*

Bezüglich der Halbgruppe (10.7), verknüpft mit der Gruppe $\{G(x); -\infty < x < \infty\}$ der Translationen verweisen wir auf S. Bochner [7], W. Feller [41], Hille-Phillips [15, p. 673] und H. Berens-E. Görlich [37], sowie die Ausführungen in Abschnitt 11 der vorliegenden Arbeit.

Ferner bemerken wir, daß auf Grund der Potenzregel des Satzes 4.4 die Relation $(-A_W)^{\gamma/2} = ((-A_W)^{\frac{1}{2}})^\gamma$ $(\gamma > 0)$ gilt, da, wie gesagt, $-(-A_W)^{\frac{1}{2}}$ gleich dem Erzeuger A_P der Halbgruppe $\{P(t); t \geqq 0\}$ ist. Also kann man B_γ^g auch als gebrochene Potenz der Ordnung γ von A_P darstellen.

SATZ 10.8. *Für $\gamma > 0$ gilt*

$$B_\gamma^g = (-A_W)^{\gamma/2} = (-A_P)^\gamma.$$

Dieser Zusammenhang läßt sich über die Gruppe $\{G(t); -\infty < t < \infty\}$ und die mit ihr verknüpften Halbgruppen $\{W(t); t \geqq 0\}$ und $\{P(t); t \geqq 0\}$ folgendermaßen ausdrücken:

SATZ 10.9. *Sei $\{G(t); -\infty < t < \infty\}$ eine gleichmäßig beschränkte*

Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$, *und seien* $\{W(t);\, t \geqq 0\}$ *und* $\{P(t);\, t \geqq 0\}$ *die zugehörigen durch* (7.7) *bzw.* (10.8) *gegebenen gleichmäßig beschränkten Halbgruppen der Klasse* $(\mathscr{C}_0)$. *Konvergiert für* $0 < \gamma < 2r$, $r = 1, 2, \cdots$ *und ein Element* $f \in X$ *eine der drei folgenden Integralscharen* (i)—(iii)

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{K_{\gamma,2r}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-1-\gamma} \left[G\left(\frac{x}{2}\right) - G\left(-\frac{x}{2}\right)\right]^{2r} f\, dx$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{1}{C_{\gamma/2,r}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-1-\gamma/2}[I - W(x)]^{r} f\, dx$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{1}{C_{\gamma,2r}} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{-1-\gamma}[I - P(x)]^{2r} f\, dx$$

in der Norm für $\varepsilon \to 0+$, *so konvergieren auch die beiden anderen in diesem Sinne, und alle drei Grenzwerte sind gleich.*

11. Translationsgruppe und die singulären Integrale von Gauss-Weierstrass und Cauchy-Poisson

Als Beispiel einer gleichmäßig beschränkten Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ betrachten wir die Translationen auf dem Raume $L(-\infty, \infty)$, definiert durch

$$[G(t)f](z) = f(z+t) \quad (-\infty < t < \infty;\, f \in L(-\infty, \infty)). \tag{11.1}$$

Der infinitesimale Erzeuger A dieser Gruppe ist der Differentialoperator:

$$[Af](z) = \frac{d}{dz} f(z)$$

mit Definitionsbereich

$$D(A) = \{f \in L(-\infty, \infty);\, f \in AC(-\infty, \infty)\},$$

wobei wir unter $AC(-\infty, \infty)$ die Menge aller (reell- oder komplexwertigen) Funktionen $f(z)$ verstehen, die auf $(-\infty, \infty)$ absolut stetig sind. Die ganzzahligen Potenzen $A^n (n = 2, 3, \cdots)$ des Erzeugers A sind dann durch

$$[A^n f](z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z)$$

und

$$D(A^n) = \{f \in L(-\infty, \infty);\, f, f', \cdots f^{(n-1)} \in AC(-\infty, \infty)\}$$

gegeben.

Sowohl die Halbgruppe als auch die Gruppe der Translationen wird in Hille-Phillips [15] und in Butzer-Berens [9] auf verschiedenen Funktionenräumen untersucht.

Für $0 < \gamma < n$ sind die Operatoren B_γ^g und B_γ^u nach Definition 9.2 in Form von

$$\left.\begin{array}{l} B_\gamma^g f \\ B_\gamma^u f \end{array}\right\} = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{K_{\gamma,n}} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\gamma} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f\left(\cdot + t\left(\frac{n}{2} - j\right)\right) dt \quad \begin{array}{l} (n=g) \\ (n=u) \end{array}$$

gegeben für alle $f \in L(-\infty, \infty)$, für die die Grenzwerte existieren. Diese Operatoren und ihre Definitionsbereiche sollen nun mit Hilfe der Fouriertransformation charakterisiert werden. Vgl. H. Berens [4].

Satz 11.1. (i) *Der Operator* B_γ^g $(\gamma > 0)$ *ist bestimmt durch*

$$D(B_\gamma^g) = \{f \in L(-\infty, \infty);\ \textit{es existiert } h \in L(-\infty, \infty)\ \textit{mit } |v|^\gamma f^\wedge(v) = h^\wedge(v)\}$$

und

$$[B_\gamma^g f]^\wedge(v) = |v|^\gamma f^\wedge(v).$$

(ii) *Der Operator* B_γ^u $(\gamma > 0)$ *ist bestimmt durch*

$$D(B_\gamma^u) = \{f \in L(-\infty, \infty);\ \textit{es existiert } h \in L(-\infty, \infty)\ \textit{mit } (\operatorname{sgn} v)|v|^\gamma f^\wedge(v) = h^\wedge(v)\}$$

und

$$[B_\gamma^u f]^\wedge(v) = (-\operatorname{sgn} v)|v|^\gamma f^\wedge(v).$$

Beweis. Führen wir für $0 < \gamma < n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ und $\varepsilon > 0$ folgende Bezeichnungen ein:

$$[E_{\gamma,n;\varepsilon} f](z) = \int_{-\infty}^\infty f(z+x)\bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{dx}{\varepsilon} \qquad (f \in L(-\infty, \infty))$$

und

$$[F_{\gamma,n;\varepsilon} f](z) = \int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f\left(z + x\left(\frac{n}{2} - j\right)\right) dx \qquad (f \in L(-\infty, \infty)).$$

Für jedes $f \in L(-\infty, \infty)$ und alle $v \in (-\infty, \infty)$ erhält man für die Fouriertransformierten dieser Funktionen

$$[E_{\gamma,n;\varepsilon} f]^\wedge(v) = \int_{-\infty}^\infty e^{ivx} f^\wedge(v)\bar{q}_{\gamma,n}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{dx}{\varepsilon} = f^\wedge(v)[\bar{q}_{\gamma,n}]^\wedge(v\varepsilon)$$

und mit Hilfe von (8.11)

$$[F_{\gamma,n;\varepsilon}f]^\wedge(v) = \int_\varepsilon^\infty x^{-1-\gamma}(e^{ivx/2} - e^{-ivx/2})^n f^\wedge(v)\,dx$$
$$= (-\operatorname{sgn} v)^n |v|^\gamma f^\wedge(v)[\bar{q}_{\gamma,n}]^\wedge(v\varepsilon).$$

Sei nun f aus $\mathsf{D}(B_\gamma^g)$ $(0 < \gamma < n;\ n = 2, 4, 6, \cdots)$ oder $\mathsf{D}(B_\gamma^u)$ $(0 < \gamma < n;\ n = 1, 3, 5, \cdots)$; d.h.

$$\left.\begin{matrix} B_\gamma^g f \\ B_\gamma^u f \end{matrix}\right\} = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{K_{\gamma,n}} F_{\gamma,n;\varepsilon} f \qquad \begin{matrix} (n = g) \\ (n = u). \end{matrix}$$

Wendet man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Fouriertransformation an, dann gilt

$$\left.\begin{matrix} [B_\gamma^g f]^\wedge(v) \\ [B_\gamma^u f]^\wedge(v) \end{matrix}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{K_{\gamma,n}} [F_{\gamma,n;\varepsilon} f]^\wedge(v)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\operatorname{sgn} v)^n |v|^\gamma \frac{1}{K_{\gamma,n}} f^\wedge(v)[\bar{q}_{\gamma,n}]^\wedge(v\varepsilon) = (-\operatorname{sgn} v)^n |v|^\gamma f^\wedge(v)$$

für jedes v, $-\infty < v < \infty$.

Dies besagt für $n = 2, 4, 6, \cdots$

$$[B_\gamma^g f]^\wedge(v) = |v|^\gamma f^\wedge(v)$$

und für $n = 1, 3, 5, \cdots$

$$[B_\gamma^u f]^\wedge(v) = (-\operatorname{sgn} v)|v|^\gamma f^\wedge(v).$$

Existiert umgekehrt ein Element $h \in \mathsf{L}(-\infty, \infty)$, so daß

$$(-\operatorname{sgn} v)^n\, |v|^\gamma f^\wedge(v) = h^\wedge(v) \qquad (-\infty < v < \infty)$$

gilt, so erhält man mit Hilfe der Identität (9.6)

$$\left[\begin{Bmatrix} B_\gamma^g \\ B_\gamma^u \end{Bmatrix} E_{\gamma,n;\varepsilon} f\right]^\wedge (v) = [F_{\gamma,n;\varepsilon} f]^\wedge(v) = (-\operatorname{sgn} v)^n |v|^\gamma f^\wedge(v)[\bar{q}_{\gamma,n}]^\wedge(v\varepsilon)$$
$$= h^\wedge(v)[\bar{q}_{\gamma,n}]^\wedge(v\varepsilon) = [E_{\gamma,n;\varepsilon} h]^\wedge(v),$$

woraus man nach dem Eindeutigkeitssatz der Fouriertransformation

$$\begin{Bmatrix} B_\gamma^g \\ B_\gamma^u \end{Bmatrix} E_{\gamma,n;\varepsilon} f = E_{\gamma,n;\varepsilon} h \qquad \begin{matrix} (n = 2, 4, 6, \cdots) \\ (n = 1, 3, 5, \cdots) \end{matrix}$$

schließt. Für $\varepsilon \to 0+$ strebt die rechte Seite der letzten Gleichung im starken Sinne gegen $K_{\gamma,n} h$, so daß wegen der Abgeschlossenheit von B_γ^g und B_γ^u

für $n = 2, 4, 6, \cdots$: $\quad f \in \mathsf{D}(B_\gamma^g), \quad B_\gamma^g f = h$

und für $n = 1, 3, 5, \cdots$: $\quad f \in \mathsf{D}(B_\gamma^u), \quad B_\gamma^u f = h$ folgt.

Das Ergebnis des Satzes 11.1, das wir hier über eine allgemeine Theorie gewonnen haben, ist schon aus der Monographie von Butzer-Trebels [11] bekannt; es wird dort u.a. über den Satz von Banach-Steinhaus und den Darstellungssatz von H. Cramér bewiesen.
Verstehen wir unter dem Symbol $f^{\{\gamma\}}$ $(\gamma > 0)$ diejenige Funktion $h \in L(-\infty, \infty)$, die zu einer Funktion $f \in L(-\infty, \infty)$ existiert, so daß die Beziehung $|v|^{\gamma} f^{\wedge}(v) = h^{\wedge}(v)$ für $\gamma > 0$ erfüllt ist, so läßt sich Teil (i) von Satz 11.1 dahingehend formulieren, daß $f \in L(-\infty, \infty)$ genau dann zu $D(B_{\gamma}^{g})$ gehört, wenn $f^{\{\gamma\}}$ existiert, und daß $B_{\gamma}^{g} f = f^{\{\gamma\}}$ gilt.

Als nächstes betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Operator B_{γ}^{g} für die Translationsgruppe und den infinitesimalen Erzeugern der Gauss-Weierstrass- und Cauchy-Poisson-Halbgruppe.

Daß der Operator $A_W = (d^2/dz^2)$ die Kontraktionshalbgruppe $\{W(t); t \geqq 0\}$ der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ erzeugt, die durch das singuläre Integral von Gauss-Weierstrass

$$[W(t)f](z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4t} f(z+x)\,dx \quad (t > 0; f \in L(-\infty, \infty))$$

definiert ist, wird z.B. in Hille-Phillips [15, p. 578, 602f], Dunford-Schwartz [13, p. 639f] und Yosida [34, p. 268] bewiesen. Bzgl. dieses Integrals für Funktionen von mehreren Veränderlichen siehe Butzer-Berens [9, Sec. 4.3] und R. J. Nessel [43]. An den zitierten Stellen im Buch von Hille-Phillips ist auch die Charakterisierung des Erzeugers A^2 und seines Definitionsbereiches über die Fouriertransformation gezeigt; diese Darstellung ist wegen der Relation $A^2 = -B_2^g$ in Satz 11.1 mitenthalten. Ferner möchten wir bemerken, daß das Gauss-Weierstrass-Integral

$$w(z; t) = [W(t)f](z)$$

das Cauchy-Problem für die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \qquad w(z; 0) = f(z) \tag{11.2}$$

löst (als verallgemeinerte Wellengleichung interpretiert, siehe H. Berens-U. Westphal [38]).

Nach Satz 10.7 ist der Operator $-(-A^2)^{\frac{1}{2}} = -(-d^2/dz^2)^{\frac{1}{2}}$ gleich dem infinitesimalen Erzeuger A_P der Kontraktionshalbgruppe $\{P(t); t \geqq 0\}$ der Klasse $(\mathscr{C}_0)$, die durch das singuläre Integral von Cauchy-Poisson (vgl. (10.8))

$$[P(t)f](z) = \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+t^2}\, f(z+x)\,dx \quad (t > 0;\, f \in L(-\infty, \infty))$$

gegeben ist. Vermutlich erstmals untersucht E. Hille dieses Integral als Halbgruppenoperator und bestimmt den infinitesimalen Erzeuger in Fouriertransformierter Gestalt, so wie er aus Satz 11.1 auf Grund der Relation $-(-A^2)^{\frac{1}{2}} = -B_1^g$ ersichtlich ist (vgl. Hille-Phillips [15, p. 579f]). Eine andere Darstellung des Erzeugers folgt aus einem Lemma von J. L. B. Cooper [40] über die Hilberttransformation H:

$$[Hf](z) = f^{\sim}(z) \equiv -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(z+x)-f(z-x)}{x}\,dx \quad \text{f.ü.}$$
$$(f \in L(-\infty, \infty)).$$

Danach ist der infinitesimale Erzeuger A_P der Halbgruppe $\{P(t);\, t \geqq 0\}$ charakterisiert durch

$$A_P f = -\left(\frac{d}{dz}\, H\right) f,$$

und sein Definitionsbereich $D(A_P)$ ist gleich der Menge

$$\{f \in L(-\infty, \infty);\, f^{\sim} \in AC(-\infty, \infty)\}.$$

Siehe Butzer-Berens [9, Sec. 4.2.3].

Für den Operator B_γ^g und die gebrochenen Potenzen

$$(-A_W)^{\gamma/2} = \left(-\frac{d^2}{dz^2}\right)^{\gamma/2} \quad \text{und} \quad (-A_P)^{\gamma} = \left(\frac{d}{dz}\, H\right)^{\gamma}$$

gilt nun nach Satz 10.8 die Gleichung:

$$(11.3) \qquad f^{\{\gamma\}} = \left(-\frac{d^2}{dz^2}\right)^{\gamma/2} f = \left(\frac{d}{dz}\, H\right)^{\gamma} f \qquad (\gamma > 0),$$

sofern einer dieser drei Ausdrücke existiert.

In der Literatur ist für gebrochene Ableitungen ein Zusammenhang von der Form der Relation (11.3) durchaus bekannt. Dabei ist der Operator $((d/dz)H)^{\gamma}$ mit dem Rieszpotential $I^{-\gamma}$ zu identifizieren, das W. Feller [14] im Falle $0 < \gamma \leqq 2$ über den infinitesimalen Erzeuger A_{V_γ} der Halbgruppe (10.7): $\{V_\gamma(t);\, t \geqq 0\}$ (verknüpft mit der Gruppe der Translationen (11.1)) durch $I^{-\gamma} = -A_{V_\gamma}$ definiert. S. Bochner [7] hingegen wählt im Zusammenhang mit der Untersuchung der Diffusionsgleichung (11.2) den Erzeuger A_{V_γ} als geeignete Definition der gebrochenen Potenz

$$-\left(-\frac{d^2}{dz^2}\right)^{\gamma/2} \qquad (0 < \gamma \leqq 2).$$

Zum Rieszpotential I^α (siehe M. Riesz [26]) möchten wir noch folgendes bemerken: Für $0 < \alpha < 1$ ist es auf $L(-\infty, \infty)$ durch das Faltungsintegral

$$[I^\alpha f](z) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi}{2}\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-1} f(z+x)\,dx$$

definiert. Für $\alpha \geqq 1$ stellt es eine meromorphe Funktion dar mit einfachen Polen bei $\alpha = 1+2k$ $(k = 0, 1, \cdots)$. Im Falle negativer α-Werte: $\alpha = -\gamma$ $(\gamma > 0)$ ist $I^{-\gamma} = ((d/dz)H)^\gamma$ bekanntlich die Umkehrtransformation zu I^γ; deshalb heißt $((d/dz)H)^\gamma f$ auch "Rieszableitung der Funktion f von der Ordnung γ". Diese Bezeichnung ist besonders für die Darstellung über die Fouriertransformation in Gestalt von $f^{\{\gamma\}}$ (s.o.) üblich. Weitere Charakterisierungen der Rieszableitung finden sich in Butzer-Trebels [11].

Wenden wir uns zum Schluß von dem Beispiel der Translationsgruppe noch einmal kurz einer beliebigen gleichmäßig beschränkten Gruppe der Klasse $(\mathscr{C}_0)$ zu, dann können wir in Analogie zu den für das Beispiel gültigen Aussagen im allgemeinen Fall den Operator B_γ^g als "abstraktes Rieszpotential" interpretieren.

Eine derartige Deutung geht auf A. V. Balakrishnan [36] zurück, der im Fall $0 < \gamma < 2$ für die Restriktion dieses sog. abstrakten Rieszpotentials auf $D(A^2)$ eine Darstellung der Form (9.9) angibt. Auf eine umfassendere Behandlung dieses Problems wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Darüber hinaus sei noch erwähnt, daß sich die vorangegangenen Untersuchungen vermutlich auf Gruppen der Klasse $(\mathscr{C}_0)$, die *nicht* gleichmäßig beschränkt sind, ausdehnen lassen, so daß auch die Schrödinger Gleichung erfaßt würde; zu diesem Beispiel vgl. E. Nelson [42] und die dort zitierte Literatur.

LITERATURVERZEICHNIS

A. V. Balakrishnan

[36] Representation of abstract Riesz potentials of the elliptic type. Bull. Amer. Math. Soc. 64, no. 5 (1958), 288—289.

H. Berens und E. Görlich

[37] Über einen Darstellungssatz für Funktionen als Fourierintegrale und Anwendungen in der Fourieranalysis. Tôhoku Math. J. 18 (1966), 429—453.

H. Berens and U. Westphal

[38] A Cauchy problem for a generalized wave equation. Acta Sci. Math. (Szeged) 29 (1968), 93—106.

S. Bochner and K. Chandrasekharan

[39] Fourier transforms. Annals of Mathematics Studies, no. 19. Princeton, N.J. 1949, ix+219 pp.

J. L. B. Cooper

[40] Some problems in the theory of Fourier transforms. Arch. Rational Mech. Anal. 14 (1963), 213—216.

A. Erdélyi et al.

[41] Tables of Integral Transforms, Vol. I. New York 1954, xx+391 pp.

E. Nelson

[42] Feynman integrals and the Schrödinger equation. J. Mathematical Phys. 5 (1964), 332—343.

R. J. Nessel

[43] Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, II Applications, III Radial kernels. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 29 (1967), 52—73.

G. O. Okikiolu

[44] Fourier transforms and the operator H_α. Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 73—78.

E. C. Titchmarsh

[45] Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford 1948, viii+395 pp.

(Oblatum 19–VI–69)

Lehrstuhl A für Mathematik
Rhein.-Westf. Techn. Hochschule, Aachen
Templergraben 55, Aachen, Germany