

COMPOSITIO MATHEMATICA

ASCHWINIEKUMAR

Über katalogisierte Räume

Compositio Mathematica, tome 21, n° 4 (1969), p. 431-456

http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_4_431_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über katalogisierte Räume

von

Aschwiniekumar

Dem Andenken an L. E. J. Brouwer (27.2.1881–2.12.1966) gewidmet

1. Einleitung

In diesem Aufsatz wollen wir eine einfache Ergänzung des von Brouwer eingeführten Katalogisierbarkeitsbegriffes formulieren um einen systematischen Aufbau topologischer Räume darzustellen. Diese Arbeit unterscheidet sich stark von einigen früheren Versuchen zur systematischen Darstellung der intuitionistischen Topologie denn hier ist der systematische Aufbau unserer Zweck an Stelle von Systematisierung von auf intuitionistische Topologie anwendbaren Axiomen (vgl. [18]).

Die intuitionistische Mathematik ist eine ohne Anwendung der Sprache errichtete Gedankenkonstruktion. Sie entsteht durch Selbstentfaltung der Zweierabstraktion, auch genannt die mathematische Urintuition. Die Urhandlung der intuitionistischen Konstruktion ist die gedankliche Errichtung der Zweier zweier schon gewonnener mathematischer Systeme und die Betrachtung dieser Zweier als ein neues mathematisches System.

Der größte Unterschied zu der herkömmlichen (sgn. klassischen) Mathematik tritt bei der Begriffsbestimmung einer unendlichen Folge auf. In der intuitionistischen Mathematik wird stets eine *Wahlfolge* gemeint deren Elemente aus schon gewonnenen mathematischen Denkbaren in voller (bzw. in möglich wachsender Einengung unterworfenen) Freiheit gewählt werden. Eine (unendliche) Folge ist also im allgemeinen nicht fertig darstellbar, sondern nur eine Wahlmöglichkeit die dem Errichtenden gegeben ist, so daß wenn er die ersten $n-1$ Elemente aus den schon gewonnenen mathematischen Denkbaren gewählt hat, er das n -te Element ganz ungebunden wählen kann. Er kann jedoch selbst seine Wahl einer Einengung unterwerfen (so z.B. kann er das n -te Element durch ein Gesetz bestimmen lassen) und kann zu dieser Einengung bei folgenden Wahlen noch

hinzufügen, oder er kann seine Wahl von seinen mathematischen Erfahrungen abhängen lassen.

Bei dieser Konstruktion kann der Errichtende Eigenschaften, die für schon gewonnene mathematische Denkbarkeiten sinnvoll vorausgesetzt werden können, als neue mathematische Denkbarkeiten hinzufügen. Eine solche Eigenschaft nennt man eine *Spezies*, und die schon gewonnenen mathematischen Denkbarkeiten für die diese Eigenschaft gilt, heißen *Elemente* dieser Spezies.

Zwei unbegrenzte Folgen mathematischer Denkbarkeiten

$$a_1, a_2, \dots \text{ und } b_1, b_2, \dots$$

heißen *gleich* oder *identisch*, wenn $a_r = b_r$ für jedes r . Zwei Spezies heißen *gleich* oder *identisch*, wenn zu jedem Elemente der einen Spezies ein gleiches Element der anderen Spezies angegeben werden kann. Ist die Gleichheit zweier Folgen (bzw. Spezies) kontradiktorisch, so heißen sie *verschieden*.

Die Spezies M heißt eine *Teilspezies* der Spezies N , wenn zu jedem Elemente von M ein gleiches Element von N existiert. Kann man beweisen daß jedes Element von N entweder zu seiner Teilspezies M gehört oder nicht zu M gehören kann, so heißt M eine *abtrennbare* Teilspezies von N .

Wir legen nun die intuitionistische Terminologie der Spreizungslehre fest. Ein *Knopf n -ter Ordnung* ist eine Folge von n natürlichen Zahlen ($n \geq 1$), die *Knopfglieder* heißen. Ein Knopf p' ($n+m$)-ter Ordnung ($m \geq 1$) heißt ein *m -ter Nachfolger* eines Knopfes p n -ter Ordnung (und dabei heißt p der *m -te Vorgänger* von p') wenn p ein Anfangssegment von p' bildet. Die Spezies Q_p der *Nächstfolger* (d.h. die ersten Nachfolger) des Knopfes p n -ter Ordnung mit ihrer natürlichen Ordnung (wobei ihre Elemente nach ihren letzten Knopfgliedern geordnet werden) heißt eine *Knöpfenreihe $(n+1)$ -ter Ordnung*, und damit die *Nächstfolgerreihe* von p , während p der *Nächstvorgänger* von Q_p heißt. Die Spezies der Knöpfe erster Ordnung (mit ihrer natürlichen Ordnung) heißt die *Knöpfenreihe erster Ordnung*. Eine endliche Folge p_1, \dots, p_n von Knöpfen bzw. 1-ter, \dots , n -ter Ordnung, wobei jedes p_i ein Nächstfolger von p_{i-1} ist ($2 \leq i \leq n$), heißt ein *Knopfgefüge n -ter Ordnung*. Eine in voller (bzw. in möglich wachsender Einengung unterworfenen) Freiheit unbegrenzt fortschreitende Folge p_1, p_2, \dots von Knöpfen bzw. 1-ter, 2-ter, \dots Ordnung, wobei jedes p_i ($i \geq 2$) ein Nächstfolger von p_{i-1} ist, heißt ein *Pfeil*. Eine *Spreizungsrichtung* (nach niederländisch

“spreading” s. [12], und engl. “spread” s. [13], [14], statt “Menge” s. [2] usw.) ist eine (nicht notwendig voraus bestimmte) Knöpfenspezies K zu der gehören:

1. aus den Knöpfen erster Ordnung, entweder alle natürlichen Zahlen, oder nur diejenigen die eine festgelegte natürliche Zahl m_0 nicht überschreiten;
2. aus den Nächstfolgern eines zu K gehörigen Knopfes p n -ter Ordnung ($n \geq 1$), entweder alle, oder nur diejenigen deren letzte Knopfglieder eine festgelegte natürliche Zahl m_p nicht überschreiten.

Die Spezies $w(K)$ der Pfeile die aus Knöpfen in K bestehen heißt eine *Spreizung*. Die Spreizungsrichtung bei der stets die erste (bzw. die zweite) von den zwei obigen Möglichkeiten gewählt wird heißt die *Gesamtspreizungsrichtung GSR* (bzw. eine *Fächerrichtung*) und die entsprechende Spreizung heißt die *Gesamtspreizung GS* (bzw. ein *Fächer*). Ein Knopf b einer Spreizungsrichtung zusammen mit seinen Nachfolgern in K bildet eine abtrennbare Teilspezies von K die wir eine *Sektorenrichtung* nennen, und die Spezies $P_b(K)$ der aus Knöpfen in dieser Sektorenrichtung bestehenden Pfeile wird ein *Sektor* genannt: dabei wird b die *Spitze* von $P_b(K)$ genannt. (s. [14]).

Ersetzt man in einer Spreizungsrichtung (bzw. Fächerrichtung) jedes Knopfglied durch eine schon gewonnene mathematische Denkbarkeit in solcher Weise daß in jedem Knopf p' $(n+1)$ -ter Ordnung die ersten n Glieder wieder durch dieselben mathematischen Entitäten ersetzt werden als in seinem Nächstvorgänger p , so entsteht eine *bekleidete Spreizungsrichtung* (bzw. *bekleidete Fächerrichtung*) und eine zugehörige *bekleidete Spreizung* (bzw. *bekleideter Fächer*). Man erhält eine *abtrennbar teilweise bekleidete Spreizungsrichtung* wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Knopfglieder aller Knöpfe erster Ordnung in einer abtrennbaren (nicht notwendig nichtleeren) Teilspezies der Knöpfenreihe erster Ordnung werden durch schon gewonnene mathematische Entitäten ersetzt.

2. Ist ein Knopf p n -ter Ordnung ($n \geq 1$) schon bekleidet, so werden die letzten Knopfglieder aller Knöpfe $(n+1)$ -ter Ordnung in einer abtrennbaren mindestens ein Element besitzenden Teilspezies der Nächstfolgerreihe Q_p von p durch schon gewonnene mathematische Entitäten ersetzt. Hierbei werden die ersten n Knopfglieder eines Nächstfolgers von p durch dieselben mathematischen Entitäten ersetzt als im Knopf p .

In der intuitionistischen Mathematik ist alle weitere Konstruktion bezogen auf die früher errichteten mathematischen Denkbarkeiten und wichtige Struktureigenschaften sind aus der Konstruktionsgeschichte abzuleiten. Ein sehr merkwürdiges Beispiel dieser Eigenart ist der Fächersatz. Im Geiste der intuitionistischen Mathematik hat Brouwer den herkömmlichen Begriff eines metrischen Raumes so umformuliert daß ein metrischer Raum durch einen abzählbar unendlichen Katalog (d.h. eine unendliche Folge auf der eine Abstandsfunktion erklärt ist) erzeugt wird. Ein solcher Raum heißt katalogisiert. In seinen Betrachtungen hat Brouwer die Räume einer weiteren Bedingung unterworfen (n.l. daß der erzeugende Katalog sich durch ihre endlichen Anfangsegmente mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximieren lasse), so daß die betrachteten Räume stets kompakt sind. Das Erfülltsein dieser Bedingung hat den Vorteil daß der Raum sich durch einen Fächer darstellen läßt; somit kann man den Fächersatz anwenden und beweisen, daß jede *volle Abbildung* (d.h. eine Abbildung die auf dem ganzen Raum definiert ist) eines katalogisierten kompakten metrischen Raumes in einen ebensolchen Raum gleichmäßig stetig auf dem ganzen Raume ist.

Die Notwendigkeit zur Verallgemeinerung der Brouwerschen Definition erscheint erst wann man mit einem unkompakten unlokalkompakten metrischen Raum zu tun hat. So z.B. wenn man den Stetigkeitssatz für den separablen unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum beweisen will, denn der übliche Beweis daß jede überall definierte lineare Abbildung des Hilbert-Raumes stetig ist, ist sehr unkonstruktiv und für den Intuitionist ganz unbrauchbar, und der unendlich-dimensionale Hilbert-Raum läßt auch keine Darstellung durch einen Fächer zu (was erst streng in diesem Aufsatz bewiesen wird) so daß der Fächersatz nicht zur Verfügung steht. So bedarf man einer anderen Spreizungsdarstellung die den Stetigkeitssatz zu beweisen gestattet. Eine weitere Verallgemeinerung wird benötigt wenn man lineare metrische Räume errichtet mit umfangreicheren Indizesmengen als die Spezies der natürlichen Zahlen. So z.B. ist der Raum aller vollen linearen Funktionalen auf dem separablen unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum oder das intuitionistische Analogon des Hilbert-Raumes mit überabzählbarer Dimension nicht in natürlicher Weise als metrischer Raum aufzufassen und man bedarf eines anderen Mittels um die Konvergenz in solchen Räumen zu erklären. Somit entsteht der Begriff einer Abstandsbeschränkung die den üblichen Abstands begriff als Spezialfall

umfaßt. Nun entsteht auch die Frage ob der Begriff einer Abstandsbeschränkung noch nützliche Verallgemeinerungen hat. Scheinbare Verallgemeinerungen lassen sich jedoch auf den ursprünglichen Begriff zurückführen.

2. Katalogisierte kompakte metrische Räume

Brouwer hat katalogisierte kompakte metrische Räume definiert in [3], [11], [14]: die Definition wird hier wiederholt. Eine Folge von mathematischen Objekten wird eine *katalogisierte Folge erster Art* oder ein (*den Raum erzeugender*) *Katalog erster Art* $K : c_1, c_2, \dots$ genannt, wenn zu je zwei Elementen c_r, c_s ein Abstand $\rho(c_r, c_s) = \rho(c_s, c_r) \geq 0$ definiert wird, der folgenden Bedingungen genügt:

1. Es ist stets $\rho(c_r, c_s) = 0$ wenn $c_r = c_s$.

2. $\rho(c_r, c_s) \leq \rho(c_r, c_t) + \rho(c_s, c_t)$ (Die Dreiecksungleichung.)

3. Zu jedem n gibt es eine natürliche Zahl $m(n)$, so daß wenn wir die endliche Menge $\{c_1, \dots, c_{m(n)}\}$ mit P_n bezeichnen, so ist $\rho(c_r, P_n) \leq 4^{-n}$ für jedes r . (Die Folge c_1, \dots läßt sich durch ihre endlichen Anfangssegmente mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximieren.) Genügt der Katalog K überdies der Bedingung.

4. Wenn $c_r \neq c_s$, so kann eine solche natürliche Zahl $f(r, s)$ bestimmt werden, daß

$$\rho(c_r, c_s) > 2^{-f(r, s)},$$

so heißt er *getrennt zusammengesetzt*.

Sei K ein Katalog erster Art. Eine unbegrenzte Folge a_1, a_2, \dots von Elementen von K heißt *konvergent* (und damit ein *Limeselement* von K), wenn zu jedem n , eine natürliche Zahl $k(n)$ bestimmt werden kann, derart daß

$$\rho(a_{k(n)}, a_r) < 2^{-n} \text{ für jedes } r > k(n).$$

Zwei Limeselemente a_1, a_2, \dots und b_1, b_2, \dots von K gehören *zusammen* (oder *fallen zusammen*) wenn zu jedem n eine natürliche Zahl $m(n)$ bestimmt werden kann, so daß

$$\rho(a_r, b_r) < 2^{-n} \text{ für jedes } r > m(n).$$

Die Spezies der mit einem vorgegebenen Limeselement von K zusammengehörigen Limeselemente von K heißt ein *Punkt kern* von K . Die Spezies $R(K)$ der Punktkerne von K heißt der *durch*

K erzeugte katalogisierte kompakte metrische Raum, wobei wir den Abstand je zweier Elemente von $R(K)$ in auf der Hand liegender Weise definieren.

Eine Teilspezies R' von $R = R(K)$ heißt *in bezug auf K von bekannter Stelle* wenn die Entfernung $\rho(R', c_r)$ zwischen R' und einem beliebigen Element c_r von K existiert und sich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximieren läßt d.h. die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Für jedes Element q von R' ist $\rho(q, c_r) \geq \rho(R', c_r)$.
2. Zu jedem n gibt es ein solches q_n in R' daß

$$\rho(q_n, c_r) < \rho(R', c_r) + 2^{-n}.$$

(1) *Ist eine Teilspezies R' von $R = R(K)$ von bekannter Stelle in bezug auf K , so läßt sie eine Katalogisierung erster Art zu und kann sogar durch einen Teilkatalog K' des Katalogs K erzeugt werden. (s. [11]).*

Also ist $R'(K')$ selbst ein katalogisierter kompakter metrischer Raum wenn es vorgegeben ist daß R' abgeschlossen ist.

Zu jedem katalogisierten kompakten metrischen Raume kann man eine bekleidete Fächerichtung $FR(K)$ (s. [14], S. 16—17) aufbauen deren Pfeile Limeselemente von K sind. Umgekehrt fällt jedes Limeselement von K mit einem Pfeil von $FR(K)$ zusammen. Weiter gilt

(2) *Jeder natürlichen Zahl r kann man eine solche natürliche Zahl s zuordnen daß zwei beliebige voneinander weniger als 2^{-s} entfernte Punktkerne von $R(K)$ bzw. zwei Pfeile von $FR(K)$ enthalten die ein gemeinschaftliches Knopfgefüge r -ter Ordnung haben. ([14], S. 16, Lemma 1.)*

Umgekehrt gilt

(3) *Jeder natürlichen Zahl p kann man eine solche natürliche Zahl q zuordnen daß zwei beliebige gemeinschaftliches Knopfgefüge q -ter Ordnung besitzende Pfeile von $FR(K)$ zu zwei voneinander weniger als 2^{-p} entfernten Punktkernen von $R(K)$ gehören. ([14], S. 17, Lemma 2.)*

Wenn es zu einem Raum R eine solche Spreizung SR (bzw. einen Fächer FR) gibt, daß jeder Pfeil von SR (bzw. FR) mit einem Punktkern von R zusammenfällt und jeder Punktkern von R mit einem Pfeil von SR (bzw. FR) zusammenfällt, so sagen wir, R lasse eine Spreizungsdarstellung (bzw. Fächerdarstellung) zu. (Brouwer hat in [3] das Wort "limitierbar" verwendet; diesen

Terminus wollen wir jedoch bei "Limitierungsverfahren" verwenden.) Genügt SR (bzw. FR) den obigen Forderungen (2) und (3), so sagen wir, R sei spreizbar (bzw. fächerbar).

Es gilt der fundamentale *Stetigkeitssatz*:

(4) *Jede volle Abbildung eines katalogisierten kompakten metrischen Raumes in einen ebensolchen Raum ist gleichmäßig stetig.* ([10], S. 67; [13], S. 145–146; [14], S. 17.)

3. Katalogisierung zweiter Art

Für unkompakte, unlokalkompakte Räume (z.B. der unendlichdimensionale separable intuitionistische Hilbert-Raum, s. [15], [16]) kann man mühelos den Katalogisierbarkeitsbegriff erweitern.

Eine Folge von mathematischen Objekten wird eine *katalogisierte Folge zweiter Art* oder ein (*den Raum erzeugender*) *Katalog zweiter Art* $K : c_1, c_2, \dots$ genannt, wenn zu je zwei Elementen c_r und c_s ein Abstand $\rho(c_r, c_s) = \rho(c_s, c_r) \geq 0$ definiert wird der folgenden Bedingungen genügt:

1. Es ist stets $\rho(c_r, c_s) = 0$ wenn $c_r = c_s$.

2. $\rho(c_r, c_s) \leq \rho(c_r, c_t) + \rho(c_s, c_t)$.

3. Es gibt eine natürliche Zahl m , so daß wenn $\{c_{r_1}, \dots, c_{r_n}\}$ eine endliche Teilspezies von K ist, es ein solches Element c_s von K gibt, daß

$$\rho(c_s, c_{r_i}) > 4^{-m} \text{ für jedes } i = 1, \dots, n.$$

Für jedes c_r , zu jedem n , kann man der Reihe nach für die Elemente c_1, c_2, \dots von K , aus den zwei Aussagen

$$(A) \quad \rho(c_i, c_r) > 2 \cdot 4^{-n}$$

und

$$(B) \quad \rho(c_i, c_r) < 3 \cdot 4^{-n} \quad (i = 1, 2, \dots \dots)$$

genau eine als gültig erkannte wählen. Ein Element c_i wird gewählt oder unwählbar erklärt je nachdem für c_i (B) oder (A) gewählt wird. In dieser Weise bestimmt man eine abtrennbare Teilspezies $\phi_n(c_r)$ von K , derart daß jedes c_s für welche

$$\rho(c_r, c_s) \leq 2 \cdot 4^{-n}$$

gilt $\phi_n(c_r)$ liegt, und jedes c_i für welches

$$\rho(c_r, c_i) \geq 3 \cdot 4^{-n}$$

gilt außerhalb von $\phi_n(c_r)$ liegt. Für jedes n ist die Vereinigung von $\phi_n(c_1), \phi_n(c_2), \dots$ mit K identisch, denn c_r liegt in jedem

$\phi_n(c_r)$ ($n = 1, 2, \dots$). Die letzte von K zu erfüllende Bedingung ist:

4. Jedes $\phi_n(c_r)$ ist abzählbar unendlich. Genügt der Katalog K überdies der Bedingung

5. Wenn $c_r \neq c_s$, so kann eine solche natürliche Zahl $f(r, s)$ bestimmt werden, so daß

$$\rho(c_r, c_s) > 2^{-f(r, s)}.$$

so heißt er *getrennt zusammengesetzt*.

Außerdem nennen wir einen Katalog K (sowie den von ihm erzeugten Raum) *beschränkt* wenn er der folgenden Bedingung genügt:

6. Es gibt eine solche reelle Zahl $C \geq 0$, daß für je zwei c_r, c_s

$$\rho(c_r, c_s) \leq C.$$

Es sei ein Katalog K zweiter Art gegeben. Limeselemente, Punktkerne, und den von K erzeugten katalogisierten (positiv-unkompakten) metrischen Raum $R(K)$ definieren wir in ähnlicher Weise als für einen Katalog erster Art. Wir konstruieren eine bekleidete Gesamtspreizungsrichtung $GSR(K)$ die den Raum $R(K)$ darstellt. Zu diesem Zweck verfahren wir als folgt:

1. Der Knopf (r) erster Ordnung wird mit c_r bekleidet.

2. Ist dem Knopf p n -ter Ordnung ($n \geq 1$) der bekleidete Knopf $(b'_p b''_p b'''_p \dots b_p^{(n)})$ zugeordnet so wird die Nächstfolgerreihe Q_p von p mit $\phi_n(b_p^{(n)})$ bekleidet.

(1) Jeder Pfeil $B : b'_B b''_B \dots$ von $GSR(K)$ ist ein Limeselement von K , denn jedes $b_B^{(n)}$ ist von jedem $b_B^{(m)}$ ($m > n$) weniger als $(3 \cdot 4^{-n} + 3 \cdot 4^{-n-1} + \dots) = 4^{-n+1}$ entfernt.

(2) Jedes Limeselement $L : a_1, a_2, \dots$ von K fällt mit einem Pfeil von $GSR(K)$ zusammen.

Sei $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen, derart daß

$$\rho(a_{t_n}, a_t) < 4^{-n-2} \text{ für jedes } t > t_n.$$

Wird jedem a_{t_n} ein Element b_n von K zugeordnet, das $\leq 4^{-n} + 4^{-n-1}$ von a_{t_n} entfernt ist, so folgt aus

$$\rho(a_{t_n}, b_n) \leq 4^{-n} + 4^{-n-1}$$

$$\rho(a_{t_n}, a_{t_{n+1}}) < 4^{-n-2}$$

$$\rho(a_{t_{n+1}}, b_{n+1}) \leq 4^{-n-1} + 4^{-n-2}$$

daß

$$\rho(b_n, b_{n+1}) < 2 \cdot 4^{-n}$$

so daß b_{n+1} in $\phi_n(b_n)$ liegen muß, und damit bildet b_1, b_2, \dots einen Pfeil von $GSR(K)$, der, wegen

$$\rho(b_n, a_{t_n}) \leq 4^{-n} + 4^{-n-1}$$

mit L zusammenfällt.

Sind zwei Limeselemente $L : a_1, a_2, \dots$ und $L' : a'_1, a'_2, \dots$ weniger als 4^{-n-2} voneinander entfernt, so ist

$$\rho(a_{t_n}, a'_{t'_n}) < 3 \cdot 4^{-n-2},$$

so daß wir a_{t_n} und $a'_{t'_n}$ dasselbe b_n zuordnen können. Hieraus ergibt sich

(3) *Jeder natürlichen Zahl r kann man eine solche natürliche Zahl s zuordnen, daß zwei beliebige voneinander um weniger als 2^{-s} entfernte Punktkerne in $R(K)$ bzw. zwei Pfeile von $GSR(K)$ enthalten die dasselbe Knopfgefüge r -ter Ordnung haben.*

Umgekehrt haben zwei Punktkerne, die mit zwei ein gemeinschaftliches Knopfgefüge n -ter Ordnung besitzenden Pfeilen von $GSR(K)$ zusammenfallen, in $R(K)$ einen Abstand $\leq 2 \cdot 4^{-n+1}$, so daß

(4) *Jeder natürlichen Zahl p kann man eine solche natürliche Zahl q zuordnen daß zwei beliebige gemeinschaftliches Knopfgefüge q -ter Ordnung besitzende Pfeile von $GSR(K)$ zu zwei voneinander $< 2^{-p}$ entfernten Punktkerneln in $R(K)$ gehören.*

Durch Zusammensetzung von (1)–(4) erhalten wir

(5) *Jeder katalogisierte Raum zweiter Art ist spreizbar.*

Man kann sogar eine Gesamtspreizung zur Darstellung eines katalogisierten Raumes zweiter Art verwenden. In [16] (S. 10–11; 54–55) ist bewiesen daß der unendlich-dimensionale separable intuitionistische Hilbert-Raum eine Katalogisierung zweiter Art zuläßt.

(6) *Ein katalogisierter Raum zweiter Art ist unfächerbar.*

Es sei eine bekleidete Fächerrichtung F gegeben derart daß ein katalogisierter Raum $R(K)$ zweiter Art in bezug auf F fächerbar ist. Also bildet die bekleidete Fächerrichtung F einen Katalog der den Raum $R(K)$ erzeugt: $R(K) = R(F)$. Die Knöpfe n -ter Ordnung von F bilden eine endliche Teilspezies F_n von F , derart daß jeder Punktkernel von $R(F) = R(K)$ von F_n um weniger als 4^{-N} entfernt ist, wobei $N = N(n)$ eine von n abhängige und mit n nach unendlich wachsende natürliche Zahl ist. Ordnen wir

jedem Element P von F_n ein Element a_P von K zu, so daß $\rho(P, a_P) < 4^{-N}$, so ist die Spezies aller a_P eine endliche Teilspezies von K , derart daß jedes Element von $R(K)$ und damit auch jedes Element von K von ihr $< 4^{-N+1}$ entfernt ist, was, wenn n genügend groß gewählt wird, wegen der von K genügten Bedingung 3. unmöglich ist.

A sei eine volle Abbildung eines katalogisierten metrischen Raumes $R(K)$ zweiter Art in einen ebensolchen Raum $R'(K')$ d.h. eine Zuordnung eines Punktkerns von $R'(K')$ zu jedem Punktkern von $R(K)$. Eine solche volle Abbildung enthält die Zuordnung \bar{A} eines Pfeiles $\bar{A}(B)$ von $GS'R'(K')$ zu jedem Pfeil B von $GSR(K)$ in solcher Weise daß zusammenfallenden Pfeilen B, B' zusammenfallende Pfeile $\bar{A}(B), \bar{A}(B')$ zugeordnet werden. Bei festem B hat das Knopfgefüge q -ter Ordnung von $\bar{A}(B)$ bei einem Knopf (dessen Ordnung wir r nennen) von B bekannt zu werden.

(7) *Bei festem B in $GSR(K)$ gibt es zu jedem q eine natürliche Zahl $r = r(q, B)$, so daß jedem Pfeil B' , der ein Knopfgefüge q -ter Ordnung mit B gemeinsam hat, ein Pfeil $\bar{A}(B')$ zugeordnet wird, der ein Knopfgefüge r -ter Ordnung mit $\bar{A}(B)$ gemeinsam hat.*

Durch eine Verwendung von (4), (7) und (3) folgert man daß jeder natürlichen Zahl p eine natürliche Zahl s entspricht so daß wenn der Abstand zwischen dem B enthaltenden Punktkern P in $R(K)$ und einem beliebigen Punktkern Q in $R(K)$ weniger als 2^{-s} beträgt, der Abstand zwischen $A(P)$ und $A(Q)$ weniger als 2^{-p} ist. Somit ist der fundamentale *Stetigkeitssatz* bewiesen:

(8) *Jede volle Abbildung eines katalogisierten metrischen Raumes zweiter Art in einen ebensolchen Raum ist stetig auf seinem Definitionsbereich.*

Eine abgeschlossene Teilspezies R' eines katalogisierten Raumes $R(K)$ zweiter Art, die in bezug auf K von bekannter Stelle ist, braucht nicht einen erzeugenden Katalog erster oder zweiter Art zu besitzen. Wir verfahren um einen mit R' verwandten Katalog zu erhalten, ganz ähnlich wie in [11]. Jedem Element c_r von K geben wir entweder das Prädikat eines A_n -Elementes (in welchem Falle es Elemente von R' in einer Entfernung $\leq 4^{-n} + 2 \cdot 4^{-n-1}$ von c_r gibt), oder das Prädikat eines B_n -Elementes (in welchem Falle jedes Element von R' in einer Entfernung $\geq 4^{-n} + 4^{-n-1}$ von c_r gelegen ist), mit der Bedingung daß die beiden Prädikate sich gegenseitig ausschließen. Die A_n -Elemente bilden eine zählbare abtrennbare Teilspezies A_n von K . Jedem A_n -Element c_r

ordnen wir ein in der Entfernung $\leq 4^{-n} + 2 \cdot 4^{-n-1}$ gelegenes Element d_r von R' zu. Die Spezies aller den A_n -Elementen entsprechenden Elemente d_r von R' wird mit A'_n bezeichnet. Die Vereinigung K' aller A'_n ist zählbar und bildet einen den Raum R' erzeugenden Katalog $K' : d_{r_1}, d_{r_2}, \dots \dots (r_1, r_2, \dots \dots$ bilden eine abtrennbare Teilspezies der natürlichen Zahlen), denn jeder Punktkern von K' fällt mit einem in R' enthaltenen Punktkern von K' zusammen, und umgekehrt fällt jeder in R' enthaltene Punktkern von K mit einem Punktkern von K' zusammen. Also können wir $R' = R'(K')$ schreiben.

Wir stellen eine allgemeine Definition der Katalogisierung auf, von der Katalogisierungen erster und zweiter Arten als Sonderfälle erscheinen. Eine abtrennbare zählbare Teilfolge $I : r_1, r_2, \dots$ der natürlichen Zahlen bestimmt eine *katalogisierte Folge* oder einen *zählbaren Katalog* $K' = K'_I : d_{r_1}, d_{r_2}, \dots \dots$ wenn zu je zwei Elementen ein nicht-negativer Abstand definiert wird, so daß der Abstand zwischen gleichen Elementen Null ist und die Dreiecksungleichung gilt.

Für jedes d_s , zu jedem n , können wir die Spezies $\phi'_n(d_s)$ bestimmen ganz ähnlich wie bei einem Katalog zweiter Art. Eine *abtrennbare teilweise Bekleidung* der Gesamtspreizungsrichtung die den katalogisierten Raum $R'(K')$ darstellt erreichen wir wie folgt:

1. Aus den Knöpfen erster Ordnung werden die Knöpfe $(r_1), (r_2), \dots \dots (r_1, r_2, \dots$ in I) mit $K'_I : d_{r_1}, d_{r_2}, \dots$ bekleidet.

2. Dem Knopf p -ter Ordnung ($n \geq 1$) sei der bekleidete Knopf $b'_p b''_p \dots b_p^{(n)}$ zugeordnet. d_{s_1}, d_{s_2}, \dots sei die natürliche (d.h. mit der Zählung von K' übereinstimmende) Zählung der zählbaren Spezies $\phi'_n(b_p^{(n)})$. Aus den Knöpfen in Q_p werden diejenigen deren letzte Knopfglieder s_1, s_2, \dots sind, mit $\phi'_n(b_p^{(p)})$ bekleidet.

Diese abtrennbar teilweise bekleidete Gesamtspreizungsrichtung bezeichnen wir mit $ATBGSR'(K')$. Offensichtlich ist der Nächstvorgänger (und damit alle Vorgänger) jedes bekleideten Knopfes in $ATBGSR'(K')$ auch bekleidet. Andererseits besitzt jeder bekleidete Knopf in $ATBGSR'(K')$ mindestens einen bekleideten Nächstfolger, so daß es durch diesen Knopf gehende Pfeile gibt. Ganz ähnlich wie im Falle der Katalogisierung zweiter Art können wir die Aussagen (1)–(4) beweisen, und wir wollen in der Folge diese Aussagen für eine allgemeine Katalogisierung auch mit 3. (1)–(4) bezeichnen. (1)–(4) fassen wir folgenderweise zusammen:

(5') *Jeder katalogisierte Raum ist abtrennbar teilweise spreizbar (oder kurz spreizbar).*

Von der Gültigkeit von (6) im Falle allgemeinerer Katalogisierung kann nicht die Rede sein. (7) gilt jedoch wenn es überhaupt einen Pfeil in $ATBGSR'(K')$ gibt. Aus (1)–(4) und (7) ergibt sich der fundamentale Stetigkeitssatz:

(8') *Jede volle Abbildung eines katalogisierten metrischen Raumes in einen ebensolchen Raum ist stetig auf seinem Definitionsbereich.*

Insbesondere gilt (8') für abgeschlossene Linear Mannigfaltigkeiten bekannter Stelle des unendlich-dimensionalen separablen intuitionistischen Hilbert-Raumes (s. [16], Kap. 2).

4. Katalogisierte Räume mit Abstandsbeschränkungen

Auf einer Spezies S ist eine *Abstandsbeschränkung* erklärt wenn zu je zwei Elementen a, b von S ein Abstandsbeschränkungsgebiet d.h. eine Spezies $\Omega(a, b) = \Omega(b, a)$ natürlicher Zahlen (die leer sein kann) definiert wird die folgenden Bedingungen genügt:

1. Mit jeder natürlichen Zahl enthält $\Omega(a, b)$ auch jede kleinere.
2. Ist $a = b$, so ist $\Omega(a, b)$ die Spezies aller natürlichen Zahlen.
3. Für jedes n ($n \geq 1$) gilt: Entweder n liegt in $\Omega(a, b)$, oder $n+1$ kann nicht in $\Omega(a, b)$ liegen (in welchem Falle $\Omega(a, b)$ *beschränkt* heißt und $n+1$ eine *Schranke* von $\Omega(a, b)$ heißt).
4. Für jedes $p \geq 0$ gilt: Ist $m > 1$ in $\Omega(a_1, a_2)$, $m+1$ in $\Omega(a_2, a_3), \dots, m+p$ in $\Omega(a_{p+1}, a_{p+2})$, so ist $m-1$ in $\Omega(a_1, a_{p+2})$. (Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung.)

Jede natürliche Zahl in $\Omega(a, b)$ heißt ein *Abstandsbeschränkungsbestimmer* für a und b .

Ist $\Omega(a, b)$ beschränkt, so sagen wir, a sei von b *entfernt*. Ist a von b entfernt so ist jedes c entweder von a oder von b entfernt, denn ist m eine Schranke von $\Omega(a, b)$, so gilt es daß, entweder $m+1$ in $\Omega(a, c)$ (bzw. $\Omega(b, c)$) liegt, oder $m+2$ eine Schranke von $\Omega(a, c)$ (bzw. $\Omega(b, c)$) ist. Liegt $m+1$ in $\Omega(a, c)$ sowie in $\Omega(b, c)$, so muß m in $\Omega(a, b)$ liegen. Dies ist aber unmöglich, da m eine Schranke von $\Omega(a, b)$ ist. Also ist $m+2$ eine Schranke entweder von $\Omega(a, c)$ oder von $\Omega(b, c)$, so daß c entweder von a oder von b entfernt ist.

Z.B. erhält man eine Abstandsbeschränkung auf einem metrischen Raum durch die Vorschrift: m sei in $\Omega(a, b)$, wenn

$\rho(a, b) < 2^{-m}$; ist $\rho(a, b) \geq 2^{-1}$, so sei $\Omega(a, b)$ leer.

Eine unbegrenzte Folge a_1, a_2, \dots von Elementen von S heißt Ω -konvergent (und damit ein Ω -Limeselement von S), wenn zu jedem n , eine natürliche Zahl $k(n)$ bestimmt werden kann, derart daß n in $\Omega(a_{k(n)}, a_r)$ für jedes $r > k(n)$ ist. Ähnlicherweise definiert man das Zusammenfallen zweier Ω -Limeselemente von S , und die Ω -Punktkerne von S . Die Spezies der Ω -Punktkerne von S wird mit $R^{(\Omega)}(S)$ bezeichnet. (Ist Ω einmal festgelegt, so schreiben wir auch kurz "Limeselement", "Punkt kern", und $R(S)$.)

Sei $K : d_{r_1}, d_{r_2}, \dots$ ein zählbarer Katalog auf dem eine Abstandsbeschränkung Ω definiert ist. Seien d_s in K und eine natürliche Zahl n gegeben. Für jedes d_t gilt entweder

$$(A) \quad n-1 \text{ ist in } \Omega(d_s, d_t),$$

oder

$$(B) \quad n \text{ kann nicht in } \Omega(d_s, d_t) \text{ liegen.}$$

Für jedes d_t kann man aus den wie gültig erkannten von den zwei Aussagen (A), (B) genau eine wählen. Die Spezies aller Elemente d_t für die (A) gewählt wird bezeichnen wir mit $\phi_n(d_s)$; sie ist eine solche abtrennbare zählbare Teilspezies von K , daß jedes d_t für das n in $\Omega(d_s, d_t)$ ist, in $\phi_n(d_s)$ liegt, und jedes d_u für das $n-1$ eine Schranke von $\Omega(d_s, d_u)$ ist, außerhalb von $\phi_n(d_s)$ liegt.

Es sei $R = R(K) = R^{(\Omega)}(K)$ der durch K erzeugte katalogisierte Raum. Die Abstandsbeschränkung Ω kann man folgenderweise auf den ganzen Raum $R(K)$ erweitern. Es seien

$$L_1 : a_1, a_2, \dots; \quad L_2 : b_1, b_2, \dots$$

zwei Limeselemente von K . Gibt es ein r so daß für jedes $s \geq r$, n zu $\Omega(a_s, b_s)$ gehört (bzw. $\Omega(a_s, b_s)$ leer ist), so sagen wir, n gehöre zu $\Omega(L_1, L_2)$ (bzw. $\Omega(L_1, L_2)$ sei leer). Es ist klar, daß die Erweiterung von Ω auf ganz R den Bedingungen 1., 2., und 4. genügt. 3. gilt jedoch in der schwächeren Form: 3'. Für jedes n ($n \geq 1$) gilt: Entweder n liegt in $\Omega(L_1, L_2)$, oder $n+3$ kann nicht in $\Omega(L_1, L_2)$ liegen. Wir können nämlich ein k bestimmen derart daß $n+5$ in jedem $\Omega(a_{k+m}, a_k)$, sowie in jedem $\Omega(b_{k+m}, b_k)$ (für $m \geq 0$) liegt. Entweder $n+1$ liegt in $\Omega(a_k, b_k)$, oder $n+2$ kann nicht in $\Omega(a_k, b_k)$ liegen. Im ersten Falle, liegt n in $\Omega(a_{k+m}, b_{k+m})$ für jedes $m \geq 0$, so daß n in $\Omega(L_1, L_2)$ liegt. Im zweiten Falle kann $n+3$ in keinem $\Omega(a_{k+m}, b_{k+m})$ liegen, denn sonst wäre $n+2$ in $\Omega(a_k, b_k)$.

Eine abtrennbar teilweise Bekleidung der Gesamtspeziesrichtung die den Raum $R(K)$ darstellt bauen wir ganz ähnlich

wie im Falle eines metrischen Katalogs auf. Es gelten die folgenden Aussagen:

(1) Jeder Pfeil $B : b'_B, b''_B, \dots$ von $ATBGSR^{(\Omega)}(K)$ ist ein Limeselement von K , denn $n-1$ ist in $\Omega(b_B^{(n)}, b_B^{(n+1)})$, n ist in

$$\Omega(b_B^{(n+1)}, b_B^{(n+2)}), \dots \dots, n+m-2$$

ist in $\Omega(b_B^{(n+m-1)}, b_B^{(n+m)})$, so daß $n-2$ in jedem $\Omega(b_B^{(n)}, b_B^{(n+m)})$ ($m > 0$) liegt.

(2) Jedes Limeselement $L : a_1, a_2, \dots$ von K fällt mit einem Pfeil von $ATBGSR(K)$ zusammen.

$t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ sei eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen, derart daß $n+5$ in jedem $\Omega(a_{t_n}, a_t)$ (für $t > t_n$) liegt. Wird jedem a_{t_n} ein Element b_n von K zugeordnet, so daß $n+2$ in $\Omega(a_{t_n}, b_n)$ liegt, so liegt $n+2$ in $\Omega(a_{t_n}, b_n)$, $n+5$ in $\Omega(a_{t_n}, a_{t_{n+1}})$, und $n+3$ in $\Omega(a_{t_{n+1}}, b_{n+1})$, so daß $n+1, n+2, n+3$ bzw. in $\Omega(b_n, a_{t_n}), \Omega(a_{t_n}, a_{t_{n+1}}), \Omega(a_{t_{n+1}}, b_{n+1})$ liegen, so daß sich aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung ergibt daß n in $\Omega(b_n, b_{n+1})$ liegt, und damit liegt b_{n+1} in $\phi_n(b_n)$. Also bildet b_1, b_2, \dots einen Pfeil von $ATBGSR(K)$, der mit L zusammenfällt da $n+2$ in $\Omega(a_{t_n}, b_n)$ ist.

Nun seien zwei Limeselemente $L : a_1, a_2, \dots$, und $L' : a'_1, a'_2, \dots$ gegeben derart daß $n+4$ in $\Omega(L, L')$ liegt. Also ist $n+5$ (und damit auch $n+3$) in $\Omega(a_{t_n}, L)$, $n+4$ in $\Omega(L, L')$, und $n+5$ in $\Omega(L', a'_{t_n})$, so daß $n+2$ in $\Omega(a_{t_n}, a'_{t_n})$ liegt so daß wir a_{t_n} und a'_{t_n} dasselbe b_n zuordnen können. Hieraus erhalten wir

(3) Jeder natürlichen Zahl p_3 kann man eine solche natürliche Zahl p_4 zuordnen, daß zwei beliebige Punktkerne in $R(K)$ für die p_4 ein Abstandsbeschränkungsbestimmer ist, bzw. zwei Pfeile von $ATBGSR(K)$ enthalten die dasselbe Knopfgefüge p_3 -ter Ordnung haben.

Umgekehrt ist $n-3$ ein Abstandsbeschränkungsbestimmer für je zwei Punktkerne von $R(K)$ die mit zwei dasselbe Knopfgefüge n -ter Ordnung besitzenden Pfeilen von $ATBGSR(K)$ zusammenfallen, so daß

(4) Jeder natürlichen Zahl p_1 kann man eine solche natürliche Zahl p_2 zuordnen daß zwei beliebige dasselbe Knopfgefüge p_2 -ter Ordnung besitzende Pfeile von $ATBGSR(K)$ zu zwei Punktkernen von $R(K)$ gehören für die p_1 ein Abstandsbeschränkungsbestimmer ist.

Wir fassen (1)–(4) zusammen:

(5) *Jeder katalogisierte Raum (mit einer Abstandsbeschränkung) ist (abtrennbar teilweise) spreizbar.*

Sei A eine volle Abbildung eines katalogisierten Raumes $R = R^{(\Omega)}(K)$ mit einer Abstandsbeschränkung Ω in einen eben solchen Raum $R' = R'^{(\Omega')}(K')$. Eine solche Abbildung A heißt *stetig* im Punktkern P von R wenn zu jedem k eine natürliche Zahl $N = N(k; P)$ angegeben werden kann, derart daß wenn N ein Abstandsbeschränkungsbestimmer für P und einen beliebigen Punktkern Q in $R(K)$ ist, so ist k ein Abstandsbeschränkungsbestimmer für $A(P)$ und $A(Q)$.

Unschwer beweist man das Analogon von 3. (7) und dann folgert man daß für jeden Punktkern P in $R(K)$ jeder natürlichen Zahl p_1 eine solche natürliche Zahl $p_4 = p_4(p_1; P)$ entspricht, daß wenn p_4 in $\Omega(P, Q)$ liegt, so liegt p_1 in $\Omega'(A(P), A(Q))$. Somit ist der fundamentale Stetigkeitssatz bewiesen.

(6) *Jede volle Abbildung eines katalogisierten Raumes mit einer Abstandsbeschränkung ist stetig auf seinem Definitionsbereich.*

5. Die Eindeutigkeit der Abstandsbeschränkung eines Raumes

Sei $R = R^{(\Omega)}(K)$ ein in bezug auf die Abstandsbeschränkung Ω katalogisierter Raum, und sei $\Sigma(P, Q)$ eine andere auf ganz R definierte Abstandsbeschränkung. Sei P_1, P_2, \dots eine Ω -konvergente unendliche Folge von Punktkernen in R deren Ω -Limes P ist, d.h. zu jedem k kann man eine natürliche Zahl $N(k)$ bestimmen, derart daß k in $\Omega(P_r, P)$ für jedes $r > N(k)$ liegt. Sei B ein mit P zusammenfallender Pfeil in der R darstellenden abtrennbar teilweise bekleideten Gesamtspreizungsrichtung $ATBGSR^{(\Omega)}(K)$. Sei B' ein mit einem Punktkern P' in R zusammenfallender Pfeil von $ATBGSR^{(\Omega)}(K)$. Für jedes P' und jede natürliche Zahl n gilt entweder

(I) n liegt in $\Sigma(P, P')$, oder

(II) $n+3$ kann nicht in $\Sigma(P, P')$ liegen.

Für jedes P' kann man aus den wie gültig erkannten von den zwei Aussagen (I) und (II) genau eine wählen. Wir definieren eine volle Abbildung g_n von $ATBGSR$ in die natürlichen Zahlen:

$g_n(B') = n$ wenn (I) gewählt wird,

$g_n(B') = 1$ wenn (II) gewählt wird.

Bei festem B hat die natürliche Zahl $g_n(B) = n$ bei einem Knopf (dessen Ordnung wir $l = l(n)$ nennen) von B bekannt zu werden. Hat B' also einen Knopf l -ter Ordnung gemein mit B , so ist $g_n(B') = n$ (denn $g_n(B) = n$), und somit liegt n in $\Sigma(P, P')$.

Aus dem Beweise von 4.(3) geht hervor daß:

4.(3'). Jeder natürlichen Zahl p_3 kann man eine solche natürliche Zahl p_4 zuordnen, daß wenn p_4 in $\Omega(P, P')$ ist, der Punktkern P' einen Pfeil B' von $ATBGSR^{(\Omega)}(K)$ enthält der das Knopfgefüge p_3 -ter Ordnung mit B gemein hat.

Hieraus ergibt sich daß sich eine natürliche Zahl

$$k = k(n) = k_{\Sigma}(n)$$

bestimmen läßt, so daß wenn k in $\Omega(P, P')$ liegt, der Punktkern P' einen Pfeil B' enthält, der das Knopfgefüge l -ter Ordnung mit B gemein hat. Somit haben wir bewiesen:

(1) *Jedem n kann man eine solche natürliche Zahl $k = k_{\Sigma}(n)$ zuordnen, daß wenn k in $\Omega(P, P')$ liegt so liegt n in $\Sigma(P, P')$.*

Es sei eine natürliche Zahl n gegeben, und es sei $k_{\Sigma}(n)$ die ihr nach (1) zugeordnete natürliche Zahl. Wegen der Ω -Konvergenz von P_1, P_2, \dots gibt es eine solche natürliche Zahl

$$N(k) = N(k_{\Sigma}(n)) = M(n),$$

daß wenn $m > M(n)$ ist, so ist $k_{\Sigma}(n)$ in $\Omega(P_m, P)$, so daß n in $\Sigma(P_m, P)$ liegt, womit die Σ -Konvergenz von P_1, P_2, \dots erwiesen worden ist. Jetzt ist bewiesen:

(2) *Sei $R = R^{(\Omega)}(K_{\Omega})$ ein katalogisierter Raum mit einer Abstandsbeschränkung Ω und sei Σ eine andere auf ganz R erklärte Abstandsbeschränkung (in bezug auf die der Raum R nicht katalogisiert zu sein braucht), so ist jede Ω -konvergente Folge auch Σ -konvergent.*

(2a) *Ist insbesondere R auch katalogisiert in bezug auf Σ d.h. $R = R^{(\Omega)}(K_{\Omega}) = R^{(\Sigma)}(K_{\Sigma})$, so sind Ω -Konvergenz und Σ -Konvergenz äquivalente Begriffe.*

Außerdem sind alle vollen Funktionen des Raumes R sowohl Ω - als Σ -stetig, so daß Ω -Stetigkeit und Σ -Stetigkeit äquivalent sind. Somit heißen Ω und Σ *topologisch äquivalente Abstandsbeschränkungen*.

Der Satz (2) hat für die Funktionalanalysis wichtige Folgerungen. So, z.B. im Hilbert-Raum l^2 der aus allen Folgen (x_1, x_2, \dots) komplexer Zahlen mit konvergentem $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots$

besteht, kann man zwei verschiedene Abstandsbeschränkungen definieren:

(I) n ist in $\Omega(f, 0)$ wenn $\|f\| < 2^{-n}$ ist; $\Omega(f, g) = \Omega(f-g, 0)$;

(II) n ist in $\Sigma(f, 0)$ (wobei $f = (x_1, x_2, \dots)$) wenn $|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 < 2^{-n}$ ist; $\Sigma(f, g) = \Sigma(f-g, 0)$.

(I) entspricht der starken und (II) der schwachen Konvergenz. Bekanntlich ist l^2 katalogisiert in bezug auf Ω ([16], S. 10–12; 54–55). Wäre l^2 katalogisiert auch in bezug auf Σ , so wäre jede schwach konvergente Folge auch stark konvergent. Hieraus ergibt sich

(3) *Es ist kontradiktorisch daß l^2 schwach vollständig ist.* ([16], S. 15–16; 59–60).

6. Indexbereiche

Zur Verallgemeinerung des Katalogisierbarkeitsbegriffes verwenden wir allgemeinere Indexbereiche an Stelle von den zählbaren Teilspezies der Folge natürlicher Zahlen.

In der Gesamtspreizungsrichtung GSR definieren wir folgendermaßen eine Halbordnung.

$$p = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ und } p' = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

seien zwei Knöpfe n -ter Ordnung. Gilt

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{r-1} = b_{r-1}, a_r < b_r \quad (r \leq n)$$

so heißt $p < p'$ (p liegt links von p'). Offenbar, wenn $p < p'$, so liegt jeder Nachfolger von p links von jedem Nachfolger von p' . Ein Pfeil $B : p_1, p_2, \dots$ heißt links von $B' : p'_1, p'_2, \dots$ gelegen ($B < B'$) wenn es ein n gibt so daß $p_n < p'_n$. Wenn für jedes n , $p_n \leq p'_n$, so sagen wir $B \leq B'$. Diese Halbordnung läßt sich einfach auf abtrennbar teilweise bekleidete Gesamtspreizungen übertragen.

Sei D eine *diskrete* Spezies (d.h. eine Spezies von der je zwei Elemente entweder als gleich oder als verschieden erkannt werden können). Sei $A = ATBGSR$ eine *ordnungstreu abtrennbar teilweise bekleidete Gesamtspreizungsrichtung* in der jeder zu bekleidende Knopf der Gesamtspreizungsrichtung GSR mit Elementen von D bekleidet wird und zwar so daß wenn zwei Knöpfe p, p' n -ter Ordnung ($p \leq p'$) mit gleichen endlichen Folgen von Elementen von D bekleidet werden, so wird jedes p'' n -ter Ordnung, $p \leq p'' \leq p'$, mit derselben Folge von Elementen von

D bekleidet. Die Spezies aller bekleideten Pfeile von A nennen wir einen *Indexbereich* I d.h. $I = w(A)$.

I sei ein Indexbereich, und i, j seien zwei Indizes (d.h. Elemente von I). Mit $\delta(i, j) = \delta_I(i, j)$ bezeichnen wir die Spezies aller natürlichen Zahlen m so daß i, j gleich bekleidete Knopfgefüge m -ter Ordnung besitzen. Offensichtlich ist δ_I eine Abstandsbeschränkung auf I . I ist in bezug auf δ_I *separabel* d.h. es gibt eine zählbare Teilspezies I_r von I (die sogar so gewählt werden kann, daß zwei verschiedene Elemente von I_r voneinander entfernt sind), so daß jedes Element von I mit einem δ -Limeselement von I_r zusammenfällt. Eine solche Spezies ist z.B. die Spezies I_r aller Pfeile i_r von A die durch Bekleidung von solchen Pfeilen B_r von GSR entstehen, in denen es einen Knopf gibt so daß die letzten Knopfglieder aller Nachfolger dieses Knopfes alle gleich sind.

7. Verallgemeinerte katalogisierte Räume

Ein Indexbereich I wird ein *katalogisierter Indexbereich* oder ein *verallgemeinerter Katalog* K_I (dessen Elemente wir mit c_i bezeichnen, wobei i in I ist) wenn auf ihm eine Abstandsbeschränkung Ω erklärt wird.

Es sei K_{I_r} die Spezies aller c_i mit i in I_r (wobei I_r die im vorigen Paragraphen aufgebaute, mit I verwandte Spezies ist). Jeder Punktkern von K_{I_r} ist in einem Punktkern von K_I enthalten. Umgekehrt fällt jedes Limeselement von K_I mit einem Limeselement von K_{I_r} zusammen. Sei c_i ein festes Element von K_I und sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes c_j wird aus den als gültig erkannten von den zwei Aussagen (A) und (B) genau eine gewählt:

- (A) n ist in $\Omega(c_i, c_j)$,
- (B) $n+1$ kann nicht in $\Omega(c_i, c_j)$ liegen.

Wir definieren eine volle Abbildung g von I in die natürlichen Zahlen:

$$g(j) = n \text{ wenn (A) gewählt wird,}$$

$$g(j) = 1 \text{ wenn (B) gewählt wird.}$$

Die natürliche Zahl $g(i)$ hat bei einem Knopf in der Richtung A bekannt zu werden. Also kann man ein i_r in I_r finden so daß n in $\Omega(c_i, c_{i_r})$ liegt. Hieraus ergibt sich daß jedes Limeselement von K_I mit einem Limeselement von K_{I_r} zusammenfällt und daß jeder Punktkern von K_I einen Punktkern von K_{I_r} enthält. Also können wir den zählbaren Katalog K_{I_r} einen den Raum $R^{(\Omega)}(K_I)$ erzeugen-

den Katalog nennen und, wenn wir von Isomorphismen absehen, $R^{(\Omega)}(K_I) = R^{(\Omega)}(K_{I'})$ schreiben. Somit haben wir bewiesen

(1) *Jeder katalogisierte Raum mit einer Abstandsbeschränkung ist separabel d.h. er kann durch einen zählbaren Katalog erzeugt werden.*

Dieses Ergebnis ist implizite in [16], Kap. 4 enthalten. Eine ausdrückliche Formulierung (falls I das Einheitskontinuum und K_I ein metrischer Katalog ist) verdanke ich Herrn Dr. C. G. Gibson.

8. Beispiele

In der Funktionalanalysis entstehen wichtige Räume in denen die natürlichen Normen unvereinbar mit der Linearität sind. In solchen Räumen kann man das Benachbartsein leicht durch Abstandsbeschränkungen mit der Eigenschaft

$$\Omega(x, y) = \Omega(x - y, 0) = \Omega(y - x, 0)$$

erklären.

(A) Auf der Spezies K aller von 1 beschränkten Folgen komplexer Zahlen (d.h. in der Einheitskugel des Raumes l^∞ aller beschränkten Folgen komplexer Zahlen) erklärt man folgenderweise eine Abstandsbeschränkung Ω . Sind $f = (x_1, x_2, \dots)$; $g = (y_1, y_2, \dots)$ zwei beschränkte Folgen ($|x_i| \leq 1$; $|y_i| \leq 1$ für alle i) so sagen wir, n sei in $\Omega(f, g)$, wenn $\text{Sup}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| < 2^{-n}$. Diese Abstandsbeschränkung läßt sich mittels der Linearität leicht auf den ganzen Raum erweitern. Die abzählbar unendliche Spezies aller von 1 beschränkten Folgen rationaler komplexer Zahlen mit nur endlichvielen von Null verschiedenen Elementen bildet einen die Spezies K erzeugenden Katalog.

(B) Im zweiten Raum H^I von [16], Kap. 4, S. 41–42; 83–84, können wir eine Abstandsbeschränkung Ω erklären durch die Vorschrift: ist $f - g <_n 2^{-n}$, so sei n in $\Omega(f, g)$. H^I ist ein vollständiger katalogisierter Raum in bezug auf diese Abstandsbeschränkung, obgleich er keine überall definierte Norm zuläßt.

(C) Der Raum aller Folgen komplexer Zahlen $f = (x_1, x_2, \dots)$ mit beschränkten $|x_1|^p + |x_2|^p + \dots$ ist ein unmetrisierbarer linearer Raum auf dessen Einheitskugel folgenderweise eine Abstandsbeschränkung Ω erklärt werden kann. Sind

$$f = (x_1, x_2, \dots); g = (y_1, y_2, \dots) \quad \left(\sum_i |x_i|^p \leq 1; \sum_i |y_i|^p \leq 1 \right)$$

zwei Vektoren derart daß

$$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p < 2^{-pn}, \text{ so sagen wir, } n \text{ sei in } \Omega(f, g).$$

Auch die Ergebnisse des vorliegenden Aufsatzes haben für die Funktionalanalysis wichtige Folgen. Eine Folgerung aus 7.(1) wird nun formuliert. Sei R ein linearer Raum auf dem eine Abstandsbeschränkung Ω erklärt ist. Sei I ein Indexbereich und sei gegeben eine Spezies F_I von Vektoren f_i (i in I) derart daß die Spezies endlicher rationaler Linearkombinationen von f_i dicht in R liegt in bezug auf Ω . Es ergibt sich aus 7.(1) daß es eine zählbare Teilspezies G von F_I gibt die in bezug auf Ω dicht in F_I liegt. Somit ist F_I separabel in bezug auf Ω . Somit ist auch der Raum R selbst separabel in bezug auf Ω , da die Spezies aller endlichen rationalen Linearkombinationen von Vektoren in G dicht in R liegt. Somit ist bewiesen worden:

(1) *Ist die Spezies aller endlichen rationalen Linearkombinationen von Vektoren f_i (i in einem Indexbereich I) in einer Spezies F_I dicht im linearen Raum R in bezug auf die auf R erklärte Abstandsbeschränkung Ω , so ist R in bezug auf Ω separabel.*

(D) Wir betrachten nun den Raum L^∞ aller wesentlich beschränkten fast überall auf dem Einheitskontinuum erklärten meßbaren Funktionen. Bekanntlich ist dieser Raum in der klassischen Mathematik inseparabel. Wir beweisen jedoch daß in der intuitionistischen Mathematik, dieser Raum ein separabler unmetrisierbarer linearer Raum ist auf dem eine Abstandsbeschränkung Ω erklärt ist.

Wir gebrauchen die Definition gegeben in [17], S. 29. Sei f eine fast überall beschränkte meßbare Funktion. Zu jedem k gibt es elementefremde meßbare Teilspezies D_1^k, \dots, D_m^k des Definitionsbereiches von f auf der $|f(x)|$ 2^{-k+1} -beschränkt ist (d.h. rationale obere und untere Schranken besitzt die voneinander weniger als 2^{-k+1} entfernt sind), und eine meßbare Spezies S_k vom Maße $> 1 - 2^{-k}$, so daß $|f(x)| < 2^{-k}$ für alle x in S_k die außerhalb von D_1^k, \dots, D_m^k liegen. Sei M_p^k ($1 \leq p \leq m$) eine rationale obere Schranke von $|f(x)|$ auf D_p^k derart daß $M_p^k - 2^{-k+1}$ eine rationale untere Schranke von $|f(x)|$ auf D_p^k ist, und sei $D_0^k =$ das Komplement der Vereinigung von D_1^k, \dots, D_m^k ; $M_0^k = 2^{-k}$. Wir setzen $l_p^k =$ das Maß der Vereinigung aller derartigen D_q^k für die $M_q^k > M_p^k + 2^{-k+1}$. Für jedes p ($0 \leq p \leq m$) können wir aus den wie gültig erkannten von den zwei Aussagen $l_p^k > 2^{-k-1}$ und $l_p^k < 2^{-k}$

genau eine wählen. Sei r die kleinste natürliche Zahl für die $l_r^k < 2^{-k}$ gewählt wird, und sei $M^k = \text{Sup}(M_0^k, \dots, M_r^k)$. Jede meßbare Teilspezies der Spezies aller x für die $|f(x)| > M^k$ ist hat ein Maß $< 2^{-k}$. Ist nun für ein n , $M^n < 2^{-n}$ so sagen wir, n sei in $\Omega(f, 0)$, und definieren weiter $\Omega(f, g) = \Omega(f-g, 0)$. Besitzt die Funktion f ein wesentliches Supremum M , so ist offenbar jedes $M^k \leq M$, und dann konvergiert die Folge M^1, \dots gegen M . Umgekehrt, wenn die Folge M^1, M^2, \dots gegen einen Grenzwert M konvergiert, so ist M das wesentliche Supremum von f .

Die Spezies aller endlichen rationalen Linearkombinationen der charakteristischen Funktionen der abgeschlossenen Teilintervalle des Einheitskontinuums bilden eine in L^∞ in bezug auf Ω dichte Linearmannigfaltigkeit, denn zu jedem D_p^k können wir eine in D_p^k enthaltene endliche Vereinigung C_p^k von elementfremden Teilintervallen des Einheitskontinuums angeben, so daß das Maß von $(D_p^k - C_p^k)$ kleiner als $2^{-k}/r$ ist. Bezeichnen wir die charakteristische Funktion der Spezies C_p^k mit c_p^k , so ist offenbar $k-1$ in $\Omega(f, \sum_{p=1}^r M_p^k c_p^k)$. Also ist nach (1) des vorliegenden Paragraphen der Raum L^∞ separabel in bezug auf Ω .

Wir beweisen zunächst daß es kontradiktorisch ist daß jede fast überall beschränkte meßbare Funktion ein wesentliches Supremum besitzt. Wir nehmen an daß jede fast überall beschränkte meßbare Funktion ein wesentliches Supremum besitzt. Jedem a im Einheitskontinuum ordnen wir eine fast überall beschränkte meßbare Funktion $f_a =$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0, a]$ zu. Besitzt jedes f_a ein wesentliches Supremum M_a , so ist $M_a = 1$ wenn a von Null entfernt ist, und $M_a = 0$ wenn $a = 0$ ist. Für jedes a ist entweder $M_a < \frac{1}{2}$ oder $M_a > \frac{1}{4}$. Ist $M_a > \frac{1}{4}$, so kann a nicht gleich Null sein, so daß $a \neq 0$. Ist jedoch $M_a < \frac{1}{2}$, so kann a nicht von Null entfernt sein, also ist $a = 0$. Hieraus ergibt sich das bekanntlich kontradiktorische Ergebnis, daß jede reelle Zahl a im Einheitskontinuum entweder $= 0$ oder $\neq 0$ ist.

(E) Wir formulieren nun eine allgemeine Definition eines linearen Banach-Raumes auf dem eine Abstandsbeschränkung definiert wird.

Eine zählbare Spezies I wird ein zählbarer *normierter rational-linearer Katalog* G wenn

1. auf G eine für je zwei Elemente von G erklärte kommutative und assoziative Addition $+$ erklärt wird;
2. für jede rationale komplexe Zahl a und jedes g in G das

a -fache ag von g erklärt wird, das wieder ein Element von G ist, so daß gilt: (i) $(a+b)g = ag+bg$, (ii) $a(g+h) = ag+ah$, (iii) $(ab)g = a(bg)$, (iv) $1 \cdot g = g$; und

3. jedem g in G eine rationale Zahl $\|g\| \geq 0$, die Norm von g zugeordnet wird mit den folgenden Eigenschaften: (i) aus $\|g\| = 0$ folgt $g = 0$, (ii) $\|ag\| = |a| \cdot \|g\|$ für jedes rationale komplexe a , (iii) $\|g+h\| \leq \|g\| + \|h\|$. Auf dem normierten rational-linearen Katalog G wird eine Normbeschränkung erklärt wenn auf ihm eine Abstandsbeschränkung $\Omega(f, g) = \Omega(f-g, 0) = N(f-g)$ erklärt wird die mit der Norm in G verträglich ist d.h. zu jedem k gibt es ein $m(k)$ das mit k nach Unendlich strebt, so daß aus $\|f\| < 2^{-m(k)}$ folgt daß k in $N(f)$ liegt. $N(f)$ heißt der Normbeschränkungsbereich von f . Die vollständige Hülle B von G in bezug auf die Normbeschränkung N heißt ein Brouwer-Banach-Raum.

Ähnlicherweise kann man Brouwer-Hilbert-Räume definieren. Im Aufbau der intuitionistischen Funktionalanalysis spielen der Begriff einer Abstandsbeschränkung und verwandte Begriffe eine äußerst wichtige Rolle.

9. Ein unkatalogisierbarer Raum

Wir geben nun ein einfaches Beispiel eines unkatalogisierbaren Raumes.

Eine volle Funktion f des reellen Linearkontinuums heißt *streng monoton* insbesondere *monoton wachsend* (bzw. *monoton abnehmend*) wenn aus $x \ll y$, $f(x) \ll f(y)$ (bzw. $f(x) \gg f(y)$) folgt. Sie heißt *schwach monoton* insbesondere *monoton nichtabnehmend* (bzw. *monoton nichtwachsend*) wenn aus $x \leq y$, $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$) folgt.

(1) Eine streng monotone volle Funktion f des Intervalls $[a, b]$ besitzt eine eindeutige Umkehrfunktion in dem Intervall $[f(a), f(b)]$ (bzw. $[f(b), f(a)]$).

Sei f monoton wachsend, und sei y irgendeine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ d.h. $f(a) \ll y \ll f(b)$. Wir geben eine konvergente Intervallschachtelung I', I'', I''', \dots an, die eine reelle Zahl x bestimmt, so daß $f(x) = y$. Wir bestimmen in dem Intervall $I = [a, b]$ die zwei Teilintervalle

$$I_1 = [c_1, d_1] = [a, a + \frac{3}{4}(b-a)],$$

$$I_2 = [c_2, d_2] = [a + \frac{1}{4}(b-a), b];$$

in jedem Intervall $I_i = [c_i, d_i]$ ($i = 1, 2$) die zwei Teilintervalle

$$I_{i1} = [c_{i1}, d_{i1}] = [c_i, c_i + \frac{3}{4}(d_i - c_i)],$$

$$I_{i2} = [c_{i2}, d_{i2}] = [c_i + \frac{1}{4}(d_i - c_i), d_i];$$

usw. Aus den wie gültig erkannten von den zwei Aussagen

$$(A') \quad f(d_1) \succ y, \quad \text{und}$$

$$(B') \quad f(c_2) \prec y,$$

(von denen mindestens eine gültig zu sein hat) wählen wir genau eine. Wählen wir (A') so setzen wir $I' = I_1$, sonst $I' = I_2$. Ist $I' = I_i$ gewählt worden, so wählen wir aus den wie gültig erkannten von den zwei Aussagen

$$(A'') \quad f(d_{i1}) \succ y,$$

$$(B'') \quad f(c_{i2}) \prec y,$$

genau eine und setzen $I'' = I_{i1}$ oder I_{i2} je nachdem (A'') oder (B'') gewählt wird. Die in dieser Weise bestimmte Folge von Intervallen I', I'', \dots ist offenbar eine konvergente Intervallschachtelung die eine eindeutig bestimmte reelle Zahl x enthält für die $f(x)$ offenbar gleich y ist. Wegen der Monotonie ist ein solches x eindeutig und also auch unabhängig von den Wahlen I', I'', \dots . Für ein beliebiges y in $[a, b]$ können wir ein x mit der Eigenschaft $f(x) = y$, durch die Stetigkeit der vollen Funktion f bestimmen. Somit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen. Man ersieht leicht daß eine ähnliche Behauptung nicht für alle schwach monotonen Funktionen gelten kann.

Zwei positiv-wertige monoton nichtabnehmende volle Funktionen f und g heißen *von der gleichen Größenordnung* (des Unendlichwerdens) wenn es rationale Zahlen $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ und eine reelle Zahl x_0 gibt, so daß $f(x) < C_1 g(x)$ und $g(x) < C_2 f(x)$ für $x \geq x_0$. Die Spezies der mit einer vorgegebenen monoton nichtabnehmenden Funktion f gleiche Größenordnung besitzenden monoton nichtabnehmenden Funktionen heißt ein *Größenordnungskern* und wird mit \bar{f} bezeichnet. Die Spezies von Größenordnungskernen wird mit G^+ bezeichnet. Der Größenordnungskern der eine konstante Funktion enthält heißt *Null* und wird mit 0 bezeichnet. Strebt $f(x)/g(x)$ gegen Null wenn x gegen Unendlich strebt so schreiben wir $\bar{f} \prec \bar{g}$. Bleibt $f(x)/g(x)$ beschränkt wenn x gegen Unendlich strebt so schreiben wir $\bar{f} \leq \bar{g}$; und $\bar{f} < \bar{g}$ bedeutet daß $\bar{f} \leq \bar{g}$, jedoch $\bar{f} \neq \bar{g}$. Es gilt

(2) Ist x_1, x_2, \dots irgendeine Folge von Elementen von G^+ die

alle $\succ 0$ sind, so gibt es stets ein $x \succ 0$ in G^+ so daß $x_n \succ x \succ 0$ für jedes n .

Da alle $x_n \succ 0$ sind, enthalten sie monoton wachsende Funktionen f_1, f_2, \dots . Schreiben wir $g_1 = f_1$, $g_2 = \inf(f_1, f_2)$, $g_3 = \inf(f_1, f_2, f_3), \dots$ (wobei $g_n = \inf(f_1, f_2, \dots, f_n)$ bedeutet daß $g_n(a) = \inf(f_1(a), \dots, f_n(a))$ für jedes a), so ist g_1, g_2, \dots eine monoton nichtzunehmende Folge von monoton wachsenden Funktionen. Wir bezeichnen die Umkehrfunktion von g_n mit h_n . h_1, h_2, \dots ist eine monoton nichtabnehmende Folge von monoton wachsenden Funktionen. Sei h eine volle monoton wachsende Funktion derart daß $h(1) = 2h_1(1)$, $h(2) = 2^2h_2(2), \dots \dots$, $h(n) = 2^n h_n(n), \dots$. Es ist offensichtlich $h \succ h_n$ für jedes n . Die Umkehrfunktion g von h ist monoton wachsend so daß $x = \bar{g} \succ 0$ gilt und überdies gilt $x = \bar{g} \preccurlyeq \bar{g}_n$ für jedes n , so daß $x \preccurlyeq \bar{f}_n = x_n$ für jedes n .

Wegen der Eigenschaft (2) unterscheidet sich die Spezies G^+ stark vom Linearkontinuum: Wir sagen, G^+ sei *nicht-archimedisch*.

Es sei G^+ katalogisierbar, d.h. es gebe einen zählbaren Katalog K und eine auf K erklärte Abstandsbeschränkung Ω , so daß $G^+ = R^{(\Omega)}(K)$. Es sei ferner die Abstandsbeschränkung Ω *verträglich* mit der Ordnung von G^+ d.h. die folgenden fünf Bedingungen seien erfüllt:

1. Wenn $x \succ y$ gilt, so sind x und y Ω -entfernt.
2. Sind x und y Ω -entfernt, so ist entweder $x \preccurlyeq y$ oder $x \succ y$.
3. Ist $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$, und liegt n in $\Omega(x, z)$, so liegt n in $\Omega(y, z)$.
4. Ist $x \preccurlyeq y$ und liegt n in $\Omega(x, y)$, so gibt es ein z , $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, so daß $n+1$ in $\Omega(x, z)$ liegt.
5. Zu jedem x gibt es ein y so daß $x \preccurlyeq y$ und 1 in $\Omega(x, y)$ liegt.

Es gibt also ein $x_1 \succ 0$ so daß 1 in $\Omega(x_1, 0)$ liegt. Weiter gibt es ein x_2 so daß $x_1 \succ x_2 \succ 0$ und 2 in $\Omega(x_2, 0)$ liegt; usw. In dieser Weise erhalten wir eine gegen 0 Ω -konvergierende Folge von Elementen x_1, x_2, \dots von G^+ derart daß $x_1 \succ x_2 \succ \dots$, und jedes $x_n \succ 0$ ist. Wegen (2) gibt es ein $x \succ 0$ so daß jedes $x_n \succ x \succ 0$. Da n in $\Omega(x_n, 0)$ liegt, liegt jedes n in $\Omega(x, 0)$. Dies ist jedoch mit der Verträglichkeitsbedingung 1. unvereinbar. Somit ist bewiesen worden daß

(3) *Es gibt keine mit der Ordnung von G^+ verträgliche Katalogisierung von G^+ .*

Man erhält jedoch eine mit der Ordnung von G^+ verträgliche

Hausdorffsche Topologie von G^+ wenn man Umgebungen eines Elementes x von G^+ erklärt als Spezies aller z derart daß $x' \leq z \leq x''$, wobei x' und x'' Elemente von G^+ sind, derart daß $x' \leq x \leq x''$. Wir sagen, G^+ sei ein *unkatalogisierbarer topologischer Raum*.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. A. Heyting aufrichtig danken für kritisches Durchsehen und wertvolle Aufmerkungen sowie für das Interesse das er für diese Arbeit gezeigt hat und das für mich eine große Aufmunterung bedeutete.

LITERATUR

L. E. J. BROUWER

[1] Over de grondslagen der wiskunde. Dissertation. Amsterdam, 1907.

L. E. J. BROUWER

[2] Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre. Verhandelingen Akad. Amsterdam 12 (No. 5), 3—43 (1918).

L. E. J. BROUWER

[3] Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen. Verhandelingen Akad. Amsterdam 12 (No. 7), 3—33 (1919).

L. E. J. BROUWER

[4] Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. Jber. DMV 33, 251—256 (1925).

L. E. J. BROUWER

[5] Zur intuitionistischen Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. Jber. DMV 36, 127—129 (1927).

L. E. J. BROUWER

[6] Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? Math. Ann. 83, 201—210 (1921).

L. E. J. BROUWER

[7] Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. I. Math. Ann. 93, 244—257 (1924).

L. E. J. BROUWER

[8] Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. II. Math. Ann. 95, 453—473 (1925).

L. E. J. BROUWER

[9] Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. III. Math. Ann. 96, 451—488 (1926—27).

L. E. J. BROUWER

[10] Über Definitionsbereiche von Funktionen. Math. Ann. 97, 60—75 (1926—27).

L. E. J. BROUWER

[11] Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes. Proc. Akad. Amsterdam 29, 855—864 (1926).

L. E. J. BROUWER

[12] Richtlijnen der intuitionistische wiskunde. Proc. Akad. Amsterdam 50, 339 (1947).

L. E. J. BROUWER

[13] Historical background, principles and methods of intuitionism. South Afr. J. Sc. 49, 139—146 (1952).

L. E. J. BROUWER

[14] Points and spaces. Can. J. Math. 6, 1—17 (1954).

A. HEYTING

[15] Intuitionism, an introduction. Amsterdam: North-Holland 1966.

ASCHWINIEKUMAR

[16] Hilbert spaces in intuitionism — Hilbertaj spacoj en intuiciismo. Dissertation. Amsterdam, 1966.

C. G. GIBSON

[17] The Radon integral in intuitionism. Dissertation. Amsterdam, 1967.

A. S. TROELSTRA

[18] Intuitionistic general Topology. Dissertation. Amsterdam, 1966.

A. S. TROELSTRA

[19] Intuitionistic continuity. Nieuw Archief voor Wiskunde (3) 15, 2—6 (1967).

(Oblatum 18—2—69)

Indian Institute of Technology
Kanpur, U.P., India