FRITZ HOMAGK

Ein intuitionistischer Beweis für den Graphensatz von D. Koenig

Compositio Mathematica, tome 21, nº 3 (1969), p. 292-294
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_3_292_0>

COMPOSITIO MATHEMATICA, Vol. 21, Fasc. 3, 1969, pag. 292-294
Wolters-Noordhoff Publishing
Printed in the Netherlands

Ein intuitionistischer Beweis für den Graphensatz von D. Koenig

von

Fritz Homagk

Definitionen:

A) Eine nicht leere, durch eine entscheidbare Relation "$<$" irreflexiv halbgeordnete Spezies G heiße Koenigscher Graph oder Baum, wenn folgende Kriterien erfüllt sind:

1. G enthält genau ein Anfangselement a_0, so daß für alle anderen Elemente x die Beziehung $a_0 < x$ gilt. Jedes Element x hat genau einen unmittelbaren Vorgänger y, so daß $y < x$ gilt und aus $z < x$ stets $z < y$ oder $z = y$ folgt.

2. Unvergleichbare (voneinander verschiedene) Elemente haben auch nur unvergleichbare voneinander verschiedene Nachfolger, d.h. gelten die Beziehungen $x < x_1$ und $y < y_1$, aber weder $x < y$ noch $y < x$ noch $x = y$, so gilt weder $x_1 < y_1$ noch $y_1 < x_1$ noch $x_1 = y_1$.

3. Jedes Element hat endlich viele oder gar keine unmittelbaren Nachfolger, d.h. für jedes Element x ist die Spezies der Elemente y, für die aus $x < z$ stets $y \leqq z$ folgt, endlich. ($y \leqq z$ heiße: $y < z$ oder $y = z$.)

4. Alle Ketten von G besitzen eine endliche Länge. (Eine durch die Relation "$<$" geordnete Teilspezies K von G mit genau einem Anfangselement k_0 heiße Kette, falls sie mit je zwei Elementen x und y auch alle Elemente z von G mit $x < z$ und $z < y$ enthält. [1])

B) Elemente eines Baums heißen ranggleich, wenn sie gleich viele Vorgänger besitzen. Der Rang eines Elementes x sei die Anzahl seiner Vorgänger, d.h. die Anzahl derjenigen Elemente z, für die $z < x$ gilt.

C) Ein Baum heiße geordnet, falls es für jede natürliche Zahl

[1] Vgl. D. Koenig, "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe", Leipzig 1936.

n eine irreflexive Wohlordnungsrelation "$\prec_n$" der Spezies der Elemente des Ranges n mit folgender Eigenschaft gibt: Stehen ranggleiche Elemente x und y in der Relation $x \prec_n y$ und gilt für Elemente x_1 und y_1 des Ranges n_1 $x < x_1$ und $y < y_1$, so gilt $x_1 \prec_{n_1} y_1$.

(Offenbar kann jeder Koenigsche Graph schrittweise zu einem geordneten Baum gemacht werden.)

Satz. Jeder geordnete Koenigsche Graph enthält mindestens eine Kette maximaler endlicher Länge.

Beweis. G_0 sei ein geordneter Koenigscher Graph. Zu diesem bilde man die Folge $(G_n)_{n=0;1;2;\cdots}$ von Teilgraphen, so daß gilt:

1. Gibt es Elemente des Ranges n in G_n, so soll G_{n+1} auf folgende Weise aus G_n entstehen:

Bis auf das kleinste bezüglich "$\prec_n$" werden alle vorhandenen Endelemente des Ranges n in G_n weggelassen, (d.h. nur solche Elemente, welche in G_n keine Nachfolger bezüglich "$<$" haben, insofern mindestens zwei vorhanden sind). Enthält G_n Elemente des Ranges $n+1$, wird auch dieses kleinste Endelement weggelassen. Weiterhin läßt man alle Elemente des Ranges $n-1$ weg, welche nach dem ersten Schritt Endelemente geworden sind. Danach streicht man alle Elemente des Ranges $n-2$ die durch die angegebenen Streichungen Endelemente geworden sind. Diese Streichung der Endelemente soll sukzessive für alle Ränge $n-m$ $(m = 1; 2; \cdots; n-1)$ durchgeführt werden. G_{n+1} sei der auf diese Weise entstehende Teilgraph.

2. Gibt es keine Elemente des Ranges n in G_n, so soll G_{n+1} mit G_n identisch sein.

Die Teilgraphen G_n sind offenbar entscheidbare Teilmengen von G_0, da die Anzahl der jeweils auszuführenden Konstruktionsschritte endlich ist.

Es soll gezeigt werden, daß der gemeinsame Durchschnitt K aller Teilgraphen der Folge $(G_n)_{n=1;2;\cdots}$ eine Kette maximaler Länge ist.

1. K enthält a_0 als einzigen Anfangspunkt. K ist also nicht leer.

2. Da man bei jedem Schritt nur Endelemente sukzessive wegläßt, muß mit jedem verbleibenden Element auch jeder Vorgänger in K liegen.

3. Jedes Element von K hat höchstens einen unmittelbaren Nachfolger.

(Hätte ein Element p in K die beiden voneinander verschiedenen unmittelbaren Nachfolger x und y, so betrachte man die folgenden in K enthaltenen Ketten:

Die von a_0 über p und x laufende Kette K', die aus den bezüglich "$\prec_r$" kleinsten in K enthaltenen Elementen eines jeden Ranges r (welcher größer als der Rang von x ist) besteht, und die von a_0 über p und y laufende Kette K'', die des weiteren aus den bezüglich "$\prec_r$" kleinsten Nachfolgern von y eines jeden Ranges r, der größer der Rang von y ist, besteht, welche in K liegen.

Nach Voraussetzung hätten beide Ketten endliche Längen l' bzw. l''. Ist m der Rang von x und y, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Beziehung $x \prec_m y$ gilt. Wäre nun l'' kleiner oder gleich l', so würde das Endelement von K'' nicht mehr in $G_{l'}$, also nicht in K liegen. Wäre l' kleiner als l'', so würde das Endelement von K' nicht mehr in $G_{l''}$, also nicht mehr in K liegen. Da nach Definition von K' und K'' beide Endelemente zu K gehören müßten, wäre dies ein Widerspruch. Daher kann kein Verzweigungselement p in K existieren.)

Die auf K eingeschränkte, entscheidbare Halbordnungsrelation "$<$" ist also eine Ordnung. Da K mit je zwei Elementen offenbar auch alle dazwischen liegenden enthält, ist K eine Kette.

K muß aber dann nach Voraussetzung eine endliche Länge l haben. Gäbe es in G_0 eine Kette H, deren Länge die von K überträfe, würde G_{l+1} nicht das letzte Element von K enthalten, da dieses den Rang $l-1$ hat und die Spezies der Elemente des Ranges l nicht leer wäre. Dies stünde im Widerspruch zur Definition von K.

K ist daher eine Kette maximaler Länge in G_0.

Anmerkung:

Dieser Beweis des Graphensatzes von D. Koenig macht keinen Gebrauch von dem allgemeinen logischen Prinzip des "tertium non datur" oder gleichwertigen Sätzen bzw. Regeln der Logik. Der Satz stellt jedoch kein Analogon zum Theorem über finite Spreads (Vgl. A. Heyting, "Intuitionism. Studies in Logic", Amsterdam 1956) dar.

(Oblatum 15–10–68)

Berlin