COMPOSITIO MATHEMATICA

U. GÜNTZER

Strikt konvergente Laurent-Reihen über nicht-archimedisch normierten vollständigen Ringen

Compositio Mathematica, tome 21, nº 1 (1969), p. 21-34
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1969__21_1_21_0>

Strikt konvergente Laurent-Reihen über nicht-archimedisch normierten vollständigen Ringen

von

U. Güntzer

Die Theorie der Algebra T_n von strikt konvergenten Potenzreihen in n Unbestimmten über einem nichtarchimedisch bewerteten vollständigen Körper k ist in jüngster Zeit vor allem durch die Arbeiten von Tate [6], Grauert und Remmert [3] [1] und Nastold [4] geschaffen und ausgebaut worden.

Es empfiehlt sich, etwas allgemeiner anzufangen und als Koeffizientenbereich einen vollständigen normierten Ring zu Grunde zu legen. Neben dem Vorteil, daß man eine grössere Kategorie betrachtet, die z.B. Ringe mit ideal-adischer Topologie enthält, erreicht man so, daß man Information nicht nur über T_n, sondern auch über den Ring $\mathring{T}_n$ der potenzbeschränkten Reihen von T_n erhält. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Verfahren nicht für Potenzreihen, sondern gleich für Laurent-Reihen durchgeführt und insbesondere bewiesen, daß der Ring der strikt konvergenten Laurent-Reihen in n Veränderlichen mit Koeffizienten aus k faktoriell ist (Satz 9). Die entsprechenden Aussagen für Potenzreihen erhält man durch geringfügige Abänderungen und Vereinfachungen der Beweise.

In § 1 wird zunächst ein Hensel-Lemma bewiesen, das es gestattet, wesentliche Informationen über die Algebra der Laurent-Reihen an einer viel einfacheren Polynomalgebra abzulesen. Als direktes Korollar ergibt sich der Weierstrasssche Vorbereitungssatz; wie in [5] erhält man hieraus auch die Weierstrasssche Formel.

Damit man wie im klassischen Fall die Kraft der Weierstrassschen Formel wirklich ausnützen kann, um Endlichkeits- und Faktorialitätsaussagen abzuleiten, muß man sich der Existenz hinreichend vieler als Weierstrass-Divisoren geeigneter Reihen

[1] Herrn Prof. Dr. R. Remmert sei für viele Anregungen gedankt.

versichern. Dazu betrachten wir in § 2 die Kategorie der "Scherungsalgebren", d.h. Algebren R mit der Eigenschaft, daß je endlich viele Laurentreihen über R durch einen Scherungsautomorphismus simultan in geeignete Divisoren übergeführt werden. Die Einführung dieser Kategorie ermöglicht einfache Induktionsbeweise, mittels derer man erhält, daß L_n noethersch, faktoriell und Jacobsonsch ist.

1. Henselsches Lemma und Weierstrasssche Formel

Im folgenden sei R ein kommutativer Ring mit 1 versehen mit einer vollständigen nichtarchimedischen Norm $\|\ \|$; d.h. es gibt eine Abbildung $\|\ \|: R \to \boldsymbol{R}_+$ mit den Eigenschaften:

$$\|r+r^*\| \leqq \max\{\|r\|, \|r^*\|\}, \|r \cdot r^*\| \leqq \|r\| \cdot \|r^*\|$$

für alle $r, r^* \in R$, $\|1\| = 1$ und $\|r\| > 0$ für $r \neq 0$, derart daß R vollständig ist in der durch $\|\ \|$ induzierten Topologie. Dann ist auch $\mathring{R}: = \{r \in R \mid \|r\| \leqq 1\}$ ein vollständiger normierter Ring.

$R\langle X, X^{-1}\rangle$ bezeichne die Menge der strikt konvergenten Laurent-Reihen über R, d.h.

$$R\langle X, X^{-1}\rangle: = \Big\{ \sum_{-\infty<\nu<\infty} r_\nu X^\nu \mid r_\nu \in R \text{ und } r_\nu \to 0 \text{ für } |\nu| \to \infty \Big\}.$$

Offenbar ist $R\langle X, X^{-1}\rangle$ auf kanonische Weise ein R-Modul. Da R vollständig ist, läßt sich durch

$$\sum r_\nu X^\nu \cdot \sum r_\nu^* X^\nu: = \sum_\lambda \Big(\sum_{\nu+\mu=\lambda} r_\nu r_\mu^* \Big) X^\lambda$$

eine Multiplikation auf $R\langle X, X^{-1}\rangle$ definieren, so daß $R\langle X, X^{-1}\rangle$ zu einem kommutativen Oberring von R wird. (Dividiert man den Ring $R\langle X, Y\rangle$ der strikt konvergenten Potenzreihen in zwei Unbestimmten über R durch die Relation $XY = 1$, so erhält man einen zu $R\langle X, X^{-1}\rangle$ isomorphen Ring, womit die Bezeichnung $R\langle X, X^{-1}\rangle$ gerechtfertigt ist.) Durch die Festsetzung

$$\|f\|: = \max \|r_\nu\| \text{ für } f = \sum r_\nu X^\nu \in R\langle X, X^{-1}\rangle$$

wird auch $R\langle X, X^{-1}\rangle$ zu einem normierten vollständigen Ring.

Für einen beliebigen Ring S sei

$$S[X, X^{-1}]: = S[X, Y]/(XY-1) = S[X]_{\{X, X^2, \cdots\}}.$$

Für $F = \sum_{\nu=m}^n s_\nu X^\nu \in S[X, X^{-1}]$ sei m die *Ordnung* und n der *Grad* von F, falls $m \leqq n$ und $s_n, s_m \neq 0$ (in Zeichen: $m = \operatorname{or} F$ und $n = \operatorname{gr} F$). Unter der *Länge* von F wollen wir die Differenz

$l(F)\colon = \operatorname{gr} F - \operatorname{or} F$ verstehen. F heiße *biunitär*, wenn s_n und s_m Einheiten in S sind. In $S[X, X^{-1}]$ ist eine Division mit Rest durch biunitäre Elemente möglich.

Lemma 1. *G sei ein biunitäres Element von $S[X, X^{-1}]$. Dann gibt es zu jedem $F \in S[X, X^{-1}]$ eindeutig bestimmte Elemente Q und $P \in S[X, X^{-1}]$ mit:*

$$F = QG + P \text{ und } \operatorname{or} G \leqq \operatorname{or} P \leqq \operatorname{gr} P < \operatorname{gr} G.$$

Falls F und G sogar in $S[X]$ liegen und $\operatorname{or} G = 0$ *ist, sind auch Q und P aus $S[X]$.*

Zum Beweis der Existenz können wir ohne Einschränkung $\operatorname{or} G = 0$ annehmen. Sei $m\colon = \operatorname{gr} G$. Zerlegt man F in der Form $F = F_1 + F_2$, $F_1 \in S[X]$ und $F_2 \in X^{-1}S[X^{-1}]$ und dividiert man in $S[X]$ F_1 durch G mit Rest, sieht man, daß es genügt den Fall $\operatorname{gr} F \leqq -1$ zu betrachten. Dividieren wir das Polynom $F^*\colon = X^{m-1} F(X^{-1})$ durch das unitäre Polynom $G^*\colon = X^m G(X^{-1})$, so erhalten wir mühelos die gewünschte Darstellung $F = QG + P$ mit den Gradabschätzungen. Die übrigen Aussagen ergeben sich auch in einfacher Weise.

Für jede Teilmenge $S \subset R$ bezeichne S' die Menge

$$S\langle X, X^{-1}\rangle\colon = \left\{\sum r_\nu X^\nu \in R\langle X, X^{-1}\rangle \mid r_\nu \in S\right\}$$

von $R' = R\langle X, X^{-1}\rangle$. Dann beweist man ähnlich wie in [5], p. 389:

Wenn $\mathfrak{n}$ ein offenes (elementweise) topologisch nilpotentes Ideal von $\mathring{R}$ ist, so ist auch $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}\langle X, X^{-1}\rangle$ ein offenes topologisch nilpotentes Ideal von $\mathring{R}'$.

$\mathfrak{n}$ sei ein festes offenes topologisch nilpotentes Ideal von $\mathring{R}$. Dann sei $\tilde{R}\colon = \mathring{R}/\mathfrak{n}$ und $\sim\colon \mathring{R} \to \tilde{R}$ bezeichne den Restklassenepimorphismus. Die Abbildung $\sim\colon \mathring{R} \to \tilde{R}$ läßt sich (koeffizientenweise) zu einem Epimorphismus

$$\sim\colon \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle \to \tilde{R}[X, X^{-1}]$$

mit $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}\langle X, X^{-1}\rangle$ als Kern fortsetzen; also gilt:

$$\mathring{R}'/\mathfrak{n}' \cong (\mathring{R}/\mathfrak{n})[X, X^{-1}].$$

Nunmehr können wir das Henselsche Lemma für Laurentreihen beweisen.

Satz 1. *R sei ein vollständiger normierter Ring und $\mathfrak{n}$ ein offenes topologisch nilpotentes Ideal in $\mathring{R}$. Für alle $F \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ kann* *jede Zerlegung* $\tilde{F} = g \cdot h$ *mit* $g, h \in \tilde{R}[X, X^{-1}]$, g *biunitär und* $(g, h) = (1)$, *nach* $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ *geliftet werden, und zwar gibt es* $G, H \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ *mit den Eigenschaften*:

$$F = G \cdot H, \tilde{G} = g, \tilde{H} = h, G \in \mathring{R}[X, X^{-1}],$$

G biunitär und $\operatorname{gr} G = \operatorname{gr} g$, $\operatorname{or} G = \operatorname{or} g$.

Beweis. G_0 bzw. $H_0 \in \mathring{R}[X, X^{-1}]$ seien Liftungen von g bzw. h derart, daß $\operatorname{gr} G = \operatorname{gr} g$, $\operatorname{or} G = \operatorname{or} g$, $\operatorname{gr} H = \operatorname{gr} h$ und $\operatorname{or} H = \operatorname{or} h$. Nach Voraussetzung ist g biunitär. Da $\mathring{R}$ vollständig ist, liften sich Einheiten von $\tilde{R}$ in Einheiten von $\mathring{R}$; also ist auch G_0 biunitär. Sei $L: = F - G_0 H_0 \in \mathfrak{n}'$. Da $(g, h) = (1)$ gibt es $U, V \in \mathring{R}[X, X^{-1}]$ mit $M: = 1 + UG_0 + VH_0 \in \mathfrak{n}'$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $\mathfrak{a}(\varepsilon): = \{r \in R | \, ||r|| \leqq \varepsilon\} \subset \mathfrak{n}$. Da L und $M \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$, gibt es nur endlich viele Koeffizienten von L und M, die nicht in $\mathfrak{a}(\varepsilon)$ liegen; $\mathfrak{b}$ sei das von ihnen aufgespannte Ideal in $\mathring{R}$. Dann gilt: $\mathfrak{b}^\nu \to 0$ für $\nu \to \infty$. Sei $\mathfrak{r}_n: = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{a}(\varepsilon^\nu)\mathfrak{b}^{n-\nu}$ für $n \geqq 1$. Diese absteigende Folge von offenen Idealen in $\mathring{R}$ hat die Eigenschaften: 1) $\mathfrak{r}_n \cdot \mathfrak{r}_m \subset \mathfrak{r}_{n+m}$, 2) $\mathfrak{r}_n \to 0$ für $n \to \infty$, 3) $\mathfrak{r}_n \subset \mathfrak{n}$ und 4) $L, M \in \mathfrak{r}_1'$. Durch Induktion wollen wir zwei Folgen (G_ν), (H_ν), $\nu \geqq 0$, bestimmen, so daß gilt:

(a) $G_\nu \in \mathring{R}[X, X^{-1}]$, G_ν biunitär, $\operatorname{gr} G_\nu = \operatorname{gr} g$, $\operatorname{or} G_\nu = \operatorname{or} g$,
(b) $H_\nu \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$,
(c) $G_\nu - G_{\nu-1} \in \mathfrak{r}_\nu'$, $H_\nu - H_{\nu-1} \in \mathfrak{r}_\nu'$ für $\nu \geqq 1$,
(d) $G_\nu H_\nu - F \in \mathfrak{r}_{\nu+1}'$.

Unterstellen wir zunächst die Existenz zweier solcher Folgen. Dann ist (G_ν) bzw. (H_ν) eine Cauchy-Folge, die in dem vollständigen Ring $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ einen Limes G bzw. H hat. Daß G und H die im Satz behaupteten Eigenschaften haben, folgt nun leicht aus den Aussagen (a)—(d) und der Konstruktion von $\mathfrak{r}_\nu$. Wir haben also nun noch die beiden Folgen zu konstruieren. Für $\nu = 0$ erfüllen G_0 und H_0 die gestellten Forderungen. Sei nun $\nu \geqq 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung erhält man leicht $1 + UG_{\nu-1} + VH_{\nu-1} \in \mathfrak{r}_1'$ und ferner $T: = G_{\nu-1}H_{\nu-1} - F \in \mathfrak{r}_\nu'$; es gibt eine Zerlegung $T = T_1 + T_2$ mit $T_1 \in \mathfrak{r}_\nu[X, X^{-1}]$ und $T_2 \in \mathfrak{r}_{\nu+1}'$, woraus

$$T_1 + T_1 UG_{\nu-1} + T_1 VH_{\nu-1} \in \mathfrak{r}_{\nu+1}'$$

folgt. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung und des Lemmas kann man $Q, P \in \mathring{R}[X, X^{-1}]$ finden mit $T_1 V = QG_{\nu-1} + P$ und or $g \leqq$ or $P \leqq$ gr $P <$ gr g. Sei $^{-}$: $\mathring{R}[X, X^{-1}] \to (\mathring{R}/\mathfrak{r}_\nu)[X, X^{-1}]$ der kanonische Epimorphismus. Aus $0 = \bar{Q}\overline{G_{\nu-1}} + \bar{P}$ folgt nach der Eindeutigkeutsaussage des Lemmas: $Q, P \in \mathfrak{r}'_\nu$. Setzt man nun $G_\nu := G_{\nu-1} + P$ und $H_\nu := H_{\nu-1} +$ alle Terme von $T_1 U + QH_{\nu-1}$, deren Koeffizienten nicht in $\mathfrak{r}_{\nu+1}$ liegen, so rechnet man ohne große Mühe nach, daß G_ν und H_ν die gewünschten Eigenschaften haben. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Zusatz: *Falls F bereits in $\mathring{R}[X, X^{-1}]$ liegt, kann auch $H \in \mathring{R}[X, X^{-1}]$ gewählt werden.* Zum Beweis hat man sich nur zu vergewissern, daß bei dem obigen Iterationsverfahren gr H_ν und or H_ν beschränkt bleiben.

Die Voraussetzung, daß g biunitär sei, wurde beim Beweis des Henselschen Lemmas nur benutzt, um Ordnungabschätzungen zu erhalten und um auch in $\mathring{R}[X, X^{-1}]$ eine geeignete Division mit Rest durchführen zu können. Wenn man auf Terme in X mit negativen Exponenten von vornherein verzichtet, liefern dieselben Überlegungen das Henselsche Lemma für den Ring $R\langle X\rangle$ der strikt konvergenten Potenzreihen, welches sich auch in [1], III, § 4, 3 — sogar für linear topologisierte Ringe $\mathring{R}$ — findet. Das klassische Lemma für Polynome über einem diskret bewerteten Körper ist darin enthalten. Der hier dargestellte Beweis von Satz 1 ergibt sich aus der Analyse des Beweises für das klassische Lemma, wie er etwa bei v.d. Waerden, [7], 263—265, steht.

Ganz einfach erhält man nun als Korollar zu Satz 1

Satz 2. (Weierstrassscher Vorbereitungssatz für strikt konvergente Laurent-Reihen) *R sei ein vollständiger normierter Ring und $\mathfrak{n}$ ein offenes topologisch nilpotentes Ideal in $\mathring{R}$. Für alle $f \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$, für die $\tilde{f}$ biunitär in $\tilde{R}[X, X^{-1}]$ ist, gibt es ein biunitäres Polynom $\omega \in \mathring{R}[X]$ mit* gr $\omega =$ gr $\tilde{f}-$or $\tilde{f}$ *und* or $\omega = 0$ *und eine Einheit e von $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$, derart daß gilt: $f = e \cdot \omega$.*

Zum Beweis hat man nur die Zerlegung $\tilde{f} = \tilde{f} \cdot 1$ zu einer Zerlegung $f = \omega^* \cdot e^*$ in $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ zu liften. $\omega := X^{-\mathrm{or}\,\omega^*} \cdot \omega^*$ und $e := X^{\mathrm{or}\,\omega^*} \cdot e^*$ leisten das Verlangte.

Anders als in der komplexen Analysis erhält man hier aus dem Vorbereitungssatz sogar die Weierstrasssche Formel. Dabei benutzen wir eine Methode, die in [5] zum Beweis des entsprechenden Satzes für Potenzreihen erfunden wurde, in einer etwas elementareren Version.

Satz 3. *R sei ein vollständiger normierter Ring und $\mathfrak{n}$ ein offenes* *topologisch nilpotentes Ideal in* $\mathring{R}$. *Eine Division mit Rest in* $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ *durch* $g \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ *ist möglich, falls* $\tilde{g}$ *biunitär ist; und zwar gibt es zu jedem* $f \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ *eindeutig bestimmte* $q \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ *und* $r \in \mathring{R}[X]$, *so daß gilt:* $f = qg+r$ *und* $\operatorname{gr} r < gr\,\tilde{g} - \operatorname{or} \tilde{g}$.

Beweis. Auf Grund von Satz 2 dürfen wir ohne Einschränkung annehmen: $g \in \mathring{R}[X]$, $\operatorname{or} g = \operatorname{or} \tilde{g} = 0$ und $\operatorname{gr} g = \operatorname{gr} \tilde{g}$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\mathfrak{a}(\varepsilon) := \{r \in R \mid \|r\| \leqq \varepsilon\}$, ferner sei

$$\tau_n : \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle \to (\mathring{R}/\mathfrak{a}(1/n))[X, X^{-1}]$$

der Restklassenepimorphismus.

Zum Beweis der Eindeutigkeit haben wir nur zu zeigen: Aus $0 = qg+r$ und $l(r) < \operatorname{gr} \tilde{g} - \operatorname{or} \tilde{g}$ folgt $q = 0$. Wäre nun $q \neq 0$, so gäbe es $n \in \boldsymbol{N}$ mit $\tau_n(q) \neq 0$, woraus

$$l(\tau_n(qg)) \geqq l(\tau_n(g)) = l(g) > l(r) \geqq l(\tau_n(r))$$

folgte, was der Relation $qg = -r$ widerspräche. Zum Beweis der Existenz dürfen wir dieselben Annahmen über g machen wie oben. Für alle $n \in \boldsymbol{N}$ ist dann $\tau_n(g)$ biunitär vom Grad $\operatorname{gr} g$ und der Ordnung 0. Dann gibt es $q_n \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ und $r_n \in \mathring{R}[X]$ mit $\operatorname{gr} r_n < \operatorname{gr} g$ mit $\tau_n(f) = \tau_n(q_n)\tau_n(g)+\tau_n(r_n)$. Aus der Eindeutigkeit dieser Division durch $\tau_n(g)$ folgt leicht: $\|q_n - q_m\|, \|r_n - r_m\| \leqq 1/n$ für alle $m \geqq n$. Die Limiten q bzw. r der Cauchy-Folge (q_n) bzw. (r_n) haben die behaupteten Eigenschaften.

Zusatz. *Falls sogar* $f \in R[X, X^{-1}]$ *und* $g \in R[X, X^{-1}]$ *und* $l(g) = l(\tilde{g})$ *gilt, liegt auch* q *in* $R[X, X^{-1}]$. *Falls ferner* $f \in R[X]$ *und* $g \in R[X]$ *mit* $\operatorname{or} g = 0$ *erfüllt ist, gilt auch:* $q \in R[X]$.

Wie man aus den Voraussetzungen von Satz 2 und Satz 3 sieht, sind solche Reihen $g \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ als Divisoren geeignet, zu denen ein offenes topologisch nilpotentes Ideal $\mathfrak{n}$ existiert, derart daß g biunitär mod $\mathfrak{n}$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn g biunitär mod $\mathfrak{t}$ ist, wobei $\mathfrak{t}$ das offene Ideal aller topologisch nilpotenten Elemente von $\mathring{R}$ bezeichnet. Solche Reihen wollen wir $\mathfrak{t}$-biunitär nennen.

2. Faktorialitäts- und Endlichkeitsaussagen für Scherungsalgebren

I sei ein Ring versehen mit einer Bewertung $|\;|$. Ein normierter Ring R soll *normierte I-Algebra* heißen, wenn R eine I-Algebra ist und $||cr|| = |c|\ ||r||$ für alle $c \in I$ und $r \in R$ gilt. Eine vollständige normierte$I$-Algebra heiße *I-Scherungsalgebra,* wenn folgendes gilt:

(1) Für alle $f_1, \cdots, f_s \in R\langle X, X^{-1}\rangle$ gibt es einen normtreuen I-Automorphismus σ von $R\langle X, X^{-1}\rangle$, Elemente $c_1, \cdots, c_s \in I$ und t-biunitäre Reihen $g_1, \cdots, g_s \in R\langle X, X^{-1}\rangle$, so daß $\sigma(f_i) = c_i g_i$ $(i = 1, \cdots, s)$ gilt.

(2) Für alle $c \in I - \{0\}$ ist cR offen in R.

Bevor wir nichttriviale Beispiele angeben, wollen wir zeigen, wie $R\langle X, X^{-1}\rangle$ in einfacher Weise algebraische Eigenschaften von R erbt, falls R eine Scherungsalgebra ist. Da man den Übergang zum Polynomring in vielen Fällen recht gut überblickt, sind die folgenden beiden Hilfsaussagen nützlich.

Lemma 2. *g sei ein biunitäres Polynom aus $\mathring{R}[X, X^{-1}]$. Dann gilt:*

$$R\langle X, X^{-1}\rangle / gR\langle X, X^{-1}\rangle = R[X, X^{-1}]/gR[X, X^{-1}]$$

Beweis. Da R eine I-Scherungsalgebra ist, gibt es zu jedem $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle$ Elemente $c \in I$ und $f^* \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ mit $f = cf^*$ und $||f^*|| = 1$. Hieraus und aus Satz 3 erhält man, daß die Weierstrassdivision durch g nicht nur in $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ sondern auch in $R\langle X, X^{-1}\rangle$ eindeutig möglich ist. Dann aber induziert die Einbettung $R[X, X^{-1}] \to R\langle X, X^{-1}\rangle$ einen Isomorphismus zwischen $R[X, X^{-1}]/gR[X, X^{-1}]$ und $R\langle X, X^{-1}\rangle / gR\langle X, X^{-1}\rangle$.

Lemma 3. *$\mathfrak{a}$ sei ein Ideal in $R\langle X, X^{-1}\rangle$, das ein Element $c \in I - \{0\}$ enthält. Dann gibt es einen Epimorphismus*

$$\pi\colon R\langle X, X^{-1}\rangle \to (R/\mathfrak{a} \cap R)[X, X^{-1}]$$

mit $\operatorname{Ker} \pi \subset \mathfrak{a}$. *Genauer gilt:*

$$\operatorname{Ker} \pi = (\mathfrak{a} \cap R)\langle X, X^{-1}\rangle = (\mathfrak{a} \cap R)[X, X^{-1}] + cR\langle X, X^{-1}\rangle \subset \mathfrak{a}.$$

Beweis. Da cR offen ist, ist auch $\mathfrak{a} \cap R$ offen. Die Restklassenabbildung $R \to R/\mathfrak{a} \cap R$ induziert deshalb einen Epimorphismus

$$\pi\colon R\langle X, X^{-1}\rangle \to (R/\mathfrak{a} \cap R)[X, X^{-1}].$$

Offenbar ist $\operatorname{Ker} \pi = (\mathfrak{a} \cap R)\langle X, X^{-1}\rangle$. Da cR offen ist, hat man:

$$(\mathfrak{a} \cap R)\langle X, X^{-1}\rangle \subset (\mathfrak{a} \cap R)[X, X^{-1}] + (cR)\langle X, X^{-1}\rangle.$$

Aus $||cr|| = |c|\,||r||$ für alle $r \in R$ folgt $(cR)\langle X, X^{-1}\rangle = cR\langle X, X^{-1}\rangle$. Also ist

$$(\mathfrak{a} \cap R)\langle X, X^{-1}\rangle = (\mathfrak{a} \cap R)[X, X^{-1}] + cR\langle X, X^{-1}\rangle \subset \mathfrak{a}.$$

Satz 4. *$R\langle X, X^{-1}\rangle$ ist noethersch, wenn R eine noethersche I-Scherungsalgebra ist.*

Beweis. Nach dem Satz von Cohen haben wir nur zu zeigen, daß Primideale $\mathfrak{p} \neq (0)$ von $R\langle X, X^{-1}\rangle$ endlich erzeugt sind. Sei $f \in \mathfrak{p}$, $f \neq 0$; es gibt einen Automorphismus σ von $R\langle X, X^{-1}\rangle$, eine Einheit e von $R\langle X, X^{-1}\rangle$, ein biunitäres Polynom $g \in \mathring{R}[X, X^{-1}]$ und $c \in I-\{0\}$ mit $\sigma(f) = c \cdot e \cdot g$. Da es genügt, die Behauptung für das Primideal $\sigma(\mathfrak{p})$ zu zeigen, dürfen wir also annehmen: $cg \in \mathfrak{p}$. Falls $g \in \mathfrak{p}$ müssen wir nur zeigen, daß das Bild von $\mathfrak{p}$ in $R\langle X, X^{-1}\rangle/gR\langle X, X^{-1}\rangle \cong R[X, X^{-1}]/gR[X, X^{-1}]$ endlich erzeugt ist. Dies wiederum folgt unmittelbar daraus, daß mit R auch $R[X]$ und somit auch $R[X, X^{-1}]$ noethersch ist. Falls $g \notin \mathfrak{p}$, erhalten wir $c \in \mathfrak{p} \cap I$. Also können wir Lemma 3 auf das Ideal $\mathfrak{p}$ anwenden. Mit R ist auch $(R/\mathfrak{p} \cap R)[X, X^{-1}]$ noethersch; somit ist $\pi(\mathfrak{p})$ endlich erzeugt. $p_1, \cdots, p_s$ sei ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{p} \cap R$ über R. Wegen

$$\operatorname{Ker} \pi = (\mathfrak{p} \cap R)\langle X, X^{-1}\rangle = (\mathfrak{p} \cap R)[X, X^{-1}] + cR\langle X, X^{-1}\rangle$$

ist $p_1, \cdots, p_s, c$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Ker} \pi$ über $R\langle X, X^{-1}\rangle$. Deshalb ist auch $\mathfrak{p}$ endlich erzeugt.

Satz 5. *$R\langle X, X^{-1}\rangle$ ist faktoriell, wenn R eine faktorielle I-Scherungsalgebra ist.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß jedes $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle$, $f \neq 0$, sich in Primfaktoren zerlegen lässt. Da R eine I-Scherungsalgebra ist, kann man ohne Einschränkung annehmen: $f = c \cdot g$ mit $c \in I-\{0\}$ und g biunitär mod $\mathfrak{t}$. Auf Grund des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes dürfen wir ferner voraussetzen, daß g ein biunitäres Polynom aus $R[X]$ mit 1 als höchstem Koeffizienten ist. Mit R ist auch $R[X]$ faktoriell. $g = p_1 \cdots p_s$ sei die Primfaktorzerlegung von g in $R[X]$. Dabei seien $p_1, \cdots, p_s$ so gewählt, daß ihr höchster Koeffizient 1 ist, was $||p_i|| \geqq 1$ nach sich zieht. Wir wollen zeigen, daß $||\ ||$ sogar eine Bewertung ist. Zu beliebigen $f_1, f_2 \in R\langle X, X^{-1}\rangle$ gibt es einen normtreuen Automorphismus σ von $R\langle X, X^{-1}\rangle$, $c_i \in I$ und $\mathfrak{t}$-biunitäre Reihen $g_i \in R\langle X, X^{-1}\rangle$ $(i = 1, 2)$ derart, daß gilt: $\sigma(f_i) = c_i g_i$. Dann hat man:

$$\begin{aligned} ||f_1 \cdot f_2|| = ||\sigma(f_1)\sigma(f_2)|| &= ||c_1 c_2 g_1 g_2|| = |c_1 c_2| \\ &= ||\sigma(f_1)|| \cdot ||\sigma(f_2)|| = ||f_1|| \cdot ||f_2||. \end{aligned}$$

Also ist $||\ ||$ tatsächlich eine Bewertung, woraus

$$||p_1|| \cdots ||p_s|| = ||g|| = 1$$

und somit $||p_i|| = 1$ folgt. Also ist p_i für $1 \leqq i \leqq s$ ein biunitäres Primpolynom $\in \mathring{R}[X]$. Wenden wir Lemma 2 an, so sehen wir daß p_i auch in $R\langle X, X^{-1}\rangle$ prim bleibt. Nachdem also g in Primfaktoren zerlegt ist, muß noch c faktorisiert werden, falls c keine Einheit ist. $c = q_1 \cdots q_r$ sei die Primfaktorzerlegung von c in R. Zu zeigen ist wiederum nur, daß q_i auch in $R\langle X, X^{-1}\rangle$ prim bleibt für $i = 1, \cdots, r$. Da $c \in q_i R\langle X, X^{-1}\rangle$ können wir auf dieses Ideal Lemma 3 anwenden und erhalten wegen

$$(q_i R)\langle X, X^{-1}\rangle = q_i R\langle X, X^{-1}\rangle$$

und

$$q_i R\langle X, X^{-1}\rangle \cap R = q_i R$$

die Isomorphie

$$R\langle X, X^{-1}\rangle / q_i R\langle X, X^{-1}\rangle = (R/q_i R)[X, X^{-1}].$$

Mit $R/q_i R$ ist auch $(R/q_i R)[X, X^{-1}]$ ein Integritätsring. Also ist q_i prim in $R\langle X, X^{-1}\rangle$, q.e.d.

Satz 6a. *Wenn R eine Jacobsonsche I-Scherungsalgebra ist, so ist jedes reduzierte Ideal $\neq (0)$ von $R\langle X, X^{-1}\rangle$ Durchschnitt von maximalen Idealen.*

Beweis. Es genügt, die Behauptung für Primideale $\mathfrak{p}$ zu beweisen. Ferner können wir wie beim Beweis von Satz 4 annehmen: $c \cdot g \in \mathfrak{p}$, wobei g ein biunitäres Polynom $\in \mathring{R}[X]$ und c ein Element von $I - \{0\}$ ist. Falls $g \in \mathfrak{p}$ betrachte man das Primideal $\mathfrak{p}/gR\langle X, X^{-1}\rangle$ in

$$R\langle X, X^{-1}\rangle / gR\langle X, X^{-1}\rangle \cong R[X, X^{-1}]/gR[X, X^{-1}].$$

Mit R ist auch $R[X, X^{-1}]/gR[X, X^{-1}]$ Jacobsonsch. Die Darstellung von $\mathfrak{p}/gR\langle X, X^{-1}\rangle$ als Durchschnitt maximaler Ideale lässt sich nach $R\langle X, X^{-1}\rangle$ liften. Falls $g \notin \mathfrak{p}$, muß c in $\mathfrak{p}$ liegen. Also können wir Lemma 3 benutzen und sehen ein, daß $\pi(\mathfrak{p})$ Durchschnitt von maximalen Idealen ist, da ja mit R auch $(R/\mathfrak{p} \cap R)[X, X^{-1}]$ Jacobsonsch ist. Wegen Ker $\pi \subset \mathfrak{p}$ kann diese Darstellung von $\mathfrak{p}$ nach $R\langle X, X^{-1}\rangle$ geliftet werden.

Sei k ein nichtarchimedisch bewerteter vollständiger Körper und $E := \mathring{k}$ sein Bewertungsring. Für k— bzw. E-Scherungsalgebren R lässt sich das Jacobson-Radikal $\mathfrak{j}(R\langle X, X^{-1}\rangle)$ leicht beschreiben.

Satz 6b. *R sei I-Scherungsalgebra. Für $I = k$ gilt:*

$$\mathfrak{j}(R\langle X, X^{-1}\rangle) = (0).$$

Für $I = E$ besteht dagegen das Jacobson-Radikal von $R\langle X, X^{-1}\rangle$ genau aus den topologisch nilpotenten Elementen von $R\langle X, X^{-1}\rangle$.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Hilfsaussage: *Wenn*

$$\mathfrak{j}: = \mathfrak{j}(R\langle X, X^{-1}\rangle) \neq (0)$$

ist, so gibt es ein $c \in I - \{0\}$ und ein biunitäres Polynom $g \in \mathring{R}[X]$ mit $c \cdot g \in \mathfrak{j}$ und $g \notin \mathfrak{j}$. $\mathfrak{j}$ enthält nämlich eine Reihe $f \neq 0$. Da R eine I-Scherungsalgebra und $\mathfrak{j}$ invariant unter Automorphismen ist, können wir mit Hilfe des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes annehmen: $f = c \cdot g \in \mathfrak{j}$, wobei $c \in I - \{0\}$ und g ein biunitäres Polynom $\in \mathring{R}[X]$ ist. Weiter dürfen wir $\operatorname{or} g > 0$ annehmen. Wäre $g \in \mathfrak{j}$, so müsste $1+g$ Einheit in $R\langle X, X^{-1}\rangle$ und dann auch in $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ sein. Erst recht wäre dann das Bild $1+\tilde{g}$ in $(R/\mathfrak{t})[X, X^{-1}]$ Einheit. Das aber ist unmöglich, da $1+\tilde{g}$ biunitär ist und mehr als nur einen Term besitzt. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen. Aus $c \cdot g \in \mathfrak{j}$ und $g \notin \mathfrak{j}$ folgt, daß c keine Einheit sein kann. Für $I = k$ haben wir also bewiesen: $\mathfrak{j} = (0)$. Für $I = E$ sieht man leicht ein: $R\langle X, X^{-1}\rangle = \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$.

$$\mathfrak{t}' : = \mathfrak{t}\langle X, X^{-1}\rangle = \{f \in R\langle X, X^{-1}\rangle \mid \|f\| < 1\}$$

ist offenbar das Ideal der topologisch nilpotenten Elemente von $R\langle X, X^{-1}\rangle$. Enthielte $\mathfrak{j}$ eine Reihe mit $\|f\| = 1$, so könnte das Element $c \in I$, dessen Existenz in der Hilfsaussage garantiert wird, mit Betrag 1 gewählt werden. c wäre also Einheit in I, womit wir einen Widerspruch erzielt haben. Also ist $\mathfrak{j}$ in $\mathfrak{t}'$ enthalten. Um die Gleichheit der beiden Ideale zu erhalten, bemerken wir zunächst: Mit $\mathfrak{a}$ ist auch $\mathfrak{a}+\mathfrak{t}'$ ein echtes Ideal von $R\langle X, X^{-1}\rangle$. Wäre nämlich $1 \in \mathfrak{a}+\mathfrak{t}'$, so gäbe es ein $f \in \mathfrak{t}'$ mit $1+f \in \mathfrak{a}$. Da $R\langle X, X^{-1}\rangle$ vollständig ist, wäre $1+f$ Einheit. Auf Grund der Bemerkung ist $\mathfrak{t}'$ in jedem maximalen Ideal, also auch in $\mathfrak{j}$ enthalten, q.e.d.

Der folgende Satz garantiert die Existenz von hinreichend vielen Scherungsalgebren.

Satz 7. *Sei $I = k$ oder $I = E$. Dann gilt:*

(i) *I ist eine I-Scherungsalgebra.*
(ii) *Mit R ist auch $R\langle X, X^{-1}\rangle$ eine I-Scherungsalgebra.*

Um den Beweis simultan für die Fälle $I = E$ oder $I = k$ führen zu können, benutzen wir die folgende gemeinsame Eigenschaft von $I = E$ oder $I = k$: Für alle $a, b \in I$ mit $0 < |a| \leqq |b|$ ist auch $a/b \in I$. Die Aussage (i) ist sehr leicht einzusehen. Sei

$f = \sum c_\nu X^\nu \in I\langle X, X^{-1}\rangle$; ferner sei $s \in \boldsymbol{Z}$ so gewählt, daß $|c_s| = \max |c_\nu|$. Dann ist $c_s^{-1} \cdot f$ ein t-biunitäres Element, womit die Bedingung (1) aus der Definition einer Scherungsalgebra verifiziert ist. Ferner sieht man sofort, daß cI offen ist für alle $c \in I - \{0\}$, womit (i) gezeigt ist. Es ist klar, daß auch $R\langle X, X^{-1}\rangle$ eine normierte I-Algebra ist und daß $c \cdot R\langle X, X^{-1}\rangle$ offen ist für alle $c \in I - \{0\}$. Für das Ideal t der topologisch nilpotenten Elemente von R gilt: $\mathfrak{t} = \{r \in \mathring{R} \mid ||r|| < 1\}$.

Daraus erhält man sofort, daß

$$\mathfrak{t}' := \mathfrak{t}\langle X, X^{-1}\rangle = \{f \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle \mid ||f|| < 1\}$$

das Ideal der topologisch nilpotenten Elemente von $\mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle$ ist. Also haben wir nur noch zu gegebenem $f \in R\langle X, X^{-1}\rangle\langle Y, Y^{-1}\rangle$ einen normtreuen I-Automorphismus σ von $R\langle X, X^{-1}\rangle\langle Y, Y^{-1}\rangle$, eine $\mathfrak{t}'$-biunitäre Reihe $g \in \mathring{R}\langle X, X^{-1}\rangle\langle Y, Y^{-1}\rangle$ und ein Element $c \in I$ zu finden, derart daß $\sigma(f) = c \cdot g$ gilt, und uns zu vergewissern, daß die Konstruktion von σ auch noch für endlich viele $f^{(1)}, \cdots, f^{(t)}$ simultan möglich ist. Sei $f = \sum_\nu f_\nu(Y)X^\nu$ mit $f_\nu \in R\langle Y, Y^{-1}\rangle$ und $||f_\nu|| \to 0$ für $|\nu| \to \infty$. $n_1, n_2 \in \boldsymbol{Z}$ mit $n_1 \leqq n_2$ seien so gewählt, daß $||f|| = ||f_{n_1}|| = ||f_{n_2}||$ und $||f_\nu|| < ||f||$ für $\nu < n_1$ oder $\nu > n_2$ gelten. Da R eine I-Scherungsalgebra ist, gibt es einen isometrischen I-Automorphismus φ von $R\langle Y, Y^{-1}\rangle$, so daß $\varphi(f_\nu) = c_\nu \cdot g_\nu$ ist für $n_1 \leqq \nu \leqq n_2$ mit geeigneten $c_\nu \in I$ und t-biunitären $g_\nu \in \mathring{R}\langle Y, Y^{-1}\rangle$. (Auch noch für endlich viele Reihen $f^{(1)}, \cdots, f^{(s)}$ kann man simultan einen solchen Automorphismus finden.) φ lässt sich zu einem normtreuen I-Automorphismus ψ von $R\langle Y, Y^{-1}\rangle\langle X, X^{-1}\rangle$ fortsetzen durch die Definition: $\psi(\sum h_\nu X^\nu) := \sum \varphi(h_\nu)X^\nu$. Für $\nu < n_1$ oder $\nu > n_2$ gibt es $c_\nu \in I$ und $f_\nu^* \in R\langle Y, Y^{-1}\rangle$ mit $f_\nu = c_\nu \cdot f_\nu^*$ und $||f_\nu^*|| = 1$. Sei $c := c_{n_1}$. Dann existieren für alle $\nu \in \boldsymbol{Z}$ Elemente $d_\nu \in I$ mit $|d_\nu| \leqq 1$ derart, daß $c_\nu = c \cdot d_\nu$ ist; ferner gilt: $d_{n_1} = 1$, und d_{n_2} ist Einheit in I mit $|d_{n_2}| = 1$, und für $\nu < n_1$ oder $\nu > n_2$ hat man $|d_\nu| < 1$. Somit erhalten wir

$$\psi(f) = c \cdot \Big(\sum_{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} d_\nu \cdot g_\nu X^\nu + \sum_{\substack{\nu < n_1 \text{ oder} \\ \nu > n_2}} d_\nu \varphi(f_\nu^*) X^\nu \Big).$$

Zerlegt man g_ν in der Form $g_\nu = h_\nu + g_\nu^*$, wobei h_ν ein biunitäres Polynom $\in \mathring{R}[X, X^{-1}]$ und $g_\nu \in \mathfrak{t}\langle Y, Y^{-1}\rangle$ ist, so überzeugt man sich leicht, daß es genügt, einen weiteren normtreuen I-Automorphismus χ von $R\langle X, X^{-1}\rangle\langle Y, Y^{-1}\rangle$ anzugeben, der

$$h := \sum_{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} d_\nu h_\nu X^\nu$$

in ein biunitäres Element von $\mathring{R}[X, X^{-1}][Y, Y^{-1}]$ überführt.

h gestattet eine Darstellung

$$h = \sum_{\nu=n_1}^{n_2} \sum_{\mu=m_1(\nu)}^{m_2(\nu)} (r_{\nu\mu} Y^\mu) X^\nu,$$

wobei $||r_{\nu\mu}|| \leqq 1$ ist, und $r_{\nu\mu}$ Einheiten in $\mathring{R}$ sind für

$$(\nu, \mu) = (n_1, m_1(n_1)) \text{ und } (\nu, \mu) = (n_2, m_2(n_2)).$$

Sei s eine natürliche Zahl mit

$$s > 2 \max_{n_1 \leqq \nu \leqq n_2} \{|m_1(\nu)|, |m_2(\nu)|\}.$$

(Haben wir mehrere $f^{(i)}$ gegeben, muß man s so groß wählen, daß diese Bedingung simultan für alle $f^{(i)}$ erfüllt ist). Durch $\chi(X) := XY^s$, $\chi(Y) := Y$ und $\chi(r) := r$ für alle $r \in R$ wird ein Scherungs-Automorphismus von $R\langle X, X^{-1}\rangle\langle Y, Y^{-1}\rangle$ geliefert. Um einzusehen, daß $\chi(h)$ biunitär ist, bemerken wir zunächst, daß man auf Grund der Wahl von s folgende Aussage erhält: Seien (ν, μ) und $(\nu^*, \mu^*) \in \boldsymbol{Z}^2$ mit $n_1 \leqq \nu, \nu^* \leqq n_2$ und $m_1(\nu) \leqq \mu \leqq m_2(\nu)$ bzw. $m_1(\nu^*) \leqq \mu^* \leqq m_2(\nu^*)$. Ferner sei (ν, μ) lexikographisch kleiner als (ν^*, μ^*). Dann gilt: $s\nu + \mu < s\nu^* + \mu^*$. Da nun $(n_1, m_1(n_1))$ bzw. $(n_2, m_2(n_2))$ lexikographisch minimal bzw. maximal unter den fraglichen (ν, μ) sind, folgt:

$$\chi(h) = \sum_{\nu=n_1}^{n_2} \sum_{\mu=m_1(\nu)}^{m_2(\nu)} r_{\nu\mu} Y^\mu X^\nu Y^{s\nu} = (r_{n_1, m_1(n_1)} X^{n_1}) Y^{l_1} + \sum_{l_1 < \lambda < l_2} h_\lambda^* Y^\lambda + (r_{n_2, m_2(n_2)} X^{n_2}) Y^{l_2},$$

wobei $l_i := n_i + s m_i(n_i)$ für $i = 1, 2$ ist und h_λ^* geeignete Elemente von $\mathring{R}[X, X^{-1}]$ sind. Offenbar ist $\chi(h)$ biunitär in

$$(\mathring{R}[X, X^{-1}])[Y, Y^{-1}],$$

q.e.d.

k sei ein nichtarchimedisch bewerteter Körper. L_n bezeichne die Algebra der Laurent-Reihen in n Veränderlichen, die für $x \in k^n$ mit $|x_i| = 1$ für $i = 1, \cdots, n$ konvergieren, d.h.

$$L_n = \left\{ \sum_{\nu \in \boldsymbol{Z}^n} c_\nu X^\nu | c_\nu \in k \text{ und } c_\nu \to 0 \text{ für } |\nu_1| + \cdots + |\nu_n| \to \infty \right\}.$$

Da man L_n als

$$L_n = k\langle X_1, X_1^{-1}\rangle \cdots \langle X_n, X_n^{-1}\rangle$$

und

$$\mathring{L}_n := \{f \in L_n | \, ||f|| \leqq 1\}$$

durch

$$\mathring{L}_n = E\langle X_1, X_1^{-1}\rangle \cdots \langle X_n, X_n^{-1}\rangle$$

darstellen kann, erhält man durch Induktion nach n mittels der Sätze 4 bis 7 Auskunft über die Struktur von L_n und $\mathring{L}_n$:

Satz 8. *L_n ist noethersch. $\mathring{L}_n$ ist noethersch genau dann, wenn k diskret bewertet ist.*[2]

Satz 9. *L_n ist faktoriell. $\mathring{L}_n$ ist faktoriell genau dann, wenn k diskret bewertet ist.*

Zum Beweis der Sätze 8 und 9 haben wir nur noch zu zeigen, daß k diskret bewertet ist, falls $\mathring{L}_n$ noethersch oder faktoriell ist. Sei $\mathfrak{t}(L_n) := \{f \in L_n \mid \|f\| < 1\}$. Wenn $\mathfrak{t}(L_n)$ endlich erzeugt sein soll über $\mathring{L}_n$, muß k diskret bewertet sein. Jedes Element $c \in E \subset \mathring{L}_n$ mit $0 < |c| < 1$ läßt sich, falls k nicht diskret bewertet ist, in beliebig lange Produkte $c = c_1 \cdots c_m$ von Nichteinheiten $c_i \in E$ zerlegen; d.h. in diesem Fall kann L_n nicht faktoriell sein.

Satz 10. *L_n ist ein Jacobson-Ring. $\mathring{L}_n$ ist nicht Jacobsonsch; vielmehr besteht das Jacobson-Radikal von $\mathring{L}_n$ aus den topologisch nilpotenten Elementen von $\mathring{L}_n$. Für $\mathring{L}_n$ gilt aber wenigstens folgende Durchschnittsaussage: Jedes offene Primideal von $\mathring{L}_n$ ist Durchschnitt von maximalen Idealen; jedes andere Primideal $\mathfrak{p}$ besitzt eine Darstellung $\mathfrak{p} = \bigcap_i \mathfrak{m}_i \cap \mathring{L}_n$, wobei $\mathfrak{m}_i$ maximales Ideal von L_n ist.*

Aus den Sätzen 6a, 6b und 7 folgt durch Induktion sofort die erste Hälfte des Satzes. Wenn $\mathfrak{p}$ ein offenes Primideal von L_n ist, so enthält $\mathfrak{p}$ alle topologisch nilpotenten Elemente von L_n. Wie bisher sei $\mathfrak{t} := \{c \in E \mid |c| < 1\}$; dann gilt:

$$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{t}\langle X_1, X_1^{-1}\rangle \cdots \langle X_n, X_n^{-1}\rangle =: \mathfrak{t}'.$$

$\mathring{L}_n/\mathfrak{t}'$ ist kanonisch isomorph zu der affinen Algebra

$$(E/\mathfrak{t})[X, X_1^{-1}] \cdots [X_n, X_n^{-1}].$$

Also ist $\mathring{L}_n/\mathfrak{t}'$ Jacobsonsch und somit $\mathfrak{p}/\mathfrak{t}'$ Durchschnitt von maxi-

[2] Daß L_n noethersch ist, kann man natürlich auch daraus erhalten, daß L_n homomorphes Bild des noetherschen Ringes T_{2n} ist (vgl. [3]). Falls k diskret bewertet ist, kann man auch ähnlich wie in [5], Théorème 2, beweisen, daß $\mathring{L}_n$ noethersch ist. Kürzlich wurde in [2] dafür, daß jedes sog. saturierte Ideal von $\mathring{T}_n$ endlich erzeugt ist, ein Beweis angegeben, der sich wörtlich auf $\mathring{L}_n$ übertragen läßt. Daraus ergibt sich dann erst recht, daß L_n und, falls k diskret bewertet ist, auch $\mathring{L}_n$ noethersch ist.

malen Idealen. Wenn $\mathfrak{p}$ nicht offen ist, folgt $k\mathfrak{p} \cap \mathring{L}_n = \mathfrak{p}$, und $k\mathfrak{p}$ ist ein Primideal von L_n. Nämlich: Sei $f \in \mathfrak{p}$, $c \in k - \{0\}$ mit $||cf|| \leqq 1$. Wäre $cf \notin \mathfrak{p}$, so erhielte man $|c| > 1$ und damit $c^{-1} \in E$ und $c^{-1} \cdot (cf) \in \mathfrak{p}$, was $c^{-1} \in \mathfrak{p}$ nach sich ziehen würde. $\mathfrak{p}$ wäre dann offen im Widerspruch zur Voraussetzung. Aus $k\mathfrak{p} \cap \mathring{L}_n = \mathfrak{p}$ erhält man sofort durch Nachrechnen, daß $k\mathfrak{p}$ ein Primideal von L_n ist. Da L_n Jacobsonsch ist, gibt es eine Darstellung $k\mathfrak{p} = \bigcap_i \mathfrak{m}_i$ mit gewissen maximalen Idealen von L_n, womit Satz 10 bewiesen ist.

LITERATUR

N. Bourbaki

[1] Eléments de Mathématiques. Algèbre commutative III, IV. Paris, 1961.

L. Gerritzen und U. Güntzer

[2] Über Restklassennormen auf affinoiden Algebren. Inventiones math. 3 (1967), 71–74.

H. Grauert und R. Remmert

[3] Nichtarchimedische Funktionentheorie. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. Wiss. Abh. Bd. 33 (1966), 393–476.

H. J. Nastold

[4] Zur nichtarchimedischen Funktionentheorie. (erscheint demnächst).

P. Salmon

[5] Sur les séries formelles restreintes. Bull. Soc. Math. France 92 (1964), 385–410.

J. Tate

[6] Rigid analytic spaces. IHES, 1962.

B. v. d. Waerden

[7] Algebra I, 5. Auflage, Berlin 1960.

(Oblatum 19–7–67)

I. Math. Institut
44 Münster
Schlossplatz 2