COMPOSITIO MATHEMATICA

IÉGOR REZNIKOFF

Axiomatisation indépendante des ensembles dénombrables de formules en logique intuitionniste

Compositio Mathematica, tome 20 (1968), p. 170-187

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1968__20__170_0>

Axiomatisation indépendante des ensembles dénombrables de formules en logique intuitionniste

Dédié à A. Heyting à l'occasion de son $70^{\text{ième}}$ anniversaire

par

Iégor Reznikoff

"Si triste de ses faux calculs
Qu'il inscrit ses nombres à l'envers
Et s'endort".
P. Eluard (Capitale de la Douleur)

1. Introduction [1]

Ce travail est consacré à la démonstration pour la logique *intuitionniste* du résultat connu en logique classique que tout ensemble dénombrable de formules, du calcul propositionnel ou des prédicats, est équivalent à un ensemble indépendant de formules du calcul considéré [2]. Pour ce qui est de la logique classique le résultat remonte à Tarski [6], tandis que des résultats plus généraux en des sens variés ont été démontrés dans [2] et [4]. En ce qui concerne le calcul intuitionniste le premier travail concernant le problème de l'axiomatisation indépendante d'un ensemble quelconque de formules dans ce calcul se trouve dans [4] dont l'étude présente est une version améliorée (pour un résumé voir [3]).

Le raisonnement *classique*, pour. un ensemble dénombrable de formules, consiste essentiellement à remarquer que *si la suite* $A_1, A_2, \cdots$, *de formules est une chaîne stricte ascendante pour l'implication* (*et* A_1 *n'est pas valide*) *alors la suite*

[1] Je voudrais remercier ici, au nom de tous les logiciens français, M. Heyting pour l'attention qu'il a constamment donnée au développement de la Logique en France, aussi bien en venant faire des conférences à Paris qu'en faisant publier de ses ouvrages dans la langue de Pascal.

[2] Deux ensemble de formules sont dits *équivalents* si toute formule de l'un est conséquence de l'autre et inversement. Un ensemble de formules est *indépendant* si aucune de ses formules n'est conséquence des autres formules de cet ensemble.

$$A_1, A_1 \to A_2, A_2 \to A_3, \cdots$$

est une axiomatisation indépendante de la suite donnée.

La preuve qui consiste en une simple vérification, s'appuie sur le fait que classiquement on a:

$$A \to B \vdash A \tag{1}$$

seulement si A est *valide*. Ce qui n'est, en général, pas le cas en logique intuitionniste, comme on le voit en prenant par exemple, p et q étant des lettres propositionnelles, $A = p \vee (p \to q)$ et $B = q$. En effet (1) devient:

$$(p \vee (p \to q)) \to q \vdash p \vee (p \to q)$$

soit

$$(p \to q) \wedge ((p \to q) \to q) \vdash p \vee (p \to q)$$

qui est visiblement un théorème, alors que A ne l'est pas [3].

Le *résultat* intuitionniste est modifié ainsi:
Si la suite de formules de la logique intuitionniste $A_1, A_2, \cdots$ est une chaîne ascendante stricte pour l'implication, alors il existe une sous-chaîne $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots$ $(i_1 < i_2 < \cdots)$ telle que l'ensemble

$$A_{i_1}, A_{i_1} \to A_{i_2}, A_{i_2} \to A_{i_3}, \cdots$$

soit indépendant. Cet ensemble de formules donne une axiomatisation indépendante de la chaîne $A_1, A_2, \cdots$ considérée.

Comme tout ensemble dénombrable de formules est équivalent à une chaîne ascendante stricte (dénombrable ou finie) on a le résultat pour les ensembles dénombrables [4].

La démonstration présentée ici se divise en deux parties, l'une (§ 2) de caractère plus algébrique consiste à montrer que dans les calculs contenant le fragment implicationnel intuitionniste ce n'est pas l'inexistence de formules non valides vérifiant (1) (comme c'est le cas en logique classique) qui est essentielle pour la construction d'une axiomatisation indépendante mais l'inexistence de *chaînes* d'un certain type (chaînes serpents) de telles formules. La deuxième partie (§ 3) consiste alors à démontrer, à partir de

[3] On obtient aussi des formules A vérifiant (1) en utilisant la proposition suivante: Si *A est construite sur les lettres propositionnelles $p_1, \cdots, p_n$ alors $\vdash A$ en logique classique si et seulement si $A \to (\neg p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \vdash A$* intuitionnistiquement.

[4] On peut se demander dans quelle mesure l'axiomatisation indépendante peut être obtenue d'une façon effective, autrement dit si un ensemble récursif de formules est toujours équivalent à un ensemble *récursif* et indépendant, or dans le calcul intuitionniste même pour les ensembles propositionnels la réponse est négative (voir [5]).

considérations approfondies sur la structure des formules vérifiant (1), l'inexistence de telles chaînes. On se place dans la suite (ces précisions concernent le § 3) dans le calcul des prédicats avec symboles de prédicats et de variables (les symboles de fonctions ou de constantes seraient éventuellement traités comme des variables libres). Les formules sont désignées par des majuscules A, B, $\cdots$. La déduction est intuitionniste.

2. Indépendance et conditions de chaînes

Soit $B_1, B_2, \cdots$ *une chaîne ascendante* de formules pour l'implication (c'est-à-dire telle que $B_{i+1} \vdash B_i$), on dira que c'est une *chaîne serpent* si

$$(2) \qquad \vdash (B_i \to B_{i+1}) \to B_i \text{ pour } i = 1, 2, \cdots$$

PROPOSITION 1. *Une chaîne serpent stricte ne peut être équivalente à aucun ensemble indépendant.*

PREUVE. Soit $B_1, B_2, \cdots$ une chaîne serpent stricte et $\mathscr{C}$ un ensemble de formules équivalent. Soit $C_1 \in \mathscr{C}$, C_1 est conséquence de B_{i_1}. Soit B_{i_2} une autre formule de la chaîne avec $i_2 > i_1$, B_{i_2} est conséquence d'un sous-ensemble fini $\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ de $\mathscr{C}$ où $m > 1$ et les C_i sont supposés distincts. Comme $i_2 > i_1$ on a

$$\vdash (B_{i_1} \to B_{i_2}) \to B_{i_1}$$

puisque de (2) résulte que l'on a

$$\vdash (B_i \to B_j) \to B_i$$

pour tout $j > i$. Mais puisque $\vdash B_{i_1} \to C_1$ et

$$\vdash (C_1 \wedge \cdots \wedge C_m) \to B_{i_2}$$

on a *a fortiori*

$$\vdash (C_1 \to (C_1 \wedge C_2 \cdots \wedge C_m)) \to C_1,$$

soit

$$\vdash (C_1 \to (C_2 \wedge \cdots \wedge C_m)) \to C_1, \text{ d'où } C_2 \wedge \cdots \wedge C_m \vdash C_1;$$

C_1 ne figurant pas parmi $C_2, \cdots, C_m$ il en résulte que $\mathscr{C}$ n'est pas indépendant.

Remarquant que la conjonction peut être éliminée de la démonstration, on obtient la partie directe du résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Dans un calcul contenant le fragment implicationnel* *intuitionniste* [5] *il existe un ensemble dénombrable qui n'est équivalent à aucun ensemble indépendant si et seulement si il existe une chaîne serpent stricte.*

La réciproque découle des lemmes qui suivent.

LEMME 1. *Soit* $A_1, A_2, \cdots$ *une chaîne ascendante pour l'implication. Il existe une sous-chaîne* $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots$ *telle que*

$$A_{i_1}, A_{i_1} \to A_{i_2}, A_{i_2} \to A_{i_3}, \cdots \tag{3}$$

soit un ensemble indépendant si et seulement si il existe une sous-chaîne $A_{j_1}, A_{k_1}, A_{j_2}, A_{k_2}, \cdots$ *avec* $j_n < k_n \leqq j_{n+1}$ *telle que* $A_{j_n} \to A_{k_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *ne soit conséquence d'aucune formule* $A_h \to A_l$ *avec* $h \geqq k_n$.

PREUVE. Si $A_{i_1} \to A_{i_2}, A_{i_2} \to A_{i_3}, \cdots$ est un ensemble indépendant de formules on prend $A_{j_n} = A_{i_n}$ et $A_{k_n} = A_{i_{n+1}}$: si la formule $A_{j_n} \to A_{k_n}$, i.e. $A_{i_n} \to A_{i_{n+1}}$, est conséquence de $A_h \to A_l$ avec $h \geqq k_n$ alors aussi

$$\vdash (A_{i_{n+1}} \to A_l) \to (A_{i_n} \to A_{i_{n+1}})$$

et *a fortiori*

$$\vdash (A_{i_{n+1}} \to A_{i_m}) \to (A_{i_n} \to A_{i_{n+1}})$$

où m est un entier tel que $i_m > l$. D'où

$$\vdash \bigwedge_{p=n+1}^{m-1} (A_{i_p} \to A_{i_{p+1}}) \to (A_{i_n} \to A_{i_{n+1}})$$

contrairement à l'indépendance ($\bigwedge$ est la conjonction et d'une façon générale $\bigwedge_{i=1}^{n} F_i \to G$ est écrit pour $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to G$).

Inversement, l'ensemble $A_{j_2}, A_{j_2} \to A_{j_3}, A_{j_3} \to A_{j_4}, \cdots$ est indépendant si la suite des A_{j_n}, A_{k_n} vérifie les hypothèses du lemme:

a) si $\vdash \bigwedge_{2 \leqq n \leqq p} (A_{j_n} \to A_{j_{n+1}}) \to A_{j_2}$ alors

$$\vdash (A_{j_2} \to A_{j_{p+1}}) \to (A_{j_1} \to A_{j_2}),$$

et comme $k_1 \leqq j_2$,

$$\vdash (A_{j_2} \to A_{j_{p+1}}) \to (A_{j_1} \to A_{k_1})$$

contrairement à l'hypothèse sur $A_{j_n} \to A_{k_n}$.

[5] Du point de vue algébrique ce résultat est valable dans les treillis résidués (relatively pseudo-complemented) c'est-à-dire dans lesquels l'implication $a \to b = \sup_y (a \cap y \leqq b)$ est définie quels que soient a, b; autrement dit dans un cadre très large.

b) si, pour $q \geqq 2$

$$\vdash \bigwedge_{\substack{n=2 \\ n \neq q}}^{p} (A_{j_n} \to A_{j_{n+1}}) \to (A_{j_q} \to A_{j_{q+1}})$$

alors

$$\vdash \bigwedge_{q+1 \leqq n \leqq p} (A_{j_n} \to A_{j_{n+1}}) \to (A_{j_q} \to A_{j_{q+1}})$$

d'où

$$\vdash (A_{j_{q+1}} \to A_{j_{p+1}}) \to (A_{j_q} \to A_{j_{q+1}})$$

et

$$\vdash (A_{j_{q+1}} \to A_{j_{p+1}}) \to (A_{j_q} \to A_{k_q})$$

contrairement à l'hypothèse.

Il résulte de ce lemme que s'il existe une sous-chaîne $A_{j_1}, A_{k_1}, A_{j_2}, A_{k_2}, \cdots$ vérifiant les conditions du lemme alors la chaîne $A_1, A_2, \cdots$ donnée admet une axiomatisation indépendante à savoir $A_{j_2}, A_{j_2} \to A_{j_3}, \cdots$.

Corollaire. *Si pour la chaîne ascendante $A_1, A_2, \cdots$ il n'existe pas de sous-chaînes $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots$ telle que* (3) *soit un ensemble indépendant* (*donc en particulier si la chaîne n'est équivalente à aucun ensemble indépendant*) *alors il existe une sous-chaîne $A_{h_1}, A_{h_2}, \cdots$* (*stricte si $A_1, A_2, \cdots$ l'est*) *telle que*

(4) $$\vdash (A_{h_{n+1}} \to A_{h_{n+2}}) \to (A_{h_n} \to A_{h_{n+1}})$$

pour $n = 1, 2, \cdots$.

Preuve. En niant l'existence d'une sous-chaîne telle que $A_{j_1}, A_{k_1}, A_{j_2}, A_{k_2}, \cdots$ du lemme précédent il résulterait qu'à partir d'un certain p chaque $A_j \to A_k$ pour $k > j > p$ serait conséquence d'un $A_h \to A_l$ avec $l > h \geqq k$, et serait donc conséquence *a fortiori* de $A_k \to A_l$, qui est à son tour puisque $l > k > p$, conséquence d'un $A_l \to A_m$ avec $m > l$, etc. $\cdots$.

Finalement, on obtient une suite (ici $j = h_1, k = h_2, l = h_3, \cdots$) $A_{h_1} \to A_{h_2}, A_{h_2} \to A_{h_3}, \cdots$ telle que (4).

Lemme 2. *S'il existe une chaîne $A_{h_1}, A_{h_2}, \cdots$ vérifiant* (4) *alors il existe une chaîne serpent $B_1, B_2, \cdots$ et inversement* (*ces chaînes sont strictes simultanément*).

Preuve. L'implication (4) est équivalente à

$$\vdash (A_{h_{n+1}} \wedge (A_{h_n} \to A_{h_{n+1}}) \to A_{h_{n+2}}) \to (A_{h_n} \to A_{h_{n+1}})$$

qui devient

$$\vdash ((A_{h_n} \to A_{h_{n+1}}) \to (A_{h_{n+1}} \to A_{h_{n+2}})) \to (A_{h_n} \to A_{h_{n+1}})$$

et l'on prend $B_n = (A_{h_n} \to A_{h_{n+1}})$ aussi la chaîne $B_1, B_2, \cdots$ est stricte si $A_{h_1}, A_{h_2}, \cdots$ l'est. Inversement de

$$\vdash (B_{n+1} \to B_{n+2}) \to B_{n+1}$$

résulte évidemment

$$\vdash (B_{n+1} \to B_{n+2}) \to (B_n \to B_{n+1})$$

et on pose $A_{h_n} = B_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Le théorème 1 en découle, car s'il existe un ensemble dénombrable sans axiomatisation indépendante, n'étant évidemment pas équivalent à un ensemble fini il est équivalent à une chaîne ascendante infinie stricte, soit $A_1, A_2, \cdots$, qui n'est donc équivalente, non plus, à aucun ensemble indépendant; on applique alors le corollaire puis le lemme 2. De ceux-ci découle également, sous réserve qu'il n'existe pas de chaînes serpents dans les calculs intuitionnistes le résultat énoncé dans l'introduction.

3. Résultat syntaxique. Inexistence de chaînes serpents

Il reste à montrer, d'après ce qui précède, que malgré les bizarreries des treillis des calculs intuitionnistes, il n'existe pas de telles chaînes dans ces calculs. Dans la suite, comme précédemment, les majuscules A, B, $\cdots$ désignent des formules (du calcul des prédicats); Γ, Δ, $\cdots$ désigneront des suites finies de telles formules. La notion de sous-formule est prise dans son sens ordinaire (voir dans Kleene [1]).

Définition. Une formule D est une *sous-formule implicative* (s.f.i.) de la suite $F_1, \cdots, F_p$ de formules, si D est de la forme

$$D = \wedge x_1 \wedge x_2 \cdots \wedge x_m \bigwedge_{k=1}^{n} (W_k \to R_k),$$

où les W_k sont des *conjonctions* (éventuellement vides) de sous-formules des F_i et les R_k des sous-formules des F_i $(i = 1, \cdots, p)$; la suite de quantificateurs universels $(m \geqq 0)$ sera notée $\wedge x$ pour abrèger.

Remarque 1. (α) Si D est une sous-formule implicative de la suite Δ elle l'est aussi de la suite Δ, Δ' où Δ' est une suite quelconque. (β) Si D est une s.f.i. de la suite Δ, F' et si F' est une sous-formule de F, alors D est une s.f.i. de la suite Δ, F. (γ) Si B_1' et B_2' sont des s.f.i. des suites Δ_1 et Δ_2 respectivement, $B_1' \wedge B_2'$ est une sous-formule implicative de la suite Δ_1, Δ_2, à une permutation des quantificateurs universels $\wedge x$ près.

Le théorème suivant est une généralisation du résultat classique: si $A \to B \vdash C$ alors $A \to C \vdash C$, que l'on vérifie immédiatement mais qui est faux en logique intuitionniste puisque de $A \to B \vdash A$ résulterait $A \to A \vdash A$ soit $\vdash A$, alors que dans l'introduction on a vu que ce n'est pas nécessairement le cas.

THÉORÈME 2. *Si $\Gamma, A \to B \vdash C$ alors il existe une formule B' telle que*

(i) $\Gamma, A \to B' \vdash C$

(ii) $B \vdash B'$

(iii) *B' est une sous-formule implicative de la suite Γ, A, C ne contenant pas de variables libres qui ne soient libres dans B* [6].

Pour la démonstration on se place dans le système de règles de Gentzen sans règles structurales et sans coupures suivant (voir Kleene [1] p. 481).

θ est une formule ou est vide (i.e. est la constante fausse), pour le calcul des prédicats a est un terme qui ne figure libre dans la conclusion (séquence inférieure) de la règle correspondante; t est un terme (ici: variable) quelconque (libre pour x dans $F(x)$).

1) Axiome $\Delta, D \vdash D$

Règles sur le conséquent *Règles sur l'antécédent*

Calcul propositionnel

2) $\dfrac{\Delta, F \vdash H}{\Delta \vdash F \to H}$ 6) $\dfrac{\Delta, (F \to H) \vdash F \text{ et } \Delta, H, (F \to H) \vdash \theta}{\Delta, (F \to H) \vdash \theta}$

3) $\dfrac{\Delta \vdash F}{\Delta \vdash F \vee H}$ 7) $\dfrac{\Delta, F, F \wedge H \vdash \theta}{\Delta, F \wedge H \vdash \theta}$

3′) $\dfrac{\Delta \vdash H}{\Delta \vdash F \vee H}$ 7′) $\dfrac{\Delta, H, F \wedge H \vdash \theta}{\Delta, F \wedge H \vdash \theta}$

4) $\dfrac{\Delta \vdash F \text{ et } \Delta \vdash H}{\Delta \vdash F \wedge H}$ 8) $\dfrac{\Delta, F, F \vee H \vdash \theta \text{ et } \Delta, H, F \vee H \vdash \theta}{\Delta, F \vee H \vdash \theta}$

5) $\dfrac{\Delta, F \vdash}{\Delta \vdash \neg F}$ 9) $\dfrac{\Delta, \neg F \vdash F}{\Delta, \neg F \vdash \theta}$

Calcul des prédicats

10) $\dfrac{\Delta \vdash F(a)}{\Delta \vdash \wedge\, xF(x)}$ 12) $\dfrac{\Delta, \wedge\, xF(x), F(t) \vdash \theta}{\Delta, \wedge\, xF(x) \vdash \theta}$

11) $\dfrac{\Delta \vdash F(t)}{\Delta \vdash \vee\, xF(x)}$ 13) $\dfrac{\Delta, \vee\, xF(x), F(a) \vdash \theta}{\Delta, \vee\, xF(x) \vdash \theta}$.

NOTE. Dans la *séquence* $\Phi \vdash D$, Φ est *l'antécédent*, *D le conséquent*; dans la règle $\Phi' \vdash D'/\Phi \vdash D$, $\Phi' \vdash D'$ est la séquence *supérieure*, $\Phi \vdash D$ *l'inférieure*.

REMARQUE 2. Dans le système de règles considéré, les antécédents sont conservés en passant d'une séquence inférieure à une séquence supérieure: si $\Phi' \vdash D'/\Phi \vdash D$ alors $\Phi \subset \Phi'$.

PREUVE DU THÉORÈME. On procède par induction sur la longueur de la démonstration par les règles ci-dessus. Il y a 13 règles (en comptant l'axiome mais identifiant 3) et 3'), 7) et 7')) mais il y a 14 cas à considérer, la règle $\to \vdash$ pouvant être appliquée soit à une formule de Γ soit à $A \to B$.

Soient $G_1, \cdots, G_p$ les formules de la suite Γ.

Cas 1) Si $\Gamma, A \to B \vdash C$ est une *axiome* alors soit (α) un G_i de la suite Γ est C, et le résultat est indépendant de B, on prend par exemple $B' = \wedge\, x(G_1 \wedge \cdots \wedge G_p \to C)$ où $\wedge\, x$ porte sur les variables qui ne sont pas libres dans B (en fait ici B' est une tautologie); soit (β) $A \to B$ est C auquel cas B étant une sous-formule de C on prend $B' = B$.

Cas 2) $C = C_1 \to C_2$ et la règle

$$\frac{\Gamma, (A \to B), C_1 \vdash C_2}{\Gamma, (A \to B) \vdash C_1 \to C_2}$$

a été utilisée, alors par hypothèse d'induction il existe B' s.f.i. de la suite Γ, A, C_1, C_2, dont les variables libres figurent parmi celles de B, telle que $B \vdash B'$ et $\Gamma, (A \to B'), C_1 \vdash C_2$. Mais alors aussi, par la même règle, $\Gamma, (A \to B') \vdash C_1 \to C_2$, et B' vérifie (i), (ii) et d'autre part est bien de la forme voulue puisque C_1 et C_2 sont des sous-formules de $C_1 \to C_2$, et B' s.f.i. de la suite Γ, A, C_1, C_2 l'est de la suite $\Gamma, A, C_1 \to C_2$ (remarque 1 (β)).

Les cas suivants

Cas 3) $C = C_1 \vee C_2$ et règle

$$\frac{\Gamma, (A \to B) \vdash C_1}{\Gamma, (A \to B) \vdash C_1 \vee C_2}$$

(par exemple)

[6] Il résulte de (iii) que B' existe de façon effective. Notons d'autre part que, dans le sens de son contenu, le théorème peut difficilement être amélioré: en particulier B' n'est unique à l'équivalence près en aucune façon, en général il n'existe pas de formule B' minimum (la plus faible pour l'implication) ou maximum vérifiant (i)—(iii), il n'est pas possible non plus, en général, d'exiger que B' ne contienne que des variables libres de Γ, A ou C.

Cas 4) $C = \neg C_1$ et règle

$$\frac{\Gamma, (A \to B), C_1 \vdash}{\Gamma, (A \to B) \vdash \neg C_1}$$

Cas 5) Un des G_i soit $G_1 = G_1' \wedge G_2'$ et règle

$$\frac{\Gamma', G_1', G_1' \wedge G_2', (A \to B) \vdash C}{\Gamma', G_1' \wedge G_2', (A \to B) \vdash C}$$

où Γ' est la suite $G_2, \cdots, G_p$.

Cas 6) $G_1 = \neg G_1'$ et règle

$$\frac{\Gamma', \neg G_1', (A \to B) \vdash G_1'}{\Gamma', \neg G_1', (A \to B) \vdash C}$$

Cas 7) $C = \vee\, xC'(x)$ et règle

$$\frac{\Gamma, (A \to B) \vdash C'(t)}{\Gamma, (A \to B) \vdash \vee\, xC'(x)}$$

Cas 8) $G_1 = \wedge\, xG_1'(x)$ et règle

$$\frac{G_1'(t),\ \wedge\, xG_1'(x), \Gamma', (A \to B) \vdash C}{\wedge\, xG_1'(x), \Gamma', (A \to B) \vdash C}$$

(où $\Gamma' = G_2, \cdots, G_p$)

se traitent de la même façon que le *Cas* 2). On prend $B = B'$ obtenu pour la séquence supérieure (et qui existe par hypothèse d'induction), par la même règle on obtient Γ, $(A \to B') \vdash C$ et B' vérifie les conditions.

Un autre type de situation est le suivant

Cas 9) $C = C_1 \wedge C_2$ et règle

$$\frac{\Gamma, (A \to B) \vdash C_1 \text{ et } \Gamma, (A \to B) \vdash C_2}{\Gamma, (A \to B) \vdash C_1 \wedge C_2}$$

Alors par hypothèse d'induction, il existe B_1' et B_2' tel que pour $i = 1, 2$ on ait:

a) Γ, $(A \to B_i') \vdash C_i$

b) $B \vdash B_i'$ et

c) B_i' sous-formule implicative de la suite Γ, A, C_i; B_1' et B_2' ne contenant pas de variables libres ne figurant pas dans B. De a) résulte Γ, $(A \to B_1 \wedge B_2) \vdash C_1 \wedge C_2$, de b) $B \vdash B_1' \wedge B_2'$. On prend $B' = B_1' \wedge B_2'$ qui à une permutation des quantificateurs près est une s.f.i. de la suite Γ, A, C_1, C_2 et donc de la suite

$\Gamma, A, C_1 \wedge C_2$ (remarque 1 (γ) et (β)), d'autre part la condition sur les variables libres est bien vérifiée.

Les cas suivants

Cas 10) Un G_i soit $G_1 = G_1' \to G_2'$ et règle ($\to \vdash$)

$$\frac{G_1' \to G_2', \Gamma', (A \to B) \vdash G_1' \quad \text{et} \quad G_1' \to G_2', \Gamma', (A \to B), G_2' \vdash C}{G_1' \to G_2', \Gamma', (A \to B) \vdash C}$$

(Γ' est la suite $G_2, \cdots, G_p$)

Cas 11) $G_1 = G_1' \vee G_2'$ et règle

$$\frac{\Gamma', G_1', G_1' \vee G_2', (A \to B) \vdash C \quad \text{et} \quad \Gamma', G_2', G_1' \vee G_2', (A \to B) \vdash C}{\Gamma', G_1' \vee G_2', (A \to B) \vdash C}$$

se traitent de la même façon que le *Cas* 9). On obtient B_1' pour la séquence supérieure gauche et B_2' pour la droite, la démonstration s'achève en prenant $B' = B_1' \wedge B_2'$.

Considérons encore

Cas 12) $C = \wedge\, xC'(x)$ et supposons que la règle

$$\frac{\Gamma, (A \to B) \vdash C'(a)}{\Gamma, (A \to B) \vdash \wedge\, xC'(x)}$$

a été utilisée, alors c'est que a ne figure pas libre dans Γ et $(A \to B)$. D'après l'hypothèse d'induction on a $\Gamma, (A \to B') \vdash C'(a)$ avec B' ne contenant pas d'autres variables libres que celles de B, a ne figure donc pas libre dans Γ et $A \to B'$ et, par la même règle, on obtient:

$$\Gamma, (A \to B') \vdash \wedge\, xC'(x)$$

B' vérifiant (ii) et s.f.i. de $\Gamma, A, C'(a)$, donc de $\Gamma, A, \wedge\, xC'(x)$.

Cas 13) $G_1 = \vee\, xG_1'(x)$ et règle

$$\frac{G_1'(a), \vee\, xG_1'(x), \Gamma', (A \to B) \vdash C}{\vee\, xG_1'(x), \Gamma', (A \to B) \vdash C}.$$

Dans ce cas a ne figure pas libre dans Γ', $(A \to B)$, C. On achève comme au *Cas* 12).

Le dernier cas est plus délicat, et, comme on verra, essentiel pour l'analyse de la structure de B'.

Cas 14) Le schéma suivant a été utilisé (règle $\to \vdash$ sur $A \to B$):

$$\frac{\Gamma, (A \to B) \vdash A \qquad\qquad \Gamma, (B, A \to B) \vdash C}{\Gamma, (A \to B) \vdash C}$$

Alors (hypothèse de récurrence) Γ, $(A \to B_1') \vdash A$ avec $B \vdash B_1'$ et B_1' s.f.i. de la suite Γ, A ne contenant pas de variables libres ne figurant pas dans B. Mais comme de Γ, B, $(A \to B) \vdash C$ résulte $\Gamma, B \vdash C$, si l'on prend $B_2' = \wedge\, x(G_1 \wedge \cdots \wedge G_p \to C)$, ($\wedge\, x$ portant sur les variables libres ne figurant pas dans B) on a $B \vdash B_2'$ et donc $B \vdash B_1' \wedge B_2'$. D'autre part, on a aussi *a fortiori* $\Gamma, (A \to B_1' \wedge B_2') \vdash A$ et $\Gamma, B_1' \wedge B_2' \vdash C$ et donc $\Gamma, (A \to B_1' \wedge B_2') \vdash C$ (règle $\to \vdash$); on prend donc $B' = B_1' \wedge B_2'$ qui puisque B_1' et B_2' sont des s.f.i. de Γ, A et Γ, C respectivement, sans nouvelles variables libres par rapport à celles de B, est une s.f.i. de Γ, A, C, vérifiant aussi la condition sur les variables libres.

Précisions sur la forme de B' dans le cas $A \to B \vdash A$.

Examinons comment chacun des cas 1) à 14) étudiés intervient dans une preuve de $A \to B \vdash A$ à partir des règles. Dans une telle preuve, comme on le voit facilement, les conséquents ne peuvent être que des sous-formules de A ou de B. Il en résulte que, en ce qui concerne le *cas* 1) l'alternative (β) ne peut avoir lieu: si à l'extrémité d'une branche on a un axiome $\Gamma, A \to B \vdash C$ alors C n'est pas $A \to B$ et c'est une formule de Γ qui est C, aussi l'axiome Γ, $A \to B \vdash C$ est vérifié *quel que soit* B. Autrement dit l'occurence du *cas* 1) dans une preuve de $A \to B \vdash A$ n'impose aucune condition sur B.

Il en est de même de tous les *cas* 2) à 13): aucune condition nouvelle n'est imposée sur B' (ou B_1' et B_2') obtenu pour la séquence supérieure de la règle correspondante. En conclusion si dans la preuve de $A \to B \vdash A$ le *cas* 14) n'est pas utilisé cette preuve ne dépend pas de B puisque les axiomes sont valables quel que soit B et les règles qui correspondent aux cas mentionnés n'introduisent aucune condition nouvelle, en particulier on peut prendre pour B une tautologie, d'où il résulte $\vdash A$. Par contre, l'utilisation du schéma du dernier *cas* 14) (c'est-à-dire de la règle $\to \vdash$ sur $A \to B$) introduit une condition essentielle sur B et détermine B'. En effet dans ce schéma la séquence supérieure droite Γ, B, $A \to B \vdash C$ impose la condition Γ, $B \vdash C$. On devra avoir Γ_k, $B' \vdash C_k$ pour chaque fois k où le schéma se présente et il suffit, comme on l'a vu par la démonstration du théorème, si Γ_k est la suite $G_1^k, \cdots, G_{p_k}^k$ que $B' \vdash \wedge\, x(G_1^k \wedge \cdots \wedge G_{p_k}^k \to C_k)$. On prend alors $B' = \wedge\, x \bigwedge_{k=1}^n (G_1^k \wedge \cdots \wedge G_{p_k}^k \to C_k)$ si le schéma se présente n fois, $\wedge\, x$ portant sur les variables qui ne sont pas libres dans B. Donc si $B' = \wedge\, x \bigwedge_{k=1}^n (X_k \to S_k)$ les X_k sont des conjonctions de formules apparaissant dans les antécédents Γ_k, différentes de $A \to B$, et les S_k les conséquents correspondants dans les séquences inférieures du schéma du *cas* 14) chaque fois $k = 1, \cdots, n$ où il est utilisé dans la preuve de $A \to B \vdash A$ que l'on considère, tandis que le quantificateur universel porte sur les variables qui ne sont pas libres dans B. Les antécédents et conséquents dépendent naturellement de la forme de A, on s'attachera au cas où A est une s.f.i. d'une formule donnée.

NOTATION. Si B' est une formule vérifiant les conditions (i)—(iii) du théorème 2 pour $A \to B \vdash A$ (c'est-à-dire si Γ est vide et $C = A$) on notera $B' = \mu_B(A)$ ou simplement $\mu(A)$.

LEMME 3. *Soit* $A = \wedge x(W \to R)$. *Si* $A \to B \vdash A$ *alors*

$$\text{(j)} \qquad \mu(A) = \wedge x \bigwedge_{k=1}^{n} (X_k \to S_k)$$

ou les X_k *sont des conjonctions de sous-formules de* W *ou de* R *et les* S_k *des sous-formules de* A.

(jj) *De plus, si* B *contient les mêmes variables libres que* A, *alors* W *figure dans chacune des conjonctions* X_k $(k = 1, \cdots, n)$.

PREUVE. (j) D'après ce qui précède, pour connaître $\mu(A)$ il suffit de connaître les antécédents autres que $A \to B$ et les conséquents dans les séquences de la preuve de $A \to B \vdash A$ qui aboutissent à une utilisation de la règle $\to\vdash$ sur $A \to B$. En ce qui concerne les S_k l'affirmation du lemme est évidente: les conséquents sont des sous-formules de A. En ce qui concerne les X_k montrons que dans les antécédents les formules autres que $A \to B$ sont des sous-formules de W ou de R. Etudions pour cela une preuve de la séquence $(\wedge x(W \to R)) \to B \vdash \wedge x(W \to R)$. On ne peut aboutir à cette séquence que par la branche

$$\text{(1)} \qquad \cfrac{\cfrac{\overline{W(a) \quad (\wedge x(W \to R)) \to B \vdash R(a)}}{(\wedge x(W \to R)) \to B \vdash W(a) \to R(a)}\ (\vdash \to)}{(\wedge x(W \to R)) \to B \vdash \wedge x(W \to R)}\ (\vdash \wedge)$$

où a (écrit pour $a_1, \cdots, a_m$ si $\wedge x$ est écrit pour $\wedge x_1, \cdots, \wedge x_m$) n'est pas libre dans la conclusion. Les antécédents autres que $A \to B$ proviennent de $W(a)$ ou de $R(a)$. Si plus haut $\wedge x(W \to R)$ apparaît à nouveau dans le conséquent, c'est que la règle

$$\frac{\Delta, (\wedge x(W \to R)) \to B \vdash \wedge x(W \to R) \qquad \Delta, B \vdash D}{\Delta, (\wedge x(W \to R)) \to B \vdash D}$$

a été utilisée, mais en repassant à l'antécédent par les règles $\vdash \wedge$ et $\vdash \rightarrow$ comme dans (1) seules encore une fois des sous-formules de W ou R apparaîtront tandis que les séquences au-dessus de la séquence droite $\Delta, B \vdash D$ ne jouent plus aucun rôle pour l'étude de la formule $B' = \mu(A)$.

Pour (jj) remarquons que dans toutes les séquences au-dessus de la branche (1) $W(a)$ figure dans les antécédents d'après la remarque 2 (qui suit la liste des règles). Donc si $X_k = G_1^k \wedge \cdots \wedge G_{p_k}^k$, où les G_i^k $(i = 1, \cdots, p_k)$ sont les formules distinctes de $A \rightarrow B$ dans l'antécédent correspondant à l'utilisation de la règle $\rightarrow \vdash$ sur $A \rightarrow B$ qui donne la sous-formule $X_k \rightarrow S_k$ de $\mu(A)$, un des G_i^k est $W(a)$. Mais a n'étant pas libre dans B est quantifié par $\wedge\, x$ dans $\mu(A)$ comme il l'était dans $A = \wedge\, x(W \rightarrow R)$ d'après la condition sur les variables libres dans l'hypothèse. Finalement, aux seules variables liées près, W de A figure dans chacun des X_k de $\mu(A)$.

Lemme 4. *Si* $A_k \rightarrow B_k \vdash A_k$ *pour* $k = 1, \cdots, m$ *alors*

$$(\bigwedge_{k=1}^{m} A_k) \rightarrow (\bigwedge_{k=1}^{m} B_k) \vdash \bigwedge_{k=1}^{m} A_k.$$

Preuve. Il suffit de le montrer pour $m = 2$. De $A_1 \rightarrow B_1 \vdash A_1$ résulte

$$A_1 \rightarrow B_1 \wedge B_2 \vdash A_1 \tag{2}$$

et de même on a

$$A_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2 \vdash A_2. \tag{3}$$

Mais $A_1 \wedge A_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2 \vdash A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow B_1 \wedge B_2)$ d'où, à cause de (2)

$$A_1 \wedge A_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2 \vdash A_2 \rightarrow A_1,$$

de même $$A_1 \wedge A_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2 \vdash A_1 \rightarrow A_2$$

soit $A_1 \wedge A_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2 \vdash A_1 \equiv A_2$. Il en résulte que dans les hypothèses $A_1 \wedge A_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2 \vdash A_1 \vee A_2 \rightarrow B$. Or $A_1 \vee A_2 \rightarrow B$ est équivalent à $(A_1 \rightarrow B_1 \wedge B_2) \wedge (A_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2)$ qui implique, utilisant (2) et (3), $A_1 \wedge A_2$. (cqfd) [7].

[7] La proposition ne s'étend pas pour la quantification. Par exemple, de la note 3 résulte que l'on a $(p \vee \neg p) \rightarrow \neg p \vdash p \vee \neg p$ et donc

$$(P(t) \vee \neg P(t)) \rightarrow \wedge\, x \neg P(x) \vdash P(t) \vee \neg P(t)$$

pour tout t (P est un prédicat monadique) alors que

$$(\wedge\, x(P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow \wedge\, x \neg P(x)) \vdash \wedge\, x(P(x) \vee \neg P(x))$$

est indémontrable. Il résulte du lemme que l'ensemble des formules A_k telles que $A_k \rightarrow B \vdash A_k$ forme un filtre (pour B fixé).

COROLLAIRE. Soit $D = \bigwedge_{k=1}^{m} A_k$ et $D \rightarrow B \vdash D$. On peut prendre $B' = \mu(D) = \bigwedge_{k=1}^{m} \mu(A_k)$. [8]

PREUVE. Si $D \rightarrow B \vdash D$ alors $A_k \rightarrow B \vdash A_k$ pour $k = 1, \cdots, m$. Pour chaque k, d'après le théorème, il existe $B'_k = \mu(A_k)$ tel que

(4) $A_k \rightarrow B'_k \vdash A_k$

(5) $B \vdash B'_k$

(6) B'_k s.f.i. de A_k, et donc de D.

De (4) pour chaque k et du lemme résulte:

$$\bigwedge_{k=1}^{m} A_k \rightarrow \bigwedge_{k=1}^{m} B'_k \vdash \bigwedge_{k=1}^{m} A_k$$

c'est-à-dire $D \rightarrow \bigwedge_{k=1}^{m} \mu(A_k) \vdash D$; d'autre part, de (5) résulte: $B \vdash \bigwedge_{k=1}^{m} \mu(A_k)$ et de (6) que $\bigwedge_{k=1}^{m} \mu(A_k)$ conjonction de s.f.i. de D est une s.f.i. de D, $B' = \bigwedge_{k=1}^{m} \mu(A_k)$ remplit donc bien les conditions requises.

PROPOSITION 1. *Si $D \rightarrow B \vdash D$ et D est une s.f.i. d'une formule donnée D_0 alors on peut prendre pour $\mu(D)$ aussi une s.f.i. de D_0. En particulier si $D = \wedge\, x(W \rightarrow R)$ alors*

$$\mu(D) = \wedge\, x \bigwedge_{k=1}^{n} (W_k \rightarrow R_k)$$

s.f.i. de D_0 telle que si D et B ont les mêmes variables libres alors W figure dans chaque conjonction W_k.

PREUVE. Par hypothèse $D = \wedge\, x \bigwedge_{j=1}^{m} (W_j \rightarrow R_j)$ où les W_j sont des conjonctions de sous-formules de D_0 et les R_j des sous-formules de D_0. On a $D \equiv \bigwedge_{j=1}^{m} A_j$ avec $A_j = \wedge\, x(W_j \rightarrow R_j)$. D'après le corollaire $\mu(D) = \bigwedge_{j=1}^{m} \mu(A_j)$. Mais le lemme 3 donne $\mu(A_j) = \wedge\, x \bigwedge_{k=1}^{n_j} (X^j_k \rightarrow S^j_k)$ où pour $k = 1, \cdots, n_j$, X^j_k est une conjonction de sous-formules de W_j ou de R_j et donc de D_0, tandis que S^j_k est une sous-formule de A_j. Mais alors:

$$\wedge\, x(X^j_k \rightarrow S^j_k) \equiv \wedge\, x \wedge y(W^j_k \rightarrow R^j_k)$$

où W^j_k et R^j_k sont respectivement des conjonctions de sous-formules et des sous-formules de D_0. En effet, si S^j_k est une sous-formule de A_j, par exemple A_j lui-même, soit $S^j_k = \wedge\, x(W_j \rightarrow R_j)$ alors dans le calcul intuitionniste:

$$\wedge\, x(X^j_k \rightarrow S^j_k) \equiv \wedge\, x \wedge y(X^j_k \wedge W_j \rightarrow R_j)$$

[8] On vérifie que B' obtenu par les règles est équivalent à cette formule.

et $W_k^j = X_k^j \wedge W_j$ et $R_k^j = R_j$ sont bien de la forme voulue. Finalement, $\mu(A_j) \equiv \wedge\, x \bigwedge_{k=1}^{n_j} (W_k^j \rightarrow R_k^j)$ et $\mu(D)$ qui est conjonction des $\mu(A_j)$ est équivalente à une s.f.i. de D_0. La dernière partie de la proposition résulte de ce que, d'après le lemme 3 (jj) dans les conditions sur les variables libres, W_j figure dans chaque X_k^j, et donc dans chaque W_k^j pour $k = 1, \cdots, n_j$.

Corollaire final. *Dans les calculs intuitionnistes, il n'existe pas de chaînes serpents infinies strictes.*

Preuve. (Début et cas propositionnel). Supposons que l'on ait une chaîne $B_1, B_2, \cdots$ vérifiant $B_i \rightarrow B_{i+1} \vdash B_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$. On va montrer que si elle est infinie, elle ne peut être stricte. Si elle l'était, on pourrait considérer B_1 *non valide* (sinon on part de B_2). De $B_1 \rightarrow B_2 \vdash B_1$ on déduit l'existence de B_2', s.f.i. de B_1 ayant ses variables libres parmi celles de B_1, vérifiant $B_1 \rightarrow B_2' \vdash B_1$ et $B_2 \vdash B_2'$, d'où puisque $\vdash (B_2 \rightarrow B_3) \rightarrow B_2$, l'on a $\vdash (B_2' \rightarrow B_3) \rightarrow B_2'$. Il existe donc B_3', s.f.i. de B_2', tel que $\vdash (B_2' \rightarrow B_3') \rightarrow B_2'$ et $B_3 \vdash B_3'$, etc. $\cdots$. Mais B_3' étant une s.f.i. de B_2' l'est de B_1, d'après la proposition 1, puisque B_2' est une s.f.i. de B_1. Dans la chaîne serpent $B_1' = B_1, B_2', B_3', \cdots$ obtenue les B_i' seraient ainsi, de proche en proche, des s.f.i. d'une même formule B_1. Ce qui achève la démonstration dans le cas *propositionnel* puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-formules d'une formule donnée et donc un nombre fini seulement de s.f.i. (non équivalentes) d'une formule; si la chaîne était infinie, on aurait alors $B_i' \equiv B_j'$ pour $i < j$, d'où, comme $B_i' \rightarrow B_j' \vdash B_i'$, résulte $\vdash B_j'$ et par conséquent $\vdash B_1$ contrairement à l'hypothèse sur B_1.

Pour le calcul des prédicats, un examen plus approfondi est nécessaire [9]. On utilise le résultat suivant.

Proposition 2. *Si $B_1, B_2, \cdots$ est une chaîne serpent stricte construite sur une infinité de variables libres, il en existe une autre, stricte, sur un nombre fini de telles variables. Il existe donc une telle chaîne dont toutes les formules contiennent exactement les mêmes variables libres.*

Preuve. Supposons encore B_1 non valide. Soit B_p la première formule $(p \geqq 1)$ non valide contenant des variables libres, $y_1, \cdots, y_q$. Soit $C_i = B_i$ si $i = 1, \cdots, p$ et pour $i > p$, C_i la formule obtenue de B_i en y substituant à toute variable libre

[9] Il existe bien, dans le calcul des prédicats, pour une formule donnée, une infinité de s.f.i. de cette formule qui ne sont pas équivalentes, et même justement des chaînes ascendantes infinies strictes de s.f.i. d'une même formule.

distincte de $y_1, \cdots, y_q$, la variable y_1 par exemple. De $\vdash (B_i \to B_{i+1}) \to B_i$ résulte $\vdash (C_i \to C_{i+1}) \to C_i$ pour tout i. Et la chaîne des C_i est stricte, on aurait sinon $\vdash C_j$ pour un certain j, d'où $\vdash C_1$ soit $\vdash B_1$. Il existe naturellement une sous-chaîne dont toutes les formules contiennent exactement les mêmes variables libres, cette sous-chaîne est bien entendu une chaîne serpent et est stricte aussi, ce qui démontre entièrement la proposition.

Preuve du Corollaire (fin).

Soit $B_1, B_2, \cdots$ une chaîne serpent infinie où tous les B_i contiennent les mêmes variables libres: $y_1, \cdots, y_q$ (d'après la proposition 2). Et $B'_1 = B_1, B'_2, \cdots$ la chaîne serpent correspondante comme plus haut, où B'_{i+1} est obtenu à partir de $B'_i \to B_{i+1} \vdash B'_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$, soit $B'_{i+1} = \mu(B'_i)$. On a vu que les B'_i sont toutes des s.f.i. de B_1. Par la condition sur les variables libres le quantificateur universel $\wedge\, x$ aura partout la même signification, il porte sur les variables distinctes de $y_1, \cdots, y_q$. Soit:

$$B'_i = \wedge\, x \bigwedge_{j=1}^{m_i} (W^i_j \to R^i_j),$$

on peut écrire

$$B'_i \equiv \bigwedge_{j=1}^{m_i} A_{ij}, \tag{7}$$

avec

$$A_{ij} = \wedge\, x(W^i_j \to R^i_j). \tag{8}$$

Alors, par le corollaire du lemme 4,

$$B'_{i+1} = \mu(B'_i) = \bigwedge_{j=1}^{m_i} \mu(A_{ij}).$$

Mais $\mu(A_{ij})$ est donné par la proposition 1,

$$\mu(A_{ij}) = \wedge\, x \bigwedge_{k=1}^{n_{ij}} (W^{ij}_k \to R^{ij}_k)$$

où les R^{ij}_k sont des sous-formules de B_1 puisque A_{ij} est une s.f.i. de B_1 et donc $\mu(A_{ij})$ aussi. Remarquons que, toujours d'après la proposition 1, $\wedge\, x$ portant partout sur les mêmes variables, W^i_j de A_{ij} figure dans tous les W^{ij}_k, d'où

$$W^{ij}_k \vdash W^i_j. \tag{9}$$

On a donc

$$B'_{i+1} = \wedge\, x \bigwedge_{j=1}^{m_i} \bigwedge_{k=1}^{n_{ij}} (W^{ij}_k \to R^{ij}_k);$$

par suite, si conformément à (7),

$$B'_{i+1} \equiv \bigwedge_{h=1}^{m_{i+1}} A_{i+1h}$$

alors pour $h = 1, \cdots, m_{i+1}$, on a

$$A_{i+1h} = \wedge\, x(W_k^{ij} \to R_k^{ij})$$

pour un certain k et un certain j. On dira que A_{i+1h} *provient* de A_{ij}. Chaque A_{i+1h} de B'_{i+1} provient donc d'un A_{ij} de B'_i. Finalement, revenant aux notations (8) pour A_{i+1h}, c'est-à-dire notant $W_k^{ij} = W_h^{i+1}$ et $R_k^{ij} = R_h^{i+1}$, et

$$A_{i+1h} = \wedge\, x(W_h^{i+1} \to R_h^{i+1}) \tag{10}$$

on obtient par (9) que si A_{i+1h} *provient de* A_{ij} *alors*

$$W_h^{i+1} \vdash W_j^i. \tag{11}$$

Le nombre de variables libres étant borné, il y a au plus un nombre fini p de R_h^{i+1} non équivalents, puisque ce sont des sous-formules d'une même formule B_1. Soit alors la suite des $p+1$ formules $A_{1k_1} = B'_1$, $A_{2k_2}, \cdots, A_{p+1k_{p+1}}$ où $A_{i+1k_{i+1}}$ *provient* de A_{ik_i} et, d'après (7) $k_i \leqq m_i$. Avec les notations précédentes

$$A_{ik_i} = \wedge\, x(W_{k_i}^i \to R_{k_i}^i).$$

De la définition de p il résulte que deux au moins des $R_{k_i}^i$ sont équivalents aux variables liées (par $\wedge\, x$) près, soit en reécrivant ces variables:

$$R_{k_i}^i \equiv R_{k_l}^l \text{ avec } i < l \leqq p+1 \tag{12}$$

Mais de (11) résulte $W_{k_l}^l \vdash W_{k_i}^i$ soit utilisant (12)

$$W_{k_i}^i \to R_{k_i}^i \vdash W_{k_l}^l \to R_{k_l}^l$$

et d'après la signification de $\wedge\, x$,

$$\wedge\, x(W_{k_i}^i \to R_{k_i}^i) \vdash \wedge\, x(W_{k_l}^l \to R_{k_l}^l)$$

soit $A_{ik_i} \vdash A_{lk_l}$ et finalement

$$B'_i \vdash A_{lk_l}. \tag{13}$$

Maintenant si la chaîne $B_1, B_2, \cdots$ était *stricte* avec B_1 non valide alors $B'_1, B'_2, \cdots$ serait stricte. Alors de (13) il résulte que si $B'_l \equiv \bigwedge_{j=1}^{m_l} A_{lj}$ alors $m_l > 1$, et aussi que

$$B'_i \to \bigwedge_{j=1}^{m_l} A_{lj} \equiv B'_i \to \bigwedge_{1 \leqq j \neq k_l}^{m_l} A_{lj}$$

soit, puisque $B'_i \to B'_l \vdash B'_i$ (car $i < l$), l'équivalence

$$\bigwedge_{j=1}^{m_l} A_{lj} \equiv \bigwedge_{1 \leq j \neq k_l}^{m_l} A_{lj}$$

ce qui serait contradictoire si l'on avait choisi dans (7) m_i ($i = 1, \cdots, p+1$), c'est-à-dire le nombre de conjoints dans la conjonction, minimal, ce que l'on est libre de faire. La contradiction vient du fait précis que l'on vient de montrer

PROPOSITION 3. *Si, le nombre de variables libres étant borné, la formule B_1 a p sous-formules non équivalentes, alors une chaîne $B_1, B_2, \cdots, B_n$ vérifiant $B_i \to B_{i+1} \vdash B_i$ pour $i = 1, \cdots, n-1$, ne peut être stricte que si $n \leq p$.*

Par contre, il est facile de montrer qu'il existe des chaînes serpents strictes de longueur n, quel que soit n (il existe des chaînes serpents descendantes infinies).

Remarquons que tous les résultats sont valables pour les fragments implicationnels intuitionnistes (contenant $\to$), pour le § 2, ceci est mentionné explicitement, tandis que le corollaire final de ce § est *a fortiori* valable dans n'importe quel fragment.

Nous conclurons en remarquant que pour le calcul intuitionniste, le problème de l'axiomatisation indépendante est ouvert pour les ensembles de formules de cardinal non dénombrable.

BIBLIOGRAPHIE

S. KLEENE
[1] Introduction to Metamathematics, Amsterdam (1952)

I. REZNIKOFF
[2] Tout ensemble de formules de la logique classique est équivalent à un ensemble indépendant, C. R. Acad. Sc. Paris 260 p. 2385—88 (1965).

I. REZNIKOFF
[3] Sur les ensembles dénombrables de formules en logique intuitionniste, Ibid. 262 p. 415—18 (1966).

I. REZNIKOFF
[4] Thèse (polycopiée) Paris (1966).

I. REZNIKOFF
[5] Independent recursive axiomatization in intuitionistic logic. A paraître dans Algebra i Logika, Novosibirsk.

A. TARSKI
[6] *in* C. R. Soc. Sc. et L. Varsovie III, 23 (1930).

(Oblatum 3-1-'68)

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre Curie Paris — 5ème